Ein wenig Maßtheorie

Wiederholung und Borel-/Lebesgue-messbare Mengen:

Ω ist ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Wahrscheinichkeitsmaß $\mathbb{P}$ und σ-Algebra $\mathcal{F}$:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$;
- $A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow A_i^c \in \mathcal{F}, \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Beispiele von σ-Algebren:

- $\mathcal{F} = P(\Omega)$, die Potenzmenge von Ω, d.h. alle Teilmengen von Ω. (Im Allgemeinen zu groß!)
- $\mathcal{F}$ sind alle abzählbaren und ko-abzählbaren Mengen.
- $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, die Borel-Mengen.
- $\mathcal{F}$ sind die Lebesgue-messbaren Mengen (falls $\Omega \subset \mathbb{R}^n$).

Definition 1 *In einem topologischen Raum ist die Borel-Algebra $\mathcal{B}$ die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält. D.h. Ω hat eine Topologie und $\mathcal{B}$ wird von den offenen Mengen mittels abzählbarer Vereinigungen, abzählbarer Durchschnitte und Komplementen erzeugt.*

Beispiel 2 $\Omega = [0,1]$ *mit Euklidischer Topologie.*
$\{a\}$ *ist eine Borel-Menge, weil* $\{a\} = \bigcap_{1\le n\in\mathbb{N}}(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n})$.
$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ *ist eine Borel-Menge, weil* $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] = [0,1] \setminus ([0,\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1])$.
$\mathbb{Q}$ *ist eine Borel-Menge, weil* $\mathbb{Q} = \bigcup_{1\le q\in\mathbb{N}} \bigcup_{0\le p\le q} \bigcap_{1\le n\in\mathbb{N}} (\frac{p}{q}-\frac{1}{n}, \frac{p}{q}+\frac{1}{n}) \cap [0,1]$.

Ein Maß μ (zB. das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω) heißt:

- σ-additiv, falls $A_i \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt, dann $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$;
- translationsinvariant (auf $\Omega = \mathbb{R}^n$), falls für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A+v) = \mu(A)$, wobei $A + v = \{a + v : a \in A\}$.

Definition 3 *Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue-) Nullmenge falls*

$$\forall \varepsilon \ \exists \text{ eine Folge von Blöcken } (B_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ so dass } A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \text{ und } \sum_{i\in\mathbb{N}} Vol(B_i) < \varepsilon.$$

Ein Block is eine Menge der Form $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ und dessen Volumen ist $Vol(B) = \prod_{i=1}^n b_i - a_i$.

Es ist klar, dass Teilmengen von Nullmengen wieder Nullmengen sind.

Definition 4 *In $\mathbb{R}^n$ ist die σ-Algebra $\mathcal{F}_{Leb}$ von Lebesgue-messbaren Mengen die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen und Nullmengen enthält. D.h. $\mathcal{F}_{Leb}$ ist erzeugt von den offenen Mengen und Nullmengen mittels abzählbarer Vereinigungen, abzählbarer Durchschnitte und Komplementen.*

Charakterisierung: Das Lebesgue'sche Maß λ auf $\mathbb{R}^n$ ist das eindeutige Maß mit den Eigenschaften:

- λ ist defininiert auf $\mathcal{F}_{Leb}$ und σ-additiv;
- λ ist translationsinvariant;
- λ is normiert so dass $\lambda([0,1]^n) = 1$.

Hieraus folgt auch:

- $\lambda(N) = 0$ für jede Nullmenge.

Beispiel 5 *(Die Mittel-ε Cantor-Menge):*
- Fang mit dem Einheitsintervall $C_0 = [0,1]$ an und $\varepsilon \in (0,1)$.
- Bilde C_n aus C_{n-1} indem aus jeder Intervallkomponente J von C_{n-1} das offene mittlere Intervall der Länge $\varepsilon|J|$ entfernen wird.
- Die gefragte Cantor-Menge ist $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.
Dann hat C_n genau 2^n Intervallkomponenten von Länge $\frac{(1-\varepsilon)^n}{2^n}$. Damit ist

$$\lambda(C) = \lambda(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{(1-\varepsilon)^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} (1-\varepsilon)^n = 0.$$

Also die Mittel-ε Cantor-Menge ist eine überabzählbare Nullmenge.

Definition 6 *Ein Ereignis A gilt als* **fast sicher** *(Abkürzung f.s. oder a.s für almost sure auf Englisch), falls A^c eine Nullmenge ist. Wir können deswegen von fast sicherer Konvergenz sprechen:*

$$X_n \to X \quad \textit{f.s.}$$

falls $\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ bis auf eine Nullmenge.

Nicht alle Mengen sind Lebesgue-messbar.

Zu solchen Mengen (Ereignissen) kann man also keine Wahrscheinlichkeit zuordnen:

Beispiel 7 *(Vitali-Mengen auf $\Omega = [0,1]$)*

- *Äquivalenzrelation $x \sim y$ falls $x - y \in \mathbb{Q}$.*
- *Äquivalenzklassen $[x]$ sind also abzählbar und es gibt überabzählbar viele Äquivalenzklassen.*
- *Wähle aus jeder Äquivalenzklasse ein Element z. Diese formen die Menge Z. Hier verwenden wir das* **Auswahlaxiom***!*
- *NB: $\#(Z \cap [x]) = 1$ für jede Äquivalenzklasse $[x]$, und*

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} (Z+q) \bmod 1 = [0,1].$$

  aber die Mengen $(Z+q) \bmod 1$ für $q \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ sind paarweise disjunkt.

Die Menge Z ist nicht messbar, d.h. $Z \notin \mathcal{F}_{Leb}$. Nämlich gilt entweder $\lambda(Z) = 0$, aber dann $\lambda(Z + q \bmod 1) = 0$ wegen Translationsinvarianz und dann

$$\lambda([0,1]) = \lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (Z+q) \bmod 1) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \lambda(Z + q \bmod 1) = 0,$$

oder $\lambda(Z) > 0$ und dann

$$\lambda([0,1]) = \lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (Z+q) \bmod 1) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \lambda(Z + q \bmod 1) = \infty.$$

Beide sind natürlich nicht wahr. Die einzige Möglichkeit ist also dass Z nicht messbar ist.

Merke: da alle Borel-Mengen Lebesgue-messbar sind, ist Z auch keine Borel-Menge.

Produkträume und Produktmaße.

Produkträume $\Omega = \prod_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$ werden häufig verwendet für Folgen von unendlich vielen Bernoulli-Experimenten. Zum Beispiel, $\Omega_i = \{K, Z\}$ entspricht den Münzwürfen und $\Omega_i = \{1,2,3,4,5,6\}$ den Würfelwürfen. Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf Ω ist das unendliche Produkt $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_i$ wobei die $\mathcal{F}_i$ σ-Algebren aus Ω_i sind. Bei dem Münz- oder Würfelwurf mit endlichem Ω_i kann man für $\mathcal{F}_i$ einfach die Potenzmengen nehmen $\mathcal{F}_i = P(\Omega_i)$. Aber die Räume können zum Beispiel auch (Teilmengen von) $\mathbb{R}^n$ sein, mit $\mathbb{P} =$ Lebesgue-Maß.

Definition 8 *Sei $\mathbb{P}_i$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Das Produktmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist gegeben durch*

$$\mathbb{P}(A_0 \times A_1 \times \cdots) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

wobei $A_i \in \mathcal{F}_i$. Also die Bernoulli-Experimenten sind hier unabhängig genommen.

Falls Ω_i immer die gleiche endliche (oder sogar abzählbare) Menge ist, können wir einen Wahrscheinlichkeitsvektor $p = (p_k)_{k \in \Omega_i}$ nehmen (d.h. $p_k \geq 0$ und $\sum_{k \in \Omega_i} p_k = 1$) und $\mathbb{P}_i$ definieren durch $\mathbb{P}(k) = p_k$ für $k \in \Omega_i$. In diesem Fall heißt das Produktmaß $\mathbb{P}$, das (p_k)-Bernoulli Maß.

Wir schreiben kurz $\mathbb{P}(A_1 \times \cdots \times A_n)$ für $\mathbb{P}(A_0 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots)$. Nullmengen $N = N_0 \times N_1 \times \cdots$ sind also Mengen mit $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(N_i) = 0$, und das wird schon erreicht wenn eine der Mengen N_i Maß null hat (also $\mathbb{P}_i(N_i) = 0$).

Also das $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-Bernoulli Maß beschreibt unendlich viele Münzwürfe mit einer fairen Münze. In diesem Fall können wir natürlich auch $\Omega_i = \{0, 1\}$ statt $\{K, Z\}$ schreiben.

Das starke Gesetz der großen Zahlen.

Frage: Gehört die Menge

$$H := \left\{ (X_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{2} \right\}$$

zu $\mathcal{F}$? In dem Fall, was ist $\mathbb{P}(H)$?

Antwort:

$$\begin{aligned}
H &= \left\{(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{2}\right\} \\
&= \left\{(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega : \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}| < \varepsilon\right\} \\
&= \left\{(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega : \forall\ 1 \leq k \in \mathbb{N}\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}| < \frac{1}{k}\right\} \\
&= \bigcap_{1\leq k\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\leq n\in\mathbb{N}} H_{n,k},
\end{aligned}$$

wobei $H_{n,k} := \{(X_i) \in \Omega : |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}| < \frac{1}{k}\}$ endliche Vereinigungen von n-Zylindern, und deswegen offen, sind. Damit ist H eine Borel-Menge (erzeugt von abzählbaren Anwendungen von $\cup$ und $\cap$), also $H \in \mathcal{F}$.

Jetzt berechnen wir $\mathbb{P}(H)$ mit Hilfe des Komplements

$$H^c = \bigcup_{1\leq k\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\leq n\in\mathbb{N}} H^c_{n,k}.$$

Wir schreiben $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Die Münzwurfe X_i haben $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}$ und $Var(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Also $\mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{2}$ und $Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{4n}$. Mit Hilfe der Tschebyschev-Ungleichung finden wir

$$\mathbb{P}(H^c_{n,k}) = \mathbb{P}\left(|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| > \frac{1}{k}\right) \leq \frac{k^2}{4n}.$$

Leider ergibt die Abschätzung $\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq N} H^c_{n,k}) \leq \sum_{n\geq N} \frac{k}{4n} = \infty$ nichts nützliches. Deswegen verwenden wir den folgenden Trick: wir schauen es uns erst nur für n in der Teilfolge der Quadrate an.

$$\mathbb{P}(\underbrace{\bigcup_{n\geq N} H^c_{n^2,k}}_{\tilde{H}^c_{N,k}}) \leq \sum_{n\geq N} \frac{k}{4n^2} \leq \frac{k^2}{4N}.$$

Die Mengen $H^c_{N,k}$ sind verschachtelt: $H^c_{N,k} \supset H^c_{N+1,k}$. Also

$$\mathbb{P}(\bigcap_{1\leq N\in\mathbb{N}} \tilde{H}^c_{N,k}) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\tilde{H}^c_{N,k}) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{k^2}{4N} = 0.$$

Damit ist auch das Maß

$$\mathbb{P}(\bigcup_{1\leq k\in\mathbb{N}} \bigcap_{1\leq N\in\mathbb{N}} \tilde{H}^c_{N,k}) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Also, entlang der Teilfolge der Quadrate geht $\frac{S_n}{n}$ fast sicher gegen $\frac{1}{2}$. Es bleibt zu betrachten die Zahlen zwischen Quadraten. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq d \leq 2n$, so dass $m = n^2 + d$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{n^2}{n^2+d}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n^2} X_i - \frac{1}{2}\right) - \frac{d}{2(n^2+d)} + \frac{1}{n^2+d}\sum_{i=n^2+1}^{n^2+d} X_i\right| \\ &\leq \left|\frac{n^2}{n^2+d}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n^2} X_i - \frac{1}{2}\right)\right| + \frac{1}{n} + \frac{2}{n}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Im Grenzwert $m = n^2 + d \to \infty$ geht $\frac{n^2}{n^2+d}$ gegen 1 und $\frac{3}{n} \to 0$. Also, falls $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n^2} X_i - \frac{1}{2}$ gegen 0 konvergiert als $n \to \infty$, dann konvergiert auch $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} - \frac{1}{2}$ gegen 0 als $m \to \infty$. Aber wir wissen schon, dass $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n^2} X_i \to \frac{1}{2}$ fast sicher. Damit gilt $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \to \frac{1}{2}$ fast sicher und $\mathbb{P}(H) = 1$.

Dieses f.s. Ergebnis heißt das **starke Gesetz der großen Zahlen** und gilt allgemein für den Mittelwert von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlicher Varianz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{E}(X_i) \quad \text{f.s.}$$

Die Borel-Cantelli-Lemmas.

Lemma 9 *(Borel-Cantelli) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{F}$, eine Folge Ereignisse.*

(a) Falls $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, dann passiert f.s. A_n nur für höchstens endlich viele n, also

$$\mathbb{P}(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} A_n) = 0.$$

(b) Falls $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ und die A_n sind paarweise unabhängig, dann passiert f.s. A_n für unendlich viele n, also

$$\mathbb{P}(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} A_n) = 1.$$

Beweis. (a) Weil $\mathbb{P}$ σ-additiv ist, gilt $\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq N} A_n) \leq \sum_{n\geq N} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Auch gilt $\bigcup_{n\geq N} A_n \supset \bigcup_{n\geq N+1} A_n$ für jedes N. Also

$$\mathbb{P}(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} A_n) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq N} A_n) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n\geq N} \mathbb{P}(A_n) = 0,$$

weil der "Schwanz" einer konvergenten Summe gegen null geht.

(b) Die Wahrscheinlichkeit das kein Ereignis mehr passiert für $n \geq N$ ist, wegen Unabhängigkeit,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n\geq N} A_n^c) = \prod_{n\geq N} \mathbb{P}(A_n^c) = \prod_{n\geq N} (\, 1 - \mathbb{P}(A_n)\,).$$

Die Ungleichung $1 - x \leq e^{-x}$ ergibt

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n\geq N} A_n^c) = \prod_{n\geq N} (\, 1 - \mathbb{P}(A_n)\,) \leq \prod_{n\geq N} e^{-\mathbb{P}(A_n)} = \exp(-\sum_{n\geq N} \mathbb{P}(A_n)) = 0,$$

weil $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ divergiert. Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge, also $\mathbb{P}(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} A_n^c) = 0$ Die Gegenwahrscheinlichkeit ist also

$$\mathbb{P}(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} A_n) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} A_n^c)) = 1.$$

□

Das erste Borel-Cantelli-Lemma ist nötig um die allgemeine Version des starken Gesetzes der großen Zahlen zu beweisen.

Theorem 10 *(Das starke Gesetz der großen Zahlen). Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, so dass $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Dann gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mu \quad \textit{f.s.}$$

Beweis. Der Beweis ist genau so wie bei dem Münzwurf, bis auf eine Sache. In dem Schritt (1) hatten wir verwendet, dass X_i beschränkt ist, was wir hier nicht voraussetzen. Also, statt der Abschätzung $\sum_{i=n^2+1}^{n^2+d} X_i \leq d$, werden wir zeigen, dass f.s.

$$\left|\sum_{i=n^2+1}^{n^2+d} X_i\right| \leq n^{3/2} \qquad \text{für nur endlich viele } n.$$

Die Tschebyschev-Ungleichung ergibt

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=n^2+1}^{n^2+d} X_i - \frac{d}{2}\right| \geq n^{3/2}\right) \leq \frac{d}{n^3} Var(X_i),$$

was summierbar ist. Das Borel-Cantelli-Lemma (a) sagt, dass f.s. das Ereignis

$$\left|\sum_{i=n^2+1}^{n^2+d} X_i - \frac{d}{2}\right| \geq n^{3/2}$$

nur endlich oft auftreten kann. Deswegen gibt es ein n_0, so dass für all $n \geq n_0$:

$$\left|\sum_{i=n^2+1}^{n^2+d} X_i\right| = \left|\left(\sum_{i=n^2+1}^{n^2+d} X_i - \frac{d}{2}\right) + \frac{d}{2}\right| \leq n^{3/2} + \frac{d}{2}.$$

Damit können wir in (1) die Abschätzung verbessern zu

$$\left|\frac{1}{n^2+d}\sum_{i=n^2+1}^{n^2+d} X_i\right| \leq \frac{n^{3/2} + d/2}{n^2+d} \to 0$$

als $n \to \infty$ (weil $0 \leq d \leq 2n$), und der obere Beweis kann vollendet werden. □

Mehr σ-Algebren und Kolmogorovs Null-Eins-Gesetz.

Seien $\mathcal{F}_i$ die σ-Algebren der Räume X_i in einem Produktraum $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

- $\mathcal{B} = \mathcal{F}_1^\infty = \sigma(\bigcup_{1\geq i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_i)$ ist die Borel-σ-Algebra.
- $\mathcal{F}_1^n = \sigma(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i)$ ist die Algebra von allen n-Zylindern (eine endlich Algebra).
- $\mathcal{F}_{n+1}^\infty = \sigma(\bigcup_{i=n+1}^\infty \mathcal{F}_i)$.
- $\mathcal{T} = \sigma(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{n+1}^\infty)$ ist die terminale σ-Algebra (oder tail algebra auf Englisch). Es ist die σ-Algebra von Borel-Mengen, die nicht von den ersten endlich vielen Koordinaten abhängen.

Weil die Koordinaten X_i unabhänging sind, sind die σ-Algebren $\mathcal{F}_1^n$ und $\mathcal{F}_{n+1}^\infty$ es auch. Das heißt, $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ für alle $A \in \mathcal{F}_1^n$ und $B \in \mathcal{F}_{n+1}^\infty$.

Theorem 11 *(Kolmogorovs Null-Eins-Gesetz) Für jede Menge $A \in \mathcal{T}$ gilt $\mathbb{P}(A) = 0$ oder 1.*

Das heißt, dass zum Beispiel die folgenden "Grenzwert"-Mengen nur Maß Null oder Eins haben können.
$\{X : X_i = 1 \text{ unendlich oft}\}$;
$\{X : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = p\}$;
$\{X : \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i > q\}$.

Beweis. (Skizze) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\mathcal{F}_1^n$ und $\mathcal{F}_{n+1}^\infty$ unabhängig sind. Deswegen sind auch $\mathcal{F}_1^n$ und $\mathcal{T} = \bigcap_n \mathcal{F}_{n+1}^\infty$ unabhängig. Also ist die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B} = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_1^n)$ unabhängig von $\mathcal{T}$. Aber $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$, also $\mathcal{T}$ ist unabhängig von sich selbst! Daher gilt $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{T}$. Aber mit $A = B$ ergibt dies $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap A) = \mathbb{P}(A)^2$, und die einzigen Zahlen x, so dass $x = x^2$ sind $x = 0$ und $x = 1$. Also $\mathbb{P}(A) = 0$ oder 1. □