Gewöhnliche Differentialgleichungen

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die ODEs

Es stellt sich zuerst die Frage was überhaupt ODEs sind und wozu man überhaupt lernen sollte, wie man sie löst.

1.1 Form von ODEs

Definition 1. *Liegt eine Gleichung folgender Form vor, so handelt es sich um eine ODE:*

$$F(t, x, x^{(1)}, ..., x^{(n)}) = 0$$

für $x \in C^k(\mathbb{k}), t \in \mathbb{R}, \mathbb{k}$*, Körper, und den Ableitungen von x*

$$x^{(j)} = \frac{d^{(j)}x(t)}{dt^{(j)}}, j \in \mathbb{N}.$$

1.2 Klassifikation von ODEs

Leider kann man oft zu ODEs nicht viel sagen, da sie in der Regel ziemlich kompliziert sind und oft besondere Tricks benötigen um gelöst zu werden, jedoch gibt es natürlich auch welche, die lösbar sind, und um diese zu erkennen führen wir folgende Klassifikationen ein:

Definition 2. *Eine ODE der Form* $x^{(n)}(t) + x^{(n-1)}(t) + ... + x^{(1)}(t) = g(t)$ *wird genannt*

- *Eine ODE n-ter Ordnung, wobei n hier die höchste auftretende Ableitung bezeichnet.*
- *Homogen, falls* $g(t) = 0$ *(ACHTUNG: Eine (nichtlineare) ODE heißt auch homogen, falls sie von folgender Form ist* $y'(x) = f(\frac{y}{x})$*)*
- *Linear, falls die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur linear vorkommen (also*

z.B. nicht mit einem Sinus versehen sind). $y'(x) = sin(t) + cos(y)$ ist z.B. nicht linear. (Vorsicht bei nichtlinearen ODEs kann man den Begriff der Homogenität nicht mitnehmen)

• *Autonom, falls die Funktion nicht explizit von der unabhängigen Variable abhängt. $y'(x) = y^2 + x$ ist z.B. nicht autonom, da x, die unabhängige Variable, explizit vorkommt.*

• *ODE mit konstanten Koeffizienten, falls alle Koeffizienten der gesuchten Funktion nicht variieren. $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ hat z.B. variierende Koeffizienten wegen $a(x)y(x)$.*

1.3 Einige Beispiele zu ODEs

Nun haben wir vorerst genug Theorie und wollen uns nun konkreten Beispielen widmen:

• $m \cdot \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x}) \rightarrow$ System von ODEs (x ist hier ein Vektor im $\mathbb{R}^3$), 2. Newton'sches Gesetz

• Radioaktiver Zerfall :$N \geq 0, \frac{dN}{dt} = -\lambda N$

Nun wollen wir uns ein Beispiel genauer anschauen und es analysieren und auch lösen :

Wir haben folgende ODE gegeben und wollen sie auch lösen:

$$f'(t) = \left(\frac{f(t)}{\cos(t)}\right)^2$$

.

Wie wir hier sehen bekommen wir ein Problem, wenn der $\cos(t) = 0$ ist, weshalb wir unser Intervall auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ beschränken werden, wobei wir noch $f(0) = f_0$ als Anfangswert (InitialValue) setzen.

Nun stellt sich die Frage wie wir diese Gleichung lösen können. Da es eine Differentialgleichung ist, wäre Integrieren eine Idee jedoch können wir in der Form in der wir die Gleichung jetzt haben nicht einfach losintegrieren, da die Variablen alle durcheinander gemischt sind. Um integrieren zu können, müssen wir die Gleichung erstmal umschreiben, und das machen wir indem wir durch $f(t)^2$ dividieren und so erhalten wir:

$$\frac{f'(t)}{f^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

.

Wir sehen nun dass die Gleichung zum integrieren besser aussieht, da alle $f(t)$ also die Terme die nach f integriert werden auf einer Seite, und die die nach t integriert werden, also in dem Fall $\cos^2(t)$ auf einer Seite stehen, das heißt wir haben die Variablen separiert.

Wir erhalten nun:

$$\int \frac{f'(t)}{f^2(t)} = \int \frac{1}{\cos^2(t)}$$

$$\iff \quad -\frac{1}{f(t)} = \tan(t) + c$$

.

Wir erhalten somit als allgemeine Lösung für unsere Differentialgleichung :
$f(t) = \dfrac{-1}{\tan(t) + c}$, und da wir noch unseren IV gegeben hatten, können wir das c bestimmen und erhalten:

$$f(0) = f_0 \iff c = \frac{-1}{f_0}$$

.

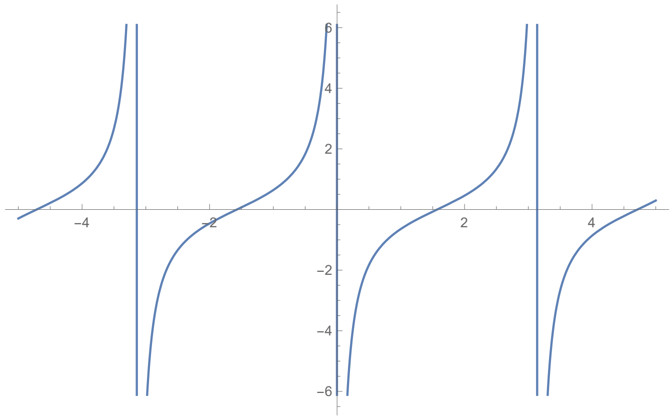

Abbildung 1: Plot für c=0

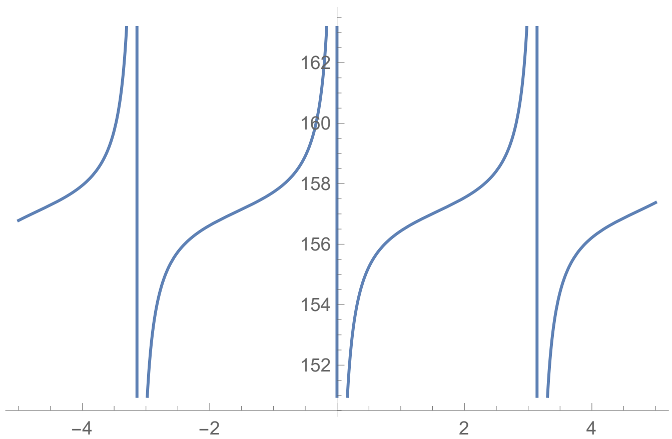

Abbildung 2: Plot für c=50π

2 Lösungsmethoden für ODEs

2.1 Trennung der Variablen

Wir haben unsere vorherige ODE mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst. Wir werden uns nun anschauen, wie diese Vorgehensweise Funktioniert, wann sie funktioniert, und werden dabei merken dass man sie eigentlich fast nie wieder brauchen wird was die komplexeren Vorgehensweisen der Natur betrifft.
Stellen wir uns zunächst die Frage, wie wir folgende Gleichung lösen können:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

.

Wir wollen diese Gleichung nun nach y auflösen und schreiben daher:
$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ es wird hier nun das dx auf die andere Seite durch "multiplizieren"gebracht. (Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass das mathematisch alles andere als korrekt ist, denn man müsste eigentlich substituieren, aber für unsere Zwecke reicht das vollkommen aus, da es uns dasselbe ergebnis bringt).
Wir erhalten nun:

$$dy = f(x) \cdot g(y)dx.$$

Nun dividieren wir durch $g(y)$ und erhalten:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

für $y \neq 0$ ($y = 0$ ist in diesem Fall eine konstante Lösung, aber uninteressant). Nun integrieren wir auf beiden Seiten, da wir eine Gleichung erhalten haben die uns das

Integrieren ermöglicht und erhalten:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Sei nun G die Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ und F die Stammfunktion von $f(x)$. Wir erhalten somit:

$$G(y) = F(x) + c$$

und durch Umformen erhalten wir unser gesuchtes y, was so aussieht:

$$y = G^{-1}(F(x) + c)$$

mit G^{-1} als Umkehrfunktion von G. Hier sieht man nun, dass das Prinzip der Trennung der Variablen darin besteht, alle Variablen einer Gattung auf eine Seite zu bringen (z.B. alle y nach links und alle x nach rechts) um das integrieren zu ermöglichen. Es folgen nun weitere Beispiele, damit das Prinzip dieser Lösungsmethode verinnerlicht wird, da seperable Gleichungen im Gegensatz zu anderen Arten angenehm zu handhaben sind.

• Gegeben sei die Gleichung $y' = g(\frac{y}{x})$.

Man kann versuchen diese Gleichung zu separieren wird dabei aber keine Freunde haben und es auch nicht schaffen. Hier muss eine Variablentransformation durchgeführt werden um die Gleichung seperabel zu machen. Hierfür sagen wir $u = \frac{y}{x}$ und $y(x) = xu(x)$. Durch Ableiten und anwenden der Produktregel erhalten wir

$$y' = x \cdot u' + u = g(\frac{y}{x}).$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Gleichung der Form:

$$u' = \frac{g(u) - u}{x}$$

Diese Gleichung ist separabel und durch lösen dieser Gleichung und Rücksubstitution kann die ursprüngliche Gleichung gelöst werden.

• Nun ein etwas längeres Beispiel mit Diskussion der gefundenen Lösungen am ende: Gegeben sei eine Gewöhnliche Differentialgleichung (welcher Art?) folgender Gestalt:

$$N'(t) = \kappa(1 - \frac{N(t)}{N_{max}})N(t), \;\; N(0) = N_0$$

mit $N(t)$ als Anzahl einer Bakterienkultur zum Zeitpunkt t, $\kappa > 0$ als Wachstumsrate, N_0 als Bakterienmenge zum Zeitpunkt $t = 0$ und N_{max} als maximale Kapazität für Bakterien.

Man löse diese ODE und disktuiere das Verhalten von $N(t)$ für $t \to \infty$.

Wir werden die Lösung in folgende Schritte gliedern:

1. Schritt : Die Gattung dieser ODE feststellen

2. Schritt : Welche Methode wenden wir an?

3. Schritt : Die Variablen Trennen

4. Schritt : Die Integrale Lösen (in diesem Fall wird das Werkzeug der Partialbruchzerlegung benötigt)

5. Schritt : Lösung formal aufschreiben, alle Fälle ausschließen und die Lösungen diskutieren.

1.) Hierbei handelt es sich um eine Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung welche separabel ist. 2.) Wir wenden hier die Trennung der Variablen-Methode an 3.)

Auf gehts mit dem separieren:

$$N'(t) = \kappa(N(t) - \frac{N(t)^2}{N_{max}})$$

Man dividiere durch $(N(t) - \frac{N(t)^2}{N_{max}})$ und erhält dadurch

$$\frac{N'(t)}{\left(N(t) - \frac{N(t)^2}{N_{max}}\right)} = \kappa.$$

Man schreibe die linke Seite um, und integriere beide Seiten. So erhält man:

$$\int \frac{N'(t)dt}{N(t)\cdot\left(1 - \frac{N(t)}{N_{max}}\right)} = \int \kappa dt.$$

Wir können die linke Seite etwas umformen und erhalten so:

$$N_{max} \int sss \frac{N'(t)dt}{N(t)\cdot\left(N_{max} - N(t)\right)} = \int \kappa dt.$$

4.) Nun muss man die Integrale lösen. Die rechte seite sollte kein Problem darstellen, die Linke benötigt jedoch die Partialbruchzerlegung, die wir nun durchführen werden.

Ziel ist es die linke Seite in folgenden Ausdruck zu bringen:

$$\frac{N'(t)}{N(t) \cdot (N_{max} - N(t))} = \frac{A}{N(t)} + \frac{B}{N(t) - N_{max}}$$

. Die Rechte Seite besteht aus Termen A und B, welche durch die beiden Nullstellen der linken Seite dividiert werden, denn falls N(t)=0 ist oder $N(t) = N_{max}$ ist, so wird der

Nenner der linken Seite 0.

Nun bringen wir die rechte Seite auf gemeinsame Nenner und erhalten dadurch:

$$\frac{A \cdot (N(t) - N_{max}) + B(N(t))}{N(t) \cdot (N_{max} - N(t))}.$$

Durch herausheben und Umformen erhalten wir:

$$\frac{(A + B)(N(t)) - A(N_{max})}{N(t) \cdot (N_{max} - N(t))}.$$

Durch Koeffizientenvergleich der rechten und linken Seiten sehen wir nun, dass: $A + B = 0$ und $-A(N_{max}) = 1$ sein muss und daher folgt daraus:

$$A = -\frac{1}{N_{max}} \text{ und } B = \frac{1}{N_{max}},$$

womit wir die Partialbruchzerlegung durchgeführt haben, welche folgendes Endergebnis liefert:

$$\frac{N'(t)}{N(t) \cdot (N_{max} - N(t))} = -\frac{1}{N_{max}N(t)} + \frac{1}{N_{max}(N(t) - N_{max})}.$$

Nun können wir die linke Seite durch den neuen Ausdruck ersetzen und erhalten dadurch:

$$\int -\frac{1}{N_{max}N(t)} + \frac{1}{N_{max}(N(t) - N_{max})} dN = \int \kappa dt.$$

Nun können wir die linke Seite in zwei Integranden aufspalten und erhalten dadurch:

$$-\frac{1}{N_{max}}\int\frac{1}{N(t)}+\frac{1}{N_{max}}\int\frac{1}{N(t)-N_{max}}=\int\kappa dt$$

Integrieren wir beide Seiten, so erhalten wir

$$-\frac{1}{N_{max}}\log(N(t))+\frac{1}{N_{max}}\log((N(t)-N_{max}))=\kappa t+c.$$

Nun ist es nur noch eine Frage des Umformens, wie wir auf unser N(t) kommen.

Führen wir nun die Äquivalenzumformungen durch, so erhalten wir als endgültige Lösung:

$$N(t)=\frac{e^{\kappa t+c}N_{max}}{1-e^{\kappa t+c}}$$

5.) Wir sehen nun, dass für $t\to\infty$ auch $N(t)\to\infty$ geht, also das Wachstum rapide zunimmt.

Das war es vorerst mit der Methode der Trennung der Variablen. Wir möchten nochmals wiederholen wann und wie man solche Gleichungen durch diese Methode löst.

Zuerst überprüft man ob diese Gleichung erster Ordnung überhaupt seperierbar ist. Ist sie es, so bringt mal alle Variablen auf eine Seite. Hat man dies getan, so integriert man beide Seiten jeweils nach der vorhandenen Variable und formt das Ergebnis auf die gewünschte Form um.

2.2 Anfangswertproblem einer ODE erster Ordnung

Wir wollen uns nun Anfangswertproblemen widmen und haben folgendes IVP gegeben:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} =: (+)$$

Weiters sagen wir, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, und $f(x_0) \neq 0$, da sonst $x(t) = x_0$ eine Lösung wäre, und das natürlich langweilig ist.

Wir nehmen nun $(+)$ und dividieren hier durch $f(x(t))$ und erhalten:

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1.$$

Nun integrieren wir beiden Seiten und erhalten dadurch:

$$dy = x'(s)ds \quad \int_0^t \frac{x'(s)}{f(x(s))} ds = t,$$

mit $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)}$.

Wir wissen, dass $F(x)$ bei $x \approx x_0$ monoton ist, und deshalb in dem Bereich invertierbar ist. Hier definieren wir uns $\phi(t) = F^{-1}(t) = x$.

Nun stellt sich uns die Frage, wie lange $\phi(t)$ nun existiert. Wir definieren uns (x_1, x_2), als das größte Intervall, auf dem $f > 0$ ist. Weiters definieren wir uns $T_1 := \lim\limits_{x \searrow x_1} F(x)$ und $T_2 = \lim\limits_{x \nearrow x_2} F(x)$.

Dann existiert $\phi(t)$ auf (T_1, T_2) und möglicherweise auch auf einem größeren Intervall.

Wir wollen nun 2 Fälle für T_2 unterscheiden:

1.Fall: $T_2 = \infty = \lim\limits_{x \nearrow x_2} \int_{x_0}^{x_2} \frac{1}{f(y)} dy \Rightarrow \frac{1}{f}$ ist nicht integrierbar.

2.Fall: $T_2 < \infty$. Dieser Fall spaltet sich nochmals in 2 Fälle auf:

Fall 2a: $x_2 = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t \to T_2} \phi(t) = x_2 = \infty$ also nicht fortsetzbar.

Fall 2b: $x_2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t \to T_2} \phi(t) = x_2 < \infty$ und $f(x_2) = 0$. Hier kann man $\phi(t)$ fortsetzen, also $\phi(t) \equiv x_2$, $t \geq T_2$, jedoch ist die Fortsetzung hier nicht immer eindeutig.

Nun widmen wir uns wieder ein paar Beispielen dazu:

Beispiel 1: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2,\ x_0 > 0$.

Wir wählen uns als Intervall, auf dem $f(x)$ monoton ist: $(x_1, x_2) = (0, \infty)$, somit erhalten wir:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y12} = \Big[- \frac{1}{y} \Big]_{x_0}^{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}.$$

Dadurch erhalten wir $(T_1, T_2) = (-\infty, \frac{1}{x_0})$.

Nun wollen wir unser $\phi(t)$ herausfinden und müssen dafür folgendes lösen:

$$t = F(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - t \quad \Rightarrow x = \phi(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

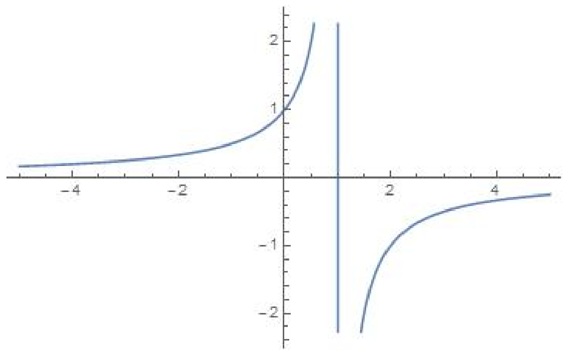

Abbildung 3: Plot für $x_0 = 1$

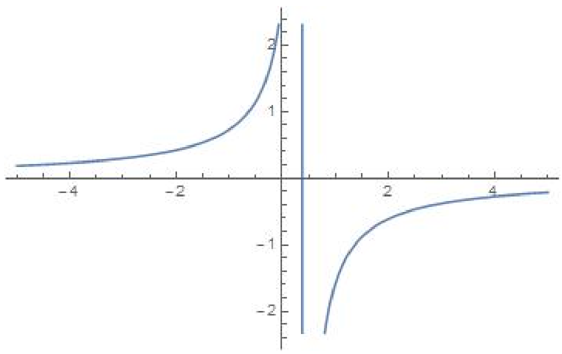

Abbildung 4: Plot für $x_0 = 10 \cdot \pi \cdot e$

Beispiel 2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{|x|}$, mit $(x_1, x_2) = (0, \infty), (T_1, T_2) = (-2\sqrt{x_0}, \infty)$ $x_0 > 0$.
$F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sqrt{|y|}} = \Big[2\sqrt{|y|}\Big]_{x_0}^{x} = 2\Big(\sqrt{|x|} - \sqrt{|x_0|}\Big) = t \Rightarrow \sqrt{|x|} = \frac{t}{2} + \sqrt{x_0}$.
Somit erhalten wir:

$$|x| = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2 = \phi(t).$$

Nochmals wie geht man solche Beispiele an?

1.) Man sucht sich das größte Intervall (x_1, x_2) in dem die Funktion monoton ist.

2.) Man berechnet sich F(x) mit der Formel $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y}$

3.) Man bestimmt mittels $F(x)$ das Intervall (T_1, T_2)

4.) Man setzt $F(x) = t$ und bestimmt damit $x = \phi(t)$.

Hier noch zum Abschluss die Plots, welche Parabeln sind:

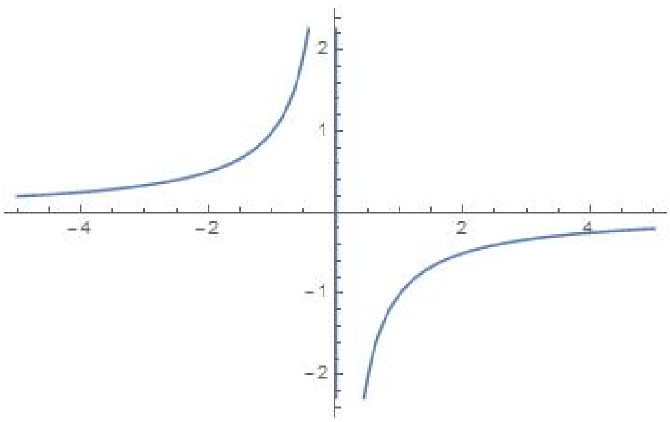

Abbildung 5: Plot für $x_0 = 1$

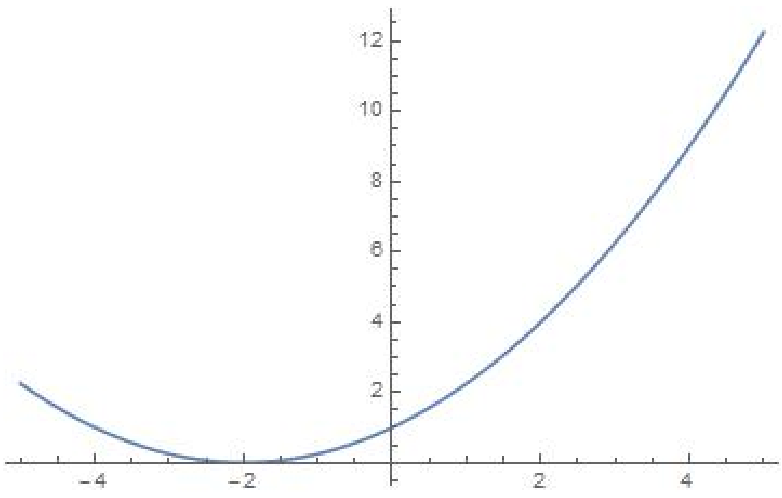

Abbildung 6: Plot für $x_0 = e^\pi$

2.3 Inhomogene ODEs und Variaion der Konstanten

2.3.1 Inhomogene ODEs

Wir erinnern uns, dass folgende ODE eine erster Ordnung ist, die zusätzlich homogen ist:

$x'(t) = a(t)x(t),\ x(0) = x_0$

Eine Lösung von dieser Gleichung erhalten wir durch folgende Formel

$A(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$. Weiters gelten folgende Eigenschaften:

$A(t, t) = 1$, $A'(t,_0) = a(t)A(t, t_0)$, und die Lösung unserer ODE lautet:

$x(t) = x_0 \cdot A(t, t_0)$.

Nun stell sich die Frage, was wir tun müssen, falls eine inhomogene ODE vorliegt, also eine der Form:

$$x(t) = a(t)x(t) + g(t),\ x(0) = x_0.$$

In diesem Falle haben wir etwas mehr zu tun, denn sowie man Gleichungssysteme löst, indem man zuerst eine spezielle Lösung sucht und sie zu jener des homogenen Systems addiert, ist das auch bei den Lösungen von Differentialgleichungen so. Die allgemeine Lösung für eine inhomogene ODE ist deshalb:

$$x(t) = x_{hom} + x_{part}.$$

Man kann auch hier wie bei der homogenen eine Lösungsformel angeben, welche wie folgt lautet:

$x(t) = x_0 A(t, t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(s)A(t, s)ds.$, wobei der zweite Summand die partikuläre Lösung repräsentiert.

Nun wollen wir der vollständigkeithalber auch zeigen, dass das wirklich eine Lösung ist, und dazu leiten wir x(t) einfach ab:

$$x'(t) = x_0 A'(t,t_0) + g(t)A(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)A'(t,s)ds$$

$$= x_0 A(t,t_0) + g(t) + \int_{t_0}^{t} g(s)a(t)A(t,s)ds$$

$$= a(t)\left(x_0 A(t,,t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)A(t,s)ds\right) + g(t) = a(t)x(t) + g(t).$$

Beispiele zum Lösen von inhomogenen ODEs werden noch viele folgen.

2.3.2 Variation der Konstanten

Wir betrachten folgende ODE:

$x'(t) = a(t)x + g(t)$

Wie schon besprochen werden wir zuerst die homogene Gleichung Lösen und dann die Variation der Konstanten anwenden um die partikuläre Lösung zu bekommen.

$x'(t) = a(t)x$ ist die homogene Gleichung

$$\Rightarrow \frac{x'(t)}{x} = a(t) \Rightarrow log(x) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds + const \Rightarrow x(t) = c \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds},$$

mit $c = e^{const}$.

Wir haben zum auffinden der homogenen Lösung die Trennung der Variablen benutzt und möchten jetzt eine partikuläre Lösung durch die Variation der Konstanten finden. Der Trick ist, wie der Name schon verrät, die konstante von einer Variablen abhängig zu machen, in diesem Fall von t. Wir erhalten somit:

Ansatz: $x(t) = c(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$, nun leiten wir $x(t)$ ab, und setzen in unsere ursprüngliche ODE ein :

$x'(t) = c'(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + c(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}a(t) = g(t) + c(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}a(t)$

Wir sehen nun, dass sich einiges rauskürzt und wir erhalten nun:

$$c'(t) = g(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

und durch integrieren erhalten wir:

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} g(u)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}du,$$

womit das unsere Partikulärlösung wäre. Da das etwas viel Theorie ist machen wir nun ein konkretes Beispiel:

Betrachte folgende inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung:

$$x'(t) = -x(t)$$

(auch wenn man hier die partikuläre Lösung sofort sieht wenden wir trotzdem die Variation der Konstanten an):

Durch Trennen der Variablen und Lösen wie gewohnt erhalten wir:

$$\int \frac{v'}{v}dv = \int -dt$$

und wir erhalten als Ergebnis für $v(t)$:

$$v(t) = c \cdot e^{-t},$$

c als Integrationskonstante.

Nun werden wir das c aus der homogenen Lösung variieren und erhalten damit:

$$v(t) = c(t) \cdot e^{-t}$$

$$c'(t) \cdot e^{-t} = v'(t) = t - v = t - c \cdot e^{-t}$$

und wir sehen, dass folgendes gilt:

$$c'(t) = te^{-t},$$

also

$$c(t) = k + (t-1)e^{t}$$

(lösen der DGL liefert das) und wir erhalten als Gesamtergebnis:

$$v(t) = c(t)e^{-t} = (k + (t-1)e^{t})e^{-t} = ke^{-t} + (t-1).$$

Ich möchte an dieser Stelle sagen, dass die Variation der Konstanten ein recht nützliches Werkzeug zum Lösen von ODEs ist, aber bei den etwas komplizierteren ODEs nicht mehr so oft angewandt wird, da diese Methode allein im Fall von Gleichungen zweiter Ordnung sehr kompliziert wird und es andere, und auch bessere Möglichkeiten zum Lösen von ODEs gibt.

2.4 Exakte Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wollen wir uns nun Gleichungen von folgender Form näher anschauen:

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

oder auch

$$P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0$$

Gleichungen dieser Form nennt man exakt, falls die sogenannte Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, welche folgendermaßen lautet:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Satz 1. *Ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, so existiert lokal immer eine Funktion $\Phi(x,y)$, sodass $P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$.*
Dann definiert die Gleichung $\Phi(x,y) = c$ für jedes c implizit eine Lösung von $P(x,y) + Q(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ in dem Gebiet $(\nabla\Phi = (\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}) \neq 0, \Phi(x,y) = c)$.

Beweis. Man zeige, dass $\Phi(x,y) = c$ zu Lösungen führt. Wir nehmen eine Funktion $x \mapsto y(x)$, sodass $\Phi(x,y(x)) = c$

$$\Longrightarrow 0 = \frac{dc}{dx} = \frac{d}{x}\Phi(x,y(x)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{dy}{dx} = P + Q \cdot \frac{dy}{dx}$$

$\square$

Wie immer in der Welt der Mathematik ist nicht alles so einfach und es gibt natürlich auch Fälle in denen Gleichungen dieser Form nicht exakt sind. Nun stellt sich die Frage natürlich ob man etwas dagegen tun kann, und die Gleichung exakt machen kann. Die Antwort auf diese Frage lautet für unsere Zwecke ja, denn man kann einen Faktor, genannt Integrierender Faktor, finden, durch den die Gleichung exakt wird. (Im Allgemeinen lautet die Antwort auch ja aber ich möchte hier schon vorweg nehmen, dass die kniffligeren exakten Differentialgleichungen alles andere als angenehme integrierende Faktoren haben für die man oft ungeheuer viel Zeit braucht um sie herauszufinden, falls überhaupt möglich). Nun werden wir uns einigen Beispielen widmen, und verschiedene Lösungsmethoden diskutieren.

Beispiel 1: Gegeben sei folgende ODE:

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0.$$

Man überprüfe ob die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, gegebenfalls finde man einen Integrierenden Faktor und löse diese Gleichung. Wie wir feststellen können, gilt hier:

$$\frac{\partial}{\partial y}Q = 2y = \frac{\partial}{\partial x}P = 2y.$$

Somit sehen wir dass die Gleichung exakt ist und können mit dem Lösen beginnen. Hier möchte ich erwähnen, dass es mehrere Vorgehensweisen gibt. Ich werde beide Methoden verwenden, welche man aber am ende anwendet ist einem selbst überlassen, bzw. von der Gestalt der Gleichung abhängig.

1. Methode (Zweimal Integrieren):

Was wissen wir über unsere gesuchte Funktion$\Phi(x, y)$? Wir wissen:

$$\Phi(x, y) = \int_0^x Q(s, y)ds = x^2 + y^2 + C(y)$$

Weiters kann man noch schreiben:

$$\Phi(x, y) = \int_0^y P(x, s)ds = y^2 + D(x)$$

, wobei $C(y)$ und $D(y)$ Funktionen abhängig von x und y sind.

Nun können wir beide Gleichungen vergleichen und bemerken, dass damit Gleichheit herrscht, dass $D(x) = x^2$ gelten muss und somit $C(y) =$ ist. Somit erhalten wir für unsere gesuchte Funktion:

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + const = c.$$

Wir definieren uns nun $c' = c - const$ und lösen nach y auf (da es in diesem Fall geht) und erhalten:

$$y = \sqrt{\frac{c'}{x} - x}.$$

Beispiel 2:

Gegeben sei Folgende Differentialgleichung:

$$xy' + 3x - 2y = 0.$$

Man löse diese Aufgabe wie zuvor.

Überprüfen wir hier die Integrabilitätsbedingung, so müssen wir feststellen, dass sie nicht erfüllt ist, da:

$$\frac{\partial}{\partial x}P = 1 \neq \frac{\partial}{\partial y}Q = -2$$

gilt.

Was mache wir nun? Wir versuchen einen Integrierenden Faktor $\mu(x)$ abhängig von x zu finden. (Er könnte auch von y abhängen, ja sogar von x und y wobei letzteres zu einer Partiellen-Differentialgleichung führen würde).

Ansatz:

$$\mu(x)xy' + (3x - 2y)\mu(x) = 0$$

sei exakt. Nun müssen wir folgende Gleichungen lösen, um $\mu(x)$ zu finden

$$\frac{\partial}{\partial x}P' = \mu'(x)x + \mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}Q' = -2\mu(x)$$

, mit Q' und P' als das neue P resp. Q.

Wir erhalten nun folgende Differentialgleichung, die wir mit trennung der Variablen lösen können:

$$\mu'(x)x = -3\mu(x)$$

und durch Lösen dieser ODE erhalten wir:

$$\mu(x) = cx^{-3}.$$

Unsere neue modifizierte Differentialgleichung (die nun exakt sein sollte) sieht nun folgendermaßen aus:

$$x^{-2}y' + 3x^{-2} - 2yx^{-3} = 0.$$

Überprüfen wir nun die Exaktheit dieser ODE erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial x}P = -2x^{-3} = \frac{\partial}{\partial y}Q = -2x^{-3}$$

und sie ist somit exakt.

Nun können wir wie oben zweimal integrieren und erhalten:

$$\Phi(x,y) = \int_0^y P(x,s)ds = x^{-2}y + D(x)$$

und

$$\Phi(x,y) = \int_0^x Q(s,y)ds = -\frac{3}{x} + x^{-2}y + C(y).$$

Wir können nun wieder beide Gleichungen vergleichen und bemerkten, dass

$$D(x) = -\frac{3}{x}$$

und das endgültige Resultat lautet:

$$\Phi(x,y) = -\frac{3}{x} + x^{-2}y = c.$$

2.5 Koordinatentransformation

Betrachten wir folgende Gleichung :

$x'(t) = f(x,t)$, so können wir diese Gleichung nicht auf Anhieb lösen, sondern müssen eine Koordinatentransformation durchführen, welche wie folgt aussieht:

Für die unabhängige Variable t setzen wir $t = \tau(s) \Longleftrightarrow s = \sigma(t)$ (durch invertieren) und für die abhängige:

$$x = \xi(y,t) \Longleftrightarrow y = \eta(x,t)$$

Wir erhalten nun durch differenzieren:

$$\frac{d}{ds}y = \frac{d}{ds}\eta(x(t(s)),t(s)) = \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{dx}{dt}\frac{d\tau}{ds} + \frac{\partial}{\partial\tau}\eta = g(y,s).$$

Nun zu einem etwas konkreteren Beispiel:

$$x'(t) = f(\frac{x}{t})$$

Wir wissen, dass diese Gleichung homogen ist, da sie diese besondere Form hat und wir müssen nun eine Variablentransformation durchführen, welche wie folgt aussieht:

$$y = \frac{x}{t}$$

und wir erhalten:

$$y'(t) = \frac{x'(t)}{t} - \frac{x}{t^2} \Longleftrightarrow t(y'(t) + y(t)) = x'(t)$$

Wir erhalten nun als End-Gleichung:

$$t(y' + y) = f(y) \Longleftrightarrow y'(t) = \frac{f(y)}{t} - y$$

Wie wir sehen ist unsere neue Gleichung nun separabel und wir können sie ganz normal durch Trennung der Variablen lösen.

Widmen wir uns nun einer speziellen Art von Differenzialgleichung, nämlich der Bernoulli-Differentialgleichung.

Wir haben folgende Differenzialgleichung und wollen sie durch eine Transformation lösen:

$$x'(t) = f(t)x + g(t)x^n$$

Wir versuchen nun Folgenden Transformationsansatz:

$$y^\beta = x,$$

und

$$\beta y^{\beta-1} y' = x'$$

und dadurch wird unsere Anfangsgleichung zu:

$$\beta y' = f(t)y + g(t)y^{\beta(n-1)+1}$$

Nun gilt es ein β zu finden, sodass $\beta(n-1) + 1 = 0$ wird, also $\beta = \dfrac{1}{1-n}$.

Somit ergibt als unsere neue, lösbare Gleichung:

$$y'(t) = (1-n)(f(t)y + g(t)).$$

Nun ein Beispiel:

$$x'(t) = tx + (2 + t^2 + 1)x^3$$

Durch transformieren (wie vorher) erhalten wir:

$$y'(t) = -2ty - 2(2t^2 + 1)$$

Diese Gleichung können wir mit den uns zur Verfügung stehenden Methoden Lösen. Wir werden zuerst die homogene Gleichung lösen, dann eine partikuläre finden, damit wir durch die Summe der beiden die allgemeine Lösung bekommen:
Homogene: Löse $y'(t) = -2ty$, was mittels Trennung der Variablen geschieht, somit erhalten wir:

$$\frac{y'}{y} = -2t \implies y = e^{-t^2} \cdot c$$

Partikuläre Lösung: Benutze den Polynomialen Ansatz: Da auf der rechten Seite ein Polynom Zweiten Grades steht und auf der Linken eine Ableitung werden als Ansatz ein Polynom Dritten Grades nehmen, da dessen Ableitung eines Zweiten Grades ist.
Versuch:

$$y_p = at^3 + bt2 + ct + d$$

Leite nun ab und setze ein

$$y_p' = 3at^2 + 2bt + ct = -2t(at^3 + bt^2 + ct + d) - 2(2t^2 + 1)$$

Nun können wir einen simplen Koeffizientenvergleich durchführen und sehen, dass wir nun als partikuläre Lösung folgendes erhalten:

$$y_p = -2t$$

Somit ist die allgemeine Lösung :

$$y(t) = c \cdot e^{-t^2} - 2t$$

Nun müssen wir nur noch rückransformieren und erhalten dadurch:

$$y^\beta = x, \beta = \frac{1}{1-n}, n = 3 \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{c \cdot e^{-t^2} - 2t}}.$$

2.6 Bonusinformation zu speziellen ODEs

• Eine ODE heißt vom Typ Bernoulli, falls sie von folgender Gestalt ist:

$$x'(t) = f(t)x + g(t)x^n, n \neq 0, 1.$$

Führt man die Transformation $y = x^{1-n}$ durch, so erhält man die lineare Gleichung

$$y'(t) = (1-n)f(t)y + (1-n)g(t).$$

(Ist $n = 0$ oder $n = 1$ so ist die ODE schon linear).

• Eine ODE heißt vom Typ Riccati, falls sie von folgender Gestalt ist:

$$x'(t) = f(t)x + g(t)x^2 + h(t).$$

Hier haben wir es mit einer besonders kniffligen ODE zu tun (zumindest kann sie es werden), denn diese Gleichung kann man nur lösen, indem man eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ kennt. Falls man es schafft eine zu finden (zu erraten) dann kann man folgende Transformation anwenden:

$$y = \frac{1}{x - x_p(t)}$$

und erhält folgende lineare Gleichung:

$$y'(t) = -(f(t) + 2x_p(t)g(t))y - g(t).$$

• Eine ODE heißt vom Typ d'Alembert, falls sie folgende Gestalt hat:

$$y(x) = xg(y'(x)) + f(y'(x))$$

Um eine Lösung zu dieser ODE zu finden, braucht man eine Lösung u und erhält mit der Umkehrfunktion u^{-1} eine Lösung :

$$y(x) := x \cdot g(u^{-1}(x)) + f(u^{-1}(x))$$

• Ein Spezialfall der d'Alembert ODE ist die Clairautsche DGL:

$$y(x) := x \cdot y'(x) + f(y'(x))$$

Nichttriviale Lösungen dieser ODE sind, mit f, c als differenzierbare Funktionen, welche die Gleichung $f'(x(c)) + x = 0$ erfüllen, die folgende Gleichung :

$$y(x) := xc(x) + f(c(X))$$

Triviale Lösungen sind, für im Definitionsbereich von f enthaltene c, die Geraden

$$y(x) := cx + f(c).$$

Wie man sieht benötigen viele dieser speziellen ODEs entweder eine partikuläre Lösung oder eine besondere Transformation, was diese Gleichungen recht knifflig zu lösen macht (falls sie denn überhaupt eine Lösung besitzen).
Nun haben wir genug über die Lösungsmethoden gesprochen und wollen uns mit dem gefestigten Grundgerüst mehr der Theorie widmen.

3 Theorie zu ODEs

3.1 Isokline

Wir definieren uns nun einige für dieses Kapitel wichtige Dinge:

Definition 3. *x^+ heißt Superlösung, falls $x'^+ \geq f(x^+)$*

x^- heißt Sublösung, falls $x'^- \leq f(x^-)$

$I(t)$ heißt Isokline, falls $f(I(t)) = const.$

Wir betrachten folgendes Beispiel:
Gegeben sei eine Riccati-ODE, und von ihr seien die Isoklinen zu bestimmen:

$$x'(t) = x^2(t) - t^2 = f(x,t)$$

Wir lösen nun $f(I(t)) = 0$ und erhalten:

$$I^2 - t^2 = 0 \iff (I - t) \cdot (I + t) = 0$$

Anhand des folgenden Plots sehen wir die Isoklinen für dieses konkrete Beispiel. Wir wollen aber uns vorher überlegen wozu sie überhaupt gut sind.
Angenommen wir starten in der Mitte beim Ursprung, dann kann unsere Lösung z.B. nach rechts unten Gehen und übertritt dabei eine Isokline. Ist das passiert, so geht sie dann viel stärker in Richtung der Isokline bis sie die nächste vielleicht trifft, wichtig dabei ist es jedoch zu wissen, dass sie sobald sie eine Isokline übertreten hat nicht wieder zurückkehren kann. Sie dienen also zum "begrenzen"der Lösung einer ODE. (Warum der Knick in der Mitte ist weiß ich auch nicht genau)

Würden wir uns nun $x^2 - t^2 = 2$ wählen, so ist $x = \sqrt{2 + t^2}$.

Wir sehen nun, dass im oberen Teil des Plots die Steigung ≥ 2 ist, und x(t) somit eine Superlösung vom System $\xi'(t) = 2$ ist. Die eigentliche Lösung wäre $\xi(t) = c + 2t$. Wir haben hier noch dazu $x'(t) \geq 2$ (Superlösung), weshalb gilt:

$$x(t) \geq c + 2t,$$

$$x(0) \geq 0$$

und $x(t) \geq \dfrac{1}{2}t$, für t groß genug.

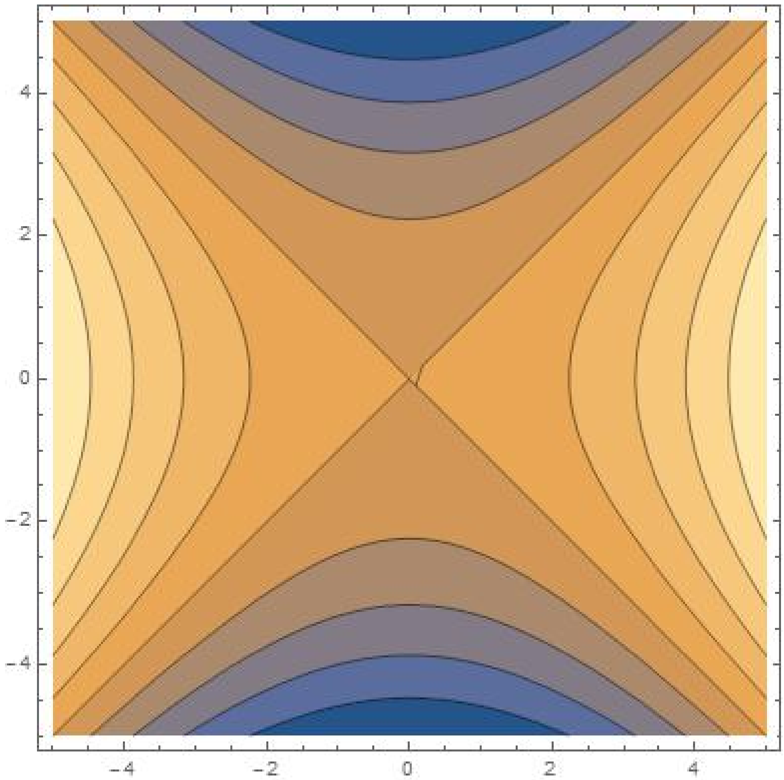

Abbildung 7: Isokline unserer Riccati-ODE

3.2 Lipschitz-Stetigkeit

Nun widmen wir uns einer außerordentlich starken Eigenschaft von Funktionen, nämlich der Lipschitz-Stetigkeit:

Definition 4. *Eine Funktion $f(x,t)$ heißt Lipschitz-stetig in x, falls eine Konstante $L > 0$ (Lipschitz-Konstante) existiert, sodass folgende Ungleichung gilt:*

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| < L\|x - y\|$$

für alle x,y aus dem Definitionsbereich.

Diese Definition setzt allerdings voraus, dass L nicht von t abhängig ist, daher brauchen wir noch die Definition von Gleichmäßig Lipschitz.

Definition 5. *Eine Funktion f(x,t) heißt gleichmäßig Lipschitz-stetig in x, falls es eine Konstante $L \geq L_t$ gibt, sodass $\forall t$ gilt:*

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| < L\|x - y\|$$

Da diese Definition äußerst wichtig ist, werden wir uns nun ein paar Beispiele dazu anschauen. Lipschitz-stetigkeit ist übrigens oftmals nur in einer kleinen Umgebung interessant. Bevor wir uns aber dem Beispiel widmen, wollen wir uns an einen Satz erinnern, der uns beim herausfinden der Lipschitz-stetigkeit viel helfen wird:

Satz 2. *Wir erinnern uns an den Mittelwertsatz der Differentialrechnung:*

Wir haben eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf dem abgeschlossenen Intervall [a,b] stetig ist, und im offenen Intervall (a,b) sei sie differenzierbar. Gelten diese Voraussetzungen, so gib es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$, sodass folgendes gilt:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beispiel 1: Ist $f(x) = \sin(x)$ Lipschitz-stetig? Ja ist die Antwort und es stellt sich die Frage warum? Zuerst einmal was müssen wir überhaupt zeigen? Wir müssen zeigen, dass folgendes gilt:

$$|\sin(x) - \sin(y)| < L \cdot |x - y|$$

Erinnern wir uns an den Mittelwertsatz, so erhalten wir:

$$\sin'(\xi) = \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}$$

Wir sehen nun, dass wir durch Multiplikation mit dem Nenner unsere gewünschte Form erhalten:

$$|\sin(x) - \sin(y)| < |\sin'(\xi)| \cdot |x - y|.$$

Da wir nun die Form haben, müssen wir nur noch feststellen, ob unsere Lipschitz-Konstante auch wirklich beschränkt ist. In diesem Fall sehen wir es, da die Ableitung vom Sinus der Cosinus ist, und dieser nach oben durch 1 beschränkt ist, ist 1 unsere Lipschitz-Konstante.

Beispiel 2: $f(x) = x^2$ auf dem Intervall [0,1]

Hierfür wenden wir wieder den MWS der DR an und erhalten:

$$|x^2 - y^2| < |2\xi||x - y|.$$

Hier sehen wir, dass diese Lipschitz-Konstante auf ganz $\mathbb{R}$ unbeschränkt ist, weshalb diese Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ nicht Lipschitz-stetig ist.
Beispiel 3: $f(x) = \sqrt{|x|}$
Mit dem MWS der DR erhalten wir:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \frac{1}{2\sqrt{\xi}}|x - y|$$

Hier sehen wir, dass unsere Funktion auf unserem gegebenen Intervall nicht Lipschitz-stetig ist, aufgrund der Unbeschränktkeit der Lipschitz-Konstante.
Nun, da wir die Lipschitz-stetigkeit hoffentlich verfestigt haben, wollen wir uns einem Satz widmen:

Satz 3. *Sei $f(x,t)$ Lipschitz in der ersten Variable, und gleichmäßig stetig in der zweiten. Weiters sind $x(t), y(t) \in C^1$, also (mindestens) einmal stetig differenzierbar, sodass gilt:*

$$\begin{cases} x(t_0) \leq y(t_0) \\ x'(t) - f(x(t), t) \leq y'(t) - f(y(t), t) \end{cases}$$

Dann gilt:

$$x(t) \leq y(t), \forall t \geq t_0$$

Diesen Satz werden wir der einfachheithalber nicht beweisen.

Korollar 1. *Wenn f(x,t) Lipschitz in der ersten, und gleichmäßig in der zweiten Variablen* *is, dann hat folgendes IVP höchstens eine Lösung:*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Beweis. Sei y(t) eine andere Lösung von unserem IVP, dann gilt gemäß unseres (nicht-bewiesenen) Satzes:

$$x' - f(x(t),t) \leq y' - f(y(t),t) \forall t \geq t_0$$

und mit dem Satz 3:

$$x(t) < y(t) \ \ \forall t \geq t_0,$$

nun tauschen wir und erhalten

$$y(t) \leq x(t) \ \ \forall t \geq t_0.$$

$\square$

Als Gegenbeispiel häten wir die Wurzelfunktion von vorhin im Bereich von [0,1], wo sie nicht Lipschitz-stetig ist, denn hier hätten wir mehrere Lösungen, nämlich:

$$x(t) = 0 \quad \forall t,$$

$$x(t) = \frac{1}{4}(t - t_0)^2, \ \forall t \geq t_0$$

$$x(t) = -\frac{1}{4}(t - t_1)^2, \ \forall t \leq t_1.$$

Einschub 1. *Wir erinnnern uns, dass die Mengen von Lösunungen von ODEs häufig einen Vektorraum bilden, und immer, falls die Gleichungen linear und homogen sind. Haben wir eine ODE gegeben und sind* $x(\xi)$ *und* $x(\zeta)$*, so ist* $c \cdot x(\xi) + d \cdot x(\zeta)$ *wieder eine Lösung der ODE.*

3.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

3.3.1 Banach-Kontraktionsprinzip

Definition 6. *Ein Banachraum X ist ein vollständiger, normierter Vektorraum.*

Linearität: Für $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt :*$\alpha x + \beta y \ \in X$.

Norm: $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *hat folgende Eigenschaften:*

- *Positive Definitheit :*$\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- *Homogenität:* $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X$
- *Dreiecksungleichung:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definition 7. *Eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt Cauchy-Folge, falls gilt:*

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

X heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge in X Konvergiert. Ein Gegenbeispiel hierfür ist der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, da man sich hier z.B. eine Folge konstruieren kann, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, aber $\sqrt{2}$ liegt nicht in $\mathbb{Q}$
Banachräume sind z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$.
Für unsere weiteren Beobachtungen wird aber der folgende Banachraum eine wichtige Rolle spielen(dass das ein Banachraum ist werden wir später zeigen):
$X = C(I, \mathbb{R})$:=$\{f : I \to \mathbb{R}$:f ist stetig$\}$.

Satz 4. *Banachscher Fixpunktsatz*

Sei $(X, \|\cdot\|)$ *ein Banachraum und* $K : X \to X$ *eine Kontraktion, d.h.* $\exists \rho \in (0,1)$*, sodass gilt:*

$\forall x, y \in X$ *gilt*

$$\|K(x) - K(y)\| \leq \rho \|x - y\|$$

Dann hat K einen eindeutigen Fixpunkt $x_0 = K(x_0)$*.*

Beweis. Sei $K : X \in X$ Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\rho < 1$. Sei weiters $R = \dfrac{\|Kv_0\|}{1-\rho}$ für irgendein $v_0 \ \in X$.
Dann ist die Kugel $B_R(v_0) = \{v \in X : \|v - v_0\| \leq R\}$ invariant.

Sei $v \in B_r$, dann gilt

$$\|Kv\| \leq \|Kv - Kv_0\| + \|Kv_0\| \leq \rho \|v - v_0\| + \|Kv_0\| \leq \rho R + \|Kv_0\| \leq R.$$

Jetzt konstruieren wir uns eine Folge $v_0, v_1 = K(v_0), v_2 = K(v_1), \cdots$. Diese Folge ist Cauchy, denn

$$\|v_n - v_m| = \|K^{n-m} v_m - v_m\| = \|K^{n-m} K^m v_0 - K^m v_0\| = \|K^m(K^{n-m} v_0) - K^m v_0\| \leq$$

$$\leq \rho^m \|K^{n-m} v_0 - v_0\| \leq \rho^m R \to 0, \text{ für } \ m \to \infty.$$

Fixpunkt existiert: X ist vollständig, also $V_n \to V$ in $\|\cdot\|$ (also $\|V_n - V\| \to 0, \text{ für } n \to \infty$)

$v = Kv$, denn

$$v = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} K^n v_0 = K(\lim_{n\to\infty} K^{n-1} v_0) = K(v)$$

Fixpunkt ist eindeutig:

Seien v und w beide Fixpunkte, dann

$$\|v - w\| = \|Kv - Kw\| \leq \rho \|v - w\|,$$

was nur gelten kann, falls $\|v - w\| = 0$, also $v = w$. □

3.4 Satz von Picard-Lindelöf

Satz 5. *Satz von Peano:*

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ stetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem oder auch Cauchyproblem genannt :
$\dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.*, mit*
$(x_0, y_0) \in \Omega$ und $y \in \mathbb{R}^N$. So existiert ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ und mindestens eine Lösung $I \ni x \to y(x) \in \mathbb{R}^N$ von unserem IVP.

Nun widmen wir uns dem zentralen Satz dieses Kapitels, nämlich dem Satz von Picard-Lindelöf.

Satz 6. *Satz von Picard-Lindelöf*

Sei $f : U \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz in der ersten und gleichmäßig stetig in der zweiten Variablen, so hat folgendes IVP eine eindeutige Lösung:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, t) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Nun wollen wir uns unserem Banachraum-Kandidaten von vorhin widmen.

$$X = C([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f\ stetig\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Wir müssen nun zeigen, dass in diesem Raum jede Cauchy-Folge konvergiert.

Sei f_n eine Cauchyfolge in X.

1.) f_n ist beschränkt, denn

$$\|f_n - f_m\| \to 0, \text{ für } n, m \to \infty \ \exists m \, \forall n \geq m \|f_n - f_m\|_\infty < 1$$

f_m ist stetig, also beschränkt auf $[0,1]$, daher

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x)| < 1 + \|f_m\|_\infty.$$

2.) Finde den Grenzwert

Wähle $x \in [0,1]$, dann ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge (sogar Cauchy) in $\mathbb{R}$, also existiert der punktweise Grenzwert, den wir $f(x)$ nennen.

3.) ist $f \in X$, also ist f stetig?

Wähle $\epsilon > 0$ beliebig. Weil $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy ist, gibt es $m \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$\forall n \geq m : \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$$

f_m ist stetig auf $[0, 1]$, also auch gleichmäßig stetig, sodass gilt:

$$\exists \delta > 0,\ sodass\ \forall x, y \in [0, 1] : |x - y| < \delta,$$

also

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Schlussfolgerung: für $x, y \in [0, 1]$,$|x - y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + \lim_{n\to\infty} |f_m(y) - f_n(y)| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

(Bei der Ersten Ungleichung haben wir 2x die Dreiecksungleichung angewandt)

3.4.1 Picard-Iteration

Wir haben U als offene Umgebung des Anfangswertes x_0 und sagen:

$$x_0(t) = x_0$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t f(x_0(s), s) ds$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t f(x_1(s), s) ds$$

Allgemein:

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_n(s), s) ds.$$

Sei nun $K : X \to X$ eine Kontraktion, dann gilt:

$$x_\infty = K(x_\infty^{(t)})$$

mit dem Grenzwert

$$x_\infty(t) = x_1(t) = x_0 + \int_0^t f(x_\infty(s), s)ds.$$

Annahme: Fixpunkt von K löst unser IVP (Anfang des Kapitels):

Sei $\delta > 0$ beliebig,

$$M := \sup_{x \in U} \sup_{t \in [0,1]} f(x,t) < \infty, \text{ L sei die Lipschitz-Konstante von } f < \infty,$$

$$T_0 = \min\{1, \frac{\delta}{M}, \frac{\rho}{L}\} > 0 \text{ und } Y := B_\delta(x_0) \subset X.$$

1.)$K(Y) \subset Y$, denn für $x(t) \in Y$ gilt:

$$\|K(x) - x_0\|_\infty = \|x_0 + \int_0^t f(x(s), s)ds - x_0\|_\infty =$$

$$= \sup_{t \in [0,T_0]} |x_0 + \int_0^t f(x(s), s)ds - x_0| \leq \sup_{t \in [0,T_0]} \int_0^t |f(x(s), s)ds| \leq$$

$$\leq \sup_{t \in [0,T_0]} \int_0^t M ds = \sup_t tM = T_0 M \leq \delta.$$

2.)

$$\|K(x(s)) - K(y(s))\|_\infty \leq \delta \|x(s) - y(s)\|_\infty \forall x, y \in Y.$$

$$\|K(x) - K(y)\|_\infty = \sup_{t\in[0,T_0]} |x_0 + \int_0^t f(x(s), s)ds - (x_0 + \int_0^t f(y(s), s)ds)| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T_0]} \int_0^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)|ds \leq \sup_{t\in[0,T_0]} \int_0^t L|x(s) - y(s)|ds \leq$$

$$\leq L \sup_{t\in[0,T_0]} \int_0^t \sup_{u\in[0,T_0]} x(u) - y(u)ds = L\|x - y\| \sup_{t\in,[0,T_0]} \cdot t =$$

$$= L \cdot T_0 \|x - y\|_\infty \leq \delta \|x - y\|_\infty.$$

(Notiz hier haben wir die Lipschitz-Stetigkeit verwendet und im Letzten Integral gilt

$$\int_0^t \sup_{u\in[0,T_0]} x(u) - y(u)ds = \|x - y\|_\infty.)$$

3.5 Harmonischer Oszillator, Resonanz und Anwendungen

Wir möchten uns folgendem physikalischen Beispiel aus der Elektrizitätslehre widmen:: Wir haben folgende ODE gegeben und möchten sie lösen:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L} \cdot V_{Quelle} = A\cos(\omega t) \text{ (Wir wählen das) }.$$

Wie lösen wir diese Gleichung? Nun wir werden wie schon besprochen zuerst die homogene Gleichung lösen, dann eine partikuläre Lösung finden und deren Summe ist dann unsere allgemeine Lösung.

Homogene Gleichung: Wir wollen folgendes Lösen:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0$$

Wir sehen hier dass wir eine ODE haben, dessen Form nach dem Exponentialansatz riecht. Wir werden daher das charakteristische Polynom lösen müssen, welches folgendermaßen aussieht:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} = 0$$

(Dies ist im Prinzip unsere Anfangsgleichung nur mit

$$\ddot{I} = \lambda^2, \dot{I} = \lambda, I = 1)$$

Wir können diese Gleichung mit der kleinen Lösungsformel lösen und erhalten dadurch:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{(\frac{R}{L})^2 - \frac{4}{CL}}}{2} = \frac{-R}{2L} \pm i \cdot \sqrt{\frac{1}{CL} - (\frac{R}{2L})^2}$$

Wir setzen beim Imaginärteil (der Wurzel) $\omega \approx \omega'$, $\frac{-R}{2L} = \Delta$, und erhalten als homogene Lösung:

$$I_{hom}(t) = A_1 e^{\Delta t} e^{i\omega' t} + A_2 e^{\Delta t} e^{-i\omega' t} =$$

$$= e^{\Delta t}(b_1 \cos(\omega') + b_2 \sin(\omega' t)).$$

Nun widmen wir uns der inhomogenen Lösung (vorerst für kleines R). Wir sagen:

$$\frac{1}{LC} I_p(t) = (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) \frac{1}{LC}$$

$$\frac{R}{L} \dot{I}_p(t) = (-c_1 \omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t)) \frac{R}{L}$$

$$\ddot{I}_p(t) = -c_1 \omega^2 \cos(\omega t) - c_2 \omega^2 \sin(\omega t).$$

Nun müssen wir alles addieren und $A\cos(\omega)$ gleichsetzen, um die Form unserer Anfangsgleichung zu erhalten. Wir erhalten somit:

$$\cos(\omega t)(c_1(\frac{1}{LC} - \omega^2) + \frac{c_2 R}{L}) + \sin(\omega t)(c_2(\frac{1}{LC} - \omega^2) - \frac{c_1 R}{L}) = A\cos(\omega t).$$

Wir können nun durch umformen c_2 erhalten und haben somit unsere partikuläre Lösung:

$$\implies c_2 = \frac{AL}{R}, \quad I_{part}(t) = \frac{AL}{R}\sin(\omega t).$$

Nebenbemerkung: Falls R=0 ist würde der Ansatz für die inhomogene Gleichung so aussehen:

$$I_p(t) = c_1 t\cos(\omega t) + c_2 t\sin(\omega t).$$

Wir wollen uns nun für die Mechanik eine etwas allgemeinere Gleichung ansehen:

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega^2 x = A\cos(\alpha t),$$

wobei hier r allgemein den Widerstand/Reibungsterm beschreibt ($r = \frac{R}{L}$), das ω^2 entspricht bei uns dem $\frac{1}{LC}$ und $A\cos(\alpha t)$ ist eine externe Kraft. Anwendungsbeispiele hierfür wäre das Federpendel in der Mechanik oder eben wie vorher schon betrachtet in der Elektrizitätslehre.

Kurz zum Federpendel: Wir haben einen Winkel φ, eine Masse m, die Beschleunigung a und die Fallbeschleunigung g gegeben und erhalten zusammen mit dem zweiten Newtonschen Axiom folgende Gleichung:

$$-mg\sin(\varphi) = ma = m\ddot{\varphi}l = m\dot{x},$$

mit der Position $x = \varphi l$. Somit sieht unsere Gleichung folgendermaßen aus:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} sin(\varphi) = 0.$$

Widmen wir uns nun wieder der allgemeineren Gleichung von vorhin und versuchen sie zu lösen.

Wir lösen wie vorhin zuerst die homogene Gleichung:

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Wir lösen nun wieder das charakteristische Polynom:

$$\lambda^2 + r\lambda + \omega^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \omega^2} = \frac{-r}{2} \pm i\sqrt{w^2 - (\frac{r}{2}^2)}$$

wobei wir wenn wir die Diskriminante ω' nennen folgende Gleichung mit den folgenden Lösungen erhalten:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r}{2} \pm i\omega'$$

$$x_{hom}(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + b_1 e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{r}{2}t}(a\cos(\omega' t) + b\sin(\omega' t)),$$

wobei hier $\cos(\omega' t)$ die Eigenfrequenz des homogenes Systems bezeichnet.

Nun widmen wir uns der Lösung des inhomogenen Systems:

Wir wählen folgenden Ansatz:

$$x_p(t) = (c\cos(\alpha) + d\sin(\alpha t))$$

$$\dot{x_p}(t) = (-c\alpha\sin(\alpha t) + d\alpha\cos(\alpha t))r$$

$$\ddot{x}_p(t) = -c\alpha^2\cos(\alpha t) - d\alpha^2\sin(\alpha t).$$

Nun addieren wir alle Gleichungen und erhalten:

$$c(\omega^2-\alpha^2)cos(\alpha t) + d(\omega^2-\alpha^2)sin(\alpha t) - cr\alpha sin(\alpha t) + rd\alpha cos(\alpha t) = Acos(\alpha t).$$

Nun können wir diese Gleichung etwas rearrangieren und erhalten:

$$c(\omega^2-\alpha^2) + rd\alpha = A \Longrightarrow \frac{d(\omega^2-\alpha^2)}{r\alpha} + dr\alpha = A \Longrightarrow d = \frac{A}{\frac{(\omega^2-\alpha^2)^2}{r\alpha} + r\alpha}$$

$$d(\omega^2-\alpha^2) - cr\alpha = 0 \Longrightarrow c = \frac{d(\omega^2-\alpha^2)}{r\alpha} \Longrightarrow c = \frac{A(\omega^2-\alpha^2)}{(\omega^2-\alpha^2)^2 + (r\alpha)^2}.$$

Resonanz tritt hier auf, falls $\omega^2 - \alpha^2 \ll r \ll 1$.

3.5.1 Mehr über Resonanz

Wir betrachten folgende Gleichung:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A\cos(\omega t).$$

Der unterschied hier ist, dass wir keine Reibung haben, und das rechte Glied sogar eine Lösung des homogenen Systems ist:

$$x_{hom}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t).$$

Für die inhomogene Gleichung wählen wir den folgenden Ansatz:

$$x_p(t) = ct\sin(\omega t)$$

$$\dot{x_p}(t) = c\sin\omega(t) + c\omega t\cos(\omega t)$$

$$\ddot{xp}(t) = 2c\omega cos(\omega t) - c\omega^2 t\sin(\omega t)$$

Nun addieren wir wieder die 3 Gleichungen und erhalten:

$$\implies A\cos(\omega t) = 2c\omega cos(\omega t)$$

und wir können damit folgende allgemeine Lösung finden (Summe der Lösung des homogenen plus der partikulären Lösung):

$$x(t) = \frac{A}{2\omega} t\sin(\omega t) + a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t).$$

3.6 Grönwall-Ungleichung

Wir erinnern uns an den Satz von Picard-Lindelöf, also haben wir eine Funktion $f(x,t)$ gegeben, mit x Lipschitz in $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ und gleichmäßig stetig in t, so hat folgendes Anfangswertproblem genau eine Lösung:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,t) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Genauer:

Gelten die obigen Voraussetzungen (Lipschitz in 1., gleichmäßig in zweiter Variablen),

dann existiert $T_0 \in [0, 1]$ für das es genau eine Lösung $\varphi(t)$ von dem Anfangswertproblem gibt. Die Existenz gilt für $t \in [t_0, t_0 + T_0]$.
Zusätzlich zu unserem IVP betrachten wir noch folgendes IVP :

$$\begin{cases} y'(t) = g(y, t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

Betrachten wir nun folgendes Beispiel:

$$f(x, t) = g(x) \equiv \lambda x, t_0 = 0,$$

so haben wir:

$$\dot{x} = \lambda x, x(0) = x_0 \dot{y} = \lambda y, y(0) = y_0.$$

Wir können die Gleichungen mit unseren Standardmethoden lösen und erhalten:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}, y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

und wir wissen, dass:

$$|x(t) - y(t)| = |x_0 - y_0| e^{\lambda t}.$$

Satz 7. *Seien* $f, g \in C(U \times [t_0, t_0 + 1], \mathbb{R}^n)$*, f Lipschitz in* $x \in U$*, in t gleichmäßig, mit* $L = \sup_{x \neq y, t \in [0,1]} \dfrac{|f(x,t) - f(y,t)|}{x - y} \geq 0$ *als Lipschitz-konstante und* $M = \sup_{x \neq y, t \in [0,1]} |f(x,t) - g(x,t)| \leq \infty$.
Seien weiters x(t) und y(t) Lösungen von unseren beiden IVP, die Auf $[0, T_0]$ *existieren, dann gilt:*

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt} - 1).$$

Um diesen Satz zu beweisen müssen wir erst die Grönwall-Ungleichung und deren Spezialfälle bearbeiten.
Seien $\beta \geq 0, \alpha(t) \in \mathbb{R}$ und weiters nehmen wir an:

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds$$

Wir definieren uns:

$$\varphi(t) = e^{-\int_0^{t_0} \beta(s)ds},$$

dann führen wir folgende Schritte durch:

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t) \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds) =$$

$$= \varphi(t) \int_0^t \beta(s)\psi(s) + \varphi(t)\beta(t)\psi(t)ds =$$

$$= -\beta(t)e^{-\int_0^t \beta(s)ds} \int_0^t \beta(s)\psi(s) + \varphi(t)\beta(t)\psi(t) =$$

$$= \beta(t)\varphi(t)(\psi(t) - \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds) \leq \beta(t)\varphi(t)\alpha(t).$$

Nun integrieren wir beide Seiten und erhalten:

$$\varphi(t)\int_0^t \beta(s)\psi(s)ds \leq \int_0^t \beta(s)\alpha(s)\varphi(s)ds,$$

also gilt:

$$\int_0^t \beta(s)\psi(s)ds \leq \frac{1}{\varphi()}\int_0^t \beta(s)\alpha(s)\varphi(s)ds.$$

Und mit unserer Grönwall Ungleichung erhalten wir:

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}.$$

Für unsere Berechnungen ist folgendes Resultat noch wichtig:

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi(t)} = \frac{e^{-\int_0^s \beta(u)du}}{e^{-\int_0^t \beta(u)du}} = e^{-\int_0^s \beta(u)du-(-\int_0^t \beta(u)du)} = e^{\int_s^t \beta(u)du}.$$

Nun widmen wir uns den beiden Spezialfällen der Grönwall-Ungleichung

1. Spezialfall:

$$\alpha(s) \leq \alpha(t) \forall s \leq t.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ergibt Grönwall:

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds \leq$$

$$\leq \alpha(t)(1 + \int_0^t \beta(s)(e^{\int_s^t \beta(u)du})ds =$$

$$= \alpha(t)(1 - \int_0^t \frac{d}{ds}e^{\int_s^t \beta(u)du}ds) =$$

$$= \alpha(t)(1 - [e^{\int_s^t \beta(u)du}]|_{s=0}^t) =$$

$$= \alpha(t)(1 - 1 + e^{\int_0^t \beta(u)du})$$

Mit diesen Resultaten erhalten wir:

$$\psi(t) \leq \alpha(t)e^{\int_0^t \beta(u)du}.$$

Erklärungen der wichtigen Schritte: Die erste Ungleichung gilt, da $\alpha(s) \leq \alpha(t)$,

$$\frac{d}{ds}e^{\int_s^t \beta(u)du} = e^{\int_s^t \beta(u)du}(-\beta(s)),$$

das ëntsteht dadurch, dass wir nach der unteren Integrationsgrenze differenzieren.

Seien $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0\ const$

Sei $\psi(t) \leq \int_0^t (\beta\psi(s) + \gamma)ds$:=(+)

So gilt:

$$\psi(t) \leq \alpha e^{\beta t} + \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta t} - 1),$$

mit dem Grenzfall

$$\beta = 0, \psi(t) \leq \alpha + \gamma(t),$$

also:

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta t} - 1)$$

wodurch wir mit der Regen von L'Hôpital folgendes erhalten:

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{\gamma}{1}t = \gamma t.$$

Der Beweis folgt, indem man

$$\psi(t)' = \psi(t) + \frac{\gamma}{\beta}$$

setzt, denn dann wird $(+)$ zu :

$$\psi(t)' - \frac{\beta}{\gamma} \leq \alpha + \int_0^t \beta(\psi(s)' - \frac{\gamma}{\beta}) + \gamma ds$$

$$\Longrightarrow \psi(t)' \leq (\alpha + \frac{\gamma}{\beta}) + \int_0^t \beta\psi(s)' ds.$$

Nun kann man Spezialfall 1 anwenden, also:

$$\psi'(t) \leq (\alpha + \frac{\gamma}{\beta}) e^{\int_0^t \beta(u) du}$$

$$\psi(t) + \frac{\gamma}{\beta} \leq \alpha + \frac{\gamma}{\beta} e^{\int_0^t \beta(u) du}$$

$$\Longrightarrow \psi(t) \leq \alpha e^{\beta t} + \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta t} - 1).$$

Wir bemerken nun, dass die Ungleichung aus Satz 7 so aussieht wie der 2. Spezialfall der Grönwall Ungleichung.

Fassen wir nun zusammen:

Lemma 1. *Grönwalls Lemma*

Sei $\beta \geq 0, \alpha(t) \in \mathbb{R}$.

Falls

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s) ds,$$

dann gilt auch:

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s) e^{\int_s^t \beta(u) du} ds.$$

Spezialfall 1: Falls zusätzlich

$$\alpha(s) \leq \alpha(t) \forall s \leq t$$

gilt, dann auch:

$$\psi(t) \leq \alpha(t) e^{\int_0^t \beta(s) ds}$$

Spezialfall 2: Falls

$$\beta \geq 0, \alpha, \gamma \in \mathbb{R} const$$

und

$$\psi(t) \leq \alpha + \int_0^t (\beta \psi(s) + \gamma) ds$$

gilt, dann auch :

$$\psi(t) \leq \alpha e^{\beta t} + \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta t} 1).$$

Sollte zusätzlich $\beta = 0$ sein, dann gilt sogar:

$$\psi(t) \leq \alpha + \gamma t.$$

Nun stellt sich die Frage wozu man ein solches kompliziertes Konstrukt braucht. Diese Ungleichung wird zur Stetigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen benötigt. Als Beispiel werden wir die Ungleichung aus Beispiel 7 beweisen:

Beweis. Wir haben :

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_0^t (f(x(s), s) - g(y(s), s)) ds \leq$$

$$\leq |f(x(s),s) - f(y(s),s)| + |f(y(s),s) - g(y(s),s)| \leq$$

$$\leq L|x(s) - y(s)| + M.$$

Fassen wir dies nun zusammen, so erhalten wir:

$$|x(t) - y(t)| \leq x_0 - y_0| + \int_0^t L|x(s) - y(s)| + M ds$$

und wir sehen nun, dass beim Vergleich mit dem 2. Spezialfall der Gronwall-Ungleichung folgendes übereinstimmt:

$$|x(t) - y(t) = \psi(t),\ |x_0 - y_0| = \alpha,\ L = \beta,\ |x(s) - y(s)| = \psi(s),\ M = \gamma$$

Wir stellen nun fest, dass unsere Ungleichung die Form des 2. Spezialfalles der Gronwall Ungleichung hat und somit stimmt. □

Nun stellen wir uns die Frage, wie sich $x(t, x_0)$ als Funktion von x_0 verhält und wie ihre Ableitung ist. Wir führen folgende Notation ein:
$\varphi(x, t)$, mit x als Anfangswert und $\varphi(x, t)$ als Lösung ersetzt $x(t, x_0)$. Somit sieht unser Anfangswertproblem in unserer neuen Notation folgendermaßen aus:

$$\varphi(\dot{x}, t) = f(\varphi(x, t), t),\ \varphi(x, 0) = x.$$

Was ist nun $\frac{\partial}{\partial x}$?.
Wir haben:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\dot{\varphi}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}[f(\varphi(x,t),t)] = \frac{\partial}{\partial x}f(\varphi(x,t),t) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t).$$

Wir wissen,

$$y(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t),$$

so erhalten wir folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(t) = A(x,t)y \\ y'(0) = 1, \end{cases},$$

wobei

$$A(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} f(\varphi(x,t)t)$$

Dies wird auch die erste Variationsgleichung genannt.

4 Systeme von Differentialgleichungen

4.1 Das Matrixexponential

Wir betrachten nun folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \text{ } oder \text{ } \mathbb{C}^n \\ x(0) = x_0, \quad A \in M_n(\mathbb{K}) \end{cases}$$

Wir wenden nun die Picard-Iteraion auf dieses IVP an und erhalten somit:

$$x_0(t) = x_0$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t Ax_0 ds = x_0 + tAx_0$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t A(x_0 + sAx_0)ds = x_0 + tAx_0 + \frac{1}{2}t^2A^2x_0.$$

Führen das Weiter so erhalten wir:

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j A^j x_0}{j!}$$

Wir sehen nun, dass die Lösung uns bekannt vorkommen sollte und folgendermaßen aussieht:

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Bevor wir uns aber der Methode des Berechnens des Matrixeponentials widmen, wollen einen kurzen Abstecher in die Theorie machen:

Wir werden die folgende Norm (Operatornorm) brauchen:

$$\|A\| := \sup_{\|v\|=1} |Av|,$$

wobei $|v|$ die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{C}^n$ bezeichnet.

Wir wissen, dass folgendes gilt:

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Mit den ersten beiden Eigenschaften wird unser Zugrundeliegende Matrizenring ein Banachraum, und mit der dritten Eigenschaft sogar eine Banachalgebra.

Mit den folgenden Eigenschaften gilt:

$$\|\sum_{j=0}^{n} \frac{t^j A^j x_0}{j!}\| \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j} |t|^j \|A\|^j = e^{|t|\|a\|} < \infty,$$

was bedeutet, dass die Reihe

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{t^j A^j x_0}{j!}$$

konvergiert.

Kommen wir nun endlich zum Matrixeponential berechnen

Vorweg noch zwei kleine Bemerkungen:

$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ gilt im allgemeinen NICHT, sondern nur dann, wenn die Matrizen miteinander kommutieren bzw. wenn der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ verschwindet.

Weiters gilt $e^{U^{-1}AU} = U^{-1}e^{A}U$ für eine invertierbare Matrix U.

Nun zu unserem Beispiel:

Sei folgende Matrix gegeben, die man diagonalisieren soll:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Wir benötigen zuerst die Eigenwerte dieser Matrix, also Berechnen wir uns die Eigenwerte von

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

aus, welche $\lambda_{1,2} = 9, 6$ sind, aber wir dürfen den Vorfaktor nicht vergessen, also sind die echten Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = 2, 3$

Nun müssen wir die Eigenvektoren ausrechnen (Eigenvektoren sind die Lösung der Gleichungen die man bekommt, wenn man die Eigenwerte von den Diagonalelementen abzieht und dann einen Vektor sucht, dessen Produkt mit einer Matrix den Nullvektor ergibt)

Die Eigenvektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert 2 und

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zum Eigenwert 3

Nun suchen wir Matrizen U und D, welche folgende Eigenschaft haben:

$$A = UDU^{-1} \text{ und } U^{-1}AU = D$$

Folgendes kommutatives Diagramm soll das veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "U"] \arrow[d, "D"'] & \mathbb{R}^{\ltimes} \arrow[d, "D"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "U"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Wobei die Spalten der Matrix U aus den Eigenvektoren bestehen und die Matrix D aus Eigenwerten auf der Hauptdiagonale, also:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir wissen nun, dass $tD = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 3t \end{pmatrix}$ und $e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$ und finden nun für unsere Anfangsmatrix:

$$e^{tA} = e^{tUDU^{-1}} = Ue^{tD}U^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} + 2e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & 2e^{2t} + e^{3t} \end{pmatrix}$$

Somit ist die endgültige Lösung für dieses System von ODEs:

$$x(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} + 2e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} 2e^{2t} - 2e^{3t} & 2e^{2t} + e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_0.$$

4.2 Jordansche Normalform

Ist eine Matrix nicht diagonalisierbar, so können wir versuchen ihre Jordansche Normalform (JCF) herauszufinden, da jede Matrix A als $A = UJU^{-1}$ dargestellt werden kann, wobei

J= $\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & J_n \end{pmatrix}$ und $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & \lambda i \end{pmatrix}$ mit den J_i als Jordanblöcke mit den Eigenwerten auf der Diagonale und 1er in der Diagonale darüber und sonst nur 0-er.

Ein $m \times m$ Jordan-Block hat einen Eigenwert λ_i, einen Eigenvektor v_i und $m - 1$ generalisierte Eigenvekoren $v_i^r,\ r = 1, ..., m - 1$,sodass folgendes gilt:

$$Jv_i = \lambda_i v_i J v_i^1 = \lambda_i v_i^1 + v_i$$

Allgemeiner:

$$Jv_i^{m-1} = \lambda_i v_i^{m-1} + v_i^{m-2}.$$

Unsere U Matrix halt all diese generalisierten Eigenvektoren als Spalten.

Wir wissen weiters, dass sich die Jordanblöcke darstellen lassen können als:

$J_i = \lambda_i I_{m \times m} + N$, wobei I die Einheitsmatrix ist, und N eine nilpotente Matrix.

Wir wissen also dass man nun ein Matrixeponential einer nicht-diagonalisierbaren Matrix mithilfe der JCF ausrechnen kann. Jetzt müssen wir nur wissen, wie man e^{J_i} ausrechnet damit wir die Schritte vom vorigen Beispiel anwenden können.ßß Dies geht folgendermaßen:

$$e^{J_i} = I + J_i + \frac{1}{2}J_i^2 + ... = I + \lambda_i I + N + \frac{1}{2}(\lambda_i I + N) + ...$$

$$= I(1 + \lambda_i + (\frac{1}{2\lambda_i})^2 + ...) + N(1 + \frac{2}{2!}\lambda_i + \frac{3}{3!}\lambda_i + ..) + N^2(\frac{1}{2} + \frac{3}{3!}\lambda_i + ...).$$

Alles zusammen ergibt:

$$e^{J_i} = e^{\lambda_i} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3!} & ... & \frac{1}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & ... & ... \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit kann jede lineare homogene OD in $\mathbb{C}^n$ gelöst werden.

Nun stellt sich die frage, was ist mit inhomogenen, also jene von der Form:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + g(t), A \in M_n(\mathbb{K}) \\ x(0) = x_0, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Für solche Fälle gibt es die Formel von Duhamel, welche folgendermaßen lautet (wie erwartet ist es eine Summe aus der Lösung des homogenen Systems + inhomogenen):

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)ds.$$

Fassen wir nochmals alles zusammen:

Für homogene Systeme von ODES können wir sie lösen, indem wir das Matrixexponential ausrechnen.

Haben wir eine reell diagonalisierbare Matrix $A = UDU^{-1}$ so ist die Lösung unseres Systems:

$y(t) = x_0 e^{tA} = Ue^{tD}U^{-1}x_0 = U \begin{pmatrix} e^{t\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{t\alpha_2} \end{pmatrix} U^{-1}x_0$, wobei die Spalten von U die Eigenvektoren von A sind.

Ist A nicht reell diagonalisierbar, so können wir uns die JFC zu Hilfe nehmen, da sich A als $A = UJU^{-1}$ darstellen lässt und erhalten:

$$e^{tA} = Ue^{tJ}U^{-1}.$$

4.3 Stationäre Punkte

Definition 8. *Ein stationärer Punkt einer ODE* $\dot{x} = F(x)$ *ist ein Punkt (Vektor)* x_0*, soodass* $F(x_0) = 0$*. (Nebenbemerkung: Bei homogenen linearen Gleichungen ist 0 immer ein stationärer Punkt).*

Nun wollen wir uns der Klassifikation von stationären Punkten widmen, wobei wir annehmen, dass unsere Matrix reell diagonalisierbar ist:

Ein Stationärer Punkt ist eine Quelle, Falls die Realteile der Eigenwerte Größer als 0 sind. Das Phasenportrait sieht dementsprechend so aus:

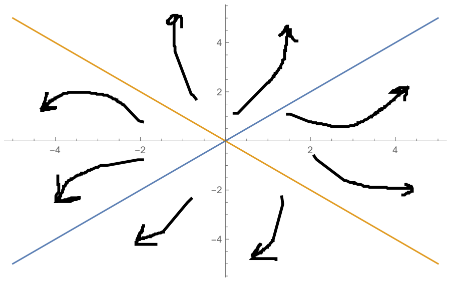

Abbildung 8: Quelle

Wir sehen, dass sich die Kurven in Richtung des am meisten positiven gerichteten Eigenvektors krümmen (Blaue Linie).

Ein stationärer Punkt ist eine Senke, falls der Realteil der Eigenwerte negativ ist. Das Phasenportrait sieht dann so aus:

Hier sieht man, dass die Kurven sich diesmal in Richtung des am meisten negativ

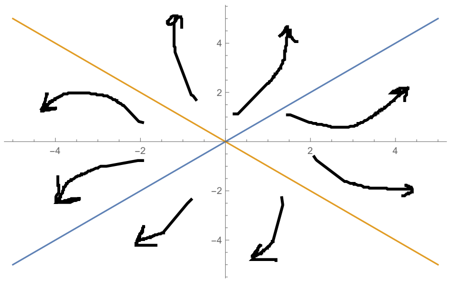

Abbildung 9: Senke

gerichteten Eigenvektors bewegen.

Ein stationärer Punkt ist ein Sattelpunkt, falls $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$ gilt, mit folgendem Phasenportrait:

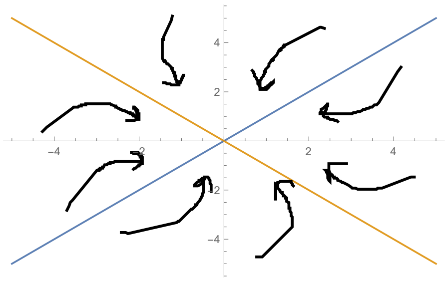

Abbildung 10: Sattelpunkt

Nun betrachten wir Matrizen, die komplex diagonalisierbar sind, somit entstehen neue Phasenportraits:

Die Definition von Quelle und Senke sind gleich, nur die Phasenportraits ändern sich ein wenig:

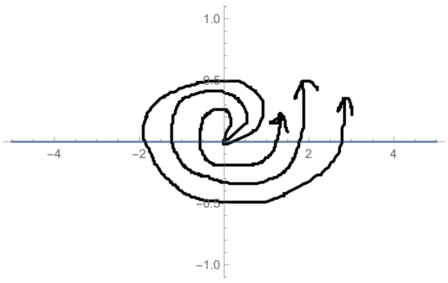

Abbildung 11: Quelle

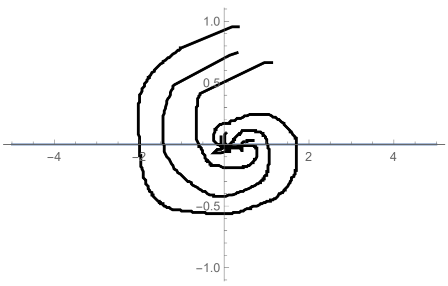

Abbildung 12: Senke

Falls die Realteile der Eigenwerte 0 sind (aber die Eigenwerte selber nicht 0), so entsteht ein Zentrum

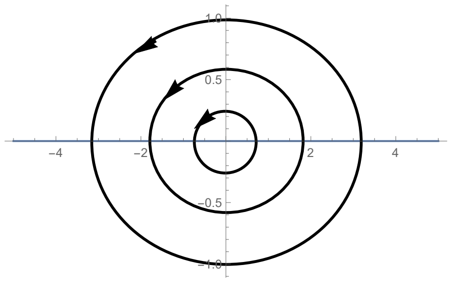

Abbildung 13:

Definition 9. *Ein stationärer Punkt p heißt stabil, falls für jede Umgebung $U \ni p$ eine andere Umgebung $V \ni p$ existiert, sodass jede Lösung die in V anfängt, für alle $t \geq 0$ in U bleibt.*
(Für lineare Systeme ist das äquivalent zu : alle Lösungen sind beschränkt).
P heißt asymptotisch stabil, falls es eine Umgebung U gibt, sodass jede Lösung die in U anfängt, gegen p konvergiert.

Mittels dieser Definition können wir nun das Verhalten unserer (vielleicht etwas dürftig gezeichneten) Plots bearbeiten.
Bei Abbildung 8 (Quelle bei reeller diagonalisierbarkeit), sehen wir dass die Lösungen unbeschränkt sind und daher dieser Punkt instabil ist. (Wir erinnern uns, dass das ein lineares Modell ist).
Bei unserer Senke in Abbildung 9 sehen wir, dass sie Gegen den Stationären Punkt konvergiert also zumindest stabil ist, sie ist aber noch mehr nämlich asymptotisch stabil, da wir sehen, dass jede Lösung die in einer Umgebung U anfängt, gegen den selben Punkt konvergiert.

In Abbildung 10, dem Sattelpunkt, haben wir wieder unbeschränkte Lösungen, weshalb der Punkt instabil ist.

Nun zu der Quelle in Abbildung 11 bei komplexer diagonalisierbarkeit. Sie verhaltet sich genauso wie die Quelle bei reeller diagonalisierbarkeit, was bedeutet, dass sie instabil ist.

Bei Abbildung 12 der Senke haben wir genau wie bei der vorigen Senke ein asymptotisch stabiles verhalten.

Nun kommen wir zum Zentrum in Abbildung 13. Hier bemerken wir zwar, dass eine Konvergenz vorliegt, jedoch konvergiert nicht jede Lösung gegen diese Punkt, weshalb das Verhalten in diesem Fall nur stabil ist und nicht asymptotisch stabil.

Nun eine kurze Bemerkung: Diese Bilder die wir hier haben gelten für lineare Gleichungen, und für nicht lineare stimmen die Quellen, Senken und Sattelpunktportraits auf einer kleinen Umgebung des stationären Punktes. Lediglich das Zentrum sieht möglicherweise etwas anders aus, z.B. zeigen folgende Abbildungen mögliche Verhalten eines Zentrums:

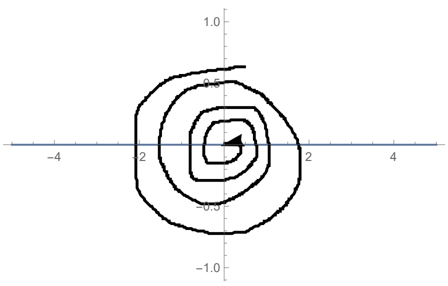

Abbildung 14: Zentrum (nichtlinear)

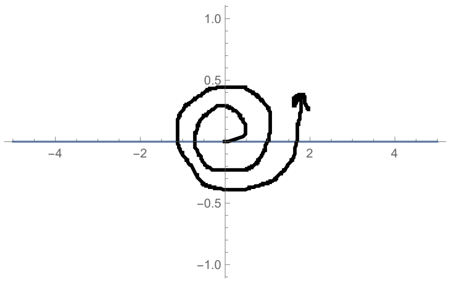

Abbildung 15: Zentrum (nichtlinear)

Falls unsere Matrix A nun nicht diagonalisierbar ist(wir können wir unser A anschreiben als $A = UJU^{-1}$), und die Jordan-Form nicht nur eine Diagonalmatrix ist, dann würde unser Phasenportrait folgendermaßen aussehen.

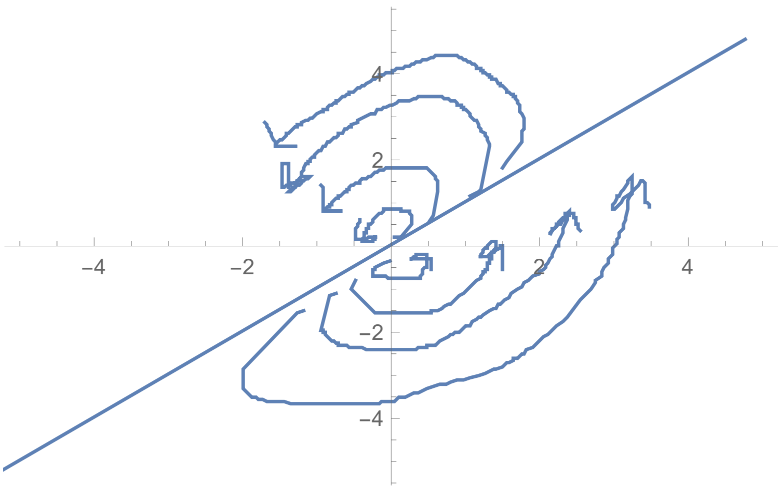

Abbildung 16: Phasenportrait bei nichtdiagonalisierbarkeit

4.4 Lotka-Volterra Gleichungen (Räuber-Beute-Modell)

Wir wollen uns ein praktisches Beispiel zur Anwendung unseres bisher erlangten Wissens anschauen.

Sei $x(t)$ die Größe der Population der Mäuse (Beute) und $y(t)$ die Größe der Population der Füchse (Räuber).

Wir erhalten dann folgende Differentialgleichungen:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

und mit der Anzahl der Füchse kombiniert:

$$\dot{x}(t) = (A - By(t))x(t), A = \text{Wachstumsrate} \in \mathbb{R}^+$$

Für die Füchse erhalten wir:

$$\dot{y}(t) = (Cx(t) - D)y(t), B, C, D > 0.$$

Da uns diese Gleichungen aber zu kompliziert sind, vereinfachen wir sie mit einer Koordinatentransformation. Wir sagen:

$$\frac{D}{C}\tilde{x} = x, \quad \frac{A}{B}\tilde{y} = y, \quad \frac{\tilde{t}}{A} = t \Rightarrow \tilde{t} = tA, \frac{d\tilde{t}}{dt} = A.$$

Nun wollen wir uns die Ableitungen Anschauen und sehen:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}\frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{D}{C}\dot{\tilde{x}} = (A - B\frac{A}{B}\tilde{y})\frac{D}{C}\tilde{x}.$$

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}}A = \frac{A}{B}\dot{\tilde{y}} = (C\frac{D}{C}\tilde{x} - D)\frac{A}{B}\tilde{y}.$$

Wir können nun sehen, dass sich eine Menge herauskürzt und sich die Gleichungen zu den folgenden vereinfachen:

$$\frac{\tilde{x}}{d\tilde{t}} = (1-\tilde{y})\tilde{x}$$
$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = \frac{D}{A}(\tilde{x}-1)\tilde{y},$$

wobei wir $\frac{D}{A} = \alpha$ nennen. Nun müssen wir $\tilde{x}, \tilde{x}, \tilde{t}$ rücktransformieren und erhalten somit folgende neue Gleichungen:

$$\begin{cases} \dot{x} = (1-y)x \\ \dot{y} = \alpha(x-1)y \end{cases} = F(x,y), \alpha > 0$$

.

Nun widmen wir uns den Stationären Punkten.

Die erste Frage lautet natürlich, was die stationären Punkte sind. In diesem Beispiel sind es die zwei Koordinatentupel (0,0) und (1,1) was man durch einsetzen in die Gleichung nachprüfen kann.

Nun wollen wir eine Linearisierung von $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x,y)$ durchführen. Dazu benötigen wir zuerst die Funktionalmatrix/Jacobimatrix und erhalten:

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ \alpha y & \alpha(x-1) \end{pmatrix}$$

und durch einsetzen der Stationären Punkte erhalten wir:

$$\text{Für } (0,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

und für (1,1)⇒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\pm i\sqrt{\alpha}$.

Nun widmen wir uns dem Lösen:

Wir probieren folgenden Ansatz und schauen, ob er uns weiterbringt (er wird es):

Ansatz: $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\alpha(x-1)y}{(1-y)x}.$$

Nun separieren wir diese Gleichung und erhalten:

$$\frac{1-y}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(x-1)}{x}$$

nun integrieren wir beide Seiten und erhalten:

$$(\log(y)-y) = \alpha(x-\log(x))+c \ \ +f(z) = z-\log(z)-1 f'(z) = 1-\frac{1}{z}\begin{cases} < 0, & z < 1 \\ = 0, & z = 1 \\ > 0, & z > 1 \end{cases}.$$

Somit wird + zu ++:=$\alpha f(x) + f(y) = \tilde{c}$ mit $\lim\limits_{z\to 0 \ od. z\to\infty}$.

Die Niveaulinien von ++ entsprechen den werten von c, und sind die jeweiligen Kreise in dem folgenden Phasenportraits von unserem Räuber-Beute-Modell:

Wir sehen, dass das Modell Sinn ergibt, denn sollte es keine Beute geben, nehmen die Räuber ab und umgekehrt.

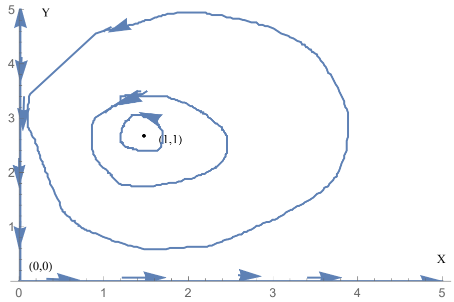

Abbildung 17: Räuber-Beute-Phasenportrait

4.4.1 Ergänzung zur Theorie von Lösungen

Wir wissen, dass die Menge der Lösungen von der Gleichung $ax + by = 0$ eine Gerade ist, also ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Haben wir eine inhomogene Gleichung der Form ax+by=c, so ist die Lösungsgerade um eine partikuläre Lösung X verschoben.

Die Gleichung $\dot{x} - 2x = 0$ hat als Lösung $x(t) = e^{2t}$

Nun wollen wir eine partikuläre Lösung finden für folgende Gleichung:

$\dot{x} - 2x = t.$

Würden wir den Ansatz $x_p = Ae^{2t}$ probieren, so würden wir zu einem Resonanzfall kommen, weshalb wir diesen Ansatz nicht wählen werden, sondern den Ansatz

$$x_p(t) = Ate^{2t}$$

mit

$$\dot{x_p}(t) = Ae^{2t} + A2te^{2t}.$$

Nun setzen wir den Ansatz in die Gleichung ein und erhalten :

$$3e^{2t} = -2Ate^{2t} + Ae^{2t} + 2Ate^{2t}$$

und wir sehen, dass $A = 3$ sein muss womit unsere partikuläre Lösung folgende ist:

$$x_p(t) = 3te^2.$$

Wir hätten natürlich auch folgenden Ansatz nehmen können:

$$x_p(t) = At + B,\ \dot{x_p} = A$$

und durch einsetzen erhalten wir:

$$A - 2At - 2B = t \Rightarrow A = -1/2, B = -1/4,$$

womit

$$x_p = -t/2 - 1/4$$

ist.

Widmen wir uns nun einem Satz, der unsere Beobachtungen zusammenfasst:

Satz 8. *Die Menge der Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung der Ordnung k ist ein Teilraum von $C^1(\mathbb{R})$ mit der Dimension k.*
Bemerkung: 1.) Wenn die Gleichung inhomogen ist, verschiebt sich die Lösung um eine partikuläre Lösung.
2.) Dieser Satz gilt auch, wenn die Gleichung nicht autonom ist.

In höheren Dimensionen gilt folgendes:
Gegeben seien d homogene lineare ODEs von Ordnung $k_i, i = 1, ..., d$. Dann ist die Mege der Lösungen ein Teilraum von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit Dimension $\sum_{i=1}^{d} k_i$.

Widmen wir uns nun noch einem Beispiel:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = te^{-t}.$$

Für die homogene Gleichung benutzen wir unseren gewohnten Ansatz und erhalten somit:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1.$$

Wir haben hier also eine Nullstelle der Multiplizität 2, daher lautet unsere Lösung:

$$x(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

(das t kommt deshalb, da wir Multiplizität 2 haben). Für die Homogene Gleichung erhalten wir daher die Lösungsmenge

$$L = \{ae^{-t} + bte^{-t}, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Für die partikuläre Lösung könnte man den Ansatz

$$x_p(t) = t^3 e^{-t}$$

beispielsweise anwenden.

4.5 Nicht-autonome lineare ODEs

Wir betrachten wie gewohnt folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad A(t) \in M_n(\mathbb{K}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Vorweg werden wir 3 Bemerkungen anführen:

Bemerkung 1: Leider ist

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} x_0$$

nur eine Lösung, falls $A(s)A(t) = A(t)A(s) \forall s, t$, also die Matrizen müssen miteinander kommutieren.

Bemerkung 2: Unser IVP hat eine eindeutige Lösung, weil das rechte Glied Lipschitz ist, denn

$$\|A(t)x - A(t)y\| \leq \|A(t)\| \|x - y\|,$$

also der Matrixnorm als Lipschitz-konstante.

Bemerkung 3: Man kann unser IVP als Matrixgleichung auffassen, also:

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t), U \in M_n(\mathbb{K})$$

mit folgenden Rechenregeln:

$$\frac{d}{dt}(UV) = \dot{U}V + U\dot{V}$$

$$\frac{d}{dt}U^{-1} = -U^{-1}\dot{U}U^{-1}.$$

Definition 10. $\Pi(t, t_0)$ *heißt prinzipielle Matrixlösung, falls gilt:*
$\dot{\Pi}(t, t_0) = A(t)\Pi(t, t_0)$ *und*
$\Pi(t_0, t_0) = I$*, I=Einheitsmatrix*

Ist Π bekannt, so gilt wegen dem Superpositionsprinzip, dass $\Pi(t, t_0)x_0$ eine Lösnung von Unserem IVP.

Bemerkung: Das Superpositionsprinzip besagt, dass eine Linearkombination von Lösungen linearer, homogener Gleichungen wieder eine Lösung ist.

Widmen wir uns nun einem Beispiel:

$$\dot{U} = AU \;\; A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$U(t_0) = I.$$

Schauen wir uns die erste Spalte an:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 2x_1 + tx_2 & x_1(t_0) = 1 \\ \dot{x_2} = 3x_2 & x_2(t_0) = 0 \end{cases}$$

Wir sehen hier, dass $x_2(t) = 0$ gelten muss, damit unsere Anfangsbedingung erfüllt ist. Somit vereinfacht sich die erste Gleichung zu:

$$\dot{x_1} = 2x_1 \Rightarrow x_1(t) = e^{2(t-t_0)},$$

das $-t_0$ beim Exponenten kommt daher, dass unsere Anfangsbedingung erfüllt sein muss.

Nun zur zweiten Spalte:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 2x_1 + tx_2 & x_1(t_0) = 0 \\ \dot{x_2} = 3x_2 & x_2(t_0) = 1 \end{cases}$$

Das x_2 können wir hier uns ausrechnen und erhalten:

$$\dot{x_2}(t) = 3x_2 \Rightarrow x_2(t) = e^{3(t-t_0)}$$

(wieder das t_0 wegen der Anfangsbedingung).

Nun bekommen wir für x_1 folgende Gleichung:

$$\dot{x_1} - 2x_1 + te^{3(t-t_0)}$$

(hier haben wir die $2x_1$ auf die linke Seite gebracht).

Lösen wir die homogene Gleichung mit unserem bekannten Ansatz erhalten wir:

$$x_{1,hom} = c \cdot e^{2t},$$

mit $c = e^{c'}$

Für die inhomogene Gleichung wählen wir uns den Ansatz:

$$x_{1p} = Ate^{3(t-t_0)} + Be^{3(t-t_0)}\dot{x_{1p}} = Ae^{3(t-t_0)} + 3Ate^{3(t-t_0)} + 3Be^{3(t-t_0)}.$$

Nun setzen wir die Gleichungen in unsere inhomogene Gleichung ein und erhalten:

$$te^{3(t-t_0)} = (-2At + 3At - 2B + 3B + A)e^{3(t-t_0)} \Rightarrow A = 1, B = -1$$

Daher ist unsere Lösung für x_1

$$x_1 = (t-1)e^{3(t-t_0)} + \tilde{c}e^{2(t-t_0)}$$

und $\tilde{c} = (t_0 - 1)$(wegen der Anfangsbedingung), somit ist das Ergebnis:

$$x_1 = (t-1)e^{3(t-t_0)} + (t_0 - 1)e^{2(t-t_0)}$$

und damit

$$\Pi(t,t_0) = \begin{pmatrix} e^{2(t-t_0)} & (t-1)e^{3(t-t_0)} + (t_0-1)e^{2(t-t_0)} \\ 0 & e^{3(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

Lösung der Gleichung $\dot{U} = AU$ mit det(U)$\neq 0$ heißt Fundamentallösung, also ist $\Pi/t, t_0$ eine Fundamentallösung mit Anfangswert I(Einheitsmatrix).

Lemma 2. *Seien U,V Fundamentallösungen, dann gilt*
$V(t) = U(t)U(t_0)^{-1}V(t_0)$

Beweis. Für $t = t_0$ gilt $V(t_0) = U(t_0)U(t_0)^{-1}V(t_0)$ ist wahr.
$\dot{U} = A(t)U$ hat eine eindeutige Lösung für jede Anfangsbedingung, deshalb folgt das Lemma $\forall t \in \mathbb{R}$.
Insbesondere $\Pi(t,t_0) = U(t)U(t_0)^{-1}$. □

Mehr Eigenschaften:
$\Pi(t,t_1)\Pi(t_1,t_0) = \Pi(t,t_0)$
$\Pi(t,t_0)^{-1} = \Pi(t_0,t)$
$\|\Pi(t,t_0)\| \leq e^{\int_{t_0}^{t} \|A(s)\| ds}$.
Die erste Eigenschaft bedeutet nur, dass wenn ich von einem Zeitpunkt zum nächsten

gehe und von dem zu eine weiteren, so ist es dasselbe wie als wäre ich direkt zum spätesten Zeitpunkt hingegangen. Die zweite besagt, dass wenn ich von einem Zeitpunkt zum anderen hingehe und dann ïnvertiere", also ist es dasselbe wie als würde ich vom späteren Zeitpunkt zum früheren hingehen.

Definition 11. *Sei U(t) eine Fundamentallösung, so heißt W(t)=det(U(t)) die Wronskideterminante.*

Lemma 3. *Die Liouville-Formel oder auch abelsche Identität lautet:*
$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))ds}$*, wobei Tr(A(t)) die Spur von A(t) ist.*

Betrachten wir nun folgendes IVP

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = A(t)x(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0} \end{cases}$$

Wir wissen, dass unsere Prinzipielle Matrix-Lösung $\Pi(t, t_0)$ das homogene System löst. Dieses IVP hat allgemein die Lösung:

$$\vec{x}(t) = \vec{x_p}(t) + \Pi(t, t_0)\vec{c}.$$

Wir verwenden Variation der Konstanten und erhalten:

Ansatz:

$$x(t) = \Pi(t, t_0)\vec{c}(t),$$

daher

$$\vec{g}(t) + \dot{x}(t) = \dot{\Pi}(t, t_0)\vec{c}(t) + \vec{g}(t) + \Pi(t, t_0)\dot{\vec{c}}(t).$$

$\dot{x}$ in Kombination mit $\dot{\Pi}(t,t_0)\vec{c} + \vec{g}$ fällt weg, wenn x(t) unser IVP löst. Wir erhalten daher:

$$\vec{g}(t) = \Pi(t,t_0)\dot{\vec{c}}(t)$$

und daher:

$$\dot{c}(t) = \Pi(t,t_0)^{-1}\vec{g}(t) = \Pi(t_0,t)\vec{g}(t).$$

nun integrieren wir und erhalten:

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \Pi(t_0,s)\vec{g}(s)ds + x_0$$

und somit als Gesamtlösung:

$$x(t) = \Pi(t,t_0)\left(\int_{t_0}^{t} \Pi(t_0,s)g(s)ds + \vec{x_0}\right).$$

5 Vektorfelder

Definition 12. *Ein Vektorfeld (auf $\mathbb{R}^n$) ist eine Funktion, die jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor im $\mathbb{R}^n$ zuordnet.*

Jedes Vektorfeld erzeugt eine DGL $\dot{x} = F(x)$.
Wir verwenden folgende Notation für allgemeine Lösungen:
$\varphi^t(x)$(Fluss genannt), deswegen

$$\begin{cases} \dot{\varphi^t}(x) = F(\varphi^t(x)) \\ \varphi^0(x) = x \end{cases}$$

Es gilt weiters die Gruppeneigenschaft:

$$\varphi^{s+t} = \varphi^s(\varphi^t(x)).$$

Wie sieht nun ein lokales Bild eine Flusses aus?
Bei stationären Punkten (Vektorfeld $F(x) = 0$) schaut man sich die Jacobi-Matrix und deren Eigenwerte an, und kann dadurch feststellen, ob eine Quelle, Senke usw. vorliegt. Bei einer Senke gilt wieder, dass der Realteil der Eigenwerte $<$0 sein muss, bei einer Quelle muss der Realteil $>$0 sein, und bei einem Sattelpunkt ist der Realteil des einen Eigenwertes $<$0 und $>$ als der Realteil des anderen. Die Phasenportraits sehen denen ähnlich, die wir schon bearbeitet haben.
Bei nicht-stationären punkten allerdings ist der Fluss lokal parallel, sofern man eine Koordinatentransformation durchführt. Das heißt liegt der Fluss vielleicht in gekrümmten Linien vor, so kann man durch eine Koordinatentransformation die Linien gerade machen, was folgendes Lemma besagt.

Lemma 4. *Falls F(x)$\neq$ 0, dann gibt es eine Koordinatentransformation $y = \phi(x)$, sodass die neuen Koordinaten des Vektorfeldes parallel Werden.*

Beweis. O.B.d.A. sei $F(x_0)_1 \neq 0$. Betrachte die Funktion:

$$\psi(y_1, ..., y_n) = \varphi^{y_1}(0, y_2, ..., y_n).$$

Es stellt sich nun die Frage ob ψ invertierbar ist. Wir wenden nun das Inverse Function Theorem (IFT) an und erhalten:

$$D\psi(y_0) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial\psi}{\partial y_n}\right) = \begin{pmatrix} F(x_0) \neq 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & 1 & 0 & 0 \\ ... & & ... & ... \\ ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, und wegen IF ist ψ in der nähe von y_0 invertierbar mit Inversem ϕ. $\square$

Definition 13. $(\varphi^t(x))_{t\in\mathbb{R}}$*=Orb(x) heißt der Orbit(Trajektorie/Bahnlinie) von x. Es gibt verschiedene Typen von Orbits nämlich:*

- *Stationär*
- *Periodisch,*$\varphi^T(x) = x$ *(z.B Kreislinien)*
- *Asymptotisch stationär/periodisch*

Wir wollen nun zwei wichtige Mengen definieren und begutachten:

Definition 14. *ω-Limesmenge*

$$\omega(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists t_n \nearrow \infty : \varphi^{t_n}(x) \to y,\ for\ n \to \infty\}.$$

α-Limesmenge

$$\alpha(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists t_n \searrow -\infty : \varphi^{t_n}(x) \to y,\ for\ n \to \infty\}.$$

Satz 9. *Jede $\omega(x), \alpha(x)$ ist abggeschlossen und φ^t-invariant. Falls zusätzlich Orb(x) beschränkt ist, so gilt weiters, dass$\omega(x), \alpha(x)$ nicht-leer, kompakt und zusammenhängend ist.*

Beweis. Sei (y_n) eine Folge in $\omega(x)$, sodass $y_n \to y$ konvergiert.
Zu zeigen: $y \in \omega(x)$.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein t_n, sodass

$$d(y_n, \varphi^{t_n}(x)) \leq \frac{1}{n}.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} d(\varphi^{t_n}, y) \leq \lim_{n\to\infty} d(y_n, y) + d(y_n, \varphi^{t_n}(x)) = 0.$$

Dies gilt, da der erste Limes 0 ist und

$$d(y_n, \varphi^{t_n}(x)) \leq \frac{1}{n}.$$

Somit ist $y \in \omega(x)$, also $\omega(x)$ abgeschlossen. Nun zur φ^t-Invarianz:

$\Rightarrow t_n + t$ Folge, sodass sie gegen φ^t konvergiert, dann:

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi^{tn+t}, \varphi^t(y)) = \lim_{n\to\infty} d(\varphi^t \circ \varphi^{t_n}(x), \varphi^t(y)) =$$

$$d(\varphi^t(\lim_{n\to\infty} \varphi^{t_n}(x)), \lim_{n\to\infty} \varphi^t(y)) =$$

$$= d(\varphi^t(y), \varphi 1t(y) = 0$$

. Somit ist auch die φ^t-Inverianz gezeigt. $\square$

Kurze Nebenbemerkung:

$\omega(y)$ ist φ^t-invariant bedeutet $y \in \omega(x)$, dann auch

$$\varphi^t(y) \in \omega(x) \Rightarrow \exists \tilde{t} \nearrow: \varphi^{t_n}(x) \to \varphi^t((y)).$$

Also ist jetzt Orb(x) beschränkt, also existiert ein kompaktes K in $\mathbb{R}^n$, sodass Orb(x)$\subset K$. Dann ist $(\varphi^t(x))_{t\in\mathbb{N}}$ eine folge in K, also $\varphi^t(x)_{t\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass φ^{t_n} konvergiert in K mit Grenzwert $y \in K$ und $y \in \omega(x)$, und damit ist $\omega(x)$ nicht-leer.

$\Rightarrow \omega(x)$ is abgeschlossen im kompakten K, also ist auch $\omega(x)$ kompakt.

Nun wollen wir uns dem zusammenhängend widmen, und werden definieren was nicht-zusammenhängend ist, um zu zeigen, dass $\omega(x)$ zusammenhängend ist.

Definition 15. *Eine menge A ist nicht zusammenhängend, wenn es zwei offene Mengen U,V gibt, sodass $A \subset U \cup V, U \cap V = \emptyset, A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$.*

Bei unserem Beispiel haben wir:

$$\varphi^{t_n}(x) \to y, for\ t_n \nearrow \infty$$

$$\varphi^{\tilde{t_n}}(x) \to z, for\ \tilde{t} \nearrow \infty$$

$$\Rightarrow \forall n \exists s_n > t_n,$$

sodass $\varphi^{s_n}(x) \notin U, V$.

Die Folge

$$(\varphi^{s_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset K \diagdown \{U \cup V\}$$

mit konvergenter Teilfolge

$$(\varphi^{s_{n_k}}(x))_{k \in \mathbb{N}} \to L \in K \diagdown U \cup V,$$

und auch L$\in \omega(x)$.

Betrachten wir nun folgendes Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x^2 + y^2 - 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ a > 0$$

$$\dot{x} = -ay, \ \ y = \dot{\ }{-a\dot{y}} = -a^2 x$$

ist eine unserer ODEs mit Lösung

$$x(t) = A\cos(at) + B\sin(at).$$

Wir sehen dass unsere Lösung ein Kreis ist, mit Radius

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wir leiten nun den Radius unseres Orbits ab:

$$\frac{d}{dt} R^2(\varphi^t(z)) = \frac{d}{dt} x^2(t) + y^2(t) = \ = 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) =$$

$$= 2x(t)(-ay(t)) + 2y(t)(ax(t)) = 0$$

, was wir haben wollten.

Wir sehen also,

$$\dot{R} = 0, \ \ \dot{\varphi} = a.$$

Nun leiten wir den Orbit eines anderen zufällig ausgewählten Punktes ab und erhalten:

$$(\dot{R^2}) = \frac{d}{dt} R^2(\varphi^t(\tilde{z})) = \frac{d}{dt} x^2 y^2 = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} =$$

$$= 2x(-ay + (x^2 + y^2 - 1)x^2) + 2y(ax + (x^2 + y^2 - 1)y) =$$

$$= 2(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2) = 2(R^2 - 1)R^2.$$

Abschließend noch eine Zeichnung, welche uns beim Auffinden der $\omega(x)$ und $\alpha(x)$ Menge helfen wird:

Hier ist p als zufälliger Punkt gewählt und entspricht $\varphi^1(z)$, S bezeichnet den ganzen Kreis, R den Radius $p' = \tilde{z}$. Wir sehen weiters, dass hier ein periodischer Orbit vorliegt.

Widmen wir uns nun unserer Limes-Mengen. Stellen wir uns die Frage, was die $\omega(x)$ Menge ist, so schließen wir, dass sie der Ganze Kreis S ist, da in vorwärtser Zeit jeder

Punkt in der Menge liegt. Analog gilt das für die $\alpha(x)$ Menge. Dies ist aber nicht immer der Fall, nur ist es bei unserem Kreis recht einfach. Was ist nun die $\omega(x)$ bzw $\alpha(x)$ Menge am Ursprung? Nun es ist die Menge $\{(0,0)\}$.

Stellen wir uns nun den Punkt $\tilde{z}$ vor, der in vorwärtser Zeit vom Kreis anfängt und von ihm wegdivergiert. Hier ist die $\omega(x)$ Menge leer, denn der Orbit geht ins unendliche und hat nichts wogegen er konvergieren kann. Anders ist es bei der $\alpha(x)$ Menge, da sie in diese Falle rückwärts gegen die Zeit geht, und somit Gegen den Kreis selber konvergiert, also wäre $\alpha(x)$=S. Man muss also nur schauen wogegen der Orbit vorwärts und rückwärts in der Zeit konvergiert/divergiert.

Das selbe Spiel können wir mit einem Punkt im Kreis spielen. Haben wir einen Punkt $\tilde{\tilde{z}}$ kommt es drauf an wohin der Orbit Zeit, denn in vorwärtser Zeit würde er gegen $(0,0)$ konvergieren, was der $\omega(x)$ Menge entspricht. Andersum würde in rückwärtser Zeit gegen den Kreis S konvergieren, was $\alpha(x)$=S zur folge hat.

5.1 Gradientenvektorfeld

Definition 16. *Sei $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so ist*

$$\nabla G = \ grad(G) = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial G}{\partial x_n} \right).$$

Ein Gradientenvektorfeld ist genau ∇G.

Eigenschaften:

1) ∇G zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs, und:

$$\frac{d}{dt} G(\gamma(t)) = \nabla G(\gamma(t)) \dot{\gamma}, \text{ mit } |\dot{\gamma}| = 1$$

ist maximal. falls ∇G und $\dot{\gamma}$ parallel sind, und minimal, falls ∇G und $\dot{\gamma}$ antiparallel sind.

2.) Niveaulinien von G stehen senkrecht auf ∇G. Sei $\gamma(t)$ eine Kurve, sodass

$$G(\gamma(t)) = const,$$

also

$$\frac{d}{dt} G(\gamma(t)) = 0 = \nabla G(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t).$$

Beispiele:

$$G(x, y) = \sin(x^2 + y^2).$$

$$G(x, y) = \cos(x) + \cos(y).$$

5.2 Lyapunov-Funktionen

Definition 17. *Sei x_0 ein stationärer Punkt eines Vektorfeldes. L heißt Lyapunov-Funktion, falls gilt:*

• $L(x) \geq 0$ *auf einer Umgebung* $U \ni x$ *und* $L(x) = 0 \Longleftrightarrow x = x_0$

• *L ist stetig auf U*

• $L(\gamma(t_1)) \geq L(\gamma(t_2)) \;\; \forall t_1 < t_2$*, sodass* $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in U$

(L heißt strikt lyapunov, falls $L(\gamma(t_1)) > L(\gamma(t_2))$*).*

Nun zu einem Beispiel:

$$\dot{x} = f(x), \;\; x_0 \text{ sei ein stationärer Punkt, also } f(x_0) = 0.$$

Weiters sei $\gamma(t)$ eine Lösung in der Nähe von x_0. Wie wissen wir nun, ob L eine $C11$ Lyapunov-Funktion ist?

Wir definieren uns nun folgende Ableitung:

Definition 18. *Lie Ableitung*

Wir haben folgende Ableitung gegeben:

$$\frac{d}{dt} L(\gamma(t)) = \nabla L(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = \nabla L(\gamma(t)) \cdot f(\gamma(t)),$$

wobei

$$\nabla L(\gamma(t)) \cdot f(\gamma(t))$$

die Lie-Ableitung von L ist.

Lemma 5. *Sei L differenzierbar, sodass die Lie-Ableitung ≤ 0 und $L(x_0) = 0$ gilt, dann ist L lyapunov. Gilt sogar, dass die Lie-Ableitung von L strikt kleiner als 0 ist für alle Punkte $x \neq x_0$, so ist L strikt lyapunov.*

Warum uns Lyapunov-Funktionen interessieren sagt folgender Satz aus.

Satz 10. *Wenn x_0 eine Lyapunov-Funktion L hat, so ist x_0 stabil. und falls L sogar strikt Lyapunov ist, so ist x_0 asymptotisch stabil.*

Widmen wir uns nun dem letzten Beispiel in diesem Skript.

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion

$$L(x, y) = x^2 + y^2$$

und das System

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\eta y - x, \quad \eta \geq 0 \end{cases}$$

Ist nun L eine Lyapunov-Funktion von diesem System und wie sieht die Stabilität des Stationären Punktes $(x_0, y_0) = (0, 0)$aus?

Wir müssen uns nun einfach die Lie-Ableitung anschauen, und wissen dann sofort, was sache ist.

Lie-Ableitung:

$$\nabla L(x,y) \cdot f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -\eta y - x \end{pmatrix} = 2xy + 2y(-\eta y - x) = 2xy - 2xy - 2y^2\eta \leq 0.$$

Wir sehen, dass die Lie-Ableitung von L immer kleiner-gleich 0 ist, und L somit eine Lyapunov-Funktion ist. Weiters sehen wir, dass durch die Forderung $\eta \geq 0$ die Funktion durchaus 0 werden kann, für Punkte, die keine stationären Punkte sind, weshalb die Funktion nur ”normal”lyapunov ist und nicht strikt, was zur folge hat, dass der stationäre Punkt nur stabil ist und nicht asymptotisch stabil.