1a) Die Funktion $x \mapsto d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x,a)$ ist stetig. weil

$$d(x,A) - d(y,A) = \inf_{a \in A} d(x,a) - d(y,A)$$
$$\leq \inf d(x,y) + d(y,a) - d(y,A)$$
$$= d(x,y) + d(y,A) - d(y,A) = d(x,y)$$

Also die ε-δ-Definition von Stetigkeit trifft zu mit $\delta = \varepsilon$.

Jetzt sei $f(x) = \dfrac{d(x, U^c)}{d(x,U^c) + d(x,A)}$ für ein Umgebung U der abgeschlossen Menge A.

Aus der Form von f ist klar dass $f(x) \in [0,1]$ und $f|_A \equiv 1$, $f|_{U^c} \equiv 0$. Der Nenner ist nie null weil A und U^c disjunkte abgeschlossene Mengen sind. Mit der oben bewiesen Stetigkeit von $x \mapsto d(x,A)$ bzw $x \mapsto d(x,U^c)$ ist f stetig.

(Vergleich das übersprungene Lemma von Urysohn)

1b) Weil f und g stetig sind ist $f-g$ es auch.

$$U = \{ x \in X : f(x) \neq g(x) \} = \{ x \in X : (f-g)(x) \neq 0 \}$$
$$= (f-g)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$ ist das Urbild einer offenen Menge, also offen.

2a) Sei $\mathcal{U}(x)$ ein Umgebungssystem. Laut Definition enthält jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ eine offene Menge $x \in V = V_U \subset U$.
Das System $\{V_U\}_{U \in \mathcal{U}(x)}$ ist damit eine Umgebungsbasis die nur aus offenen Mengen besteht.

2b) $(t_i)_{i \in I}$ ist ein Netz mit gerichteter Indexmenge I, und $t_i \to t$ heißt dass für jede Umgebung $U \ni t$ es ein $i_U \in I$ gibt so dass $i \geq i_U \Rightarrow t_i \in U$.
Sei $V \ni f(t)$ eine beliebige offene Umgebung. Wegen Stetigkeit von f existiert eine offene Umgebung $U \ni t$ so dass $f(U) \subset V$.
Also $\forall i \geq_I i_U$ $f(t_i) \in f(U) \subset V$.
Deswegen konvergiert das Netz $(f(t_i))_{i \in I}$ gegen $f(t)$.

3a) Sei $U_{J,\varepsilon} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : |f(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in J \}$

Dann ist $\{ U_{J,\varepsilon} \}_{\varepsilon > 0,\, J \subset \mathbb{R} \text{ endlich}}$

eine Umgebungsbasis der Nullfunktion.

3b) Seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Für $g(x) := \sin(x + t_0)$ und $J \subset \mathbb{R}$ endlich

sei $U_{J,\varepsilon,g} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in J \}$.

Sei $|t - t_0| < \varepsilon$. Dann gilt für $\forall x \in J$

wegen des Mittelwertsatzes:

$$\begin{aligned} |\sin(x+t) - g(x)| &\leq |(x+t) - (x+t_0)| \, |\sin'(x+\xi)| \\ &\leq |t - t_0| \cdot \cos(x+\xi) \\ &< \varepsilon, \quad \text{d.h. } \sin(x+t) \in U_{J,\varepsilon,g} \end{aligned}$$

Also $t \mapsto \sin(x+t)$ ist stetig.

4a) Sei K kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen.

Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A, und $V := K \setminus A$ (offen in Spurtopologie auf K)

Dann ist $\{V\} \cup \{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von K.

Weil K kompakt ist gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{V\} \cup \{U_j\}_{j=1}^{N}$ von K.

Aber dann ist $\{U_j\}_{j=1}^{N}$ eine endliche Teilüberdeckung von A. Das heißt A ist kompakt.

4b) Überspringen – wir haben $T_1 - T_4$ Räume nicht gemacht.

5a) Sei $x \in X$ und offene Menge $V \ni x$ beliebig. Weil U dicht und offen! ist gibt es eine nicht-leere offene Menge $V' \subset V \cap U$.

Es ist <u>nicht</u> gegeben oder wichtig dass $x \in V'$.

Jetzt $(\overline{U^c})^\circ = ((U^\circ)^c)^\circ = (U^c)^\circ = \emptyset$ weil wir eben gezeigt heben dass U^c ein leeres Innere hat.

5b) $W = [0,1]^n$ und $\mathbb{R}^n$ sind nicht homöomorph weil W kompakt ist aber $\mathbb{R}^n$ nicht, und Kompaktheit ist invariant unter Homöomorphismen.

6a| Ein Punkt $x \in X$ ist Häufungspunkt eines Netzes $(t_\iota)_{\iota \in I}$ falls

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x)\ \forall\, i \in I\ \exists\, j \geq_I i \quad t_j \in U .$$

Eine Menge K ist kompakt d.u.n.d.a jedes Netz in K hat einen Häufungspunkt in K.

6b| Bei Definition von Produktraum sind alle Projektionen $\pi_j : \prod_{\iota \in I} X_\iota \to X_j$ stetig. Kompaktheit bleibt behalten unter stetigen Abbildungen, also

$\pi_j(K)$ ist kompakt.