VO Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik SS 2014; 19. Dez 2014

Nachname: Vorname:

MatNr: Unterschrift:

1. (3 Punkte) Tourismus in Memphis, Tennessee.

(a) In Memphis befinden sich 5mal soviele Touristen wie Einheimische. 60% der Touristen tragen Elvis-Kostüme, aber nur jede(r) fünfte Einheimische. Wenn eine zufällig gewählte Person in Memphis ein Elvis-Kostüm trägt, mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine(n) Einheimische(n)?

(b) Während der 100 Tage dauernden Hauptsaison kontrolliert die Bürgerwehr täglich einen Touristen. Die Wahrscheinlichkeit, bei so einer Kontrolle einen Schallplattendieb zu erwischen ist $p = 0.03$. Man bestimme die Verteilung der Gesamtzahl S der in der Saison ertappten Diebe, und berechne deren Erwartungswert. Durch welche einfachere Verteilung kann S gut (angenähert) beschrieben werden? Formulieren Sie den zuständigen Approximationssatz.

2. (10 Punkte) Bei der Weihnachtsfeier der Königlichen Gesellschaft für Angewandte Statistik erhält jedes der 32 Mitglieder ein Glückskeks, wobei nur vier der Kekse tatsächlich Glückwünsche enthalten. Die Kekse werden in zufälliger Reihenfolge angeordnet, und dann nacheinander geöffnet.

(a) Geben Sie einen geeignetes formales Modell an, und erklären Sie wie dieses zu interpretieren ist.

(b) Bestimme mithilfe des Modelles (!!) die Wkeit dafür, dass die ersten beiden Kekse Glückwünsche enthalten.

(c) Bestimme die Wkeit dafür, beim Öffnen des k-ten Keks zum zweiten mal einen Glückwunsch zu entdecken.

Nebenan feiert zugleich die (mit der ersten Gruppe verfeindete) Königliche Gesellschaft für Theoretische Statistik. Auch diese bekommt 32 zufällig angeordnete Glückskekse, allerdings enthalten 8 davon einen Glückwunsch. Wir wählen eine der Gruppen zufällig aus, und betrachten die ersten beiden Kekse dort.

(d) Bestimme die Wkeit dafür, dass diese beiden Kekse Glückwünsche enthalten.

(e) Falls diese beiden Kekse Glückwünsche enthalten, wie groß ist die Wkeit, dass das erste Keks der anderen Gruppe auch einen Glückwunsch enthält?

3. (4 Punkte) Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(t) := 1 - e^{-2t}$, $t \geq 0$.

(a) Bestimmen Sie Dichte und Erwartungswert von X.

(b) Bestimmen Sie die Dichte von $Y := X^3$ und $\mathrm{P}[Y > 8 \mid Y > -2]$.

Bitte wenden!

4. (8 Punkte) Es sei $a > 0$ eine Konstante. Der Zufallsvektor (X, Y) in dem Dreieck $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < a\}$ besitze folgende Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f(x, y) := C\, 1_D(x, y)\, xy.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante C. Sind X und Y unabhängig? (Wesentlich ist die Begründung!)

(b) Bestimmen Sie Dichte, Erwartungswert und Varianz von X.

(c) Es sei $Z := \frac{X}{Y}$. Bestimmen Sie Verteilungsfunktion, Erwartungswert, und Varianz von Z.

(d) Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für den Parameter a an.

5. (9 Punkte) Es seien $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert $\mathbb{E}[X] =: \mu$. Wir interessieren uns für $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ bei großem n.

(a) Definieren Sie, was es bedeutet, dass eine Folge (R_n) von Zufallsvariablen in Wahrscheinlichkeit gegen eine Variable R konvergiert.

(b) Definieren Sie, was es bedeutet, dass eine Folge (R_n) von Zufallsvariablen in Verteilung gegen eine Variable R konvergiert.

(c) Welche Aussage über S_n wird im schwachen Gesetz der großen Zahl getroffen?

(d) Was besagt die Tschebyschew-Ungleichung? Beweisen Sie damit das Gesetz der großen Zahl!

(e) Welche Aussage über S_n wird im zentralen Grenzwertsatz getroffen?

Als Spezialfall seien die X_k nun konkret "Münzen" mit $p = \mathrm{P}[X_1 = 1] = 1 - \mathrm{P}[X_1 = 0] = \frac{2}{3}$.

(f) Angenommen, die ersten 9 Würfe ergeben $X_1 = \ldots = X_9 = 0$. Erlaubt das Gesetz der großen Zahl (bzw die Tschebyschew-Ungleichung) nun eine genauere Aussage über die Erfolgswahrscheinlichkeit beim folgenden zehnten Wurf? (Falls ja, welche?)

(g) Formulieren Sie die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes möglichst explizit für den Fall dieser konkreten Folge (X_k) von Zufallsvariablen.

6. (6 Punkte) Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt, welche ist/sind falsch? Wesentlich ist jeweils die Begründung Ihrer Antwort.

(a) Der Zufallsvektor (X, Y) sei zentriert normalverteilt mit Kovarianz $C[X, Y] > 0$. Dann haben X und Y immer dasselbe Vorzeichen.

(b) Ein Punkt (X, Y) werde zufällig im Einheitskreis $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ gewählt. Die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass er dem Rand $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ näher liegt als dem Ursprung $(0, 0)$ beträgt $p = 1/2$.

(c) Hat die Dichte f der Zufallsvariable X die Symmetrieeigenschaft $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, so folgt immer, dass $\mathbb{E}[X] = 0$.

Viel Erfolg!