VO Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik SS 2014; 9. Juli 2014

Nachname: Vorname:

MatNr: Unterschrift:

1. (6 Punkte) Ein Stapel enthält 52 Spielkarten der Farben rot, grün, blau und gelb, jeweils von 1 bis 13 durchnumeriert.

(a) Die Karten werden gut gemischt und dann auf vier Spieler verteilt. Wir erfahren, dass Spieler X die Karte "grün 1" erhalten hat. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Spieler X noch mindestens zwei weitere mit "1" beschriftete Karten erhalten hat.
Verwenden Sie dazu möglichst ein Modell welches von der Laplace-Annahme (uniforme Verteilung) auf einer geeigneten Grundmenge ausgeht. Auf jeden Fall ist der verwendete Wahrscheinlichkeitsraum (und seine Interpretation) zu beschreiben.

(b) Die Karten werden nochmals gemischt und dann nacheinander aufgedeckt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, beim k-ten Aufdecken die letzte der vier "1"-Karten zu erhalten.
Verwenden Sie dazu möglichst ein Modell welches von der Laplace-Annahme (uniforme Verteilung) auf einer geeigneten Grundmenge ausgeht. Auf jeden Fall ist der verwendete Wahrscheinlichkeitsraum (und seine Interpretation) zu beschreiben.

2. (6 Punkte) Der König sucht Nachwuchs für den diplomatischen Dienst. Dies ist schwierig, weil 99,9% der Bevölkerung unter einer Krankheit leiden, welche sie fast immer die Wahrheit sagen lässt.

(a) Zum Glück gibt es einen klinischen Test, der Gesunde (für den Dienst geeignete) in 99% der Fälle als solche erkennt, bei zwanghaft ehrlichen aber nur in 1% aller Fälle fälschlich behauptet, sie könnten gezielt schwindeln. Wenn bei einer zufällig gewählten Person der Test diese seltene Eigenschaft anzeigt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person tatsächlich schwindeln kann?

(b) Um geeignete KandidatInnen zu finden, wird 500 mal zufällig irgendeine Person aus der Gesamtbevölkerung ausgewählt. Dabei wird S mal wirklich eine gesunde Person erwischt. Geben Sie die Verteilung von S an, und bestimmen Sie insbesondere $\mathbb{E}[S]$.

(c) Kann man die Verteilung von S durch eine handlichere Verteilung angenähert beschreiben? Durch welche und warum? Geben Sie damit eine Approximation für $P[S \leq 2]$ an.

3. (6 Punkte) Es sei $b > 0$ eine Konstante. Der Zufallsvektor (X, Y) in dem Dreieck $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq b\}$ besitze folgende Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f(x, y) := C 1_D(x, y)\,(x + y).$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante C.

(b) Bestimme Dichte, Erwartungswert und Varianz von X. Sind X und Y unabhängig? (Wesentlich ist die Begründung der Antwort!)

(c) Sei $Z := X + Y$. Man bestimme die Verteilungsfunktion von Z. Ist Z ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter b? Sind X und Z unabhängig? (Wesentlich ist die Begründung der Antwort!)

4. (6 Punkte)

(a) Die ganzzahlige Zufallsvariable $X_n > 0$ besitze die geometrische "Wartezeit"-Verteilung mit Parameter $p_n = \frac{1}{n}$, sodass also $P[X_n = k] = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^{k-1}$ für $k \geq 1$. Man bestimme die Fouriertransformierte (charakteristische Funktion) $h_{X_n}(t)$ von X_n.

(b) Die kontinuierliche Zufallsvariable $Y > 0$ besitze die Exponentialverteilung mit $P[Y > s] = e^{-s}$, $s > 0$. Man bestimme die Fouriertransformierte $h_Y(t)$ von Y.

(c) Wie verhält sich die Fouriertransformierte $h_{X_n/n}(t)$ von $\frac{1}{n}X_n$ für $n \to \infty$? (Begründung!) Was sagt dies über $\frac{1}{n}X_n$ und Y aus? (Begründung!)

5. (6 Punkte) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] =: \mu$ und $\mathrm{V}[X] =: \sigma^2 < \infty$. Wir interessieren uns für $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ bei großem n. Dabei sind ggfs der Grenzwert und die Art der Konvergenz möglichst ausführlich anzugeben bzw zu definieren.

(a) Welche Aussage wird in der Tschebyschew-Ungleichung über S_n getroffen?

(b) Welche Aussage wird im schwachen Gesetz der großen Zahl über S_n getroffen?

(c) Welche Aussage wird im zentralen Grenzwertsatz über S_n getroffen?

6. (10 Punkte) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche sind falsch? Wesentlich ist jeweils die Begründung Ihrer Antwort!

(a) Durch $F(t) := 1_{(0,\infty)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ist die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable gegeben.

(b) Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige 0-1-Münzen mit $\mathrm{P}[X_k = 1] = 2/3$, und $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, dann:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[S_n \leq \frac{2n + \sqrt{2n}}{3}\right] = \Phi(1).$$

(c) Hat die Dichte f der Zufallsvariable X die Symmetrieeigenschaft $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, dann folgt $\mathbb{E}[X] = 0$.

(d) Der Zufallsvektor (X, Y) sei kontinuierlich verteilt, und $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Funktionen. Dann sind $\varphi(X)$ und $\psi(Y)$ unabhängig.

(e) Es seien $X_1, \ldots, X_{400}$ unabhängige 0-1-Münzen und $\mathrm{P}[X_k = 1] = p$ unbekannt. Setze $S := X_1 + \ldots + X_{400}$, dann ist $I := [\frac{1}{400}S - \frac{1}{2}, \frac{1}{400}S + \frac{1}{2}]$ ein Konfidenzintervall für p zum Niveau 0.99.

Viel Erfolg!