Gewöhnliche Differentialgleichungen, VO250009
Prüfung, 13 Oktober 2016

Name:.. Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \frac{6(1+t)}{t}\dot{x} + (\frac{6}{t^2} + \frac{18}{t} + 5)x = \frac{5}{t} \tag{1}$$

(a-2pt) Ist (1) linear, homogen, autonom, separabel?

(b-2pt) Schreiben Sie (1) zu einer **autonomen** Gleichung erster Ordnung um.

(c-3pt) Verwenden Sie die Transformation $y = t^p x$, mit einem geeigneten Wert p, um (1) umzuschreiben zu

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 5t^q. \tag{2}$$

Zeigen Sie dass $q = 2$.

(d-3pt) Geben Sie die allgemeine Lösung von (2).

Aufgabe 2: (a-3pt) Geben die Definition einer Lipschitz Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} \tag{3}$$

nicht Lipschitz stetig ist.

(b-2pt) Formulieren Sie den Satz von Picard-Lindelöf.

(c-3pt) Erklären Sie warum der Satz für f in (3) nicht gültig ist. Besprechen Sie die Lösung(en) des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0.$$

(d-2pt) Seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Lösungen der Gleichung $\dot{x} = f(x)$, mit unterschiedlichen Anfangswerten $x_1(0) = 1.0$ und $x_2(0) = 1.01$. Geben Sie eine obere Schranke für $|x_1(3) - x_2(3)|$.

Aufgabe 3: Gegeben sei das Vektor Feld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + \frac{3}{2}x^2 \end{pmatrix}.$$

(a-2pt) Geben Sie die stationären Punkte und deren Typ (Senke, Quelle, usw.) der folgenden Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

an.

(b-4pt) Zeigen Sie, dass die Funktion $L(x, y) = x^2 - x^3 + y^2$ eine Lyapunov Funktion ist. Verwenden Sie das um zu zeigen, dass:

1. in der Nähe des Ursprungs alle Lösungen periodisch sind.
2. eine beschränkte aber nicht-periodische Lösung existiert.

(c-2pt) Skizzieren Sie das Phasenporträt von (4).

(d-2pt) Wie lautet die Definition einer ω-Limes Menge? Veranschaulichen Sie in der Skizze von 3c), für welche Punkte $z \in \mathbb{R}^2$, $\omega(z)$ aus einem einzigen Punkt besteht.

Aufgabe 4: (a-2pt) Seien A, B $(n \times n)$-Matrizen. Wie ist die Exponentialfunktion e^A definiert? Gilt $e^{A+B} = e^A e^B$? Erklären Sie warum (nicht)?

(b-2pt) Sei

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie e^{tN}.

(c-2pt) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2y. \end{cases} \tag{5}$$

Ist der Ursprung stabil/asymptotisch stabil?

(d-4pt) Lösen Sie das System (5) mit dem Anfangswert $x(0) = y(0) = 1$.
Hinweis oder zur Erinnerung: Für Jordan-Blöcke von nicht-diagonalisierbaren Matrizen braucht man verallgemeinerte Eigenvektoren v, für welche gilt $Av - \lambda v = w$, wobei w ein anderer (verallgemeinerte) Eigenvektor ist.

Viel Erfolg!