VO Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik SS

Nachname: Vorname:

MatNr: Unterschrift:

Bei jeder Aufgabe ist die Punktezahl angegeben.

1. In einer Schublade befinden sich 10 Socken: 3 grüne und 7 gelbe.

   (a - 2p) Falls 4 Socken beliebig gezogen werden, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit auf mindestens 2 grüne? Falls unter diesen 4 Socken noch kein grünes Paar ist, wie groß wie groß ist die Wahrscheinlichkeit auf ein grünes Paar wenn noch eine Socke gezogen wird?

   (b - 2p) Beschreiben Sie den Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace. Wo wird dieser in Teil a) angewendet?

   (c - 3p) Alle Socken sind wieder in der Schublade. Wir ziehen jeweils eine Socke und werfen sie wieder in die Schublade. Sei $X = n$ das Ergebnis dass zum ersten Mal eine gelbe Socke bei der n-ten Ziehung herauskommt. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$.

   (d - 3p) Gleiche Frage wie bei c), aber jetzt werden die Socken nicht zurückgeworfen.

2. Die Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig und beide exponentiell verteilt auf $[0, \infty)$, mit Parametern $\lambda_X = 2$ und $\lambda_Y = 5$.

   (a - 2p) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 4 | X > 2)$.

   (b - 3p) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 2Y)$.

   (c - 2p) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\psi : U \to \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und Z ein auf U getragener Zufallsvektor mit Dichte h. Formulieren Sie den Transformationssatz der es ermöglicht die Dichte von $\psi(Z)$ zu berechnen.

   (d - 3p) Berechnen Sie die Dichte von $2X - Y$.

3. Gegeben sei die Funktion $h(x, y) = 1_Q(a + bx)y$ wobei der Rechteck $Q = [-1, 1] \times [0, 1]$ der Träger eines Zufallsvektors (X, Y) ist.

   (a - 2p) Für welche Werte von a, b ist h eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

   (b - 2p) Für welche Werte von a, b gilt zusätzlich dass die Erwarung $\mathbb{E}(X) = 0$?

   (c - 3p) Sei $a = b = 1$ und $Z = \min(X, Y)$. Berechnen Sie die Verteilung von Z.

   (d - 3p) Berechnen Sie die Kovarianz Matrix von X und Y falls $a = 1$, $b = 0$. Begründen Sie Ihre Antwort.

   Bitte wenden!

4. Ein Biologe zählt Ameisen und Käfer in der freien Natur. Bekannt ist dass in einem trockenen Feld diese Insekten im Verhältnis 3 : 1, und in einem naßen Feld im Verhältnis 2 : 1 vorkommen. (Andere Insekten werden ignoriert.) Dreißig Prozent der Felder werden als naß wahrgenommen.

   (a - 2p) Der Biologe nimmt eine Stichprobe von 10 Insekten. Ohne die Feuchtigkeit des Feldes zu kennen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit 8 Ameisen und 2 Käfer zu fangen?

   (b - 2p) Wenn die Stichprobe tatsächlich 8 Ameisen und 2 Käfer enthält, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass das Feld naß war?

   (c - 2p) Wir nehmen an, die Anzahl X von Ameisen in einem gewissen Quadratmeter ist Poisson-verteilt mit Parameter λ, und aus Stichproben wurde $\mathbb{E}(X) = 150$ geschätzt. Wie groß ist λ und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 10 Ameisen in diesem Feld anzutreffen?

   (d - 2p) Berechnen Sie die charakteristische Funktion von X, und leiten Sie das zweite Moment von X ab.

   (e - 2p) Verwenden Sie d) um die Verteilung von Ameisen in 10 Quadratmeter zu finden. Sie dürfen annehmen dass diese Quadratmetern so weit von einander entfernt sind, dass die Anzahl der Ameisen in jedem einzelnen Quadratmeter unabhänging sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Die folgende Tabelle bezeichnet $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$.

t	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
$\Phi(t)$	0.50	0.58	0.66	0.73	0.79	0.84	0.88	0.92	0.95	0.96	0.98	0.99

   Seien $\{X_i\}_{i\geq 1}$ Zufallsvariablen, und $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

   (a - 2p) Formulieren Sie den zentralen Grenzwertsatz. (Bitte keine Voraussetzungen vergessen!)

   (b - 3p) Ein Spendeneinsammler geht entlang der Häuser und bittet um Spenden. In Durchschnitt spenden die Leute 7.40 €, unabhängig von den Spenden underer Personen, und die Standardabweichung ist 1.80 €. Falls der Spendeneinsammler in einer Straße 70 Personen befragt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er weniger als 500 € einbringt?

   (c - 2p) Was ist mit einem Maximum Likelihood Schätzer gemeint?

   (d - 3p) Auf Grund der Spenden $X_1, \ldots, X_{70}$ dieser Personen, konstruieren Sie einen Maximum Likelihood Schätzer für die Erwartung einer Spende. Zeigen Sie dass dies wirklich ein Maximum Likelihood Schätzer ist. Ist dieser Schätzer Erwartungstreu?

Viel Erfolg!