# Stochastische Prozesse

**Franz Hofbauer**

Diese Vorlesung behandelt stochastische Prozesse mit endlichem oder abzählbarem Zustandsraum. Die zentrale Rolle spielen dabei die Markovketten. Markovketten sind stochastische Prozesse, deren zukünftige Entwicklung zwar von der Gegenwart, nicht aber von der Vergangenheit abhängt.

Der erste Teil beinhaltet Markovketten mit diskreter Zeit. Insbesondere geht es um Eintrittswahrscheinlichkeiten in eine Teilmenge des Zustandsraums, Rekurrenzeigenschaften von Zuständen und das Langzeitverhalten der Markovkette. Schließlich werden noch kurz Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ und ein einfacher Verzweigungsprozess behandelt.

Der zweite Teil beginnt mit einer kurzen Einführung in den Poissonprozess und behandelt dann Markovketten mit kontinuierlicher Zeit. Zuerst wird das Langzeitverhalten der Markovkette untersucht. Dann werden Übergangsraten eingeführt und hauptsächlich mit diesen gearbeitet. Als Anwendung der Theorie wird auf Warteschlangenprobleme eingegangen.

# Einleitung

Ein stochastischer Prozess mit diskreter Zeit ist eine Folge $X_0, X_1, X_2, \dots$ von Zufallsvariablen, deren Werte alle in derselben Menge $S$, dem Zustandsraum, liegen. Man nennt $X_n$ den Zustand des Prozesses zum Zeitpunkt $n$. Als Beispiel kann ein Spieler, der wiederholt dasselbe Glücksspiel spielt, dienen. Als Zustand $X_n$ zum Zeitpunt $n$ wählt man den Kontostand des Spielers nach dem $n$-ten Spiel. Die möglichen Zustände sind ganzzahlige Geldbeträge. Daher ist $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Ein stochastischer Prozess mit kontinuierlicher Zeit ist eine Familie $X_t$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ von Zufallsvariablen, deren Werte alle in derselben Menge $S$, dem Zustandsraum, liegen. Wieder ist $X_t$ der Zustand des Prozesses zum Zeitpunkt $t$. Als Beispiel sei die Warteschlange vor einem Fahrkartenschalter angeführt. Der Zustand $X_t$ ist die Länge der Warteschlange zum Zeitpunkt $t$. Da die Länge eine Anzahl von Personen ist, ist $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Wir werden hauptsächlich Markovketten behandeln. Das sind stochastische Prozesse, deren Zustandsraum $S$ endlich oder abzählbar ist, und die die Eigenschaft haben, dass die zukünftige Entwicklung nur von der Gegenwart, nicht aber von der Vergangenheit abhängt.

Ereignisse schreiben wir als Gleichungen oder Ungleichungen, die Zufallsvariable enthalten, zum Beispiel $X_n = 7$ oder $X_t \le 3$. Oft fasst man die Zufallsvariablen als Funktionen von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nach $S$ auf. Ereignisse werden dann als Teilmengen von $\Omega$ aufgefasst. So wird das Ereignis $X_n = 7$ zur Menge $\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = 7\}$. Wir werden daher die Mengensprache für Ereignisse verwenden, auch wenn wir die Ereignisse gar nicht als Mengen schreiben.

Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist $P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)}$, wobei immer $P(C) \ne 0$ vorausgesetzt wird. Wir werden häufig folgende Sätze für bedingte Wahrscheinlichkeiten benützen, die leicht zu beweisen sind. Setzt man $C = \Omega$, dann erhält man wegen $P(A|\Omega) = P(A)$ die nicht bedingten Versionen dieser Sätze.

**Additionssatz:** Seien $A_m$ für $m \ge 1$ endlich oder abzählbar viele disjunkte Ereignisse, das heißt keine zwei dieser Ereignisse treten gleichzeitig ein. Dann gilt

$$P(\textstyle\bigcup_{m\ge 1} A_m|C) = \sum_{m\ge 1} P(A_m|C)$$

**Stetigkeitssatz:** Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \dots$ eine absteigende Folge, die gegen das Ereignis $B$ strebt, das heißt $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ und $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, dann gilt $P(B|C) = \lim_{j\to\infty} P(A_j|C)$. Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \dots$ eine aufsteigende Folge, die gegen das Ereignis $B$ strebt, das heißt $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ und $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, dann gilt $P(B|C) = \lim_{j\to\infty} P(A_j|C)$.

**Multiplikationssatz:** Für beliebige Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ und $C$ gilt

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|C) = P(A_1|C)P(A_2|A_1 \cap C) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap C)$$

**Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:** Sei $(B_m)_{m\ge 1}$ eine Zerlegung des Ereignisses $C$, das heißt die $B_m$ sind disjunkte Teilereignisse von $C$ und $P(\bigcup_{m\ge 1} B_m) = P(C)$. Dann gilt

$$P(A|C) = \textstyle\sum_{m\ge 1} P(A|B_m)P(B_m|C)$$

# I. Markovketten mit diskreter Zeit

Sei $S$ eine endliche oder eine abzählbare Menge. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Werten in der Menge $S$ heißt Markovkette, wenn folgende beiden Eigenschaften gelten, wobei $j, i, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n$ in $S$ sind
(M1) $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_1, \dots, X_1 = i_{n-1}, X_0 = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$
(M2) $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$ ist unabhängig von $n$
Diese Definition besagt, dass die Zukunft, das ist $X_{n+1}$, nur von der Gegenwart, das ist $X_n$, nicht aber von der Vergangenheit, das ist $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$, abhängt. Diese Abhängigkeit ist durch die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}$ gegeben. Diese hängen nicht von $n$ ab, ändern sich also nicht mit der Zeit.

## 1. Die Übergangsmatrix

Wir zeigen einige grundlegende Eigenschaften der Übergangswahrscheinlichkeiten und geben Beispiele for Markovketten.

**Definition:** Die $S \times S$-Matrix $M = (p_{ij})_{i,j\in S}$ heißt Übergangsmatrix der Markovkette.

**Satz 1:** *Für $i, j \in S$ gilt $p_{ij} \geq 0$ und $\sum_{k\in S} p_{ik} = 1$.*

**Beweis:** Da $p_{ij}$ eine Wahrscheinlichkeit ist, folgt $p_{ij} \geq 0$. Die Ereignisse $X_1 = k$ für $k \in S$ sind disjunkt und ihre Vereinigung ist das Ereignis $\Omega$, das immer eintritt. Für ein beliebiges Ereignis $A$ gilt $P(\Omega|A) = \frac{P(\Omega\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$. Aus dem Additionssatz folgt daher $\sum_{k\in S} p_{ik} = \sum_{k\in S} P(X_1 = k|X_0 = i) = P(\Omega|X_0 = i) = 1$. $\square$

Eine Matrix mit den Eigenschaften aus Satz 1 nennt man stochastische Matrix. Für $k \geq 0$ sei $p_{ij}^{(k)}$ die Eintragung der Matrix $M^k$ an der Stelle $(i, j)$. Insbesondere gilt $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ und $p_{ij}^{(0)} = 0$ für $i \neq j$ und $= 1$ für $i = j$. Der nächste Satz bildet die Grundlage zum Rechnen mit der Übergangsmatrix $M = (p_{ij})_{i,j\in S}$.

**Satz 2:** *Seien $n, k \in \mathbb{N}$, seien $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, R_1, R_2, \dots, R_n$ nichtleere Teilmengen von $S$ und seien $i$ und $j$ Elemente von $S$. Dann gilt*
(a) $P(X_{n+k} \in Q_k, \dots, X_{n+2} \in Q_2, X_{n+1} \in Q_1 | X_n = i, X_{n-1} \in R_1, X_{n-2} \in R_2, \dots, X_0 \in R_n)$
$\quad = \sum_{j_1\in Q_1} \sum_{j_2\in Q_2} \dots \sum_{j_k\in Q_k} p_{ij_1} p_{j_1j_2} p_{j_2j_3} \dots p_{j_{k-1}j_k}$
(b) $P(X_{n+k} = j | X_n = i, X_{n-1} \in R_1, X_{n-2} \in R_2, \dots, X_0 \in R_n) = p_{ij}^{(k)}$

**Beweis:** Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Addittionssatz ergeben
$P(X_{n+k} \in Q_k, \dots, X_{n+2} \in Q_2, X_{n+1} \in Q_1 | X_n = i, X_{n-1} \in R_1, X_{n-2} \in R_2, \dots, X_0 \in R_n) = \frac{a}{b}$
mit $b = P(X_n = i, X_{n-1} \in R_1, \dots, X_0 \in R_n) = \sum_{i_1\in R_1} \sum_{i_2\in R_2} \dots \sum_{i_n\in R_n} P(A_0)$
und $a = P(X_{n+k} \in Q_k, \dots, X_{n+2} \in Q_2, X_{n+1} \in Q_1, X_n = i, X_{n-1} \in R_1, \dots, X_0 \in R_n)$
$\quad = \sum_{j_1\in Q_1} \sum_{j_2\in Q_2} \dots \sum_{j_k\in Q_k} \sum_{i_1\in R_1} \sum_{i_2\in R_2} \dots \sum_{i_n\in R_n} P(A_k)$
wobei $A_m$ das Ereignis $\{X_{n+m} = j_m, \dots, X_{n+1} = j_1, X_n = i, X_{n-1} = i_1, \dots, X_0 = i_n\}$ für $0 \leq m \leq k$ ist. Aus (M1) und (M2) und der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt dann, dass $p_{j_{m-1}j_m} = P(X_{n+m} = j_m|A_{m-1}) = \frac{P(A_m)}{P(A_{m-1})}$ für $1 \leq m \leq k$ gilt, wobei $j_0$ als $i$ zu verstehen ist. Daraus berechnet man $P(A_k) = P(A_0)p_{ij_1}p_{j_1j_2} \dots p_{j_{k-1}j_k}$. Setzt man das oben ein, so folgt $a = \sum_{j_1\in Q_1} \sum_{j_2\in Q_2} \dots \sum_{j_k\in Q_k} bp_{ij_1}p_{j_1j_2} \dots p_{j_{k-1}j_k}$. Damit ist (a) gezeigt.

Setzt man $Q_k = \{j\}$ und $Q_l = S$ für $1 \leq l \leq k-1$ in die Formel aus (a) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} &P(X_{n+k} = j | X_n = i, X_{n-1} \in R_1, \ldots, X_0 \in R_n) \\ &\quad = P(X_{n+k} = j, X_{n+k-1} \in S, \ldots, X_{n+1} \in S | X_n = i, X_{n-1} \in R_1, \ldots, X_0 \in R_n) \\ &\quad = \textstyle\sum_{j_1 \in S} \cdots \sum_{j_{k-1} \in S} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} p_{j_2 j_3} \ldots p_{j_{k-1} j} = p_{ij}^{(k)} \end{aligned}$$

Damit ist auch (b) gezeigt. □

**Bemerkung:** Wegen Satz 2 (b) ist $M^k$ eine stochastische Matrix für $k \geq 1$. Die Ereignisse $X_{n+k} = j$ für $j \in S$ sind disjunkt und ihre Vereinigung ist das Ereignis $\Omega$, das immer eintritt. Es folgt $\sum_{j \in S} p_{ij}^{(k)} = \sum_{j \in S} P(X_{n+k} = j | X_n = i) = P(\Omega | X_n = i) = 1$ aus dem Additionssatz.

Wir besprechen einige Beispiele, die wir dann in den nächsten Kapiteln behandeln werden.

**Beispiel 1:** Spieler A und Spieler B spielen wiederholt gegeneinander. Das Spielkapital der beiden Spieler zu Beginn sei $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$. Spieler A gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $q$ und Spieler B mit Wahrscheinlichkeit $1-q$. Der Verlierer zahlt 1 an den Sieger.

Sei $s = a + b$ das insgesamt im Spiel befindliche Kapital. Die Summe der Kapitalstände der beiden Spieler bleibt immer gleich $s$. Als Zustand $X_n$ zum Zeitpunkt $n$ wählen wir das Spielkapital des Spielers A nach dem $n$-ten Spiel. Der Zustandsraum $S$ ist $\{0, 1, 2, \ldots, s\}$, die Menge aller möglichen Zustände.

Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariable, die alle den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit $q$ und den Wert $-1$ mit Wahrscheinlichkeit $1-q$ annehmen. Durch diese Zufallsvariablen werden die Ausgänge der aufeinanderfolgenden Spiele beschrieben. Es gilt $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$. Daraus erkennt man, dass $X_{n+1}$ nur von $X_n$ abhängt, nicht aber von $X_k$ für $k < n$. Deshalb ist (M1) erfüllt. Man kann (M1) auch formal nachrechnen, wie wir es jetzt mit (M2) tun. Wegen der Unabhängigkeit von $Y_{n+1}$ und $X_n$ erhalten wir

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \tfrac{P(X_{n+1}=j, X_n=i)}{P(X_n=i)} \\ &= \tfrac{P(Y_{n+1}=j-i, X_n=i)}{P(X_n=i)} = \tfrac{P(Y_{n+1}=j-i)P(X_n=i)}{P(X_n=i)} = P(Y_{n+1} = j - i) \end{aligned}$$

Somit ist $p_{ij} = q$, wenn $j = i+1$, und $p_{ij} = 1-q$, wenn $j = i-1$. Alle anderen Übergänge haben Wahrscheinlichkeit 0. In den Zuständen 0 und $s$ wird nicht mehr weitergespielt. Ist man in so einem Zustand, so bleibt man dort. Wir setzen daher $p_{00} = 1$ und $p_{0j} = 0$ für $j \neq 0$ und $p_{ss} = 1$ und $p_{sj} = 0$ für $j \neq s$. Wir erhalten die $S \times S$-Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-q & 0 & q & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q & 0 & q & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-q & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1-q & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 2:** Wir werfen wiederholt Münzen, auf deren einer Seite 1 steht – das nennen wir Erfolg – und auf deren anderer Seite 0 steht – das nennen wir Misserfolg. Wir beginnen mit einer Münze, für die 1 mit Wahrscheinlichkeit $r_0$ und 0 mit Wahrscheinlichkeit $1-r_0$ auftritt. Bei Misserfolg werfen wir wieder dieselbe Münze, bei Erfolg eine, für die 1 mit Wahrscheinlichkeit $r_1$ und 0 mit Wahrscheinlichkeit $1-r_1$ auftritt. Nach $k$ aufeinanderfolgenden Erfolgen werfen wir eine Münze, für die 1 mit Wahrscheinlichkeit $r_k$ und 0 mit Wahrscheinlichkeit $1-r_k$ auftritt. Nach einem Misserfolg beginnen wir wieder von vorne.

Als Zustand $X_n$ nach $n$ Würfen wählen wir die Anzahl der zuletzt in Serie aufgetretenen Erfolge, das heißt $X_n = i$, wenn der $n-i$-te Wurf kein Erfolg war, aber seither lauter Erfolge aufgetreten sind. Der Zustandsraum $S$ ist daher $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ist $X_n = i$, dann erzielt man im nächsten Wurf mit Wahrscheinlichkeit $r_i$ einen Erfolg, wobei dann $X_{n+1} = i + 1$ ist, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - r_i$ einen Misserfolg, wobei dann $X_{n+1} = 0$ ist. Also liegt eine Markovkette vor mit $p_{i,i+1} = r_i$ und $p_{i0} = 1 - r_i$. Für $j \notin \{0, i + 1\}$ haben wir $p_{ij} = 0$. Wir erhalten die $S \times S$-Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1-r_0 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-r_1 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-r_2 & 0 & 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-r_3 & 0 & 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & \dots \\ 1-r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 & \dots \\ 1-r_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Beispiel 3:** Wir beschreiben eine Warteschlange vor einem Sessellift, wo zu den Zeitpunkten $0, 1, 2, \dots,$ zum Beispiel jede volle Minute, eine Person abgefertigt wird. Für $n \geq 1$ sei $Z_n$ die Anzahl der Personen, die im Zeitintervall $[n - 1, n)$ eintrifft. Wir nehmen an, dass diese Zufallsvariablen $Z_n$ für verschiedene $n$ voneinander unabhängig sind und alle die gleiche Verteilung haben. Es gibt also $w_i \geq 0$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} w_i = 1$, sodass $P(Z_n = i) = w_i$ für alle $i \geq 0$ und $n \geq 1$ gilt.

Als Zustand $X_n$ zum Zeitpunkt $n$ wählen wir die Anzahl der Personen in der Warteschlange unmittelbar vor der Abfertigung, die zum Zeitpunkt $n$ stattfindet. Der Zustandsraum $S$ besteht aus den möglichen Warteschlangenlängen, sodass $S = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt. Ist $X_n > 0$, dann folgt $X_{n+1} = X_n - 1 + Z_{n+1}$. Ist $X_n = 0$, dann folgt $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1} = Z_{n+1}$, da ja in diesem Fall zum Zeitpunkt $n$ keine Person abgefertigt wird. Daraus sieht man, dass eine Markovkette vorliegt, da $X_{n+1}$ von $X_n$, nicht aber von $X_k$ für $k < n$ abhängt. Weiters gilt $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(Z_{n+1} = j - i + 1) = w_{j-i+1}$, wenn $i > 0$ ist, und $P(X_{n+1} = j | X_n = 0) = P(Z_{n+1} = j) = w_j$. Daraus liest man $p_{ij}$ für $j \geq i - 1$ ab. Für $j < i - 1$ gilt $p_{ij} = 0$, da die Warteschlange nur durch die Abfertigungen kürzer werden kann. Wir erhalten die $S \times S$-Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & \dots \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & \dots \\ 0 & w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \dots \\ 0 & 0 & w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & w_0 & w_1 & w_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Beispiel 4:** In diesem Beispiel wird ein Urnenmodell behandelt, das einen physikalischen Vorgang, nämlich die Diffusion durch eine Wand, nachahmt.

Ein Behälter ist durch eine durchlässige Wand in zwei Teile A und B geteilt. In diesem Behälter befinden sich $s$ Kugeln (Moleküle eines Gases). Wir spielen folgendes Spiel: zu den Zeitpunkten $1, 2, 3, \dots$ wird jeweils zufällig eine der $s$ Kugeln gewählt und in den anderen Teil gelegt. Als Zustand $X_n$ wählen wir die Anzahl der Kugeln in A unmittelbar nach dem $n$-ten Spielzug. Der Zustandsraum $S$ ist also $\{0, 1, 2, \dots, s\}$.

Ist $X_n = 0$, dann sind alle Kugeln in B und im $n + 1$-ten Spielzug wird eine Kugel von B in A gelegt, sodass $X_{n+1} = 1$ folgt. Daraus ergibt sich $p_{01} = 1$ und $p_{0j} = 0$ für $j \neq 1$. Ist

$X_n = s$, dann sind alle Kugeln in A und im $n+1$-ten Spielzug wird eine Kugel von A in B gelegt, sodass $X_{n+1} = s-1$ folgt. Daraus ergibt sich $p_{s,s-1} = 1$ und $p_{sj} = 0$ für $j \neq s-1$. Ist $X_n = i$ mit $i \notin \{0, s\}$, dann wird im $n+1$-ten Spielzug mit Wahrscheinlichkeit $\frac{i}{s}$ eine Kugel von A in B gelegt und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{s-i}{s}$ eine Kugel von B in A. Also kann $X_{n+1}$ nur die Werte $i-1$ und $i+1$ annehmen, wobei $p_{i,i-1} = \frac{i}{s}$ und $p_{i,i+1} = \frac{s-i}{s}$ gilt. Für $j \notin \{i-1, i+1\}$ haben wir $p_{ij} = 0$. Wir erhalten die $S \times S$-Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{s} & 0 & \frac{s-1}{s} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{s} & 0 & \frac{s-2}{s} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s-1}{s} & 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2. Eintrittswahrscheinlichkeiten

Sei $H \subset S$. Als Eintrittswahrscheinlichkeit in die Menge $H$ bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, irgendwann einmal einen Zustand aus $H$ zu erreichen. Für $i \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir zuerst die Wahrscheinlichkeit $g_{iH}^{(n)}$, von $i$ ausgehend nach $n$ Schritten zum ersten Mal in der Menge $H$ zu sein.

**Definition:** Für $i \in S \setminus H$ sei $g_{iH}^{(n)} = P(X_n \in H, X_{n-1} \notin H, \dots, X_1 \notin H | X_0 = i)$, wenn $n > 0$ ist, und $g_{iH}^{(0)} = 0$. Für $i \in H$ sei $g_{iH}^{(n)} = 0$, wenn $n > 0$ ist, und $g_{iH}^{(0)} = 1$.

Für $n \geq 0$ sei $A_n$ das Ereignis $\{X_n \in H, X_{n-1} \notin H, \dots, X_1 \notin H, X_0 \notin H\}$. Man überprüft leicht, dass $g_{iH}^{(n)} = P(A_n | X_0 = i)$ in allen in der Definition angeführten Fällen gilt. Da die Ereignisse $A_n$ disjunkt sind, und das Ereignis, zu irgendeinem Zeitpunkt in $H$ zu sein, die Vereinigung dieser Ereignisse ist, erhalten wir mit Hilfe des Additionssatzes

**Definition:** Für $i \in S$ und $H \subset S$ gibt $g_{iH} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{iH}^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit an, von $i$ ausgehend, irgendwann in $H$ zu sein, also die Eintrittswahrscheinlichkeit in die Menge $H$. Die durchschnittliche Wartezeit bis zum Eintritt in die Menge $H$ bei Start in $i$ wird durch $m_{iH} = \sum_{n=0}^{\infty} n g_{iH}^{(n)}$ definiert.

Wir beweisen zuerst eine Rekursionsformel für die Wahrscheinlichkeiten $g_{iH}^{(n)}$.

**Satz 3:** *Sei $H \subset S$ und $i \in S \setminus H$. Dann gilt $g_{iH}^{(n)} = \sum_{j \in S} p_{ij} g_{jH}^{(n-1)}$ für $n \geq 1$.*

**Beweis:** Wir behandeln zuerst den Fall $n = 1$. Mit Hilfe von Satz 2 (a) und der Definition von $g_{iH}^{(n)}$ erhalten wir $g_{iH}^{(1)} = P(X_1 \in H | X_0 = i) = \sum_{j \in H} p_{ij} = \sum_{j \in S} p_{ij} g_{jH}^{(0)}$.
Sei jetzt $n \geq 2$. Mit Hilfe von Satz 2 (a) folgt

$$\begin{aligned} g_{iH}^{(n)} &= \sum_{j_1 \in S \setminus H} \dots \sum_{j_{n-1} \in S \setminus H} \sum_{j_n \in H} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{n-1} j_n} \\ &= \sum_{j_1 \in S \setminus H} p_{ij_1} \Big( \sum_{j_2 \in S \setminus H} \dots \sum_{j_{n-1} \in S \setminus H} \sum_{j_n \in H} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{n-1} j_n} \Big) \\ &= \sum_{j_1 \in S \setminus H} p_{ij_1} g_{j_1 H}^{(n-1)} = \sum_{j_1 \in S} p_{ij_1} g_{j_1 H}^{(n-1)} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt, da $n - 1 \geq 1$ und daher $g_{j_1 H}^{(n-1)} = 0$ für $j_1 \in H$ gilt. □

Jetzt können wir Gleichungen für die Eintrittswahrscheinlichkeiten herleiten, die dann zu ihrer Berechnung dienen.

**Satz 4:** *Sei $H \subset S$. Die minimale nichtnegative Lösung des Gleichungssystems*

$$x_i = 1 \quad \text{wenn} \quad i \in H \qquad \text{und} \qquad x_i = \sum_{j \in S} p_{ij} x_j \quad \text{wenn} \quad i \in S \setminus H$$

*gibt die Eintrittswahrscheinlichkeiten $g_{iH}$ an.*

**Beweis:** Ist $i \in H$, dann gilt $g_{iH}^{(n)} = 0$ für $n \geq 1$ und $g_{iH}^{(0)} = 1$, sodass $g_{iH} = 1$ folgt. Ist $i \in S \setminus H$, dann gilt $g_{iH}^{(0)} = 0$ und daher $g_{iH} = \sum_{n=1}^{\infty} g_{iH}^{(n)}$. Verwendet man Satz 3, so folgt

$$g_{iH} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in S} p_{ij} g_{jH}^{(n-1)} = \sum_{j \in S} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} g_{jH}^{(n-1)} = \sum_{j \in S} p_{ij} g_{jH}$$

Damit ist gezeigt, dass durch $g_{iH}$ eine Lösung des Gleichungssystems gegeben ist.
Sei jetzt $x_i$ mit $i \in S$ irgendeine Lösung des Gleichungssystems, die $x_i \geq 0$ erfüllt. Für $i \in H$ gilt dann $x_i = g_{iH} = 1$. Für $i \in S \setminus H$ gilt $x_i = \sum_{j \in S} p_{ij} x_j = \sum_{j \in H} p_{ij} + \sum_{j \notin H} p_{ij} x_j$. Setzt man diese Gleichung in sich selbst ein, so folgt

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j \in H} p_{ij} + \sum_{j \notin H} p_{ij} \Big( \sum_{k \in H} p_{jk} + \sum_{k \notin H} p_{jk} x_k \Big) \\ &= P(X_1 \in H | X_0 = i) + P(X_2 \in H, X_1 \notin H | X_0 = i) + \sum_{j \notin H} p_{ij} \sum_{k \notin H} p_{jk} x_k \end{aligned}$$

Führt man dieses wiederholte Einsetzen $n-1$ Mal durch und lässt dann den letzten Summanden weg, so erhält man

$$\begin{aligned} x_i \geq\ & P(X_1 \in H | X_0 = i) + P(X_2 \in H, X_1 \notin H | X_0 = i) + \dots \\ & \cdots + P(X_n \in H, X_{n-1} \notin H, \dots, X_1 \notin H | X_0 = i) \end{aligned}$$

Wegen $g_{iH}^{(m)} = P(X_m \in H, X_{m-1} \notin H, \dots, X_1 \notin H | X_0 = i)$ und $g_{iH}^{(0)} = 0$ erhalten wir daraus $x_i \geq \sum_{m=0}^{n} g_{iH}^{(m)}$. Da dies für alle $n$ gilt, haben wir $x_i \geq \sum_{m=0}^{\infty} g_{iH}^{(m)} = g_{iH}$ gezeigt. □

Schließlich untersuchen wir noch die durchschnittliche Wartezeit $m_{iH}$ bis zum Eintritt in eine Menge $H$ bei Start im Zustand $i$.

**Satz 5:** *Sei $H \subset S$ und $g_{iH} = 1$ für alle $i \in S$. Dann gibt die minimale nichtnegative Lösung des Gleichungssystems*

$$x_i = 0 \quad \text{wenn} \quad i \in H \qquad \text{und} \qquad x_i = \sum_{j \in S} p_{ij} x_j + 1 \quad \text{wenn} \quad i \in S \setminus H$$

*die durchschnittlichen Wartezeiten $m_{iH}$ an.*

**Beweis:** Sei $i \notin H$. Mit Hilfe von Satz 3 und Satz 4 folgt

$$\begin{aligned} m_{iH} &= \sum_{n=1}^{\infty} n g_{iH}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{j \in S} p_{ij} g_{jH}^{(n-1)} = \sum_{j \in S} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) g_{jH}^{(n-1)} + \sum_{j \in S} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} g_{jH}^{(n-1)} \\ &= \sum_{j \in S} p_{ij} m_{jH} + \sum_{j \in S} p_{ij} g_{jH} = \sum_{j \in S} p_{ij} m_{jH} + g_{iH} = \sum_{j \in S} p_{ij} m_{jH} + 1 \end{aligned}$$

Dass $m_{iH} = 0$ für $i \in H$ gilt, folgt direkt aus den Definitionen. Damit ist gezeigt, dass durch $m_{iH}$ eine Lösung des Gleichungssystems gegeben ist.
Sei jetzt $x_i$ mit $i \in S$ irgendeine Lösung des Gleichungssystems, die $x_i \geq 0$ erfüllt. Für $i \in H$ gilt dann $x_i = m_{iH} = 0$. Für $i \in S \setminus H$ gilt $x_i = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} x_j = 1 + \sum_{j \notin H} p_{ij} x_j$, da $x_j = 0$

für $j \in H$ gilt. Setzt man diese Gleichung in sich selbst ein, so folgt

$$x_i = 1 + \sum_{j \notin H} p_{ij}(1 + \sum_{k \notin H} p_{jk} x_k) = 1 + \sum_{j \notin H} p_{ij} + \sum_{j \notin H} \sum_{k \notin H} p_{ij} p_{jk} x_k$$

Setzt man die Gleichung noch ein zweites Mal ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x_i &= 1 + \sum_{j \notin H} p_{ij} + \sum_{j \notin H} \sum_{k \notin H} p_{ij} p_{jk} + \sum_{j \notin H} \sum_{k \notin H} p_{ij} p_{jk} \sum_{l \notin H} p_{kl} x_l \\ &= 1 + P(X_1 \notin H | X_0 = i) + P(X_2 \notin H, X_1 \notin H | X_0 = i) + \sum_{j \notin H} \sum_{k \notin H} p_{ij} p_{jk} \sum_{l \notin H} p_{kl} x_l \end{aligned}$$

Führt man dieses wiederholte Einsetzen $n$ Mal durch und lässt dann den letzten Summanden weg, so erhält man

$$\begin{aligned} x_i \geq 1 + P(X_1 \notin H | X_0 = i) + P(X_2 \notin H, X_1 \notin H | X_0 = i) + \dots \\ \dots + P(X_n \notin H, X_{n-1} \notin H, \dots, X_1 \notin H | X_0 = i) \end{aligned}$$

Da das Ereignis $\{X_{r-1} \notin H, \dots, X_1 \notin H\}$ die disjunkte Vereinigung der beiden Ereignisse $\{X_r \notin H, X_{r-1} \notin H, \dots, X_1 \notin H\}$ und $\{X_r \in H, X_{r-1} \notin H, \dots, X_1 \notin H\}$ ist, folgt aus dem Additionssatz, dass

$$P(X_r \notin H, X_{r-1} \notin H, \dots, X_1 \notin H | X_0 = i) = P(X_{r-1} \notin H, \dots, X_1 \notin H | X_0 = i) - g_{iH}^{(r)}$$

Beginnend mit $P(X_1 \notin H | X_0 = i) = 1 - g_{iH}^{(1)}$ erhalten wir durch wiederholtes Anwenden dieser Gleichung, dass $P(X_l \notin H, \dots, X_1 \notin H | X_0 = i) = 1 - g_{iH}^{(1)} - \dots - g_{iH}^{(l)}$ für $l \geq 1$ gilt. Setzt man das oben ein, so ergibt sich

$$x_i \geq n + 1 - n g_{iH}^{(1)} - (n-1) g_{iH}^{(2)} - \dots - g_{iH}^{(n)} = (n+1)(1 - g_{iH}^{(1)} - \dots - g_{iH}^{(n)}) + g_{iH}^{(1)} + 2 g_{iH}^{(2)} + \dots + n g_{iH}^{(n)}$$

Da $g_{iH}^{(1)} + \dots + g_{iH}^{(n)} \leq g_{iH} \leq 1$ und daher $1 - g_{iH}^{(1)} - \dots - g_{iH}^{(n)} \geq 0$ gilt erhalten wir

$$x_i \geq g_{iH}^{(1)} + 2 g_{iH}^{(2)} + \dots + n g_{iH}^{(n)}$$

Da dies für alle $n$ gilt und $g_{iH}^{(0)} = 0$ ist, haben wir $x_i \geq \sum_{l=0}^{\infty} l g_{iH}^{(l)} = m_{iH}$ gezeigt. □

Wir berechnen jetzt Eintrittswahrscheinlichkeiten für einige der in Kapitel 1 besprochenen Beispiele. Wir beginnen mit Beispiel 1. Die beiden Spieler spielen solange, bis einer alles verloren hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das der Spieler A ist. Wir müssen also $g_{aH}$ mit $H = \{0\}$ berechnen. Aus Satz 4 erhalten wir das Gleichungssystem

$$x_0 = 1 \quad \text{und} \quad x_i = (1-q) x_{i-1} + q x_{i+1} \text{ für } 1 \leq i \leq s-1$$

Dazu käme auch noch die Gleichumg $x_s = x_s$, die wir jedoch gleich wieder weglassen. Um dieses Gleichungssystem zu lösen, setzen wir $r = \frac{1-q}{q}$. Es folgt $x_{i+1} - x_i = r(x_i - x_{i-1})$ und daraus $x_{i+1} - x_i = r^i (x_1 - x_0)$ für $1 \leq i \leq s-1$. Summation über $i$ von 0 bis $j-1$ ergibt $x_j = x_0 + \frac{1-r^j}{1-r}(x_1 - x_0) = 1 - \frac{1-r^j}{1-r} c$ für $0 \leq j \leq s$, wobei wir $c = 1 - x_1$ gesetzt haben. Damit haben wir die Lösungen des Gleichungssystems gefunden. Diese Lösungen $x_i$ sind monoton in $i$ mit $x_0 = 1$. Daher erhalten wir die minimale nichtnegative Lösung, wenn $x_s = 0$ ist. Es folgt $c = \frac{1-r}{1-r^s}$ und $x_j = 1 - \frac{1-r^j}{1-r^s}$ für $j \in S$. Ist $q = \frac{1}{2}$, dann erhält man $x_j = 1 - \frac{j}{s}$. Insbesondere gilt $g_{aH} = \frac{r^a - r^s}{1-r^s}$ für $q \neq \frac{1}{2}$ und $g_{aH} = \frac{b}{s}$ für $q = \frac{1}{2}$.

Für $q = \frac{1}{2}$ berechnen wir die durchschnittliche Dauer des Spiels. Sie ist durch $m_{aH}$ mit $H = \{0, s\}$ gegeben. Wir haben $g_{i\{0\}} = \frac{s-i}{s}$ berechnet. Aus Symmetriegründen gilt $g_{i\{s\}} = \frac{i}{s}$. Die Ereignisse "irgendwann nach 0 zu kommen" und "irgendwann nach $s$ zu kommen" sind unvereinbar, da man die Zustände 0 und $s$ nicht mehr verlassen kann, wenn man sie einmal erreicht hat. Daher gilt $g_{aH} = g_{i\{0\}} + g_{i\{s\}} = 1$ für alle $i \in S$. Wir können Satz 5 anwenden.

Die Gleichungen aus Satz 5 sind

$$x_0 = 0, \qquad x_s = 0 \quad \text{und} \quad x_i = \tfrac{1}{2}x_{i-1} + \tfrac{1}{2}x_{i+1} + 1 \ \text{ für } \ 1 \le i \le s-1$$

Es folgt $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} - 2$ für $1 \le i \le s-1$, woraus man $x_{i+1} - x_i = x_1 - x_0 - 2i$ und wegen $x_0 = 0$ auch $x_j = \sum_{i=1}^{j}(x_1 - 2i + 2) = jx_1 - j(j-1)$ für $1 \le j \le s$ erhält. Wegen $x_s = 0$ ergibt sich $x_1 = s - 1$. Als einzige Lösung erhält man $x_j = j(s-j)$ für alle $j \in S$. Daher ist $m_{iH} = i(s-i)$. Insbesondere gilt $m_{aH} = ab$.

Wir berechnen noch die Ruinwahrscheinlichkeit für den Spieler A, wenn sein Gegenspieler unendlich reich ist. In diesem Fall ist $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ mit $p_{i,i+1} = q$ und $p_{i,i-1} = 1 - q$ für $i \ge 1$. Gesucht ist $g_{aH}$ mit $H = \{0\}$. Aus Satz 4 erhalten wir das Gleichungssystem

$$x_0 = 1 \quad \text{und} \quad x_i = (1-q)x_{i-1} + qx_{i+1} \text{ für } i \ge 1$$

Wir haben eine lineare Rekursion $x_{i+1} - \frac{1}{q}x_i + \frac{1-q}{q}x_{i-1} = 0$ für $i \ge 1$. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung $\alpha^2 - \frac{1}{q}\alpha + \frac{1-q}{q} = 0$ sind 1 und $\frac{1-q}{q}$. Die Lösungen der linearen Rekursion sind $x_i = c_1 + c_2(\frac{1-q}{q})^i$ für $q \ne \frac{1}{2}$ und $x_i = c_1 + c_2 i$ für $q = \frac{1}{2}$, wobei $c_1$ und $c_2$ reelle Parameter sind. Berücksichtigt man auch noch $x_0 = 1$, dann erhält man als allgemeine Lösung obiger Gleichungen $x_i = 1 - c + c(\frac{1-q}{q})^i$ für $q \ne \frac{1}{2}$ und $x_i = 1 + ci$ für $q = \frac{1}{2}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Die minimale nichtnegative Lösung ist $x_i = 1$, wenn $q \le \frac{1}{2}$, und $x_i = (\frac{1-q}{q})^i$, wenn $q > \frac{1}{2}$. Damit ist $m_{iH} = x_i$ gefunden.

Als nächstes behandeln wir Beispiel 2. Wir berechnen, wie oft man eine Münze durchschnittlich werfen muss, bis man $k$ Mal hintereinander "Kopf" erhält. Das ist Beispiel 2 mit $r_i = \frac{1}{2}$ für alle $i$. Gesucht ist $m_{0H}$ mit $H = \{k, k+1, k+2, \dots\}$. Wir lösen zuerst das Gleichungssystem aus Satz 4.

$$x_i = \tfrac{1}{2}x_{i+1} + \tfrac{1}{2}x_0 \ \text{ für } \ 0 \le i \le k-1 \quad \text{und} \quad x_i = 1 \ \text{ für } \ i \ge k$$

Aus den ersten $k$ Gleichungen erhält man der Reihe nach $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0$ und so weiter bis $x_k = x_0$. Wegen $x_i = 1$ für $i \ge k$ folgt $x_i = 1$, also $g_{0H} = 1$ für alle $i \in S$. Wir können daher Satz 5 anwenden. Die Gleichungen aus Satz 5 sind

$$x_i = \tfrac{1}{2}x_{i+1} + \tfrac{1}{2}x_0 + 1 \ \text{ für } \ 0 \le i \le k-1 \quad \text{und} \quad x_i = 0 \ \text{ für } \ i \ge k$$

Löst man diese der Reihe nach auf, so erhält man $x_i = x_0 - 2^{i+1} + 2$ für $1 \le i \le k$. Wegen $x_k = 0$ folgt $x_0 = 2^{k+1} - 2$. Damit ist $m_{0H}$ berechnet.

## 3. Abgeschlossene Mengen

Teilmengen des Zustandsraums $S$, die man nicht mehr verlassen kann, sobald man sie betreten hat, heißen abgeschlossen. Wir geben zuerst die Definition.

**Definition:** Eine Teilmenge $Q$ von $S$ heißt abgeschlossen, wenn für $i \in Q$ und $j \in S \setminus Q$ gilt, dass $p_{ij} = 0$ ist.

Diese Definition besagt, dass die Wahrscheinlichkeit, von einem Zustand in einer abgeschlossenen Menge $Q$ in einen Zustand außerhalb von $Q$ zu gehen, gleich Null ist. Sei $L$ die $Q \times Q$-Matrix, die man erhält, wenn man die Übergangsmatrix $M$ auf die Menge $Q$ einschränkt. Dann ist $L$ wieder eine stochastische Matrix, da $\sum_{j \in Q} p_{ij} = \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ gilt. Ordnet man die Menge $S$ so, dass zuerst die Elemente von $Q$ kommen und dann die von $S \setminus Q$, dann hat $M$ die Form $\binom{L\ 0}{U\ V}$, wobei 0 eine $Q \times (S \setminus Q)$-Matrix ist, für die alle Eintragungen Null sind. Solche Matrizen und die zugehörigen Markovketten nennt man reduzibel.

**Definition:** Eine Markovkette heißt irreduzibel, wenn ihr Zustandsraum keine echte abgeschlossene Teilmenge enthält.

Um höhere Übergangswahrscheinlichkeiten zu behandeln, führen wir den Begriff der Erreichbarkeit eines Zustandes ein.

**Definition:** Seien $i$ und $j$ in $S$. Dann heißt $j$ von $i$ aus erreichbar, wenn ein $n \geq 0$ existiert mit $p_{ij}^{(n)} > 0$. Wir schreiben dann $i \to j$.

**Satz 6:** *Sei $Q$ eine abgeschlossene Teilmenge von $S$ und $L = (p_{ij})_{i,j\in Q}$ die auf $Q$ eingeschränkte Übergangsmatrix $M$.*
(a) *Wenn $i \in Q$ und $j \notin Q$, dann $p_{ij}^{(n)} = 0$ für alle $n \geq 0$, das heißt $i \to j$ gilt nicht.*
(b) *Für $n \geq 0$ gilt $L^n = (p_{ij}^{(n)})_{i,j\in Q}$.*

**Beweis:** Für $n = 0$ sind (a) und (b) trivial, da $L^0$ die Einheitsmatrix ist und $p_{ij}^{(0)} = 1$ für $i = j$ und $= 0$ für $i \neq j$ gilt. Wir führen den Beweis mit Induktion. Seien (a) und (b) für $n = m$ schon gezeigt. Für $i \in Q$ gilt dann $p_{ik}^{(m)} = 0$, wenn $k \notin Q$, und daher

$$p_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj} = \sum_{k\in Q} p_{ik}^{(m)} p_{kj}$$

Weil $L^m = (p_{ij}^{(m)})_{i,j\in Q}$ ja nach Induktionsveraussetzung gilt, folgt aus dieser Gleichung $L^{m+1} = (p_{ij}^{(m+1)})_{i,j\in Q}$, also (b) für $n = m + 1$. Da $Q$ abgeschlossen ist, also $p_{kj} = 0$ für $k \in Q$ und $j \notin Q$ gilt, folgt aus dieser Gleichung $p_{ij}^{(m+1)} = 0$, wenn $i \in Q$ und $j \notin Q$ ist. Damit ist auch (a) für $n = m + 1$ gezeigt. □

Für $i \in S$ sei $E(i) = \{k \in S : i \to k\}$. Der folgende Satz zeigt, dass $E(i)$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $S$ ist, die $i$ enthält. Wir nennen $E(i)$ deshalb die von $i$ erzeugte abgeschlossene Teilmenge.

**Satz 7:** *Sei $i \in S$.*
(a) *Dann ist $E(i)$ abgeschlossen.*
(b) *Ist $Q$ abgeschlossen und $i \in Q$, dann gilt auch $E(i) \subset Q$.*

**Beweis:** Um (a) zu zeigen, sei $j \in E(i)$ und $k \notin E(i)$. Nach Definition von $E(i)$ gilt $p_{ij}^{(n)} > 0$ für ein $n \geq 0$. Wäre $p_{jk} > 0$, dann wäre auch $p_{ik}^{(n+1)} = \sum_{l\in S} p_{il}^{(n)} p_{lk} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk} > 0$ und daher $k \in E(i)$. Also gilt $p_{jk} = 0$, was die Abgeschlossenheit von $E(i)$ beweist.
Um (b) zu zeigen, sei $j \in E(i)$. Wir müssen $j \in Q$ zeigen. Nach Definition von $E(i)$ gilt $i \to j$. Da $Q$ abgeschlossen ist und $i$ in $Q$ liegt, folgt $j \in Q$ aus Satz 6 (a). Somit ist $E(i) \subset Q$ gezeigt. □

**Definition:** Eine Teilmenge $Q$ von $S$ heißt minimal, wenn sie abgeschlossen ist und keine echte abgeschlossene Teilmenge enthält.

**Satz 8:** *Sei $Q$ minimal und $i, j \in Q$. Dann gilt $i \to j$.*

**Beweis:** Nach Satz 7 (b) gilt $E(i) \subset Q$, da $i \in Q$ ist. Nach Satz 7 (a) ist $E(i)$ abgeschlossen. Da $Q$ minimal ist, muss $E(i) = Q$ gelten. Da $j \in Q$ vorausgesetzt wird, folgt $j \in E(i)$, das heißt $i \to j$. □

**Satz 9:** *Sei $U$ minimal und $V$ abgeschlossen. Dann gilt $U \cap V = \emptyset$ oder $U \subset V$. Insbesondere sind zwei minimale Teilmengen entweder identisch oder disjunkt.*

**Beweis:** Angenommen es gilt $U \cap V \neq \emptyset$. Dann finden wir ein $i \in U \cap V$. Aus Satz 7 (b) folgt $E(i) \subset U$ und $E(i) \subset V$. Da $U$ minimal ist, folgt $E(i) = U$ und wir erhalten $U \subset V$.

Sind nun beide Teilmengen $U$ und $V$ minimal und $U \cap V \neq \emptyset$, dann muss sowohl $U \subset V$ als auch $V \subset U$ gelten, also $U = V$. ∎

Wir können alle minimalen Teilmengen finden, indem wir $E(i)$ für alle $i \in S$ bestimmen und unter diesen diejenigen auswählen, die keine echte abgeschlossene Teilmenge enthalten. Für eine minimale Teilmenge $Q$ gilt ja $Q = E(j)$ für jedes $j \in Q$, sodass wir alle finden.

Wir berechnen die von den einzelnen Zuständen erzeugten abgeschlossenen Teilmengen an einem Beispiel.

Sei $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Die folgenden Eintragungen der Übergangsmatrix seien positiv: $p_{ac}, p_{ag}, p_{bb}, p_{be}, p_{cc}, p_{ch}, p_{da}, p_{dd}, p_{eb}, p_{fd}, p_{fe}, p_{ga}, p_{gh}, p_{hc}$. Alle anderen Eintragungen der Übergangsmatrix seien Null. Um zum Beispiel die Menge $E(d)$ zu bestimmen, beginnt man mit der Menge $\{d\}$. Im ersten Schritt fügt man alle Elemente von $S$ dazu, zu denen es von $d$ aus eine positive Übergangswahrscheinlichkeit gibt und erhält $\{d, a\}$. Im nächsten Schritt fügt man alle Elemente von $S$ dazu, zu denen es von den neu hinzugekommenen Elementen (das ist in diesem Fall nur $a$) aus eine positive Übergangswahrscheinlichkeit gibt. Man erhält $\{d, a, c, g\}$. Macht man das noch einmal, dann erhält man $\{d, a, c, g, h\}$. Das setzt man so lange fort, bis sich die Menge nicht mehr vergrößert. Damit hat man dann $E(d)$ bestimmt. Die zuletzt erhaltene Menge $\{d, a, c, g, h\}$ ist auch schon die, die sich nicht mehr vergrößert. Daher gilt $E(d) = \{d, a, c, g, h\}$.

Bestimmt man auf diese Art die von den Elementen von $S$ erzeugten abgeschlossenen Teilmengen, so erhält man $E(a) = E(g) = \{a, c, g, h\}$, $E(b) = E(e) = \{b, e\}$, $E(c) = E(h) = \{c, h\}$, $E(d) = \{a, c, d, g, h\}$, $E(f) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Unter diesen suchen wir die minimalen Teilmengen. Wir finden $\{b, e\}$ und $\{c, h\}$.

## 4. Klassifikation der Zustände

Die Zustände einer Markovkette können verschiedenes Verhalten bezüglich der Häufigkeit, mit der sie auftreten, aufweisen. Es kann Zustände geben, in die man immer wieder zurückkehrt, und solche, in die man immer seltener oder gar nicht mehr zurückkehrt. Dieses unterschiedliche Verhalten wollen wir jetzt genauer untersuchen. Dazu müssen wir die Wahrscheinlichkeiten, in einen Zustand zurückzukehren, genauer definieren.

**Definition:** Für $n \geq 1$ und $i, j \in S$ sei $f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i)$. Das ist die Wahrscheinlichkeit, von $i$ ausgehend nach $n$ Schritten zum ersten Mal in $j$ zu sein. Für $i = j$ ist es die Wahrscheinlichkeit, nach $n$ Schritten zum ersten Mal nach $i$ zurückzukehren.

**Bemerkung:** Wir können $f_{ij}^{(n)}$ auch durch die Übergangswahrscheinlichkeiten ausdrücken. Aus Satz 2 (a) folgt $f_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \neq j} \dots \sum_{i_{n-1} \neq j} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j}$. Daraus folgt $f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)}$. Es gibt auch einen Zusammenhang mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten. Es gilt $f_{ij}^{(n)} = g_{i\{j\}}^{(n)}$, aber nur für $i \neq j$.

Die Ereignisse $\{X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j\}$ sind für verschiedene $n$ disjunkt. Da ihre Vereinigung das Ereignis, irgendwann nach $j$ zu kommen, darstellt, erhalten wir

**Definition:** Für $i, j \in S$ sei $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$. Das ist die Wahrscheinlichkeit, von $i$ ausgehend irgendwann nach $j$ zu kommen. Für $i = j$ ist es die Wahrscheinlichkeit, irgendwann von $i$ ausgehend nach $i$ zurückzukehren. Weiters sei $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$. Das ist die mittlere Rückkehrzeit nach $i$ bei Start in $i$.

Eine entscheidende Rolle wird die folgende Rekursionsformel spielen.

**Satz 10:** *Für $n \geq 1$ gilt $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$.*

**Beweis:** Das Ereignis $X_n = j$ wird in disjunkte Teilereignisse zerlegt: Für $1 \leq k \leq n$ sei $A_k = \{X_n = j, X_k = j, X_{k-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j\}$. Wir zerlegen also entsprechend dem ersten Zeitpunkt $k$ nach 0, zu dem der Zustand $j$ erreicht wird. Weil die Ereignisse $A_k$ disjunkt sind und ihre Vereinigung das Ereignis $X_n = j$ ist, erhalten wir mit dem Additionssatz

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k|X_0 = i) = P(X_n = j|X_0 = i) = p_{ij}^{(n)}$$

Mit Hilfe von Satz 2 (a) und den Definitionen folgt jetzt

$$\begin{aligned}
P(A_k|X_0 = i) &= \sum_{i_1 \neq j} \ldots \sum_{i_{k-1} \neq j} \sum_{i_{k+1} \in S} \ldots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{k-1} j} p_{j i_{k+1}} \ldots p_{i_{n-1} j} \\
&= \sum_{i_1 \neq j} \ldots \sum_{i_{k-1} \neq j} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{k-1} j} \sum_{i_{k+1} \in S} \ldots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{j i_{k+1}} \ldots p_{i_{n-1} j} \\
&= f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}
\end{aligned}$$

Setzt man das oben ein, so folgt $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$, das gewünschte Resultat. □

Die im letzten Satz vorkommende Summe legt es nahe, erzeugende Funktionen zu verwenden. Sei also $U_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} t^n$. Wegen $0 \leq p_{ii}^{(n)} \leq 1$ konvergiert diese Reihe für $|t| < 1$. Weiters sei $V_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} t^n$. Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} \leq 1$ konvergiert diese Reihe für $|t| \leq 1$. Satz 10 lässt sich in folgendes Resultat übersetzen.

**Satz 11:** *Für $|t| < 1$ und $i \in S$ gilt $U_i(t) = \frac{1}{1 - V_i(t)}$.*

**Beweis:** Aus der Formel für die Multiplikation von Potenzreihen und Satz 10 folgt

$$U_i(t) V_i(t) + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(n-k)} f_{ii}^{(k)} + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} t^n p_{ii}^{(n)} + p_{ii}^{(0)} = U_i(t)$$

Das ergibt die gewünschte Gleichung. □

In der Theorie der Markovketten stößt man immer wieder auf das Problem, unendliche Summen und Grenzwerte vertauschen zu müssen. Dazu braucht man entsprechende Sätze aus der Analysis. Zwei solche Sätze werden jetzt für den späteren Gebrauch bewiesen. In diesen Sätzen kann $t$ durch ein Intervall in $\mathbb{R}$ oder durch $\mathbb{N}$ laufen und $c$ kann endlich oder unendlich sein.

**Satz A:** *Seien $b(t)$ und $a_n(t)$ in $\mathbb{R}^+$, sodass $b = \lim_{t \to c} b(t)$ und $a_n = \lim_{t \to c} a_n(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \leq b(t)$ für alle $t$ gilt, dann gilt auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq b$.*

**Beweis:** Für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{n=0}^{n_0} a_n(t) \leq b(t)$, da $a_n(t) \geq 0$ ist. Durch Grenzübergang $t \to c$ folgt $\sum_{n=0}^{n_0} a_n \leq b$. Da $n_0$ beliebig ist, folgt daraus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq b$. □

**Satz B:** *Sei $a_n(t) \in \mathbb{R}$, sodass $a_n = \lim_{t \to c} a_n(t)$ für alle $n$ existiert. Wenn es $d_n \in \mathbb{R}^+$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} d_n < \infty$ und $|a_n(t)| \leq d_n$ für alle $t$ und alle $n \geq 0$ gibt, dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{t \to c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)$.*

**Beweis:** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $n_0$ so, dass $\sum_{n=n_0}^{\infty} d_n < \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Daraus folgt dann, dass $\sum_{n=n_0}^{m} |a_n(t)| \leq \sum_{n=n_0}^{m} d_n < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $t$ und alle $m \geq n_0$ gilt. Durch Grenzübergang

$t \to c$ erhalten wir $\sum_{n=n_0}^{m} |a_n| \le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $m \ge n_0$. Insbesondere sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann können wir eine Umgebung $U$ von $c$ so wählen, dass $|a_n(t) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3n_0}$ für $t \in U$ und $0 \le n \le n_0 - 1$ gilt. Für $t \in U$ und $m \ge n_0$ erhalten wir

$$|\sum_{n=0}^{m} a_n(t) - \sum_{n=0}^{m} a_n| \le \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n(t) - a_n| + \sum_{n=n_0}^{m} |a_n(t)| + \sum_{n=n_0}^{m} |a_n| < n_0 \frac{\varepsilon}{3n_0} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Lässt man jetzt $m$ gegen $\infty$ gehen, so folgt daraus $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n| < \varepsilon$ für alle $t \in U$, womit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{t\to c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)$ gezeigt ist. $\square$

Mit Hilfe dieser Sätze aus der Analysis können wir jetzt folgenden Satz über die Rückkehrwahrscheinlichkeiten beweisen.

**Satz 12:** *Sei $i \in S$. Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ genau dann, wenn $f_{ii} < 1$ ist.*

**Beweis:** Sei zuerst $f_{ii} < 1$. Es gilt $\lim_{t\uparrow 1} V_i(t) = \lim_{t\uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} < 1$. Das folgt aus Satz B mit $d_n = f_{ii}^{(n)}$ und $a_n(t) = f_{ii}^{(n)} t^n$ für $t \in (0,1)$. Aus Satz 11 erhalten wir $\lim_{t\uparrow 1} U_i(t) = \frac{1}{1-f_{ii}} = b$. Da $t \mapsto U_i(t)$ monoton wachsend ist, folgt $U_i(t) \le b$ für alle $t \in (0,1)$. Satz A mit $a_n(t) = p_{ii}^{(n)} t^n$ ergibt dann $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \le b < \infty$.
Um die andere Richtung zu zeigen, sei $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = b < \infty$. Aus Satz B mit $d_n = p_{ii}^{(n)}$ und $a_n(t) = p_{ii}^{(n)} t^n$, den wir wegen $|p_{ii}^{(n)} t^n| \le p_{ii}^{(n)}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ anwenden können, folgt $\lim_{t\uparrow 1} U_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = b$. Aus Satz 11 erhalten wir, dass $V_i(t) = \frac{U_i(t)-1}{U_i(t)}$ gilt. Daraus ergibt sich dann $f_{ii} = \lim_{t\uparrow 1} V_i(t) = \frac{b-1}{b} < 1$. $\square$

Jetzt geben wir die Definitionen für die Klassifikation der Zustände einer Markovkette.

**Definition:** Sei $i \in S$. Der Zustand $i$ heißt transient, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ gilt. Er heißt rekurrent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ gilt. Ein rekurrenter Zustand heißt nullrekurrent, wenn $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ gilt, und sonst positiv rekurrent.

Mit Hilfe von Satz 12 kann man diese Definition besser verstehen. Aus diesem Satz folgt, dass der Zustand $i$ genau dann transient ist, wenn die Wahrscheinlichkeit $f_{ii}$ für eine Rückkehr nach $i$ bei Start in $i$ kleiner als 1 ist, und dass $i$ genau dann rekurrent ist, wenn die Wahrscheinlichkeit $f_{ii}$ für eine Rückkehr nach $i$ bei Start in $i$ gleich 1 ist. So erklären sich auch die Namen rekurrent (die Rückkehr ist sicher) und transient (die Rückkehr ist nicht sicher).

Als nächstes untersuchen wir, wie Rekurrenz und Transienz verschiedener Zustände voneinander abhängen. Der Zustand $j$ heißt vom Zustand $i$ aus erreichbar, wenn ein $n \ge 0$ existiert mit $p_{ij}^{(n)} > 0$. Wir haben dafür die Schreibweise $i \to j$ eingeführt.

**Satz 13:** *Seien $i$ und $j$ in $S$. Wenn sowohl $i \to j$ als auch $j \to i$ gilt, dann sind $i$ und $j$ beide positiv rekurrent, beide nullrekurrent oder beide transient.*

**Beweis:** Da sowohl $i \to j$ als auch $j \to i$ gilt, existieren $u$ und $v$ mit $p_{ij}^{(u)} > 0$ und $p_{ji}^{(v)} > 0$. Sei $\alpha = p_{ij}^{(u)} p_{ji}^{(v)} > 0$. Für alle $n \ge 1$ gilt

$$p_{ii}^{(u+n+v)} = \sum_{k\in S} \sum_{l\in S} p_{ik}^{(u)} p_{kl}^{(n)} p_{li}^{(v)} \ge p_{ij}^{(u)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(v)} = \alpha p_{jj}^{(n)}$$

Analog zeigt man $p_{jj}^{(v+n+u)} \ge \alpha p_{ii}^{(n)}$ für $n \ge 1$. Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$. Ebenso gilt $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$. Mit Hilfe der Definitionen folgt daraus das gewünschte Resultat. $\square$

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass wir alle minimalen Teilmengen einer Markovkette finden können und dass diese paarweise disjunkt sind (siehe Satz 9). Aus Satz 8 und Satz 13 folgt, dass alle Elemente einer minimalen Teilmenge vom selben Typ sind. Wir können die minimalen Teilmengen also einteilen in positiv rekurrente Teilmengen, deren Zustände alle positiv rekurrent sind, in nullrekurrente Teilmengen, deren Zustände alle nullrekurrent sind, und in transiente Teilmengen, deren Zustände alle transient sind. Der nächste Satz behandelt die Zustände, die zu keiner minimalen Teilmenge gehören.

**Satz 14:** *Sei $i \in S$ ein Zustand.*
(a) *Ist $i$ rekurrent und $j \in S \setminus \{i\}$ mit $i \to j$, dann gilt $f_{ji} = 1$.*
(b) *Ist $i$ in keiner minimalen Teilmenge, dann ist $i$ transient.*

**Beweis:** Sei zuerst $j \in S \setminus \{i\}$ ein Zustand, für den $p_{ij}^{(n)} > 0$ für ein $n$ und $f_{ji} < 1$ gilt. Wegen $i \neq j$ muss $n \geq 1$ gelten. Wegen $p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \in S} \dots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j} > 0$ gibt es $i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \in S$, für die $p_{ii_1} > 0$, $p_{i_1 i_2} > 0$, ..., $p_{i_{n-1} j} > 0$ gilt. Wir können annehmen, dass $i_m \neq i$ für $1 \leq m \leq n-1$ gilt. Ansonsten finden wir ein maximales $m \geq 1$ mit $i_m = i$ und wir können $i_{m+1}, \dots, i_{n-1}$ statt $i_1, \dots, i_{n-1}$ wählen.
Sei $A$ das Ereignis $\{X_l = i \text{ für ein } l \geq 1\}$, sodass $P(A|X_0 = i) = f_{ii}$ gilt. Sei $B$ das Ereignis $\{X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = j\}$, sodass $P(B|X_0 = i) = p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j} > 0$ gilt. Weiters sei $C_m = B \cap \{X_{n+1} \neq i, \dots, X_{n+m-1} \neq i, X_{n+m} = i\}$ für $m \geq 1$. Wegen $i_j \neq i$ für $1 \leq j \leq n-1$ ist $B \cap A$ die disjunkte Vereinigung der Ereignisse $C_m$ für $m \geq 1$. Aus dem Additionssatz folgt $P(B \cap A|X_0 = i) = \sum_{m=1}^{\infty} P(C_m|X_0 = i)$. Wegen Satz 2 (a) erhalten wir

$$\begin{aligned} P(C_m|X_0 = i) &= \sum_{k_1 \neq i} \dots \sum_{k_{m-1} \neq i} p_{ii_1} \dots p_{i_{n-1} j} p_{jk_1} p_{k_1 k_2} \dots p_{k_{m-1} i} \\ &= p_{ii_1} \dots p_{i_{n-1} j} \sum_{k_1 \neq i} \dots \sum_{k_{m-1} \neq i} p_{jk_1} p_{k_1 k_2} \dots p_{k_{m-1} i} = P(B|X_0 = i) f_{ji}^{(m)} \end{aligned}$$

Setzt man oben ein, so folgt $P(B \cap A|X_0 = i) = P(B|X_0 = i) \sum_{m=1}^{\infty} f_{ji}^{(m)} = P(B|X_0 = i) f_{ji}$. Daraus erhalten wir dann

$$P(B \setminus A|X_0 = i) = P(B|X_0 = i) - P(B \cap A|X_0 = i) = P(B|X_0 = i)(1 - f_{ji}) > 0$$

Nun gilt $1 \geq P(A \cup B|X_0 = i) = P(A|X_0 = i) + P(B \setminus A|X_0 = i) = f_{ii} + P(B \setminus A|X_0 = i)$, sodass $f_{ii} < 1$ folgt.
Für einen Zustand $j \in S \setminus \{i\}$, für den $p_{ij}^{(n)} > 0$ für ein $n \geq 0$ und $f_{ji} < 1$ gilt, haben wir $f_{ii} < 1$ gezeigt. Daraus folgt sofort (a), da für ein rekurrentes $i$ ja $f_{ii} = 1$ gelten muss.
Aus der Voraussetzung in (b) folgt, dass die wegen Satz 7 (a) abgeschlossene Menge $E(i)$ nicht minimal ist, sonst wäre $i$ ja in einer minimalen Teilmenge. Es gibt also eine echte abgeschlossene Teilmenge $Q$ von $E(i)$ mit $i \notin Q$ (sonst wäre $E(i) \subset Q$ wegen Satz 7 (b)). Wir wählen $j \in Q$ beliebig. Wegen $j \in E(i)$ folgt $p_{ij}^{(n)} > 0$ für ein $n$. Da $Q$ abgeschlossen ist und $i \notin Q$ folgt $p_{ji}^{(m)} = 0$ für alle $m$ aus Satz 6 (a). Wegen $0 \leq f_{ji}^{(m)} \leq p_{ji}^{(m)}$ folgt $f_{ji}^{(m)} = 0$ für alle $m$ und daraus $f_{ji} = 0$. Aus obigem Resultat folgt dann $f_{ii} < 1$, womit die Transienz von $i$ bewiesen ist. □

Sei $T \subset S$ die Menge aller transienten Zustände, sodass $S \setminus T$ alle rekurrenten Zustände enthält. In $T$ sind alle $i \in S$ enthalten, die in keiner minimalen Teilmenge liegen (Satz 14 (b)) und alle minimalen Teilmengen, die aus transienten Zuständen bestehen. Die Menge $S \setminus T$ zerfällt in paarweise disjunkte minimale Teilmengen $R_1, R_2, \dots$, von denen jede entweder aus lauter positiv rekurrenten Zuständen oder aus lauter nullrekurrenten Zuständen besteht.

Um zu zeigen, dass minimale Teilmengen sowohl aus transienten, aus positiv rekurrenten, als auch aus nullrekurrenten Zuständen bestehen können, untersuchen wir Beispiel 2. Der Zustandsraum $S$ ist $\{0, 1, 2, \dots\}$. Wir nehmen an, dass $0 < r_j < 1$ für alle $j$ gilt. Man prüft leicht nach, dass $E(i) = S$ für alle $i \in S$ gilt. Daher ist $S$ selbst eine minimale Teilmenge. Es genügt daher festzustellen, ob der Zustand 0 transient, nullrekurrent oder positiv rekurrent ist. Es folgt dann, dass alle Zustände vom selben Typ sind wie der Zustand 0.

Wir suchen $f_{00}^{(n)}$. Es gibt nur eine Möglichkeit, von 0 ausgehend nach $n$ Schritten zum ersten Mal nach 0 zurückzukehren, nämlich die Zustände $0, 1, 2, \dots, n-1, 0$ zu durchlaufen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $r_0 r_1 \dots r_{n-2}(1-r_{n-1})$. Somit gilt $f_{00}^{(n)} = r_0 r_1 \dots r_{n-2}(1-r_{n-1})$. Es folgt $\sum_{n=1}^{m+1} f_{00}^{(n)} = 1 - r_0 r_1 \dots r_m$. Wir setzen $\alpha = \lim_{m\to\infty} r_0 r_1 \dots r_m$. Dieser Grenzwert existiert, da die Folge wegen $0 < r_j < 1$ monoton fallend ist. Es folgt $f_{00} = 1 - \alpha$. Der Zustand 0 ist transient genau dann, wenn $f_{00} < 1$, das heißt wenn $\alpha > 0$ gilt. Er ist rekurrent genau dann, wenn $f_{00} = 1$, das heißt wenn $\alpha = 0$ gilt. Die mittlere Rückkehrzeit nach 0 bei Start in 0 ist $\mu_0 = \sum_{m=n}^{\infty} n f_{00}^{(n)}$. Wir werden später zeigen, dass ein rekurrenter Zustand genau dann positiv rekurrent ist, wenn seine mittlere Rückkehrzeit endlich ist.

Wir haben folgendes Ergebnis. Wenn $\alpha > 0$ gilt, sind alle Zustände transient. Wenn $\alpha = 0$ und $\mu_0 = \infty$ gilt, sind alle Zustände nullrekurrent. Wenn $\alpha = 0$ und $\mu_0 < \infty$ gilt, sind alle Zustände positiv rekurrent. Alle Fälle treten auf. Gilt $r_j = \frac{2j^2+5j+2}{2j^2+5j+3} = \frac{(j+2)(2j+1)}{(j+1)(2j+3)}$, dann ist $\alpha = \frac{1}{2}$. Gilt $r_j = \frac{j+1}{j+2}$, dann ist $\alpha = 0$ und $\mu_0 = \infty$. Gilt $r_j = \frac{1}{2}$, dann ist $\alpha = 0$ und $\mu_0 < \infty$.

## 5. Periodisches Verhalten

Es kann vorkommen, dass man in einen Zustand nur zu Zeitpunkten zurückkehren kann, die ein Vielfaches einer ganzen Zahl $> 1$ sind. Diese Zahl nennt man die Periode des Zustandes.

**Definition:** Sei $i \in S$. Der größte gemeinsame Teiler $d_i$ von $\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ heißt Periode des Zustands $i$.

Hat $i \in S$ die Periode $d_i$, dann gilt $p_{ii}^{(n)} = 0$, wenn $n$ kein Vielfaches von $d_i$ ist. Wir untersuchen das periodische Verhalten einer minimalen Teilmenge.

**Satz 15:** *Sei $Q$ eine minimale Teilmenge von $S$. Dann haben alle Zustände in $Q$ dieselbe Periode $d$. Weiters lässt sich $Q$ in paarweise disjunkte Teilmengen $Q_0, Q_1, \dots, Q_{d-1}$ zerlegen, die folgende Eigenschaft haben. Ist $i \in Q_r$ und $p_{ij}^{(n)} > 0$, dann gilt $j \in Q_{r+n-ld}$, wobei $l$ so gewählt ist, dass $0 \leq r + n - ld \leq d - 1$ gilt.*

**Beweis:** Wir konstruieren zuerst die Zerlegung von $Q$. Sei $k \in Q$ beliebig und $d = d_k$. Sei $Q_r = \{j \in Q : p_{kj}^{(r+md)} > 0$ für ein $m \geq 0\}$ für $0 \leq r \leq d-1$. Wir zeigen, dass diese Mengen eine Zerlegung von $Q$ bilden.

Sei $j \in Q$ beliebig. Da $Q$ eine minimale Teilmenge ist, existiert nach Satz 8 ein $n \geq 0$ mit $p_{kj}^{(n)} > 0$. Es gibt ein $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ und ein $m \geq 0$ mit $n = r + md$. Also liegt $j$ in $Q_r$ und $Q = \bigcup_{r=0}^{d-1} Q_r$ ist gezeigt.

Sei $j \in Q_r \cap Q_s$. Dann gibt es ein $l \geq 0$ und ein $m \geq 0$ mit $p_{kj}^{(r+ld)} > 0$ und $p_{kj}^{(s+md)} > 0$. Da $Q$ eine minimale Teilmenge ist, existiert nach Satz 8 ein $n \geq 0$ mit $p_{jk}^{(n)} > 0$. Wir erhalten $p_{kk}^{(r+ld+n)} = \sum_{u\in S} p_{ku}^{(r+ld)} p_{uk}^{(n)} \geq p_{kj}^{(r+ld)} p_{jk}^{(n)} > 0$ und analog $p_{kk}^{(s+md+n)} > 0$. Da $k$ die Periode $d$ hat, sind $r + ld + n$ und $s + md + n$ durch $d$ teilbar, daher auch $r - s$. Es gilt aber $0 \leq r \leq d-1$ und $0 \leq s \leq d-1$ sodass $r = s$ folgt. Damit ist gezeigt, dass die Mengen $Q_0, Q_1, \dots, Q_{d-1}$ disjunkt sind.

Sei $i \in Q_r$ und $p_{ij}^{(n)} > 0$. Aus der Definition von $Q_r$ folgt die Existenz eines $m \geq 0$ mit $p_{ki}^{(r+md)} > 0$. Wir erhalten $p_{kj}^{(r+md+n)} = \sum_{u \in S} p_{ku}^{(r+md)} p_{uj}^{(n)} \geq p_{ki}^{(r+md)} p_{ij}^{(n)} > 0$. Das aber heißt, dass $j \in Q_{r+n-ld}$ ist, wobei $l$ so gewählt wird, dass $0 \leq r+n-ld \leq d-1$ gilt.
Es bleibt zu zeigen, dass alle Elemente von $Q$ dieselbe Periode haben. Wäre das nicht der Fall dann könnte man $k$ und $j$ in $Q$ finden mit $d_k > d_j$. Für diesen Zustand $k$ bilden wir die Mengen $Q_0, Q_1, \dots, Q_{d-1}$ wie oben, wobei $d = d_k$ ist. Da diese Mengen eine Zerlegung von $Q$ bilden, gibt es genau ein $Q_r$ mit $j \in Q_r$. Ist jetzt $p_{jj}^{(n)} > 0$, dann gibt es, wie oben bewiesen, ein $l$ mit $j \in Q_{r+n-ld}$. Es muss also $r = r+n-ld$ gelten. Wir haben gezeigt, dass alle $n$, für die $p_{jj}^{(n)} > 0$ gilt, durch $d$ teilbar sind. Daher ist auch $d_j$ durch $d = d_k$ teilbar und $d_k > d_j$ ist unmöglich. □

Satz 15 besagt, dass die disjunkten Mengen $Q_0, Q_1, \dots, Q_{d-1}$ periodisch durchlaufen werden. Befindet man sich in einem Zustand der Menge $Q_r$, so kann man im nächsten Schritt mit positiver Wahrscheinlichkeit nur in einen Zustand der Menge $Q_{r+1}$ übergehen, wobei $Q_d$ mit $Q_0$ gleichzusetzen ist. Im nächsten Kapitel wird folgender Begriff nützlich sein.

**Definition:** Sei $Q$ eine minimale Teilmenge von $S$, deren Elemente alle Periode $d$ haben. Seien $Q_0, Q_1, \dots, Q_{d-1}$ die Mengen aus Satz 15. Seien $i$ und $j$ beliebige Zustände in $Q$. Nach Satz 15 gibt es eindeutige $r$ und $s$ mit $i \in Q_r$ und $j \in Q_s$. Sei $q = s - r$ für $s \geq r$ und $q = s - r + d$ für $s < r$. Wir nennen $q$ den Periodenabstand von $i$ nach $j$.

Die letzte Aussage von Satz 15 kann man jetzt so formulieren: Ist $q$ der Periodenabstand von $i$ nach $j$, dann gilt $p_{ij}^{(n)} = 0$, wenn $n \notin \{q + md : m \geq 0\}$.

## 6. Langzeitverhalten

Durch $P(X_n = j | X_0 = i) = p_{ij}^{(n)}$ ist die Wahrscheinlichkeit gegeben, bei Start im Zustand $i$ nach $n$ Schritten im Zustand $j$ zu sein. Wir wollen herausfinden, wie sich diese Wahrscheinlichkeiten für $n \to \infty$ verhalten.

**Satz 16:** *Sei $i \in S$ beliebig und $j \in S$ ein transienter oder nullrekurrenter Zustand. Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

**Beweis:** Wir erhalten $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$ direkt aus den Definitionen von nullrekurrent und von transient. Aus Satz 10 folgt $p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}$ für $n \geq 1$. Wir verwenden Satz B mit $a_m(n) = f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}$ für $m \leq n$ und $a_m(n) = 0$ für $m > n$ und mit $d_m = f_{ij}^{(m)}$. Es gilt $|a_m(n)| = f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} \leq f_{ij}^{(m)} = d_m$ und $\sum_{m=1}^{\infty} d_m = f_{ij} \leq 1$. Da $a_m = \lim_{n\to\infty} a_m(n) = 0$ gilt, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m = 0$. □

Um positiv rekurrente Zustände zu behandeln, müssen wir den Begriff eines stationären Vektors einführen.

**Definition:** Sei $Q$ eine minimale Teilmenge von $S$. Ein Vektor $v = (v_i)_{i\in Q}$ mit $v_i \geq 0$ für alle $i$ und $\sum_{i\in Q} v_i = 1$ heißt stationärer Vektor für die Teilmenge $Q$, wenn $\sum_{i\in Q} v_i p_{ij} = v_j$ für alle $j \in Q$ gilt.

Man verwendet die Bezeichnung stationär, um auszudrücken, dass sich etwas nicht mit der Zeit ändert. Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X_n$ durch einen stationären Vektor $v$ auf $Q$ gegeben ist, das heißt $P(X_n = i) = v_i$ für $i \in Q$ und $= 0$ für $i \in S \setminus Q$, dann folgt

$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i \in S} P(X_{n+1} = j | X_n = i) P(X_n = i) = \sum_{i \in Q} p_{ij} v_i$, also $P(X_{n+1} = j) = v_j$ für $j \in Q$ und $= 0$ für $j \in S \setminus Q$, weil $Q$ abgeschlossen ist. Somit ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X_{n+1}$ ebenfalls durch den stationären Vektor $v$ gegeben.

Wir benötigen noch einen Satz aus der Analysis.

**Satz C** (Diskreter Erneuerungssatz): *Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$, sodass $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$ und* $\operatorname{ggT}\{n \geq 1 : a_n > 0\} = 1$. *Sei $u_0 = 1$ und $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_n u_0$ für $n \geq 1$. Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\alpha}$ *mit $\alpha = \sum_{n=1}^\infty n a_n$, wobei $\alpha$ auch $\infty$ sein darf.*

**Beweis:** Wir teilen den Beweis in sechs Schritte:
(i) Es gilt $u_n \geq 0$ für $n \geq 0$ und $u_0 = 1$. Ist $u_n \leq 1$ für alle $n < m$ gezeigt, dann folgt $u_m \leq \sum_{n=1}^m a_n \leq 1$. Dieser Induktionsbeweis zeigt, dass $0 \leq u_n \leq 1$ für alle $n$ gilt.
(ii) Sei $r_n = \sum_{k=n+1}^\infty a_k$, sodass $\alpha = \sum_{n=0}^\infty r_n$. Wegen $a_n = r_{n-1} - r_n$ und $r_0 = 1$ folgt $\sum_{k=0}^n r_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} r_k u_{n-k-1}$ für alle $n$ und daher $\sum_{k=0}^n r_k u_{n-k} = r_0 u_0 = 1$ für alle $n$.
(iii) Sei $\lambda = \limsup_{n\to\infty} u_n \in [0,1]$. Also gilt $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \lambda$ für eine Teilfolge $(n_k)_{k\geq 1}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon$ mit $u_n \leq \lambda + \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Wir zeigen $\lim_{k\to\infty} u_{n_k - j} = \lambda$ für alle $j$ mit $a_j > 0$. Angenommen, das gilt nicht. Dann existiert ein $\tilde\lambda < \lambda$, sodass für $\varepsilon = \frac{1}{4} a_j (\lambda - \tilde\lambda)$ und unendlich viele $m$ sowohl $u_{m-j} < \tilde\lambda$ als auch $u_m > \lambda - \varepsilon$ gilt. Sei $N > j$ so groß, dass $r_N < \varepsilon$. Ist $m$ wie oben und zusätzlich noch $m \geq N + n_\varepsilon$ dann erhalten wir unter Benützung von $u_n \leq 1$

$$\begin{aligned} u_m &\leq a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \cdots + a_N u_{m-N} + \varepsilon \\ &< (a_1 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_N)(\lambda + \varepsilon) + a_j \tilde\lambda + \varepsilon \\ &\leq (1 - a_j)(\lambda + \varepsilon) + a_j \tilde\lambda + \varepsilon \leq \lambda + 2\varepsilon - a_j(\lambda - \tilde\lambda) = \lambda - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu $u_m > \lambda - \varepsilon$. Also haben wir $\lim_{k\to\infty} u_{n_k - j} = \lambda$ gezeigt.
(iv) Wenn $a_j > 0$ gilt, können wir den Beweis in (iii) auch auf die Teilfolge $(n_k - j)_{k\geq 1}$ anwenden und erhalten $\lim_{k\to\infty} u_{n_k - 2j} = \lambda$. Wiederholt man das, so erhält man $\lim_{k\to\infty} u_{n_k - lj} = \lambda$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und alle $j$ mit $a_j > 0$. Ebenso folgt $\lim_{k\to\infty} u_{n_k - l_1 j_1 - l_2 j_2} = \lambda$, wenn $a_{j_1} > 0$ und $a_{j_2} > 0$ gelten. Nun gibt es $j_1, j_2, \ldots, j_p$ mit $a_{j_i} > 0$, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist. Es gibt ein $M$, sodass für jedes $m \geq M$ natürliche Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_p$ existieren mit $m = l_1 j_1 + l_2 j_2 + \cdots + l_p j_p$. Deshalb folgt wie oben, dass $\lim_{k\to\infty} u_{n_k - m} = \lambda$, wenn $m \geq M$ gilt. Sei jetzt $K$ beliebig. Wenn $n_k \geq K + M$, dann folgt aus (ii), dass $\sum_{i=0}^K r_i u_{n_k - M - i} \leq 1$ gilt. Für $k \to \infty$ folgt daraus, dass $\lambda \sum_{i=0}^K r_i \leq 1$. Da $K$ beliebig war, erhalten wir $\lambda\alpha \leq 1$, also $\lambda \leq \frac{1}{\alpha}$. Das heißt $\limsup_{n\to\infty} u_n \leq \frac{1}{\alpha}$.
(v) Sei jetzt $\lambda = \liminf_{n\to\infty} u_n \in [0,1]$. Wir gehen wie in (iii) vor. Für eine Teilfolge $(n_k)_{k\geq 1}$ gilt $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \lambda$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon$ mit $u_n \geq \lambda - \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Wir zeigen $\lim_{k\to\infty} u_{n_k - j} = \lambda$ für alle $j$ mit $a_j > 0$. Angenommen, das gilt nicht. Dann existiert ein $\tilde\lambda > \lambda$, sodass für $\varepsilon = \frac{a_j(\tilde\lambda - \lambda)}{3 + \lambda}$ und unendlich viele $m$ sowohl $u_{m-j} > \tilde\lambda$ als auch $u_m < \lambda + \varepsilon$ gilt. Sei $N > j$ so gewählt, dass $r_N < \varepsilon$ gilt. Ist $m$ wie oben und zusätzlich noch $m \geq N + n_\varepsilon$ dann erhalten wir unter Benützung von $u_n \geq 0$

$$\begin{aligned} u_m &\geq a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \cdots + a_N u_{m-N} \\ &> (a_1 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_N)(\lambda - \varepsilon) + a_j \tilde\lambda \\ &> (1 - a_j - \varepsilon)(\lambda - \varepsilon) + a_j \tilde\lambda > \lambda - \varepsilon - \lambda\varepsilon + a_j(\tilde\lambda - \lambda) \\ &= \lambda + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu $u_m < \lambda + \varepsilon$. Also haben wir $\lim_{k\to\infty} u_{n_k - j} = \lambda$ gezeigt.
(vi) Genauso wie in (iv) mit Hilfe von (iii) wird jetzt mit Hilfe von (v) gezeigt, dass ein $M$

existiert mit $\lim_{k\to\infty} u_{n_k-m} = \lambda$ für $m \geq M$. Sei jetzt $K$ so groß, dass $r_K < \varepsilon$ gilt. Wenn $n_k \geq K+M$, dann folgt aus (ii), dass $\sum_{i=0}^{K} r_i u_{n_k-M-i} + \varepsilon \geq 1$ gilt. Für $k \to \infty$ folgt daraus, dass $\lambda \sum_{i=0}^{K} r_i + \varepsilon \geq 1$, also $\lambda\alpha + \varepsilon \geq 1$ gilt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $\lambda \leq \frac{1}{\alpha}$. Das heißt $\liminf_{n\to\infty} u_n \geq \frac{1}{\alpha}$. □

Jetzt können wir rekurrente Zustände behandeln.

**Satz 17:** *Sei $i \in S$ rekurrent mit Periode $d$. Sei $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$, die mittlere Rückkehrzeit nach $i$ bei Start in $i$. Dann gilt $\lim_{m\to\infty} p_{ii}^{(md)} = \frac{d}{\mu_i}$. Insbesondere gilt $\mu_i = \infty$, wenn $i$ nullrekurrent ist, und $\mu_i < \infty$, wenn $i$ positiv rekurrent ist.*

**Beweis:** Sei $u_m = p_{ii}^{(md)}$ und $a_m = f_{ii}^{(md)}$. Wegen $p_{ii}^{(r)} = 0$ für $r \notin \{md : m \geq 0\}$, was aus der Definition der Periode folgt, und wegen $0 \leq f_{ii}^{(r)} \leq p_{ii}^{(r)}$ erhalten wir $f_{ii}^{(r)} = 0$ für $r \notin \{md : m \geq 0\}$. Aus Satz 10 ergibt sich dann

$$u_m = p_{ii}^{(md)} = \sum_{n=1}^{md} f_{ii}^{(n)} p_{ii}^{(md-n)} = \sum_{l=1}^{m} f_{ii}^{(ld)} p_{ii}^{(md-ld)} = \sum_{l=1}^{m} a_l u_{m-l}$$

Weiters erhalten wir $\mathrm{ggT}\{m : u_m > 0\} = 1$, da ja $\mathrm{ggT}\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\} = d$ ist.

Wir prüfen die Voraussetzungen von Satz C nach. Es gilt $\sum_{m=1}^{\infty} a_m = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} = 1$, da $i$ rekurrent ist, und $u_0 = p_{ii}^{(0)} = 1$. Sei $c = \mathrm{ggT}\{m : a_m > 0\}$. Um $c = 1$ zu zeigen, nehmen wir $c > 1$ an. Dann gilt $a_m = 0$, wenn $m$ nicht durch $c$ teilbar ist. Es folgt $u_1 = a_1 u_0 = 0$. Um eine Induktion durchzuführen, nehmen wir an, dass $u_l = 0$ für alle $l$ kleiner als $m$, die keine Vielfachen von $c$ sind, gezeigt ist. Es gilt $u_m = \sum_{l=1}^{m} a_l u_{m-l}$. Wenn $m$ nicht durch $c$ teilbar ist, dann ist entweder $l$ oder $m-l$ nicht durch $c$ teilbar, und es folgt $u_m = 0$. Wir haben also gezeigt, dass $u_m = 0$ gilt für alle $m$, die keine Vielfachen von $c$ sind, ein Widerspruch zu $\mathrm{ggT}\{m : u_m > 0\} = 1$. Also gilt $c = 1$.

Wir können Satz C anwenden und erhalten, dass $\lim_{m\to\infty} p_{ii}^{(md)} = \lim_{m\to\infty} u_m = \frac{1}{\alpha}$ gilt mit $\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m = \sum_{m=1}^{\infty} m f_{ii}^{(md)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{d} f_{ii}^{(n)} = \frac{\mu_i}{d}$. Dabei darf $\alpha$ auch $\infty$ sein. Damit ist $\lim_{m\to\infty} p_{ii}^{(md)} = \frac{d}{\mu_i}$ gezeigt.

Nun ist der rekurrente Zustand $i$ genau dann nullrekurrent, wenn $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ gilt. Wegen $p_{ii}^{(r)} = 0$ für $r \notin \{md : m \geq 0\}$ ist das genau dann der Fall, wenn $\mu_i = \infty$ ist. Damit ist auch die letzte Aussage gezeigt. □

**Satz 18:** *Sei $R$ eine positiv rekurrente minimale Teilmenge, deren Elemente alle Periode $d$ haben. Dann gibt es genau einen stationären Vektor $(\pi_i)_{i\in R}$ für die Menge $R$. Seien $i$ und $j$ in $R$ und $q$ der Periodenabstand von $i$ nach $j$. Dann gilt $\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(q+md)} = d\pi_j$. Für $n \notin \{q+md : m \geq 0\}$ gilt $p_{ij}^{(n)} = 0$.*

**Beweis:** Für $i \in R$ sei $\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$. Wegen Satz 17 folgt $\pi_i > 0$ und $\lim_{m\to\infty} p_{ii}^{(md)} = d\pi_i$. Seien $i$ und $j$ in $R$ und $q$ der Periodenabstand von $i$ nach $j$. Aus Satz 15 folgt $p_{ij}^{(n)} = 0$ für $n \notin \{q+md : m \geq 0\}$. Das ist auch die letzte Aussage des Satzes. Wegen $0 \leq f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)}$ folgt daraus $f_{ij}^{(n)} = 0$ für $n \notin \{q+md : m \geq 0\}$. Mit Hilfe von Satz 10 folgt jetzt (wobei $f_{ij}^{(0)} = 0$ gesetzt wird)

$$p_{ij}^{(q+md)} = \sum_{n=1}^{q+md} f_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(q+md-n)} = \sum_{l=0}^{m} f_{ij}^{(q+ld)} p_{jj}^{(md-ld)}$$

Da $\lim_{m\to\infty} p_{jj}^{(md-ld)} = d\pi_j$, da $|f_{ij}^{(q+ld)} p_{jj}^{(md-ld)}| \le f_{ij}^{(q+ld)}$ und da $\sum_{l=0}^{\infty} f_{ij}^{(q+ld)} \le 1$ gilt, folgt

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(q+md)} = \sum_{l=0}^{\infty} f_{ij}^{(q+ld)} d\pi_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} d\pi_j = f_{ij} d\pi_j$$

mit Hilfe von Satz B genauso wie im Beweis von Satz 16. Da $i$ und $j$ in der minimalen Teilmenge $R$ liegen, folgt $j \to i$ aus Satz 8. Da $j$ auch rekurrent ist, folgt $f_{ij} = 1$ aus Satz 14 (a). Wir haben daher

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(q+md)} = d\pi_j$$

Damit ist die Konvergenzaussage gezeigt.

Wir zeigen, dass $\pi = (\pi_i)_{i\in R}$ der einzige stationäre Vektor für $R$ ist. Sei $Q_0, Q_1, \dots, Q_{d-1}$ die oben in Satz 15 gefundene Zerlegung der minimalen Teilmenge $R$. Für $0 \le r \le d-1$, für $k \in Q_r$ und für $m \ge 0$ gilt $\sum_{j\in Q_r} p_{kj}^{(md)} \le \sum_{j\in S} p_{kj}^{(md)} = 1$. Aus Satz A erhalten wir dann $\sum_{j\in Q_r} d\pi_j \le 1$. Summiert man über $r$ von 0 bis $d-1$, dann ergibt sich $\sum_{j\in R} \pi_j \le 1$.

Sei $0 \le r \le d-1$ und seien $k$ und $j$ in $Q_r$, sodass $\lim_{m\to\infty} p_{kj}^{(md)} = d\pi_j$ gilt. Ist $i \in Q_{r-1}$ (wobei $Q_{-1} = Q_{d-1}$), dann ist der Periodenabstand von $k$ nach $i$ gleich $d-1$ und wir haben $\lim_{m\to\infty} p_{ki}^{(md-1)} = d\pi_i$. Daraus und aus $\sum_{i\in Q_{r-1}} p_{ki}^{(md-1)} p_{ij} \le \sum_{i\in S} p_{ki}^{(md-1)} p_{ij} = p_{kj}^{(md)}$ folgt jetzt wie oben $\sum_{i\in Q_{r-1}} \pi_i p_{ij} \le \pi_j$. Da $p_{ij} = 0$ für $j \in Q_r$ und $i \notin Q_{r-1}$ gilt, haben wir $\sum_{i\in R} \pi_i p_{ij} \le \pi_j$ für alle $j \in R$ gezeigt. Wäre $\sum_{i\in R} \pi_i p_{ij} < \pi_j$ für ein $j \in R$, dann hätten wir $\sum_{j\in R} \pi_j > \sum_{j\in R} \sum_{i\in R} \pi_i p_{ij} = \sum_{i\in R} \pi_i \sum_{j\in R} p_{ij} = \sum_{i\in R} \pi_i$. Wegen der Abgeschlossenheit von $R$ ist ja $\sum_{j\in R} p_{ij} = 1$. Dieser Widerspruch beweist, dass $\sum_{i\in R} \pi_i p_{ij} = \pi_j$ für alle $j \in R$ gilt.

Sei $v = (v_i)_{i\in R}$ ein beliebiger Vektor mit $v_i \ge 0$ und $\sum_{i\in R} v_i \le 1$, sodass $\sum_{i\in R} v_i p_{ij} = v_j$ für alle $j \in R$ gilt. Ist $L = (p_{ij})_{i,j\in R}$ die auf die Menge $R$ eingeschränkte Übergangsmatrix, dann gilt $vL = v$ und daher auch $vL^n = v$ für alle $n \ge 1$. Wegen Satz 6 (b) erhalten wir $v_j = \sum_{i\in R} v_i p_{ij}^{(n)}$ für alle $j \in R$. Sei $0 \le r, s \le d-1$ und $j \in Q_r$. Dann ist $p_{ij}^{(r-s+md)} = 0$ für $i \notin Q_s$ und $m \ge 1$. Es folgt

$$v_j = \sum_{i\in R} v_i p_{ij}^{(r-s+md)} = \sum_{i\in Q_s} v_i p_{ij}^{(r-s+md)} \to \sum_{i\in Q_s} v_i d\pi_j \text{ für } m \to \infty$$

aus Satz B mit $a_i(m) = v_i p_{ij}^{(r-s+md)}$ und $d_i = v_i$, da $p_{ij}^{(r-s+md)} \le 1$, $\sum_{i\in R} v_i \le 1$ und $\lim_{m\to\infty} a_i(m) = v_i d\pi_j$ gilt. Also haben wir $v_j = \sum_{i\in Q_s} v_i d\pi_j$ gezeigt. Summation über $s$ von 0 bis $d-1$ ergibt $v_j = \pi_j \sum_{i\in R} v_i$ für alle $j \in R$. Setzt man $v = \pi$, so erhält man $\sum_{i\in R} \pi_i = 1$ und der Beweis, dass $\pi$ ein stationärer Vektor ist, ist vollständig. Wählt man für $v$ einen beliebigen stationären Vektor, so folgt $v_j = \pi_j \sum_{i\in R} v_i = \pi_j$. Also ist $\pi$ der einzige stationäre Vektor. □

Damit haben wir die notwendigen Resultate, um eine Markovkette zu untersuchen. Eine wichtige Rolle spielen die minimalen Teilmengen. Startet man in einem Zustand $i$, der in keiner minimalen Teilmenge liegt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, irgendwann eine minimale Teilmenge $Q$ zu betreten, durch die Eintrittswahrscheinlichkeit $g_{iQ}$ gegeben. Hat man eine minimale Teilmenge betreten, so kann man sie nicht mehr verlassen. Nach Satz 13 unterscheiden wir transiente, nullrekurrente und positiv rekurrente minimale Teilmengen. Es gibt zwei Möglichkeiten. Entweder man betritt irgenwann eine positiv rekurrente minimale Teilmenge und bleibt dann dort, oder es werden immer nur transiente und nullrekurrente Zustände angenommen, was dadurch passieren kann, dass man nie eine minimale Teilmenge betritt oder die betretene minimale Teilmenge nullrekurrent oder transient ist.

Nach Satz 16 werden transiente und nullrekurrente Zustände mit fortschreitender Zeit immer seltener besucht. Treten nur transiente und nullrekurrente Zustände auf, dann läuft die Markovkette gewissermaßen nach Unendlich davon, da ja jeder Zustand immer seltener besucht wird und die Markovkette daher in immer andere Zustände übergehen muss.

Interessanter ist der andere Fall, wo eine positiv rekurrente minimale Teilmenge $R$ betreten wird. Er kann natürlich nur auftreten, wenn es positiv rekurrente minimale Teilmengen gibt. In diesem Fall stellt sich nach Satz 18 ein stabiles Verhalten ein. Nach einer gewissen Anlaufzeit treten die einzelnen Zustände mit Wahrscheinlichkeiten auf, die durch den eindeutig bestimmten stationären Vektor gegeben sind.

Die Untersuchung einer Markovkette läuft also darauf hinaus, die minimalen Teilmengen zu bestimmen, herauszufinden, welche davon positiv rekurrent sind, und für diese, wenn möglich, den stationären Vektor zu berechnen. Der folgende Satz hilft dabei.

**Satz 19:** *Sei $Q$ eine minimale Teilmenge von $S$. Dann sind die Zustände in $Q$ alle positiv rekurrent, wenn eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist*
(a) *$Q$ ist endlich*
(b) *$Q$ hat einen stationären Vektor $\pi = (\pi_i)_{i\in Q}$*
(c) *es gibt eine endliche Teilmenge $Q_0$ von $Q$ und einen Vektor $(z_i)_{i\in Q}$ mit $z_i \ge 0$ für $i \in Q$, sodass $\sum_{j\in Q} p_{ij} z_j < \infty$ für $i \in Q_0$ und $\sum_{j\in Q} p_{ij} z_j \le z_i - 1$ für $i \in Q \setminus Q_0$ gilt.*

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, dass ein Zustand in $Q$ positiv rekurrent ist. Aus Satz 8 und Satz 13 folgt ja, dass dann alle Zustände in $Q$ positiv rekurrent sind.
Wir zeigen (a). Wenn kein Zustand in $Q$ positiv rekurrent ist, dann gilt $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ für alle $i, j \in Q$. Da $Q$ endlich ist, folgt daraus $\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in Q} p_{ij}^{(n)} = 0$ für alle $i \in Q$. Wegen Satz 6 (a) gilt aber $\sum_{j\in Q} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1$ für alle $n$. Dieser Widerspruch zeigt, dass es einen positiv rekurrenten Zustand in $Q$ gibt.
Jetzt zu (b). Ist $L = (p_{ij})_{i,j\in Q}$ die auf die Menge $Q$ eingeschränkte Übergangsmatrix, dann gilt $\pi L = \pi$ und daher auch $\pi L^n = \pi$ für alle $n \ge 1$. Wegen Satz 6 (b) erhalten wir $\pi_j = \sum_{i\in Q} \pi_i p_{ij}^{(n)}$ für alle $j \in Q$. Wenn $Q$ keinen positiv rekurrenten Zustand enthält, dann gilt $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ für alle $i, j \in Q$. Wegen $|\pi_i p_{ij}^{(n)}| \le \pi_i$ und $\sum_{i\in Q} \pi_i = 1$ folgt mit Satz B für $n \to \infty$, dass $\pi_j = 0$ für alle $j \in Q$ gilt. Wegen $\sum_{j\in Q} \pi_j = 1$ ist das nicht möglich. Also gibt es einen positiv rekurrenten Zustand in $Q$.
Es bleibt (c) zu zeigen. Sei $a = 1 + \max_{i\in Q_0} \sum_{j\in Q} p_{ij} z_j < \infty$. Wir setzen $z_i^{(n)} = \sum_{j\in Q} p_{ij}^{(n)} z_j$ für $n \ge 1$ und $i \in Q$. Dann gilt $z_i^{(n)} \ge 0$. Für $i \in Q$ gilt $p_{ij}^{(n)} = 0$, wenn $j \notin Q$ ist, und $\sum_{j\in Q} p_{ij}^{(n)} = 1$ für alle $n \ge 0$. Mit Hilfe dieser Resultate erhalten wir

$$\begin{aligned} z_i^{(n+1)} &= \sum_{j\in Q} p_{ij}^{(n+1)} z_j = \sum_{j\in Q} \sum_{k\in Q} p_{ik}^{(n)} p_{kj} z_j = \sum_{k\in Q_0} p_{ik}^{(n)} \sum_{j\in Q} p_{kj} z_j + \sum_{k\in Q\setminus Q_0} p_{ik}^{(n)} \sum_{j\in Q} p_{kj} z_j \\ &\le \sum_{k\in Q_0} p_{ik}^{(n)} (a-1) + \sum_{k\in Q\setminus Q_0} p_{ik}^{(n)} (z_k - 1) = a \sum_{k\in Q_0} p_{ik}^{(n)} - \sum_{k\in Q} p_{ik}^{(n)} + \sum_{k\in Q\setminus Q_0} p_{ik}^{(n)} z_k \\ &\le a \sum_{k\in Q_0} p_{ik}^{(n)} - 1 + z_i^{(n)} \end{aligned}$$

Für $n \ge 1$ haben wir gezeigt

$$a \sum_{k\in Q_0} p_{ik}^{(n)} - 1 \ge z_i^{(n+1)} - z_i^{(n)}$$

Addiert man diese Ungleichungen für $1 \le n \le m$ so erhält man

$$a \sum_{n=1}^{m} \sum_{k \in Q_0} p_{ik}^{(n)} - m \ge z_i^{(m+1)} - z_i^{(1)} \ge -z_i^{(1)}$$

Daraus folgt

$$a \sum_{k \in Q_0} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} p_{ik}^{(n)} \ge 1 - \frac{1}{m} z_i^{(1)}$$

Wenn es in $Q$ keinen positiv rekurrenten Zustand gibt, dann gilt $\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} = 0$ für alle $i, k \in Q$. Lässt man in obiger Ungleichung $m$ gegen $\infty$ gehen bei festgehaltenem $i$, dann erhält man $0 \ge 1$. Also gibt es einen positiv rekurrenten Zustand in $Q$. $\square$

**Bemerkung:** Ist der Zustandsraum $S$ endlich, dann sind wegen Satz 19 alle Zustände, die in einer minimalen Teilmenge enthalten sind, positiv rekurrent. Alle Zustände, die in keiner minimalen Teilmenge enthalten sind, sind wegen Satz 14 (b) transient. Nullrekurrente Zustände kann es daher bei endlichem Zustandsraum nicht geben.

Wir beschäftigen uns noch mit einigen Beispielen. Wir beginnen mit Beispiel 2. Hier ist $S = \mathbb{N}$. Man sieht leicht, dass für alle $i$ und $j$ in $\mathbb{N}$ ein $n \ge 0$ existiert mit $p_{ij}^{(n)} > 0$, vorausgesetzt $r_i > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Markovkette ist irreduzibel. Der ganze Zustandsraum $S$ ist eine minimale Teilmenge.

Wir versuchen einen stationären Vektor $(\pi_i)_{i\in S}$ zu berechnen. Aus der Übergangsmatrix sieht man, dass $\pi_j r_j = \pi_{j+1}$ für $j \ge 0$ gilt. Daraus folgt $\pi_{j+1} = \pi_0 r_0 r_1 \dots r_j$. Wegen $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ folgt $\pi_0 = (1 + \sum_{j=0}^{\infty} r_0 r_1 \dots r_j)^{-1}$. Ein stationärer Vektor existiert also genau dann, wenn $\sum_{j=0}^{\infty} r_0 r_1 \dots r_j < \infty$ gilt. Unter dieser Bedingung hat die Markovkette lauter positiv rekurrente Zustände.

Im Beispiel 4 haben wir eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum $S = \{0, 1, \dots, s\}$. Man sieht leicht, dass für alle $i$ und $j$ in $S$ ein $n \ge 0$ existiert mit $p_{ij}^{(n)} > 0$. Die Markovkette ist irreduzibel. Der ganze Zustandsraum $S$ ist eine minimale Teilmenge. Da $S$ endlich ist, sind nach Satz 19 alle Zustände positiv rekurrent. Nach Satz 18 existiert ein eindeutig bestimmter stationärer Vektor $(\pi_i)_{i\in S}$. Dieser ist durch $\pi_i = \binom{s}{i} 2^{-s}$ gegeben, wie man leicht nachprüft.

Das Beispiel 3 behandeln wir mit Hilfe von Satz 19 (c). Der Zustandsraum dieser Markovkette ist $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Man sieht leicht, dass für alle $i$ und $j$ in $S$ ein $n \ge 0$ existiert mit $p_{ij}^{(n)} > 0$. Die Markovkette ist irreduzibel. Der ganze Zustandsraum $S$ ist eine minimale Teilmenge. Sei $\mu = \sum_{i=0}^{\infty} i w_i$, die durchschnittliche Anzahl von Personen, die pro Abfertigungsintervall ankommt. Da in jedem Abfertigungsintervall nur eine Person abgefertigt wird, darf im Durchschnitt auch nicht mehr als eine Person ankommen, wenn die Länge der Warteschlange nicht nach $\infty$ wachsen soll. Wir nehmen daher $\mu < 1$ an. Sei $z_j = \frac{j}{1-\mu}$ für $j \ge 0$. Für $i \ge 1$ gilt dann $\sum_{j\in S} p_{ij} z_j = z_i - 1$, wie man leicht nachrechnet. Außerdem gilt $\sum_{j\in S} p_{0j} z_j = z_1 - 1 < \infty$. Die Bedingung aus Satz 19 (c) ist mit $Q_0 = \{0\}$ erfüllt. Für $\mu < 1$ sind daher alle Zustände positiv rekurrent und es existiert ein stationärer Vektor.

## 7. Irrfahrten

Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ ist eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \mathbb{Z}^d$. Jeder Zustand $i \in \mathbb{Z}^d$ hat $2d$ Nachbarzustände, die von $i$ Abstand 1 haben. In jeden dieser Nachbarzustände springt man mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind daher

$$p_{ij} = \tfrac{1}{2d} \qquad \text{für alle} \qquad i,j \in \mathbb{Z}^d \qquad \text{mit} \qquad \|i-j\| = 1$$

Alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten sind null. Wir untersuchen die Rekurrenzeigenschaften dieser Markovkette.

Wir beginnen mit der eindimensionalen Irrfahrt. In diesem Fall untersuchen wir auch eine nichtsymmetrische Version. Der Zustandsraum ist $S = \mathbb{Z}$ und $q$ sei eine Zahl zwischen 0 und 1. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$p_{ij} = q \quad \text{für} \quad j = i+1, \qquad p_{ij} = 1-q \quad \text{für} \quad j = i-1 \quad \text{und} \quad p_{ij} = 0 \quad \text{sonst}$$

Diese Markovkette ist irreduzibel und hat Periode 2. Sind $G$ die geraden und $U$ die ungeraden Zahlen, dann gilt $j \in U$, wenn $i \in G$ und $p_{ij} > 0$ ist, und $j \in G$, wenn $i \in U$ und $p_{ij} > 0$ ist.

**Hilfssatz:** *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{2k}{k} = (-4)^k \binom{-\frac12}{k}$ und $\frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1} = (-1)^{k-1}4^k\binom{\frac12}{k}$.*

**Beweis:** Wir rechnen das nach
$(-4)^k\binom{-\frac12}{k} = (-4)^k \frac{1}{k!}(-\frac12)(-\frac32)\dots(-\frac{2k-1}{2}) = 2^k\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{k!} = \frac{2^k(2k)!}{k!\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)} = \frac{(2k)!}{k!k!} = \binom{2k}{k}$.
Setzt man $k-1$ statt $k$, dann hat man $\binom{2k-2}{k-1} = (-4)^{k-1}\binom{-\frac12}{k-1}$. Wegen $\binom{\frac12}{k} = \frac{\frac12}{k}\binom{-\frac12}{k-1}$ folgt $\frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1} = (-4)^{k-1}\frac{4}{2^k}\binom{-\frac12}{k-1} = (-1)^{k-1}4^k\binom{\frac12}{k}$. □

Wir haben $U_i(t) = \sum_{n=0}^\infty p_{ii}^{(n)}t^n$ und $V_i(t) = \sum_{n=1}^\infty f_{ii}^{(n)}t^n$ definiert.

**Satz 20:** *Es gilt $p_{ii}^{(n)} = 0$, wenn $n$ ungerade ist, und $p_{ii}^{(2k)} = \binom{2k}{k}q^k(1-q)^k$ für $k \geq 1$. Weiters gilt $U_i(t) = (1-4q(1-q)t^2)^{-\frac12}$ und $V_i(t) = 1-(1-4q(1-q)t^2)^{\frac12}$.*

**Beweis:** Da die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ Periode 2 hat, gilt $p_{ii}^{(n)} = 0$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$.
Sei $n = 2k$. Um in $2k$ Schritten von $i$ nach $i$ zu gehen, muss man $k$ Schritte nach rechts und $k$ Schritte nach links machen. Es gibt $\binom{2k}{k}$ solche Schrittfolgen. Jede dieser Schrittfolgen hat Wahrscheinlichkeit $q^k(1-q)^k$. Es folgt $p_{ii}^{(2k)} = \binom{2k}{k}q^k(1-q)^k$.
Wir erhalten $U_i(t) = 1 + \sum_{k=1}^\infty \binom{2k}{k}q^k(1-q)^kt^{2k} = \sum_{k=0}^\infty\binom{-\frac12}{k}(-4q(1-q)t^2)^k$ aus dem Hilfssatz. Wegen $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty\binom{\alpha}{k}x^k$ ergibt sich $U_i(t) = (1-4q(1-q)t^2)^{-\frac12}$. Mit Satz 11 erhalten wir $V_i(t) = 1 - \frac{1}{U_i(t)} = 1-(1-4q(1-q)t^2)^{\frac12}$. □

**Satz 21:** *Die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ ist transient für $q \neq \frac12$ und nullrekurrent für $q = \frac12$.*

**Beweis:** Wegen Satz 20 gilt $f_{ii} = \sum_{n=1}^\infty f_{ii}^{(n)} = V_i(1) = 1-\sqrt{1-4q(1-q)}$. Für $q \neq \frac12$ gilt $f_{ii} < 1$, also sind alle Zustände transient. Für $q = \frac12$ gilt $f_{ii} = 1$, also sind alle Zustände rekurrent. Den Fall $q = \frac12$ müssen wir noch weiter untersuchen.
Nach Satz 20 gilt $V_i(t) = 1 - \sum_{k=0}^\infty\binom{\frac12}{k}(-4q(1-q)t^2)^k = \sum_{k=1}^\infty\binom{\frac12}{k}(-1)^{k-1}4^kq^k(1-q)^kt^{2k}$.
Es folgt $f_{ii}^{(n)} = 0$, wenn $n$ ungerade ist, und $f_{ii}^{(2k)} = \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}q^k(1-q)^k$, wobei der Hilfssatz verwendet wurde. Im Fall $q = \frac12$ haben wir daher $f_{ii}^{(2k)} = \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}(\frac12)^{2k}$. Damit erhalten wir $\mu_i = \sum_{k=1}^\infty 2kf_{ii}^{(2k)} = \sum_{k=1}^\infty\binom{2k-2}{k-1}(\frac12)^{2k-2} = \sum_{m=0}^\infty\binom{2m}{m}(\frac12)^{2m} = \sum_{m=0}^\infty p_{ii}^{(2m)}$. Da $i$ rekurrent und $p_{ii}^{(n)} = 0$ ist für ungerades $n$, muss $\sum_{m=0}^\infty p_{ii}^{(2m)} = \infty$ gelten. Damit ist $\mu_i = \infty$ gezeigt, das heißt jeder Zustand $i$ ist nullrekurrent. □

Für Dimension 2 und Dimension 3 behandeln wir nur die eingangs definierte symmetrische Irrfahrt.

Auch in höheren Dimensionen haben wir Periode 2. Ist $G$ die Menge der Punkte in $\mathbb{Z}^d$ mit gerader Koordinatensumme und $U$ die Menge der Punkte in $\mathbb{Z}^d$ mit ungerader Koordinatensumme, dann gilt $j \in U$, wenn $i \in G$ und $p_{ij} > 0$ ist, und $j \in G$, wenn $i \in U$ und $p_{ij} > 0$ ist.

**Satz 22:** *Für die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$ gilt $p_{ii}^{(n)} = 0$, wenn $n$ ungerade ist, und $p_{ii}^{(2k)} = \binom{2k}{k}^2 (\frac{1}{4})^{2k}$ für $k \geq 1$.*

**Beweis:** Da die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$ Periode 2 hat, gilt $p_{ii}^{(n)} = 0$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$.
Sei $n = 2k$. Um in $2k$ Schritten von $i$ nach $i$ zu gehen, muss man $m$ Schritte nach rechts, $m$ Schritte nach links, $k - m$ Schritte nach oben und $k - m$ Schritte nach unten machen, wobei $0 \leq m \leq k$ gilt. Es gibt $a_m = \binom{2k}{m}\binom{2k-m}{m}\binom{2k-2m}{k-m}\binom{k-m}{k-m}$ solche Schrittfolgen. Es folgt $a_m = \frac{(2k)!}{m!m!(k-m)!(k-m)!} = \binom{2k}{k}\binom{k}{m}^2$. Da jede dieser Schrittfolgen Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{4})^{2k}$ hat, erhalten wir $p_{ii}^{(2k)} = \sum_{m=0}^{k} a_m (\frac{1}{4})^{2k} = \binom{2k}{k}(\frac{1}{4})^{2k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m}^2$. Da $\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m}^2 = \binom{2k}{k}$ gilt, haben wir $p_{ii}^{(2k)} = \binom{2k}{k}^2 (\frac{1}{4})^{2k}$ gezeigt. □

**Hilfssatz:** *Es existieren Konstante $d_1$ und $d_2$ mit $0 < d_1 < d_2 < \infty$, sodass $d_1 e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \leq n! \leq d_2 e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$ für alle $n \geq 1$ gilt.*

**Beweis:** Die Stirlingsche Formel besagt $\lim_{n\to\infty} n!e^n/n^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$. Somit existieren Konstante $d_1$ und $d_2$ mit $0 < d_1 < d_2 < \infty$ und $d_1 \leq n!e^n/n^{n+\frac{1}{2}} \leq d_2$. □

**Satz 23:** *Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$ ist nullrekurrent.*

**Beweis:** Für $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ erhalten wir $d_1 e^{-2k}(2k)^{2k+\frac{1}{2}} \leq (2k)! \leq d_2 e^{-2k}(2k)^{2k+\frac{1}{2}}$ und $d_1 e^{-k} k^{k+\frac{1}{2}} \leq k! \leq d_2 e^{-k} k^{k+\frac{1}{2}}$ aus dem Hilfssatz. Es folgt $\frac{d_1}{d_2^2}\frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}}}{(k^{k+\frac{1}{2}})^2} \leq \binom{2k}{k} \leq \frac{d_2}{d_1^2}\frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}}}{(k^{k+\frac{1}{2}})^2}$.
Nun gilt $\frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}}}{(k^{k+\frac{1}{2}})^2} = \frac{2^{2k}\sqrt{2}}{\sqrt{k}}$, sodass wir $\frac{d_1^2}{d_2^4}\frac{2}{k} \leq \binom{2k}{k}^2 (\frac{1}{4})^{2k} \leq \frac{d_2^2}{d_1^4}\frac{2}{k}$ erhalten.

Wegen Satz 22 ist damit $\frac{2d_1^2}{d_2^4}\frac{1}{k} \leq p_{ii}^{(2k)} \leq \frac{2d_2^2}{d_1^4}\frac{1}{k}$ für alle $i \in \mathbb{Z}^2$ und $k \geq 1$ gezeigt. Es folgt $\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(2k)} = 0$ und somit auch $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$, da $p_{ii}^{(n)} = 0$ für ungerades $n$ nach Satz 22 gilt. Ebenso folgt $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(2k)} = \infty$. Damit ist gezeigt, dass alle Zustände $i \in \mathbb{Z}^2$ nullrekurrent sind. □

**Bemerkung:** Für die eindimensionale symmetrische Irrfahrt gilt $p_{ii}^{(2k)} = \binom{2k}{k}(\frac{1}{2})^{2k}$ für $k \geq 1$ nach Satz 20. Wie in obigem Beweis erhält man $\frac{\sqrt{2}d_1}{d_2^2}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq p_{ii}^{(2k)} \leq \frac{\sqrt{2}d_2}{d_1^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und $k \geq 1$. Daraus folgt ebenfalls, dass alle Zustände nullrekurrent sind.

Jetzt kommen wir zur symmetrischen Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^3$.

**Satz 24:** *Für die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^3$ gilt $p_{ii}^{(n)} = 0$, wenn $n$ ungerade ist, und $p_{ii}^{(2k)} = \binom{2k}{k}\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-l}(\frac{k!}{l!m!(k-l-m)!})^2(\frac{1}{6})^{2k}$ für $k \geq 1$.*

**Beweis:** Da die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ Periode 2 hat, gilt $p_{ii}^{(n)} = 0$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$.
Sei $n = 2k$. Um in $2k$ Schritten von $i$ nach $i$ zu gehen, muss man $l$ Schritte nach rechts, $l$ Schritte nach links, $m$ Schritte nach oben, $m$ Schritte nach unten, $k-l-m$ Schritte nach vorne und $k - l - m$ Schritte nach hinten machen, wobei $l + m \leq k$ gilt. Es gibt $\frac{(2k)!}{(l!m!(k-l-m)!)^2} = \binom{2k}{k}(\frac{k!}{l!m!(k-l-m)!})^2$ solche Schrittfolgen. Da jede dieser Schrittfolgen Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{6})^{2k}$ hat, erhalten wir $p_{ii}^{(2k)} = \sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-l}\binom{2k}{k}(\frac{k!}{l!m!(k-l-m)!})^2(\frac{1}{6})^{2k}$. □

**Satz 25:** *Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^3$ ist transient.*

**Beweis:** Sei $k \geq 1$. Das Produkt $l!m!(k-l-m)!$ nimmt sein Minimum an, wenn die drei Zahlen $l$, $m$ und $k-l-m$ gleich sind oder sich um höchstens 1 unterscheiden. Wäre zum Beispiel $l-m \geq 2$, dann würde ja $l!m! > (l-1)!(m+1)!$ wegen $l > m+1$ gelten.
Für $k \geq 3$ existieren $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \{-1, 0, 1\}$ mit $k = 3a + b$. Es gilt dann

$$l!m!(k-l-m)! \geq a!a!(a+b)! \qquad \text{für alle} \qquad l \geq 0 \qquad \text{und} \qquad m \geq 0 \qquad \text{mit} \qquad l+m \leq k$$

Aus dem Hilfssatz folgt $a!a!(a+b)! \geq d_1^3 a^{2(a+\frac{1}{2})}(a+b)^{a+b+\frac{1}{2}}e^{-k}$ und $k! \leq d_2 k^{k+\frac{1}{2}}e^{-k} = d_2 \frac{3^{k+\frac{3}{2}}}{k}(a+\frac{b}{3})^{k+\frac{3}{2}}e^{-k}$. Zusammen ergibt das

$$\frac{k!}{l!m!(k-l-m)!}(\tfrac{1}{3})^k \leq \frac{\sqrt{27}d_2}{d_1^3}\frac{1}{k}\frac{(a+\frac{b}{3})^{k+\frac{3}{2}}}{a^{2a+1}(a+b)^{a+b+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{27}d_2}{d_1^3}\frac{1}{k}(1+\tfrac{b}{k-b})^{\frac{2}{3}k-\frac{2b}{3}+1}(1-\tfrac{2b}{k+2b})^{\frac{1}{3}k+\frac{2b}{3}+\frac{1}{2}}$$

Bei konstantem $u$, $v$ und $w$ ist die Folge $(1+\frac{u}{k-u})^{vk+w}$ beschränkt, da $\lim_{k\to\infty}(1+\frac{u}{k-u})^{vk+w} = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{u}{k-u})^{v(k-u)}(1+\frac{u}{k-u})^{vu+w} = e^{uv}$ gilt. Daher existiert eine Konstante $c$ mit

$$\frac{k!}{l!m!(k-l-m)!}(\tfrac{1}{3})^k \leq \frac{c}{k} \qquad \text{für alle} \qquad l \geq 0 \qquad \text{und} \qquad m \geq 0 \qquad \text{mit} \qquad l+m \leq k$$

Wegen Satz 24 haben wir dann $p_{ii}^{(2k)} \leq \binom{2k}{k}(\frac{1}{2})^{2k}\frac{c}{k}\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-l}\frac{k!}{l!m!(k-l-m)!}(\frac{1}{3})^k$. Mit Hilfe der Formel $\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-l}\frac{k!}{l!m!(k-l-m)!}a^l b^m c^{k-l-m} = (a+b+c)^k$ sehen wir, dass die Doppelsumme gleich 1 ist, und erhalten $p_{ii}^{(2k)} \leq \binom{2k}{k}(\frac{1}{2})^{2k}\frac{c}{k}$. Da $\binom{2k}{k}(\frac{1}{2})^{2k} \leq \frac{\sqrt{2}d_2}{d_1^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$ bereits im Beweis von Satz 23 gezeigt wurde, ergibt sich schließlich $p_{ii}^{(2k)} \leq \frac{\sqrt{2}d_2 c}{d_1^2}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$. Da $p_{ii}^{(n)} = 0$ für ungerades $n$ nach Satz 24 gilt, erhalten wir $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty}p_{ii}^{(2k)} < \infty$. Somit sind alle Zustände transient. $\square$

Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $d \geq 4$ ist dann natürlich ebenfalls transient.

## 8. Verzweigungsprozess

Der Verzweigungsprozess wird in der Biomathematik verwendet und beschreibt die Entwicklung einer Population in aufeinanderfolgenden Generationen. Sei $X_n$ die Anzahl der Individuen in der $n$-ten Generation. Ist $X_n = k$, dann seien $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ die Anzahlen der Nachkommen der $k$ Individuen der $n$-ten Generation. Die Anzahl $X_{n+1}$ der Individuen in der $n+1$-ten Generation ist dann $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$.

Wir nehmen an, dass die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ unabhängig sind. Ihr Wertebereich ist $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und sie haben Wahrscheinlichkeiten $p_m$, das heißt $P(Y_j = m) = p_m$ für $1 \leq j \leq k$ und $m \geq 0$. Dieser Verzweigungsprozess ist eine Markovkette mit diskreter Zeit. Um ihn zu untersuchen, verwenden wir jedoch nicht die Methoden aus den letzten Kapiteln sondern erzeugende Funktionen.

Sei $g(s) = \sum_{m=0}^{\infty}p_m s^m$, sodass $\mathrm{E}(s^{Y_j}) = g(s)$ für $1 \leq j \leq k$ gilt. Für $n \geq 0$ sei weiters $h_n(s) = \mathrm{E}(s^{X_n}) = \sum_{m=0}^{\infty}P(X_n = m)s^m$. Wir berechnen $h_n$ mit Hilfe von $g$.

**Satz 26:** *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Verzweigungsprozess mit Startwert $X_0 = 1$. Dann gilt $h_0(s) = s$ und $h_n(s) = g^n(s) = g \circ g \circ \cdots \circ g(s)$.*

**Beweis:** Die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ werden als unabhängig angenommen, sodass auch die Zufallsvariablen $s^{Y_1}, s^{Y_2}, \ldots, s^{Y_k}$ unabhängig sind. Wenn $k \geq 1$ ist, dann folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty}P(Y_1 + \cdots + Y_k = m)s^m = \mathrm{E}(s^{Y_1+\cdots+Y_k}) = \mathrm{E}(s^{Y_1})\mathrm{E}(s^{Y_2})\ldots\mathrm{E}(s^{Y_k}) = (g(s))^k$$

Wenn $X_n = 0$ gilt, das heißt in der $n$-ten Generation kein Individuum vorhanden ist, dann gibt es auch keine Nachkommen, sodass auch $X_{n+1} = 0$ gelten muss. Wir haben daher $P(X_{n+1} = m|X_n = 0) = 0$ für $m \geq 1$ und $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 1$. Ist $X_n = k$ mit $k \geq 1$, dann gilt $X_{n+1} = \sum_{j=1}^{k} Y_j$, sodass $P(X_{n+1} = m|X_n = k) = P(\sum_{j=1}^{k} Y_j = m)$ folgt. Mit Hilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(s) &= \textstyle\sum_{m=0}^{\infty} P(X_{n+1} = m)s^m = \sum_{m=0}^{\infty} s^m \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+1} = m|X_n = k)P(X_n = k)\\
&= \textstyle\sum_{m=0}^{\infty} s^m P(X_{n+1}{=}m|X_n{=}0)P(X_n{=}0) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} s^m P(X_{n+1}{=}m|X_n{=}k)P(X_n{=}k)\\
&= \textstyle P(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X_n = k) \sum_{m=0}^{\infty} s^m P(\sum_{j=1}^{k} Y_j = m)\\
&= \textstyle P(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X_n = k)(g(s))^k = h_n(g(s))
\end{aligned}$$

Es gilt $h_0(s) = \sum_{m=0}^{\infty} P(X_0 = m)s^m = s$ wegen $P(X_0 = 1) = 1$ und $P(X_0 = m) = 0$ für $m \neq 1$. Nun folgt aus obigem Resultat der Reihe nach $h_1(s) = h_0(g(s)) = g(s)$, dann $h_2(s) = h_1(g(s)) = g \circ g(s) = g^2(s)$, dann $h_3(s) = h_2(g(s)) = g^2 \circ g(s) = g^3(s)$, und so fort, womit der Satz bewiesen ist. $\square$

Wir untersuchen das Langzeitverhalten des Verzweigungsprozesses $(X_n)_{n\geq 0}$, das ist das Verhalten des Prozesses für $n \to \infty$, mit Hilfe von Satz 26. Wir machen uns zuerst klar, wie die Funktion $g(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m s^m$ aussieht. Wir nehmen an, dass weder $p_0 = 1$ noch $p_1 = 1$ gilt. (Ist $p_0 = 1$, dann gibt es niemals Nachkommen und die Population ist ab der zweiten Generation ausgestorben. Ist $p_1 = 1$, dann hat jedes Individuum immer genau einen Nachkommen und die Populationsgröße bleibt konstant.) Wir untersuchen den Graph von $g$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Wegen $\sum_{m=0}^{\infty} p_m = 1$ ist $g$ auf $[0, 1]$ definiert und $g(1) = 1$. Wegen $g'(s) = \sum_{m=1}^{\infty} m p_m s^{m-1} > 0$ ist $g$ auf $[0, 1]$ streng monoton wachsend. Es gilt $g''(s) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)p_m s^{m-2}$. Wenn $p_2 = p_3 = \cdots = 0$ ist, dann ist $g'' = 0$ und $g$ ist eine Gerade mit Anstieg $p_1 < 1$. Ansonsten gilt $g'' < 0$ und $g$ ist strikt konvex. Daraus folgt, dass der Graph von $g$ außer im Punkt 1 keinen weiteren Schnittpunkt mit der Diagonalen hat, wenn $g'(1) \leq 1$ gilt. In diesem Fall sei $u = 1$. Wenn aber $g'(1) > 1$ gilt, dann gibt es genau einen Punkt $u \in [0, 1)$, wo der Graph von $g$ die Diagonale schneidet. Für $s \in [0, u)$ gilt $g(s) > s$ und für $s \in (u, 1)$ gilt $g(s) < s$. Somit ist $u$ der kleinste Fixpunkt von $g$.

Sei $q = P(X_n = 0 \text{ für ein } n)$ die Aussterbewahrscheinlichkeit und $q_n = P(X_n = 0)$ für $n \geq 1$. Wenn $X_n = 0$ ist, dann folgt daraus auch $X_{n+1} = 0$. Die Ereignisse $X_n = 0$ mit $n \geq 1$ bilden eine aufsteigende Folge, sodass $q = \lim_{n\to\infty} q_n$ aus dem Stetigkeitssatz folgt. Wegen $q_n = h_n(0)$ haben wir $q = \lim_{n\to\infty} h_n(0)$. Aus der Stetigkeit von $g$ und Satz 26 folgt $g(q) = g(\lim_{n\to\infty} h_n(0)) = \lim_{n\to\infty} g(h_n(0)) = \lim_{n\to\infty} h_{n+1}(0) = q$. Somit ist $q$ ein Fixpunkt von $g$. Da $g$ monoton wachsend ist und $0 \leq u$ gilt, erhalten wir $g^n(0) \leq g^n(u) = u$, das heißt $h_n(0) \leq u$ für alle $n$. Daraus folgt $q \leq u$. Da $u$ der kleinste Fixpunkt von $g$ ist, ist damit $q = u$ gezeigt.

# II. Markovketten mit kontinuierlicher Zeit

Markovketten mit kontinuierlicher Zeit werden analog zu Markovketten mit diskreter Zeit definiert. Sei $S$ wieder eine endliche oder abzählbare Menge, der sogenannte Zustandsraum. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit kontinuierlicher Zeit und Werten in der Menge $S$ heißt Markovkette, wenn folgende beiden Eigenschaften erfüllt sind, wobei $n \geq 0$ ist, $j, i, i_{n-1}, \dots, i_1$ in $S$ liegen und $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ gilt
(M1) $P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1) = P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i)$
(M2) $P(X_{s+t} = j | X_s = i)$ ist unabhängig von $s$.
Man nennt $p_{ij}(t) = P(X_{s+t} = j | X_s = i)$ die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette.

Das wichtigste Beispiel einer Markovkette mit kontinuierlicher Zeit ist der homogene Poissonprozess. Den schauen wir uns zuerst an, bevor wir mit der Untersuchung der Markovketten beginnen.

## 1. Poissonprozess

Den Poissonprozess verwendet man, um zufällig eintretende Ereignisse zu beschreiben. Das können Schadensmeldungen sein, die bei einer Versicherung eingehen, Personen, die ein Kaufhaus betreten, eintreffende Telefonanrufe, und so weiter. Um ein konkretes Beispiel zu haben, wählen wir das Kaufhaus.

Sei $X_t$ die Anzahl der Personen, die im Zeitintervall $[0, t)$, das Kaufhaus betreten. Das ergibt einen stochastische Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$. Er hat kontinuierliche Zeit und Zustandsraum $\mathbb{N}$.

Welchen Wahrscheinlichkeitsgestzen dieser stochastische Prozess gehorcht, hängt natürlich vom Verhalten der Personen ab. Um zu einer mathematischen Beschreibung zu kommen, müssen wir entsprechende Annahmen zugrundelegen. Wir nehmen zuerst an, dass es insgesamt nur $a$ Personen gibt, und dass die Zeit auf das Intervall $[0, b)$ beschränkt wird. Wir nehmen an, dass jede der $a$ Personen unabhängig von den anderen zufällig einen Zeitpunkt im Intervall $[0, b)$ für den Kaufhausbesuch wählt. Sei $\lambda = \frac{a}{b}$, die Anzahl der Personen pro Zeiteinheit. Wir untersuchen den Grenzfall $a \to \infty$ und $b \to \infty$, wobei $\lambda$ festgehalten wird.

Dazu seien $k \geq 1$ und $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_k$ fest gewählt und es sei $b > t_k$. Sei $Y_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$. Das ist die Anzahl der Personen, die im Zeitintervall $[t_{i-1}, t_i)$ das Kaufhaus betreten. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person im Zeitintervall $[t_{i-1}, t_i)$ kommt, ist $\frac{t_i - t_{i-1}}{b}$. Für das Zeitintervall $[t_k, b)$ ist diese Wahrscheinlichkeit $\frac{b-t_k}{b}$. Für $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ und $a \geq n_1 + \dots + n_k$ haben wir daher, da eine Multinomialverteilung vorliegt

$$
\begin{aligned}
&P(Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \dots, Y_k = n_k) = \\
&\quad = \tfrac{a!}{n_1!\dots n_k!(a-n_1-\dots-n_k)!}\big(\tfrac{t_1-t_0}{b}\big)^{n_1}\dots\big(\tfrac{t_k-t_{k-1}}{b}\big)^{n_k}\big(\tfrac{b-t_k}{b}\big)^{a-n_1-\dots-n_k} \\
&\quad = \tfrac{a(a-1)\dots(a-n_1-\dots-n_k+1)}{n_1!\dots n_k! a^{n_1+\dots+n_k}}\lambda^{n_1}(t_1-t_0)^{n_1}\dots\lambda^{n_k}(t_k-t_{k-1})^{n_k}\big(1-\tfrac{\lambda t_k}{a}\big)^a\big(\tfrac{b-t_k}{b}\big)^{-n_1-\dots-n_k} \\
&\quad \to \tfrac{1}{n_1!\dots n_k!}\lambda^{n_1}(t_1-t_0)^{n_1}\dots\lambda^{n_k}(t_k-t_{k-1})^{n_k}e^{-\lambda t_k} \\
&\quad = \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda(t_i-t_{i-1})}\lambda^{n_i}\tfrac{(t_i-t_{i-1})^{n_i}}{n_i!}
\end{aligned}
$$

Diese Rechnung zeigt, dass im Grenzfall die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_k$ unabhängig sind und $Y_i$ für $1 \leq i \leq k$ die $P(\lambda(t_i - t_{i-1}))$-Verteilung hat. Wenn der Poissonprozess zur Beschreibung von zufällig eintretenden Ereignissen dienen soll, dann muss er die Eigenschaften haben, die wir durch diesen Grenzübergang erhalten haben.

Wir definieren den Poissonprozess schrittweise.

**Definition:** Man sagt, dass ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ unabhängige Zuwächse hat, wenn für jedes $k \geq 1$ und beliebige $t_1, t_2, \dots, t_k$ mit $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ die Zufallsvariablen $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ unabhängig sind.

**Definition:** Man sagt, dass ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ stationäre Zuwächse hat, wenn für beliebige $t$ und $s$ in $\mathbb{R}^+$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X_{s+t} - X_s$ zwar von $t$, nicht aber von $s$ abhängt.

**Definition:** Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ heißt Poissonprozess mit Parameter $\lambda$, wenn $X_0 = 0$ gilt, wenn er unabhängige und stationäre Zuwächse hat und wenn $X_t$ für jedes $t > 0$ die $P(\lambda t)$-Verteilung hat.

## 2. Übergangswahrscheinlichkeiten

Wir beginnen mit der Untersuchung der Markovketten mit kontinuierlicher Zeit und behandeln zuerst die grundlegenden Eigenschaften der Übergangswahrscheinlichkeiten.

**Satz 1:** *Seien $i$ und $j$ in $S$. Dann gilt*
(a) $p_{ij}(t) \geq 0$ *für alle* $t \geq 0$, $p_{ii}(0) = 1$ *und* $p_{ij}(0) = 0$ *für* $i \neq j$
(b) $\sum_{k\in S} p_{ik}(t) = 1$ *für alle* $t \geq 0$
(c) $\sum_{k\in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t) = p_{ij}(s+t)$ *für alle* $s, t \geq 0$

**Beweis:** Wir beginnen mit (b). Aus dem Additionssatz und der Tatsache, dass das Ereignis $X_t \in S$ immer eintritt, erhalten wir
$$\sum_{k\in S} p_{ik}(t) = \sum_{k\in S} P(X_t = k|X_0 = i) = P(\bigcup_{k\in S}\{X_t = k\}|X_0 = i) = P(X_t \in S|X_0 = i) = 1$$
Die erste Aussage von (a) gilt, weil eine Wahrscheinlichkeit immer positiv ist. Weiters gilt $p_{ii}(0) = P(X_0 = i|X_0 = i) = 1$, woraus zusammen mit (b) auch die dritte Aussage folgt.
Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit, mit (M1) und (M2) erhalten wir
$$\begin{aligned} p_{ij}(t+s) &= P(X_{t+s} = j|X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in S} P(X_{t+s} = j|X_s = k, X_0 = i)P(X_s = k|X_0 = i) = \sum_{k\in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \end{aligned}$$
womit auch (c) gezeigt ist. □

Für jedes $t \geq 0$ fassen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten zu einer Matrix zusammen und schreiben $M(t) = (p_{ij}(t))_{i,j\in S}$. Zusätzlich zu den Eigenschaften aus Satz 1 setzen wir noch eine Stetigkeitsbedingung voraus und erhalten so

**Definition:** Wir nennen $M(t) = (p_{ij}(t))_{i,j\in S}$ für $t \geq 0$ eine Familie von Übergangsmatrizen, wenn die Eigenschaften aus Satz 1 erfüllt sind und wenn zusätzlich $\lim_{t\downarrow 0} p_{ii}(t) = p_{ii}(0) = 1$ für alle $i \in S$ gilt.

Insbesondere ist $M(0)$ die Einheitsmatrix und es gilt $M(t+s) = M(t)M(s)$. Wir setzen immer voraus, dass eine Familie von Übergangsmatrizen vorliegt, wie sie hier definiert wurde. Wir geben zwei Beispiele für Familien von Übergangsmatrizen.

**Beispiel 1:** Die folgenden Matrizen bilden für jedes $\lambda > 0$ eine Familie von Übergangsmatrizen
$$M(t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 + 3e^{-\lambda t} + e^{-3\lambda t} & 2 - 2e^{-3\lambda t} & 2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-3\lambda t} \\ 2 - 2e^{-3\lambda t} & 2 + 4e^{-3\lambda t} & 2 - 2e^{-3\lambda t} \\ 2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-3\lambda t} & 2 - 2e^{-3\lambda t} & 2 + 3e^{-\lambda t} + e^{-3\lambda t} \end{pmatrix}$$

**Beispiel 2:** Wir überlegen uns, dass jeder Prozess mit Zustandsraum $\mathbb{N}$, der stationäre und unabhängige Zuwächse hat, eine Markovkette ist. Mit Hilfe der Unabhängigkeit der Zuwächse folgt

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_k} = i_k) \\
&\quad = \frac{P(X_{t_{n+1}} = j, X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_k} = i_k)}{P(X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_k} = i_k)} \\
&\quad = \frac{P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j - i, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i - i_{n-1}, \dots, X_{t_k} = i_k)}{P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i - i_{n-1}, \dots, X_{t_k} = i_k)} \\
&\quad = \frac{P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j - i) P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i - i_{n-1}) \dots P(X_{t_k} = i_k)}{P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i - i_{n-1}) \dots P(X_{t_k} = i_k)} \\
&\quad = P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = j - i)
\end{aligned}$$

Für $k = 1$ und $k = n$ erhalten wir dasselbe Resultat, das heißt

$$P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1) = P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i)$$

Aus der Stationarität der Zuwächse folgt, dass $p_{ij}(t) = P(X_{s+t} - X_s = j - i)$ von $s$ nicht abhängt. Damit sind (M1) und (M2) gezeigt.

Insbesondere ist der Poissonprozess eine Markovkette. Da die Zuwächse $P(\lambda t)$-verteilt sind, folgt $p_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{j-i} t^{j-i}}{(j-i)!}$, wenn $j \geq i$ gilt, und $p_{ij}(t) = 0$, wenn $j < i$ ist.

## 3. Langzeitverhalten

Wir beschäftigen uns mit dem Langzeitverhalten, das heißt mit den Grenzwerten der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$ für $t \to \infty$. Wir nehmen dazu die entsprechenden Resultate über Markovketten mit diskreter Zeit zu Hilfe. Wir beginnen mit einigen Hilfssätzen.

**Satz 2:** *Für $i, j \in S$ und $s, t \geq 0$ gilt $|p_{ij}(t+s) - p_{ij}(t)| \leq 1 - p_{ii}(s)$. Insbesondere ist die Funktion $t \to p_{ij}(t)$ für alle $i, j \in S$ gleichmäßig stetig.*

**Beweis:** Satz 1 (c) liefert $|p_{ij}(t+s) - p_{ij}(t)| = |\sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t) - p_{ij}(t)| = |a - b|$, wobei $a = \sum_{k \in S \setminus \{i\}} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$ und $b = (1 - p_{ii}(s)) p_{ij}(t)$ gesetzt wurden. Wir erhalten $0 \leq b \leq 1 - p_{ii}(s)$ wegen $0 \leq p_{ij}(t) \leq 1$ und $0 \leq a \leq \sum_{k \in S \setminus \{i\}} p_{ik}(s) = 1 - p_{ii}(s)$, indem wir auch Satz 1 (b) anwenden. Daraus ergibt sich $|a - b| \leq 1 - p_{ii}(s)$ und die erste Aussage ist bewiesen. Die zweite Aussage folgt, da wir ja $\lim_{s \downarrow 0} p_{ii}(s) = 1$ voraussetzen. □

**Satz 3:** *Für $i, j \in S$ gilt*
(a) $p_{ij}(s+t) \geq p_{ii}(s) p_{ij}(t)$ *für* $s, t \geq 0$
(b) $p_{ii}(t) \geq p_{ii}(\frac{t}{n})^n$ *für* $n \in \{1, 2, \dots\}$
(c) $p_{ii}(t) > 0$ *für alle* $t \geq 0$
(d) *Ist* $s > t$ *und* $p_{ij}(t) > 0$, *dann auch* $p_{ij}(s) > 0$

**Beweis:** Aus Satz 1 (c) folgt $p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \geq p_{ii}(s) p_{ij}(t)$, womit (a) bereits gezeigt ist. Aus (a) folgt mit Induktion, dass $p_{ii}(t_1 + \dots + t_n) \geq p_{ii}(t_1) \dots p_{ii}(t_n)$ gilt. Für $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{t}{n}$ ist das (b). Wegen $\lim_{s \downarrow 0} p_{ii}(s) = 1$ existiert für jedes $t \geq 0$ ein $n \geq 1$ mit $p_{ii}(\frac{t}{n}) > 0$. Aus (b) folgt dann $p_{ii}(t) > 0$, womit auch (c) gezeigt ist. Ist $s > t$ und $p_{ij}(t) > 0$, dann folgt aus (a), dass $p_{ij}(s) \geq p_{ii}(s-t) p_{ij}(t)$ gilt, und daraus mit Hilfe von (c), dass $p_{ij}(s) > 0$ gilt. Das ist (d). □

Das Langzeitverhalten der Markovketten mit kontinuierlicher Zeit untersuchen wir nur für den irreduziblen Fall. Für reduzible Markovketten kann man genauso, wie wir es für diskrete

Zeit getan haben, abgeschlossene und minimale Teilmengen des Zustandsraums $S$ definieren und dann die Einschränkung der Markovkette auf minimale Teilmengen untersuchen.

**Definition:** Eine Markovkette $(X_t)_{t\geq 0}$ mit kontinuierlicher Zeit heißt irreduzibel, wenn für alle $i$ und $j$ in $S$ ein $t > 0$ existiert mit $p_{ij}(t) > 0$.
Wir werden das Langzeitverhalten auf entsprechende Resultate für Markovketten mit diskreter Zeit zurückführen. Dazu folgende Definition:

**Definition:** Sei $h > 0$ und $\tilde{X}_n = X_{nh}$. Dann bildet $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit diskreter Zeit, die eingebettete Markovkette mit Schrittweite $h$ genannt wird. Sie ist eine Markovkette, da die Bedingungen (M1) und (M2) für die Markovkette $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$ mit diskreter Zeit in den Bedingungen (M1) und (M2) für die Markovkette $(X_t)_{t\geq 0}$ mit kontinuierlicher Zeit enthalten sind.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markovkette mit Schrittweite $h$ sind $\tilde{p}_{ij} = P(X_h = j|X_0 = i) = p_{ij}(h)$ für $i, j \in S$, sodass $M(h)$ ihre Übergangsmatrix ist. Aus Satz 1 (c) folgt $M(h)^n = M(nh)$, sodass $\tilde{p}_{ij}^{(n)} = p_{ij}(nh)$ für alle $i, j \in S$ gilt. Aus Satz 3 (c) folgt $\tilde{p}_{ii} = p_{ii}(h) > 0$ für alle $i \in S$, sodass für die eingebettete Markovkette alle Zustände Periode 1 haben. Ist die Markovkette $(X_t)_{t\geq 0}$ irreduzibel, dann existiert für beliebige $i$ und $j$ in $S$ ein $t > 0$ mit $p_{ij}(t) > 0$. Nach Satz 3 (d) ist dann $p_{ij}(s) > 0$ für alle $s > t$, also existiert ein $n$ mit $\tilde{p}_{ij}^{(n)} = p_{ij}(nh) > 0$, sodass die eingebettete Markovkette $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$ ebenfalls irreduzibel ist.

Ein stationärer Vektor ist wie im Fall diskreter Zeit definiert. Der Vektor $(\pi_i)_{i\in S}$ mit $\pi_i \geq 0$ und $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$ ist ein statonärer Vektor für die Matrix $M(t)$, wenn $\pi M(t) = \pi$ gilt.

**Satz 4:** *Die Markovkette sei irreduzibel. Dann existiert* $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ *für beliebige* $i$ *und* $j$ *in* $S$*. Entweder es gilt* $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0$ *für alle* $i, j \in S$*, dann hat keine der Matrizen* $M(s)$ *für* $s > 0$ *einen stationären Vektor, oder es gibt* $i, j \in S$ *mit* $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) > 0$*, dann haben alle Matrizen* $M(s)$ *für* $s > 0$ *denselben eindeutig bestimmten stationären Vektor* $\pi = (\pi_j)_{j\in S}$ *und es gilt* $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$ *für alle* $i$ *und* $j$ *in* $S$.

**Beweis:** Seien $i$ und $j$ in $S$. Sei $a = \liminf_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ und $b = \limsup_{t\to\infty} p_{ij}(t)$. Wir nehmen an, dass $a < b$ gilt. Sei $\varepsilon = \frac{b-a}{6}$ und $h$ so gewählt, dass $1 - p_{ii}(s) < \varepsilon$ für alle $s < h$ gilt. Die eingebettete Markovkette mit Schrittweite $h$ hat Übergangswahrscheinlichkeiten $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}(h)$. Da sie nach obiger Bemerkung irreduzibel ist und Periode 1 hat, folgt aus Satz I.16 und Satz I.18, dass $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nh) = \lim_{n\to\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)}$ existiert. Insbesondere gibt es ein $n_0$ sodass $|p_{ij}(nh) - p_{ij}(mh)| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Aufgrund der Definition von $a$ und $b$ existieren $t_1 > n_0 h$ und $t_2 > n_0 h$ mit

$$|p_{ij}(t_1) - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |p_{ij}(t_2) - b| < \varepsilon$$

Seien $n_1$ und $n_2$ in $\mathbb{N}$ so gewählt, dass $n_1 \leq \frac{t_1}{h} < n_1 + 1$ und $n_2 \leq \frac{t_2}{h} < n_2 + 1$ gilt. Dann folgt $n_1 \geq n_0$ und $n_2 \geq n_0$. Weiters gilt $0 \leq t_1 - n_1 h < h$ und $0 \leq t_2 - n_2 h < h$ und daher $1 - p_{ii}(t_1 - n_1 h) < \varepsilon$ und $1 - p_{ii}(t_2 - n_2 h) < \varepsilon$ aufgrund der Wahl von $h$. Aus Satz 2 folgt

$$|p_{ij}(t_1) - p_{ij}(n_1 h)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |p_{ij}(t_2) - p_{ij}(n_2 h)| < \varepsilon$$

Wegen $n_1 \geq n_0$ und $n_2 \geq n_0$ gilt auch $|p_{ij}(n_1 h) - p_{ij}(n_2 h)| < \varepsilon$. Setzt man das zusammen, so erhält man $|p_{ij}(t_1) - p_{ij}(t_2)| < 3\varepsilon$ und daraus wieder

$$|a - b| \leq |a - p_{ij}(t_1)| + |p_{ij}(t_1) - p_{ij}(t_2)| + |p_{ij}(t_2) - b| < 5\varepsilon$$

ein Widerspruch zur Wahl von $\varepsilon$. Somit gilt $a = b$ und $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ existiert.

Sei $s > 0$ beliebig. Die eingebettete Markovkette mit Schrittweite $s$ ist irreduzibel und hat Periode 1. Sie hat Übergangswahrscheinlichkeiten $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}(s)$ und Übergangsmatrix $M(s)$. Ist $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0$ für alle $i, j \in S$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(ns) = 0$ und alle Zustände der eingebetteten Markovkette sind transient oder nullrekurrent. Daher kann die Übergangsmatrix $M(s)$ der eingebetteten Markovkette keinen statonären Vektor haben, sonst wären nach Satz I.19 alle Zustände positiv rekurrent.

Sei jetzt $v_{ij} = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ und nicht alle $v_{ij}$ seien null. Die eingebettete Markovkette mit Schrittweite $s$ ist irreduzibel. Daher sind wegen Satz I.13 alle ihre Zustände vom selben Typ. Sie können aber weder transient noch nullrekurrent sein, sonst wäre nach Satz I.16 ja $v_{ij} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(ns) = \lim_{n\to\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} = 0$ für alle $i, j \in S$. Somit sind sie positiv rekurrent. Nach Satz I.18 besitzt die Übergangsmatrix $M(s)$ einen eindeutig bestimmten stationären Vektor $\pi$ und es gilt $v_{ij} = \lim_{n\to\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} = \pi_j$ für alle $i, j \in S$. Das zeigt, dass der stationäre Vektor $\pi$ für alle $s > 0$ derselbe ist und dass $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$ für alle $i, j \in S$ gilt. □

Im oben angeführten Beispiel 1 haben wir $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{1}{3}$ für alle $i, j \in S$, wie man leicht nachrechnet. Für den Poissonprozess aus Beispiel 2 gilt $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0$ für alle $i$ und $j$ in $S$.

## 4. Übergangsraten

Wir versuchen eine einfachere Beschreibung einer Markovkette zu finden, die nicht die Kenntnis der Familie $M(t)$ von Übergangsmatrizen erfordert. Diese einfachere Beschreibung erhalten wir, indem wir die Ableitung von $M(t)$ in $t = 0$ bestimmen. Wir beginnen mit einem Hilfssatz.

**Satz D:** *Sei $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für alle $\varepsilon > 0$ existiere ein $t_0 > 0$, sodass $\frac{1}{n}\varphi(t) \ge \varphi(\frac{t}{n}) - \varepsilon|\varphi(\frac{t}{n})|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in (0, t_0)$ gilt. Dann existiert $\lim_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t}$ und liegt in $[-\infty, \infty)$.*

**Beweis:** Sei $q = \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} \in [-\infty, \infty]$. Sei $(s_n)_{n\ge 1}$ eine streng monoton fallende, gegen 0 konvergente Folge, sodass $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(s_n)}{s_n} = q$. Sei $\varepsilon \in (0, 1)$ beliebig und $t_0$ wie vorausgesetzt. Sei $t \in (0, t_0)$ und $k_n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\frac{t}{s_n} - 1 < k_n \le \frac{t}{s_n}$ gilt. Es folgt $t - s_n < k_n s_n \le t$ und daher $\lim_{n\to\infty} k_n s_n = t$. Wegen $k_n s_n \le t < t_0$ folgt aus der Voraussetzung, in der man $t$ durch $k_n s_n$ und $n$ durch $k_n$ ersetzt, dass $\frac{\varphi(k_n s_n)}{k_n s_n} \ge \frac{\varphi(s_n)}{s_n} - \varepsilon|\frac{\varphi(s_n)}{s_n}|$ gilt. Da $\varphi$ stetig ist, folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(k_n s_n)}{k_n s_n} = \frac{\varphi(t)}{t}$. Wäre $q = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(s_n)}{s_n} = \infty$, dann wäre auch $\lim_{n\to\infty}(\frac{\varphi(s_n)}{s_n} - \varepsilon|\frac{\varphi(s_n)}{s_n}|) = \infty$, was wegen $\varphi(t) \in \mathbb{R}$ nicht möglich ist. Daher ist $q \in [-\infty, \infty)$ gezeigt. Mit $n \to \infty$ folgt aus obiger Ungleichung auch $\frac{\varphi(t)}{t} \ge q - \varepsilon|q|$. Das gilt für alle $t \in (0, t_0)$, sodass $\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} \ge q - \varepsilon|q|$ gilt. Da $\varepsilon$ beliebig war, erhalten wir $\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} \ge q$. Somit existiert $\lim_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t}$ und ist $q$. □

**Satz 5:** *Es existiert $q_i = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{-\log p_{ii}(t)}{t} \ge 0$, kann aber unendlich sein.*

**Beweis:** Sei $\varphi(t) = \log p_{ii}(t)$ für $t \ge 0$. Das existiert wegen Satz 3 (c). Aus Satz 3 (b) folgt $\varphi(t) \ge n\varphi(\frac{t}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \ge 0$. Da wegen Satz 2 die Funktion $\varphi$ auch stetig ist, sind die Voraussetzungen von Satz D erfüllt. Daher existiert $\lim_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} \in [-\infty, \infty)$. Wegen $p_{ii}(t) \le 1$ folgt $-\varphi(t) = -\log p_{ii}(t) \ge 0$ und daher $\lim_{t\downarrow 0} \frac{-\log p_{ii}(t)}{t} = q_i \in [0, \infty]$. Wegen $\varphi(0) = \log p_{ii}(0) = 0$ und der Stetigkeit von $\varphi$ erhalten wir auch $\frac{1-p_{ii}(t)}{t} = \frac{-\varphi(t)}{t}\frac{1-e^{\varphi(t)}}{-\varphi(t)} \to q_i$ für $t \downarrow 0$, wobei wir $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{-x} = 1$ verwendet haben. □

**Satz 6:** *Sei $i \neq j$. Dann existiert $q_{ij} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} p_{ij}(t) \in [0,\infty)$.*

**Beweis:** Sei $\varphi(t) = p_{ij}(t)$. Aus Satz 2 folgt, dass $\varphi$ stetig ist. Wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $t_0$ existiert mit $\frac{1}{n}\varphi(t) \geq \varphi(\frac{t}{n})(1-\varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in (0,t_0)$. Satz D zeigt dann, dass $\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} p_{ij}(t)$ existiert und $< \infty$ ist und daher in $[0,\infty)$, da ja $p_{ij}(t) \geq 0$ ist.
Für $\varepsilon > 0$ sei $t_0 > 0$ so, dass $p_{ii}(s) > 1 - \frac{\varepsilon}{3}$, $p_{jj}(s) > 1 - \frac{\varepsilon}{3}$ und $p_{ji}(s) < \frac{\varepsilon}{3}$ für $s \in (0,t_0)$ gilt. Das ist möglich wegen $\lim_{t\downarrow 0} p_{kk}(t) = 1$ für alle $k \in S$ und wegen Satz 2. Seien $n \geq 2$ und $t \in (0,t_0)$ beliebig. Seien $\tilde{p}_{kl} = p_{kl}(\frac{t}{n})$ für $k,l \in S$ die Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markovkette mit Schrittweite $\frac{t}{n}$. Wir definieren ${}_j\tilde{p}_{ii}^{(k)}$ durch

$$ {}_j\tilde{p}_{ii}^{(0)} = 1 \qquad \text{und} \qquad {}_j\tilde{p}_{ii}^{(k)} = \sum_{i_1,\dots,i_{k-1}\in S\setminus\{j\}} \tilde{p}_{ii_1}\tilde{p}_{i_1i_2}\dots\tilde{p}_{i_{k-1}i} \quad \text{für} \quad k \geq 1 $$

Dann gilt für $k \leq n$

$$ \begin{aligned} \tilde{p}_{ii}^{(k)} &= \sum_{i_1,\dots,i_{k-1}\in S} \tilde{p}_{ii_1}\tilde{p}_{i_1i_2}\dots\tilde{p}_{i_{k-1}i} \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_{k-1}\in S\setminus\{j\}} \tilde{p}_{ii_1}\tilde{p}_{i_1i_2}\dots\tilde{p}_{i_{k-1}i} + \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m-1}\in S\setminus\{j\} \\ i_{m+1},\dots,i_{k-1}\in S}} \tilde{p}_{ii_1}\dots\tilde{p}_{i_{m-1}j}\tilde{p}_{ji_{m+1}}\dots\tilde{p}_{i_{k-1}i} \\ &= {}_j\tilde{p}_{ii}^{(k)} + \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{f}_{ij}^{(m)}\tilde{p}_{ji}^{(k-m)} \end{aligned} $$

wobei $\tilde{f}_{ij}^{(m)}$ wie in Kapitel I.4 aus Teil I definiert ist. Daraus folgt dann

$$ \begin{aligned} {}_j\tilde{p}_{ii}^{(k)} &= \tilde{p}_{ii}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{f}_{ij}^{(m)}\tilde{p}_{ji}^{(k-m)} = p_{ii}(\tfrac{k}{n}t) - \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{f}_{ij}^{(m)} p_{ji}(\tfrac{k-m}{n}t) \\ &\geq 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{f}_{ij}^{(m)}\frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{da} \quad \frac{k}{n}t < t_0 \text{ und } \frac{k-m}{n}t < t_0 \\ &\geq 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} = 1 - \frac{2\varepsilon}{3} \qquad \text{da} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_{ij}^{(m)} \leq 1 \end{aligned} $$

Indem man in der Darstellung von $\tilde{p}_{ij}^{(n)}$ durch Matrixmultiplikation gewisse Summanden weglässt, erhält man die erste Ungleichung in folgender Abschätzung

$$ \begin{aligned} \tilde{p}_{ij}^{(n)} &\geq \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m-1}\in S\setminus\{j\} \\ i_{m+2},\dots,i_{n-1}\in S}} \tilde{p}_{ii_1}\dots\tilde{p}_{i_{m-1}i}\tilde{p}_{ij}\tilde{p}_{ji_{m+2}}\dots\tilde{p}_{i_{n-1}j} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} {}_j\tilde{p}_{ii}^{(m)}\tilde{p}_{ij}\tilde{p}_{jj}^{(n-m-1)} \geq \sum_{m=0}^{n-1} {}_j\tilde{p}_{ii}^{(m)}\tilde{p}_{ij}p_{jj}(\tfrac{n-m-1}{n}t) \\ &\geq \sum_{m=0}^{n-1} (1 - \frac{2\varepsilon}{3})\tilde{p}_{ij}(1 - \frac{\varepsilon}{3}) \qquad \text{da} \quad \frac{n-m-1}{n}t < t_0 \\ &= n\tilde{p}_{ij}(1 - \varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{9}) \geq np_{ij}(\tfrac{t}{n})(1-\varepsilon) \end{aligned} $$

Wegen $p_{ij}(t) = \tilde{p}_{ij}^{(n)}$ folgt daraus $\varphi(t) \geq n\varphi(\frac{t}{n})(1-\varepsilon)$, wie gewünscht. Der Beweis war nur für $n \geq 2$, aber für $n = 1$ ist diese Ungleichung trivial. □

**Satz 7:** *Ist $S$ endlich, dann gilt $q_i < \infty$ und $\sum_{j\in S\setminus\{i\}} q_{ij} = q_i$ für alle $i \in S$. Ist $S$ unendlich, dann gilt $\sum_{j\in S\setminus\{i\}} q_{ij} \le q_i$ für alle $i \in S$.*

**Beweis:** Wir erhalten $\sum_{j\in S\setminus\{i\}} \frac{1}{t} p_{ij}(t) = \frac{1-p_{ii}(t)}{t}$ für alle $i \in S$ aus Satz 1 (b). Ist $S$ endlich, dann folgt $\sum_{j\in S\setminus\{i\}} q_{ij} = q_i$ mit $t \downarrow 0$. Da $q_{ij} < \infty$ nach Satz 6 gilt, folgt auch $q_i < \infty$. Ist $S$ unendlich, dann folgt mit Hilfe von Satz A lediglich, dass $\sum_{j\in S\setminus\{i\}} q_{ij} \le q_i$ gilt. □

Seien $i$ und $j$ in $S$. Für $i \ne j$ ist $q_{ij}$ wegen $p_{ij}(0) = 0$ nach Satz 6 die rechtsseitige Ableitung von $p_{ij}(t)$ im Punkt $t = 0$. Wegen $p_{ii}(0) = 1$ ist $-q_i$ nach Satz 5 die rechtsseitige Ableitung von $p_{ii}(t)$ im Punkt $t = 0$. Wir setzen $q_{ii} = -q_i$. Diese Zahlen $q_{ij}$ heißen Übergangsraten der Markovkette. Wir fassen sie zu einer $S \times S$-Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j\in S}$ zusammen und nennen $Q$ die Ratenmatrix der Markovkette. Nach Satz 7 ist $Q$ für endliches $S$ eine Matrix, die in der Diagonale Eintragungen aus $\mathbb{R}^-$ und sonst Eintragungen aus $\mathbb{R}^+$ hat, und deren Zeilensummen Null sind. Für unendliches $S$ werden wir meistens annehmen, dass diese Eigenschaften ebenfalls erfüllt sind. In diesem Fall sagt ja Satz 7 wesentlich weniger aus.

Im oben angeführten Beispiel 1 haben wir

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & -2\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

In Beispiel 2, dem Poissonprozess, erhält man

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Zum Schluss noch ein Satz, der im Wesentlichen dasselbe aussagt wie Satz 2 und den wir später brauchen werden.

**Satz 8:** *Für $i, j \in S$ und $s, t \ge 0$ gilt $|p_{ij}(t+s) - p_{ij}(t)| \le q_i s$.*

**Beweis:** Sei $s \ge 0$. Aus Satz 3 (b) folgt $\log p_{ii}(s) \ge s \log p_{ii}(\frac{s}{n})/\frac{s}{n}$ für alle $n \ge 1$. Lässt man $n$ gegen $\infty$ gehen, so erhält man $\log p_{ii}(s) \ge -sq_i$ mit Hilfe von Satz 5. Daraus wieder folgt $1 - p_{ii}(s) \le 1 - e^{-sq_i} \le q_i s$. Das gewünschte Resultat folgt jetzt aus Satz 2. □

## 5. Berechnen der Übergangswahrscheinlichkeiten

In den Anwendungsbeispielen arbeitet man nicht mit den Übergangswahrscheinlichkeiten sondern mit den Übergangsraten. Wir werden später sehen, wie man für konkrete Beispiele die Übergangsraten bestimmen kann. Wir nehmen meistens an, dass diese $\sup_{i\in S} q_i = c < \infty$ und $\sum_{j\in S\setminus\{i\}} q_{ij} = q_i$ für alle $i \in S$ erfüllen (für endliches $S$ gilt das ja immer). Wir wollen aus den Übergangsraten die Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmen.

**Satz 9:** *Sei $q_i < \infty$ und $\sum_{j\in S\setminus\{i\}} q_{ij} = q_i$ für alle $i \in S$. Dann gilt $p'_{ij}(t) = \sum_{k\in S} q_{ik} p_{kj}(t)$ für $t \ge 0$ und $i, j \in S$, wobei $q_{ii} = -q_i$ ist.*

**Beweis:** Wir zeigen zuerst, dass $\lim_{s\downarrow 0} \sum_{j\in S\setminus\{i\}} \frac{1}{s} p_{ij}(s) c_j(s) = \sum_{j\in S\setminus\{i\}} q_{ij} c_j$ gilt unter der Voraussetzung, dass $\lim_{s\downarrow 0} c_j(s) = c_j$ für $j \in S$ und $c_j(s) \in [0,1]$ für $s > 0$ und $j \in S$. Um das zu zeigen, sei $U = S \setminus \{i\}$ und $U'$ eine beliebige endliche Teilmenge von $U$. Es gilt $|\sum_{j\in U} \frac{1}{s} p_{ij}(s) c_j(s) - \sum_{j\in U'} \frac{1}{s} p_{ij}(s) c_j(s)| \le \sum_{j\in U\setminus U'} \frac{1}{s} p_{ij}(s) = \frac{1}{s}(1 - p_{ii}(s)) - \sum_{j\in U'} \frac{1}{s} p_{ij}(s)$. Sei $h$ ein Häufungspunkt von $\sum_{j\in U} \frac{1}{s} p_{ij}(s) c_j(s)$ für $s \downarrow 0$. Wir wählen eine Folge $s_n \downarrow 0$, sodass Konvergenz gegen $h$ vorliegt, und bilden in obiger Ungleichung den Grenzwert über diese Teilfolge. Wir erhalten $|h - \sum_{j\in U'} q_{ij}c_j| \le q_i - \sum_{j\in U'} q_{ij}$. Da aber nach Voraussetzung $\sum_{j\in U} q_{ij} = \sum_{j\in S\setminus\{i\}} q_{ij} = q_i < \infty$ gilt, geht $\sum_{j\in U'} q_{ij}$ gegen $q_i$, wenn $U'$ gegen $U$ geht. Daraus folgt $h = \sum_{j\in U} q_{ij}c_j$. Da dies für jeden Häufungspunkt $h$ gilt, folgt $\lim_{s\downarrow 0} \sum_{j\in S\setminus\{i\}} \frac{1}{s}p_{ij}(s)c_j(s) = \sum_{j\in S\setminus\{i\}} q_{ij}c_j$.

Jetzt können wir den Satz beweisen. Dazu seien $t \ge 0$ und $i,j \in S$ fest. Wir wenden die bewiesene Grenzwertaussage mit $c_k(s) = p_{kj}(t)$ an. Für $s \downarrow 0$ folgt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{s}(p_{ij}(t+s) - p_{ij}(t)) &= \sum_{k\in S\setminus\{i\}} \tfrac{1}{s}p_{ik}(s)p_{kj}(t) - \tfrac{1}{s}p_{ij}(t)(1-p_{ii}(s))\\ &\to \sum_{k\in S\setminus\{i\}} q_{ik}p_{kj}(t) - q_ip_{ij}(t)\end{aligned}$$

Damit ist bereits die rechtsseitige Ableitung berechnet. Um die linksseitige Ableitung zu berechnen, seien $t > 0$ und $i,j \in S$ fest. Wir verwenden obige Aussage für $c_k(s) = p_{kj}(t-s)$. Für $s \downarrow 0$ folgt

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{s}(p_{ij}(t-s) - p_{ij}(t)) &= \sum_{k\in S\setminus\{i\}} \tfrac{1}{s}p_{ik}(s)p_{kj}(t-s) - \tfrac{1}{s}p_{ij}(t-s)(1-p_{ii}(s))\\ &\to \sum_{k\in S\setminus\{i\}} q_{ik}p_{kj}(t) - q_ip_{ij}(t)\end{aligned}$$

Also existiert $p'_{ij}(t)$ und erfüllt die behauptete Gleichung. □

**Satz 10:** *Sei* $\sup_{i\in S} q_i = c < \infty$ *und* $\sum_{j\in S\setminus\{i\}} q_{ij} = q_i$ *für alle* $i \in S$ *erfüllt. Dann gilt* $p'_{ij}(t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t)q_{kj}$ *für* $t \ge 0$ *und* $i,j \in S$, *wobei* $q_{ii} = -q_i$.

**Beweis:** Sei $d_k = p_{ik}(t)q_k$ für $k \in S$. Dann gilt $\sum_{k\in S\setminus\{j\}} d_k \le c\sum_{k\in S\setminus\{j\}} p_{ik}(t) \le c$ und mit Hilfe von Satz 8 erhalten wir $|\frac{1}{s}p_{ik}(t)p_{kj}(s)| \le d_k$ für $k \in S\setminus\{j\}$. Aus Satz B folgt daher $\lim_{s\downarrow 0} \sum_{k\in S\setminus\{j\}} \frac{1}{s}p_{ik}(t)p_{kj}(s) = \sum_{k\in S\setminus\{j\}} p_{ik}(t)q_{kj}$. Für $s \downarrow 0$ ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{s}(p_{ij}(t+s) - p_{ij}(t)) &= \sum_{k\in S\setminus\{j\}} \tfrac{1}{s}p_{ik}(t)p_{kj}(s) - \tfrac{1}{s}p_{ij}(t)(1-p_{jj}(s))\\ &\to \sum_{k\in S\setminus\{j\}} p_{ik}(t)q_{kj} - p_{ij}(t)q_j\end{aligned}$$

Da die Existenz der Ableitung $p'_{ij}(t)$ bereits aus Satz 9 folgt, ist damit alles gezeigt. □

Hat man eine Matrix $Q$ von Übergangsraten vorgegeben, so kann man die Übergangswahrscheinlichkeiten durch Lösen der Differentialgleichungen aus einem der beiden letzten Sätze zu berechnen versuchen. Ist $S$ endlich, dann hat man ein System von linearen Differentialgleichungen, das man als $M'(t) = QM(t)$ schreiben kann. Die Anfangsbedingung lautet $M(0) = I$, wobei $I$ die Einheitsmatrix ist. Die Übergangswahrscheinlichkeiten in Beispiel 1 wurden so bestimmt. Die Lösungen kann man mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion als $M(t) = e^{tQ}$ schreiben. Wir wollen kurz darauf eingehen.

Dazu benötigen wir zuerst einige Resultate aus der Funktionalanalysis. Für einen Vektor $u = (u_i)_{i\in S}$ sei $\|u\|_1 = \sum_{i\in S} |u_i|$ und $\|u\|_\infty = \sup_{i\in S} |u_i|$. Dadurch sind Normen definiert. Die Vektorräume $l_1(S) = \{u : \|u\|_1 < \infty\}$ mit der Norm $\|\ \|_1$ und $l_\infty(S) = \{u : \|u\|_\infty < \infty\}$ mit der Norm $\|\ \|_\infty$ sind dann vollständig, das heißt sie sind Banachräume.

Eine lineare Abbildung von $l_\infty(S)$ nach $l_\infty(S)$ ist durch eine $S\times S$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j\in S}$ gegeben. Durch $\|A\| = \sup_{u\in l_\infty(S)\setminus\{0\}} \frac{\|Au\|_\infty}{\|u\|_\infty}$ ist dann wieder eine Norm definiert und der

Vektorraum $V$ aller $S \times S$-Matrizen $A$, für die $\|A\|$ endlich ist, ist ein Banachraum. Für Matrizen $A$ und $B$ in $V$ und $u \in l_\infty(S)$ gilt $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ und $\|Au\|_\infty \leq \|A\|\|u\|_\infty$. Man rechnet nach, dass $\|A\| = \sup_{i\in S} \sum_{j\in S} |a_{ij}|$ erfüllt ist. Daraus folgt dann $\|vA\|_1 \leq \|v\|_1\|A\|$ für alle $A \in V$ und $v \in l_1(S)$.

Für $A \in V$ sei $e^A = \sum_{n=0}^\infty \frac{A^n}{n!}$. Wegen $\|\frac{A^n}{n!}\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$ folgt $\sum_{n=0}^\infty \|\frac{A^n}{n!}\| \leq e^{\|A\|} < \infty$. Also liegt eine im Banachraum $V$ absolut konvergente Reihe vor. Daher existiert $e^A$ und ist ein Element von $V$. Für Matrizen $A$ und $B$ in $V$, die kommutieren, das heißt für die $AB = BA$ gilt, rechnet man $e^{A+B} = e^A e^B$ mit Hilfe der Reihendarstellung nach.

**Satz 11:** *Sei $Q = (q_{ij})_{i,j\in S}$ eine $S \times S$-Matrix mit $q_{ii} \leq 0$ und $q_{ij} \geq 0$ für $i \neq j$, sodass $\sup_{i\in S} |q_{ii}| = c < \infty$ und $\sum_{j\in S} q_{ij} = 0$ für alle $i \in S$ gilt. Dann existiert $M(t) = e^{tQ}$ für $t \geq 0$ und stellt eine Familie von Übergangsmatrizen dar, deren Ratenmatrix $Q$ ist.*

**Beweis:** Wegen $\sum_{j\in S} |q_{ij}| = 2|q_{ii}|$ für $i \in S$ folgt $\|Q\| = 2\sup_{i\in S} |q_{ii}| = 2c$. Daher ist $tQ$ in $V$ für alle $t \geq 0$ und $M(t) = e^{tQ}$ existiert. Sei $R = Q + cI$. Dann ist $R \in V$ und hat lauter nichtnegative Eintragungen. Also hat $e^{tR} = I + tR + \frac{(tR)^2}{2!} + \dots$ für $t \geq 0$ ebenfalls lauter nichtnegative Eintragungen. Durch Einsetzen in die Potenzreihe zeigt man $e^{-ctI} = e^{-ct}I$. Da die Matrizen $tR$ und $-ctI$ kommutieren, erhalten wir $e^{tQ} = e^{tR-ctI} = e^{tR}e^{-ct}I$. Damit ist gezeigt, dass $M(t) = e^{tQ}$ lauter nichtnegative Eintragungen hat.
Sei $u \in l_\infty(S)$ der Vektor, dessen Eintragungen alle 1 sind. Da die Zeilensummen der Matrix $Q \in V$ alle gleich 0 sind, folgt $Qu = 0$. Daraus folgt $Q^n u = 0$ für alle $n \geq 1$ und wir erhalten $e^{tQ}u = Iu + tQu + \frac{1}{2!}t^2Q^2u + \cdots = u$. Somit sind die Zeilensummen von $M(t) = e^{tQ}$ für $t \geq 0$ alle gleich 1.
Da die Matrizen $sQ$ und $tQ$ kommutieren, folgt $M(s+t) = e^{(s+t)Q} = e^{sQ}e^{tQ} = M(s)M(t)$ für alle $s, t \geq 0$. Da die Abbildung $t \mapsto e^{tQ}$ wegen der Potenzreihendarstellung auch stetig ist, haben wir gezeigt, dass durch $M(t) = e^{tQ}$ eine Familie von Übergangsmatrizen gegeben ist.
Es bleibt zu zeigen, dass $Q$ die Ratenmatrix dieser Familie $M(t)$ ist. Die Potenzreihendarstellung ergibt $\frac{M(t)-I}{t} = Q + \frac{1}{2!}tQ^2 + \frac{1}{3!}t^2Q^3 + \dots$, woraus wir $\lim_{t\downarrow 0} \frac{M(t)-I}{t} = Q$ erhalten. Daher ist $Q$ tatsächlich die Ratenmatrix Familie $M(t)$. □

**Bemerkung:** Die Irreduzibilität der Markovkette kann man ebenfalls aus der Ratenmatrix $Q$ ablesen. Sind $i$ und $j$ Zustände, für die Zustände $i_0 = i, i_1, i_2, \dots, i_k = j$ existieren mit $q_{i_{l-1}i_l} > 0$, dann gilt $p_{ij}(t) > 0$ für alle $t > 0$, wobei $p_{ij}(t)$ die entsprechende Eintragung der Übergangsmatrix $M(t) = e^{tQ}$ ist. Das sieht man so: Wir können annehmen, dass die Zustände $i_l$ verschieden sind. Ist $R = Q + cI$ wie im vorhergehenden Satz, dann ist die $(i,j)$-te Eintragung von $R^k$ größer als null, da sie eine Summe von nichtnegativen Summanden ist unter denen $q_{i_0i_1}q_{i_1i_2}\dots q_{i_{k-1}i_k}$ vorkommt. Da $R^m$ für alle $m \geq 0$ nichtnegative Eintragungen hat, hat $M(t) = e^{-ct}e^{tR}$ eine positive $(i,j)$-te Eintragung, wie man aus der Potenzreihendarstellung ersieht.

**Bemerkung:** Man nennt eine Zustand $i \in S$ absorbierend, wenn $q_i = 0$ gilt. Hat man so einen Zustand einmal erreicht, so bleibt man für immer dort. Aus Satz 7 folgt dann nämlich $q_{ij} = 0$ für alle $j \in S$, sodass die $i$-te Zeile von $Q$ aus Nullen besteht. Dasselbe gilt dann auch für $Q^k$ für alle $k \geq 1$. Aus der Potenzreihendarstellung folgt dann, dass die $i$-te Zeile von $M(t)$ der $i$-te Einheitsvektor ist. Für alle $t \geq 0$ gilt $p_{ii}(t) = 1$ und $p_{ij}(t) = 0$ für $j \neq i$. Man kann also den Zustand $i$ nicht mehr verlassen.

## 6. Berechnen des stationären Vektors

In den Anwendungen bestimmt man in der Regel die Übergangsraten $q_{ij}$ mit $i, j \in S$. Erfüllen diese die Voraussetzungen aus Satz 11, dann gibt es dazu eine Familie von Übergangsmatrizen. Diese zu berechnen ist selten möglich. Daher berechnet man nur den stationären Vektor aus den Übergangsraten. Dieser gibt wegen Satz 4 an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten man sich nach einer gewissen Anlaufzeit in den einzelnen Zuständen befindet.

**Satz 12:** *Sei $Q$ eine Matrix, die die Voraussetzungen von Satz 11 erfüllt und $M(t) = e^{tQ}$. Ist $\pi = (\pi_i)_{i\in S}$ ein Vektor mit $\pi_i \ge 0$ für $i \in S$ und $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$, dann gilt $\pi Q = 0$ genau dann, wenn $\pi$ ein stationärer Vektor für die Familie $M(t)$ ist.*

**Beweis:** Aus $\sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}(s) = \pi_j$ folgt $\sum_{i\in S\setminus\{j\}} \frac{1}{s}\pi_i p_{ij}(s) = \pi_j \frac{1-p_{jj}(s)}{s}$ für $j \in S$ und $s > 0$. Sei $d_i = \pi_i q_i$ für $i \in S$. Dann gilt $\sum_{i\in S\setminus\{j\}} d_i \le c \sum_{i\in S\setminus\{j\}} \pi_i \le c$ und aus Satz 8 folgt $|\frac{1}{s}\pi_i p_{ij}(s)| \le \pi_i q_i = d_i$ für $i \in S \setminus \{j\}$ und $s > 0$. Für $s \downarrow 0$ folgt jetzt mit Hilfe von Satz B, dass $\sum_{i\in S\setminus\{j\}} \pi_i q_{ij} = \pi_j q_j$ für alle $j \in S$ gilt. Das aber bedeutet $\pi Q = 0$.

Ist andererseits $\pi Q = 0$ erfüllt, dann folgt $\pi e^{tQ} = \pi I + t\pi Q + \frac{t^2}{2!}\pi Q^2 + \cdots = \pi$, da $\pi$ ja in $l_1(S)$ liegt. Wegen Satz 11 ist dann $\pi M(t) = \pi$ für alle $t \ge 0$ gezeigt. □

Beispiele von Markovketten kann man jetzt einfach durch eine Matrix $Q$ angeben, die die Voraussetzungen von Satz 11 erfüllt. Wichtige Beispiele sind die sogenannten Geburts- und Todesprozesse, die wir jetzt behandeln.

**Beispiel 3:** Eine Markovkette heißt Geburts- und Todesprozess, wenn sie Zustandsraum $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ und Ratenmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\lambda_3 - \mu_3 & \lambda_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

hat, wobei $\lambda_i$ und $\mu_i$ nichtnegativ sind. Man sieht, dass die Diagonaleintragungen $\le 0$ und alle anderen Eintragungen $\ge 0$ sind. Die Zeilensummen sind 0. Wir setzen noch $\sup_{i\ge 0} \lambda_i < \infty$ und $\sup_{i\ge 1} \mu_i < \infty$ voraus. Dann sind alle Voraussetzungen von Satz 11 erfüllt. Daher existiert eine Familie von Übergangswahrscheinlichkeiten mit diesen Übergangsraten.

Wir versuchen einen stationären Vektor $\pi$ zu berechnen. Nach Satz 12 ist das Gleichungssystem $\pi Q = 0$ zu lösen. Man erhält Gleichungen, von denen wir die ersten vier aufschreiben

$$\begin{aligned} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 &= 0 \\ \lambda_0\pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 &= 0 \\ \lambda_1\pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 + \mu_3\pi_3 &= 0 \\ \lambda_2\pi_2 - (\lambda_3 + \mu_3)\pi_3 + \mu_4\pi_4 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhält man $\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$. Aus der Summe der ersten beiden Gleichungen erhält man $\pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1$. Die Summe der ersten drei Gleichungen ergibt $\pi_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2$. Setzt man das fort, so hat man $\pi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\pi_{n-1}$ für alle $n \ge 1$. Daraus folgt

$$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}\pi_0 \qquad \text{für} \quad n \ge 1$$

Aus der Gleichung $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$ ergibt sich $\pi_0 = (1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3} + \dots)^{-1}$. Hat diese Summe in der Formel für $\pi_0$ den Wert $\infty$ dann existiert kein stationärer Vektor.

## 7. Verweilzeiten

Das Verhalten einer Markovkette kann man auch so sehen. Man verweilt eine Zeit lang in einem Zustand, dann springt man in einen anderen, verweilt eine Zeit lang in diesem Zustand, springt dann wieder in einen anderen, und so geht das weiter. Diese Verweilzeiten in den einzelnen Zuständen sind Zufallsvariable, die wir mit $Z_1, Z_2, \dots$ bezeichnen. Mit $Y_0$ bezeichnen wir den Startzustand, in dem man die Zeit $Z_1$ verweilt. Den Zustand, in den man dann springt, nennen wir $Y_1$. In diesem verweilt man die Zeit $Z_2$, dann springt man in einen Zustand, den wir $Y_2$ nennen. Und dann immer so weiter.

Wir wollen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Verweilzeiten $Z_1, Z_2, \dots$ und für die aufeinanderfolgenden Zustände $Y_0, Y_1, \dots$ bestimmen. Dazu brauchen wir noch eine weitere Voraussetzung, nämlich dass die Markovkette rechtsseitig stetige Pfade hat.

**Definition:** Man sagt, die Markovkette hat rechtsseitig stetige Pfade, wenn $\lim_{s \downarrow 0} X_{t+s} = X_t$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Wir verwenden diese Definition auf folgende Weise. Ist $D$ eine dichte Teilmenge des Intervalls $[a, b)$ und $X_t = i$ für alle $t \in D$, dann folgt aus der rechtsseitigen Stetigkeit der Pfade, dass $X_t = i$ für alle $t \in [a, b)$ gilt.

Bisher wurden bei der Untersuchung einer Markovkette immer endlich viele Zeitpunkte gewählt und mit den Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Zeitpunkt zum nächsten gearbeitet. Um zu der oben beschriebenen Sichtweise zu gelangen, legen wir ein diskretes Gitter über die Zeitachse, das wir dichter und dichter machen. Dazu definieren wir $D_m = \{\frac{k}{2^m} : k \in \mathbb{N}\}$ für $m \geq 1$ und $D_\infty = \bigcup_{m=1}^\infty D_m$. Wir beginnen mit einem Hilfssatz.

**Hilfssatz:** *Seien $i, j \in S$ mit $i \neq j$. Seien $u, v, h \in D_\infty$ mit $u < v$ und $h < v - u$. Sei $A_m$ das Ereignis, dass ein $g \in [v - h, v)$ existiert mit $X_t = i$ für $t \in (u, g] \cap D_m$ und mit $X_t = j$ für $t \in (g, v] \cap D_m$. Dann gilt $e^{-hq_j} e^{-q_i(v-u)} hq_{ij} \leq \lim_{m\to\infty} P(A_m | X_u = i) \leq e^{hq_i} e^{-q_i(v-u)} hq_{ij}$.*

**Beweis:** Sei $m_0$ so groß, dass $u$, $v$ und $h$ in $D_{m_0}$ liegen. Sei $m \geq m_0$ und $d = \frac{1}{2^m}$ die Gitterweite. Es existieren natürliche Zahlen $a$, $b$ und $c$ mit $u = ad$, $v = bd$ und $h = cd$. Sei $B_l = \{X_{kd} = i$ für $a < k \leq l$ und $X_{kd} = j$ für $l < k \leq b\}$. Dann ist $A_m$ die disjunkte Vereinigung der $B_l$ für $b - c \leq l \leq b - 1$, sodass $P(A_m | X_u = i) = \sum_{l=b-c}^{b-1} P(B_l | X_u = i)$ gilt. Aus dem Multiplikationssatz und (M1) folgt

$$\begin{aligned} P(B_l | X_u = i) &= \prod_{n=a}^{l-1} P(X_{nd+d} = i | X_{nd} = i) P(X_{ld+d} = j | X_{ld} = i) \prod_{n=l+1}^{b-1} P(X_{nd+d} = j | X_{nd} = j) \\ &= p_{ii}(d)^{l-a} p_{ij}(d) p_{jj}(d)^{b-l-1} \end{aligned}$$

Aus Satz 8 mit $t = 0$ und $s = d$ folgt $p_{ii}(d) \geq 1 - dq_i$ und $p_{jj}(d) \geq 1 - dq_j$. Klarerweise gilt $p_{ii}(d) \leq 1$ und $p_{jj}(d) \leq 1$. Für $b - c \leq l \leq b - 1$ folgt daraus

$$p_{ii}(d)^{b-a} p_{ij}(d)(1 - dq_j)^c \leq P(B_l | X_u = i) \leq p_{ii}(d)^{b-a}(1 - dq_i)^{-c} p_{ij}(d)$$

Summiert man über $l$ von $b - c$ bis $b - 1$ und setzt $b - a = \frac{v-u}{d}$ und $c = \frac{h}{d}$ ein, so erhält man

$$\tfrac{h}{d} p_{ii}(d)^{\frac{v-u}{d}} p_{ij}(d)(1 - dq_j)^{\frac{h}{d}} \leq P(A_m | X_u = i) \leq \tfrac{h}{d} p_{ii}(d)^{\frac{v-u}{d}} p_{ij}(d)(1 - dq_i)^{-\frac{h}{d}}$$

Aus Satz 5 folgt $\frac{-\log p_{ii}(d)}{d} \to q_i$, also $p_{ii}(d)^{\frac{1}{d}} \to e^{-q_i}$ für $d \downarrow 0$. Aus Satz 6 folgt $\frac{1}{d} p_{ij}(d) \to q_{ij}$ für $d \downarrow 0$. Aus der Analysis weiß man, dass $(1 - dq_j)^{\frac{h}{d}} \to e^{-q_j h}$ und $(1 - dq_i)^{-\frac{h}{d}} \to e^{q_i h}$ gilt für $d \downarrow 0$. Führt man den Grenzübergang $m \to \infty$, das heißt $d \downarrow 0$, in obiger Ungleichungskette durch, dann steht schon das gewünschte Resultat da. □

**Satz 13:** *Die Markovkette habe rechtsseitig stetige Pfade. Seien $Z_1, Z_2, \dots$ die Verweilzeiten in den Zuständen zwischen den Übergängen und $Y_0 = X_0, Y_1, Y_2, \dots$ die Zustände, die der Reihe nach eingenommen werden. Für Zustände $i_0, i_1, \dots, i_n$ in $S$ mit $i_j \neq i_{j+1}$ gilt dann*

$$P(Y_1 = i_1, Y_2 = i_2, \dots, Y_n = i_n | Y_0 = i_0) = \frac{q_{i_0 i_1}}{q_{i_0}} \frac{q_{i_1 i_2}}{q_{i_1}} \dots \frac{q_{i_{n-1} i_n}}{q_{i_{n-1}}}$$

$$P(Z_1 \leq y_1, \dots, Z_n \leq y_n | Y_0 = i_0, \dots, Y_n = i_n) = \int_0^{y_1} \dots \int_0^{y_n} \prod_{j=1}^n q_{i_{j-1}} e^{-q_{i_{j-1}} s_j} \, \mathrm{d}s_n \dots \mathrm{d}s_1$$

*Dabei wird natürlich $0 < q_k < \infty$ für alle $k \in S$ vorausgesetzt.*

**Beweis:** Seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ und $0 < h < \min\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq n\}$ so gewählt, dass $t_1, \dots, t_n, h$ in $D_\infty$ liegen. Sei $m_0$ so groß, dass sie in $D_{m_0}$ liegen. Für $m_0 \leq m \leq \infty$ sei $A_{m,k}$ das Ereignis $A_m$ aus dem Hilfssatz mit $u = t_{k-1}$, $v = t_k$, $i = i_{k-1}$ und $j = i_k$. Sei $C_m = A_{m,1} \cap A_{m,2} \cap \dots \cap A_{m,n}$ für $m_0 \leq m \leq \infty$. Aus dem Multiplikationssatz und aus (M1) erhalten wir dann

$$P(C_m | X_0 = i_0) = P(A_{m,1} | X_0 = i_0) P(A_{m,2} | X_{t_1} = i_1) \dots P(A_{m,n} | X_{t_{n-1}} = i_{n-1})$$

Diese Formel folgt, wenn man $P(A_{m,k} | X_{t_{k-1}} = i_{k-1})$ für $1 \leq k \leq n$ als Summe von Produkten von Übergangswahrscheinlichkeiten schreibt, wie es im Beweis des Hilfssatzes geschehen ist, und $P(C_m | X_0 = i_0)$ auf dieselbe Art entwickelt. Wegen $D_m \subset D_{m+1}$ und $\bigcup_{m=1}^\infty D_m = D_\infty$ bilden die $C_m$ eine absteigende Folge von Ereignissen, die gegen das Ereignis $C_\infty$ gehen. Daher folgt $P(C_\infty | X_0 = i_0) = \lim_{m \to \infty} P(C_m | X_0 = i_0)$ aus dem Stetigkeitssatz. Aus dem Hilfssatz erhalten wir dann

$$\prod_{k=1}^n e^{-hq_{i_k}} e^{-q_{i_{k-1}}(t_k - t_{k-1})} h q_{i_{k-1} i_k} \leq P(C_\infty | X_0 = i_0) \leq \prod_{k=1}^n e^{hq_{i_{k-1}}} e^{-q_{i_{k-1}}(t_k - t_{k-1})} h q_{i_{k-1} i_k}$$

Ist $W_k = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k$ die Wartezeit auf den $k$-ten Übergang, dann gilt wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Pfade

$$P(W_k \in (t_k - h, t_k], Y_k = i_k \text{ für } 1 \leq k \leq n | X_0 = i_0) = P(C_\infty | X_0 = i_0)$$

Wir bilden jetzt den Zufallsvektor $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$, der seine Werte in der Menge $K = \{t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n\}$ hat. Für $t \in K$ und $h > 0$ sei $R_{t,h} = (t_1 - h, t_1] \times \dots \times (t_n - h, t_n]$, ein $n$-dimensionaler Würfel mit Kantenlänge $h$. Sei $d = \max(q_{i_0}, q_{i_1}, \dots, q_{i_{n-1}})$ und $f(t) = \prod_{k=1}^n e^{-q_{i_{k-1}}(t_k - t_{k-1})} q_{i_{k-1} i_k}$, wobei $t_0 = 0$ ist. Für Würfel $R_{t,h} \subset K$ mit Ecken in $D_\infty^n$ haben wir dann gezeigt

$$e^{-nhd} h^n f(t) \leq P(W \in R_{t,h}, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n | Y_0 = i_0) \leq e^{nhd} h^n f(t)$$

Für $M \subset K$ sei $w(M) = P(W \in M, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n | Y_0 = i_0)$. Für Würfel $R_{t,h} \subset K$ mit Ecken in $D_\infty^n$ haben wir $e^{-nhd} h^n f(t) \leq w(R_{t,h}) \leq e^{nhd} h^n f(t)$ gezeigt. Sei $Q \subset K$ eine endliche Vereinigung von $n$-dimensionalen Quadern, deren Ecken in $D_\infty^n$ liegen. Alle Ecken liegen dann in $D_{m_0}^n$ für ein $m_0$. Für jedes $h = \frac{1}{2^m}$ mit $m \geq m_0$ gibt es endlich viele disjunkte Würfel $R_{t^1,h}, \dots, R_{t^k,h}$ mit Ecken in $D_m^n$, deren Vereinigung $Q$ ist. Aus dem Additionssatz folgt $w(Q) = \sum_{j=1}^k w(R_{t^j,h})$ also $e^{-nhd} \sum_{j=1}^k h^n f(t^j) \leq w(Q) \leq e^{nhd} \sum_{j=1}^k h^n f(t^j)$. Da $\sum_{j=1}^k h^n f(t^j)$ eine Riemannsumme der Funktion $f$ zur Zerlegung $R_{t^1,h}, \dots, R_{t^k,h}$ von $Q$ ist, erhalten wir $w(Q) = \int_Q f(t) \, \mathrm{d}t$ durch Grenzübergang $m \to \infty$. Ist $A$ eine beschränkte integrierbare Teilmenge von $K$ mit positivem Abstand zum Rand von $K$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es $Q_1$ und $Q_2$ wie oben mit $Q_1 \subset A \subset Q_2$ und $|\int_{Q_1} f(t) \, \mathrm{d}t - \int_{Q_2} f(t) \, \mathrm{d}t| < \varepsilon$. Da $w(A)$ und $\int_A f(t) \, \mathrm{d}t$ zwischen den Werten $w(Q_1) = \int_{Q_1} f(t) \, \mathrm{d}t$ und $w(Q_2) = \int_{Q_2} f(t) \, \mathrm{d}t$ liegen, erhalten wir $|w(A) - \int_A f(t) \, \mathrm{d}t| < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, haben wir $w(A) = \int_A f(t) \, \mathrm{d}t$

gezeigt. Schließlich sei $B$ eine beliebige integrierbare Teilmenge von $K$. Für $m \geq 1$ sei $A_m$ die Menge aller Punkte in $B$, die Norm $\leq m$ und Abstand $\geq \frac{1}{m}$ vom Rand von $K$ haben. Dann gilt $A_m \subset A_{m+1}$ und $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = B$. Es wurde $w(A_n) = \int_{A_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ gezeigt. Aus dem Stetigkeitssatz folgt $w(B) = \lim_{m\to\infty} w(A_n) = \lim_{m\to\infty} \int_{A_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_B f(t)\,\mathrm{d}t$. Für alle integrierbaren Teilmengen $B$ von $K$ haben wir also

$$P(W \in B, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n | Y_0 = i_0) = \int_B f(t)\,\mathrm{d}t$$

gezeigt. Wir wollen zurück zum Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ der Verweilzeiten. Ist $L$ die $n \times n$-Matrix, die überall unterhalb und in der Diagonale 1 und darüber 0 hat, dann gilt $W = LZ$, da wir ja $W_k = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k$ für $1 \leq k \leq n$ gesetzt haben. Der Wertebereich von $Z$ ist $\mathbb{R}_+^n$ und $L : \mathbb{R}_+^n \to K$ ist bijektiv. Für eine integrierbare Teilmenge $C$ von $\mathbb{R}_+^n$ gilt $Z \in C \;\Leftrightarrow\; W \in LC$. Wegen $\det L = 1$ erhalten wir $\int_{LC} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_C f(Ls)\,\mathrm{d}s$ und daher

$$P(Z \in C, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n | Y_0 = i_0) = \int_C f(Ls)\,\mathrm{d}s = \int_C \prod_{k=1}^{n} e^{-q_{i_{k-1}} s_k} q_{i_{k-1} i_k}\,\mathrm{d}s$$

Für $C = \mathbb{R}_+^n$ erhalten wir wegen $\int_0^\infty e^{-q_j y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{q_j}$, dass

$$P(Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n | Y_0 = i_0) = \prod_{k=1}^{n} \frac{q_{i_{k-1} i_k}}{q_{i_{k-1}}}$$

Dividiert man die vorletzte Gleichung durch die letzte Gleichung, so folgt für $C \subset \mathbb{R}_+^n$

$$P(Z \in C | Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n) = \int_C \prod_{k=1}^{n} q_{i_{k-1}} e^{-q_{i_{k-1}} s_k}\,\mathrm{d}s$$

wobei eine entsprechende Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten verwendet wurde. □

Nach Satz 13 ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Reihe nach die Zustände $i_1, i_2, \dots, i_n$ bei Start in $i_0$ durchlaufen werden, gleich $\frac{q_{i_0 i_1}}{q_{i_0}} \frac{q_{i_1 i_2}}{q_{i_1}} \dots \frac{q_{i_{n-1} i_n}}{q_{i_{n-1}}}$. Die Verweilzeiten in den einzelnen Zuständen sind unabhängig und exponentialverteilt. Das Verhalten der Markovkette kann man dann so beschreiben. Man verweilt im Zustand $i_0$ eine $E(q_{i_0})$-verteilte Zeit, dann springt man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{q_{i_0 i_1}}{q_{i_0}}$ in den Zustand $i_1$. Die Verweilzeit im Zustand $i_1$ ist $E(q_{i_1})$-verteilt, nach deren Ablauf man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{q_{i_1 i_2}}{q_{i_1}}$ in den Zustand $i_2$ springt. Die Verweilzeit im Zustand $i_2$ ist $E(q_{i_2})$-verteilt und so weiter. Dadurch sind die Wahrscheinlichkeitsgesetze, nach denen die Markovkette abläuft, vollständig festgelegt.

Der Poissonprozess zum Beispiel hat Zustandsraum $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ und Übergangsraten $q_i = \lambda$ und $q_{i,i+1} = \lambda$ für $i \in S$. Wegen $\frac{q_{i,i+1}}{q_i} = 1$ erfolgt der Übergang vom Zustand $i$ immer in den Zustand $i+1$, was wir ja schon wissen. Interpretiert man den Poissonprozess als die ein Geschäft betretenden Kunden, dann sind die Verweilzeiten in den einzelnen Zuständen gerade die Zeiten zwischen den Ankünften. Man nennt sie deshalb Zwischenankunftszeiten. Nach Satz 13 sind die Zwischenankunftszeiten voneinander unabhängig und alle $E(\lambda)$-verteilt.

In den Anwendungen verwendet man diese Beschreibung der Markovkette. Man stellt zuerst fest, dass die Verweilzeiten in den Zuständen $i \in S$ exponentialverteilt sind mit Parameter $\lambda_i$, und dass die Wahrscheinlichkeit, von einem Zustand $i$ aus als nächstes in den Zustand $j$ zu springen, gleich $r_{ij}$ ist, wobei $\sum_{j \in S \setminus \{i\}} r_{ij} = 1$ gilt. Nach Satz 13 gelten die Gleichungen

$$q_i = \lambda_i \qquad \frac{q_{ij}}{q_i} = r_{ij} \qquad \text{für } i \text{ und } j \text{ in } S$$

aus denen man die Übergangsraten berechnet. Für alle $i \in S$ gilt $\sum_{j \in S \setminus \{i\}} q_{ij} = q_i$, was aus $\sum_{j\in S\setminus\{i\}} r_{ij} = 1$ folgt. Man überprüft dann, ob auch $\sup_{i\in S} q_i < \infty$ gilt. Ist das der Fall, dann existiert nach Satz 11 eine Familie $M(t) = e^{tQ}$ von Übergangsmatrizen, sodass die zugehörige Markovkette das vorgegebene Verhalten hat. Wir geben ein Beispiel.

**Beispiel 4:** Eine Maschine arbeitet bis zum ersten Ausfall. Diese Zeit sei $E(\lambda)$-verteilt. Dann wird sie repariert, wobei die Reparaturzeit eine $E(\mu)$-Verteilung habe. Wir nehmen an, dass die Maschine nach der Reparatur so gut wie neu ist. Die folgende Arbeitsperiode ist also wieder $E(\lambda)$-verteilt. Dann kommt wieder eine $E(\mu)$-verteilte Reparaturperiode und so geht es immer weiter.
Es gibt zwei mögliche Zustände. Den Zustand, dass die Maschine arbeitet, bezeichnen wir mit 1, den Zustand, dass die Maschine in Reparatur ist, mit 0. Wir haben also $S = \{0, 1\}$. Die Verweilzeit im Zustand 1 ist $E(\lambda)$-verteilt, woraus $q_1 = \lambda$ folgt. Da man dann in den Zustand 0 springt, also $r_{10} = 1$ gilt, haben wir $\frac{q_{10}}{q_1} = 1$. Die Verweilzeit im Zustand 0 ist $E(\mu)$-verteilt, woraus $q_0 = \mu$ folgt. Da man dann in den Zustand 1 springt, also $r_{01} = 1$ gilt, haben wir $\frac{q_{01}}{q_0} = 1$. Daraus lassen sich dann die Übergangsraten bestimmen

$$q_0 = \mu \qquad q_{01} = \mu \qquad q_1 = \lambda \qquad q_{10} = \lambda$$

Wir erhalten die Ratenmatrix $Q = \left(\begin{smallmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{smallmatrix}\right)$. Aus der Gleichung $\pi Q = 0$ kann man einen stationären Vektor berechnen. Man erhält $\pi_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ und $\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Der Anteil der Zeit, den die Maschine arbeitet, ist also $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

## 8. Eintrittswahrscheinlichkeiten

Wir berechnen die Eintrittswahrscheinlichkeiten in eine Teilmenge $H$ von $S$ und die durchschnittliche Zeit bis zum Eintritt in die Menge $H$ mit Hilfe der Matrix $Q$ der Übergangsraten. Dazu verwenden wir die Folge $Y_0, Y_1, \ldots$ der Zustände, die nacheinander durchlaufen werden. Diese Folge von Zufallsvariablen bildet einen stochastischen Prozess mit diskreter Zeit und Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$ für $i \neq j$ und $p_{ii} = 0$. Das folgt aus der ersten Gleichung in Satz 13. Aus dieser erhalten wir für Zustände $i_{n+1} = j, i_n = i, i_{n-1}, \ldots, i_1, i_0$

$$P(Y_{n+1} = j, Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Y_1 = i_1 | Y_0 = i_0) = p_{ij} P(Y_n = i, \ldots, Y_1 = i_1 | Y_0 = i_0)$$

Diese Gleichung gilt auch für $i = j$, da dann auch links 0 steht (man geht in einen anderen Zustand über, nicht in denselben). Multipliziert man mit $P(Y_0 = i_0)$ so ergibt sich

$$P(Y_{n+1} = j, Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Y_1 = i_1, Y_0 = i_0) = p_{ij} P(Y_n = i, \ldots, Y_1 = i_1, Y_0 = i_0)$$

Summiert man jetzt über $i_0 \in S$, $i_1 \in S$, … ,$i_{k-1} \in S$, dann erhält man

$$P(Y_{n+1} = j, Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Y_k = i_k) = p_{ij} P(Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Y_k = i_k)$$

Division durch $P(Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Y_k = i_k)$ ergibt dann

$$P(Y_{n+1} = j | Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Y_k = i_k) = p_{ij}$$

Das gilt für $0 \leq k \leq n$. Da die rechte Seite nicht von $k$ abhängt, ist damit (M1) für eine Markovkette mit diskreter Zeit gezeigt. Mit $k = n$ steht auch schon (M2) da, wobei die $p_{ij}$ die Übergangswahrscheinlichkeiten sind.

**Satz 14:** *Sei $H \subset S$ und $q_i > 0$ für alle $i \notin H$. Sei $g_{iH}$ die Wahrscheinlichkeit, von $i$ ausgehend, irgendwann nach $H$ zu kommen. Die minimale nichtnegative Lösung des Gleichungssystems*

$$x_i = 1 \ \text{ wenn } \ i \in H \qquad \text{und} \qquad \sum_{j\in S} q_{ij} x_j = 0 \ \text{ wenn } \ i \in S \setminus H$$

*gibt die Eintrittswahrscheinlichkeiten $g_{iH}$ an.*

**Beweis:** Wir können die Verweilzeiten in den Zuständen ignorieren und uns darauf beschränken, die Übergänge in andere Zustände anzuschauen. Die gesuchten Eintrittswahrscheinlichkeiten sind dieselben wie für die Markovkette $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ mit diskreter Zeit. Sie hat Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$ für $i \neq j$ und $p_{ii} = 0$. Nach Satz I.4 gibt die minimale nichtnegative Lösung des Gleichungssystems

$$x_i = 1 \quad \text{wenn} \quad i \in H \qquad \text{und} \qquad x_i = \sum\nolimits_{j \in S} p_{ij} x_j \quad \text{wenn} \quad i \in S \setminus H$$

die Eintrittswahrscheinlichkeiten $g_{iH}$ an. Das ist äquivalent zu obigem Gleichungssystem. □

**Satz 15:** *Sei $H \subset S$, sodass $q_i > 0$ für alle $i \notin H$ und $g_{iH} = 1$ für alle $i \in S$ gilt. Sei $m_{iH}$ die durchschnittliche Wartezeit, bis man bei Start in $i$ die Menge $H$ betritt. Dann gibt die minimale nichtnegative Lösung des Gleichungssystems*

$$x_i = 0 \quad \textit{wenn} \quad i \in H \qquad \textit{und} \qquad -\sum\nolimits_{j \in S} q_{ij} x_j = 1 \quad \textit{wenn} \quad i \in S \setminus H$$

*diese durchschnittlichen Wartezeiten an.*

**Beweis:** Seien $Y_0 = X_0, Y_1, Y_2, \dots$ die Zustände, die nacheinander durchlaufen werden, und $Z_k$ die Verweilzeit im Zustand $k$. Sei$W$ die Wartezeit bis zum Eintreffen in $H$. Dann gilt $m_{iH} = \int_0^\infty P(W > t | X_0 = i) \, \mathrm{d}t$. Durch $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ ist eine Markovkette mit diskreter Zeit gegeben, die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}}$ für $i \neq j$ und $p_{ii} = 0$ hat.
Wir berechnen $m_{iH}$ für $i \notin H$. Die Ereignisse $\{Y_l = j_l, Y_{l-1} = j_{l-1}, \dots, Y_1 = j_1, Y_0 = i\}$ mit $l \geq 1$ und $j_1 \in S \setminus H, \dots, j_{l-1} \in S \setminus H, j_l \in H$ bilden eine Zerlegung des Ereignisses $Y_0 = i$, da $\sum_{l=1}^\infty \sum_{j_1 \notin H, \dots, j_{l-1} \notin H, j_l \in H} P(Y_l = j_l, Y_{l-1} = j_{l-1}, \dots, Y_1 = j_1 | Y_0 = i) = g_{iH} = 1$ ist. Mit Hilfe der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned} &P(W > t | X_0 = i) \\ &\quad = \sum_{l=1}^\infty \sum_{j_1 \notin H, \dots, j_{l-1} \notin H, j_l \in H} P(W > t | Y_l = j_l, \dots, Y_0 = i) P(Y_l = j_l, \dots, Y_1 = j_1 | Y_0 = i) \\ &\quad = \sum_{l=1}^\infty \sum_{j_1 \notin H, \dots, j_{l-1} \notin H, j_l \in H} P(Z_i + Z_{j_1} + \dots + Z_{j_{l-1}} > t) p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{l-1} j_l} \end{aligned}$$

Da $\int_0^\infty P(Z_i + \dots + Z_{j_{l-1}} > t) \, \mathrm{d}t = \mathrm{E}(Z_i + \dots + Z_{j_{l-1}}) = \mathrm{E}(Z_i) + \dots + \mathrm{E}(Z_{j_{l-1}})$ ist, ergibt sich durch Integration über $t$ von 0 bis $\infty$ wegen $\mathrm{E}(Z_j) = \frac{1}{q_j}$, dass

$$m_{iH} = \sum_{l=1}^\infty \sum_{j_1 \notin H, \dots, j_{l-1} \notin H, j_l \in H} \left(\tfrac{1}{q_i} + \tfrac{1}{q_{j_1}} + \dots + \tfrac{1}{q_{j_{l-1}}}\right) p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{l-1} j_l}$$

gilt. Damit ist $m_{iH}$ durch die Übergangsraten bestimmt.
Wir zeigen, dass die $m_{iH}$ das angegebene Gleichungssystem erfüllen. Klarerweise gilt $m_{iH} = 0$ für $i \in H$. Beachtet man, dass $\sum_{l=1}^\infty \sum_{j_1 \notin H, \dots, j_{l-1} \notin H, j_l \in H} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{l-1} j_l} = g_{iH} = 1$ ist, dann folgt für $i \notin H$ aus obiger Formel

$$m_{iH} = \frac{1}{q_i} + \sum_{l=2}^\infty \sum_{j_1 \notin H, \dots, j_{l-1} \notin H, j_l \in H} \left(\tfrac{1}{q_{j_1}} + \dots + \tfrac{1}{q_{j_{l-1}}}\right) p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{l-1} j_l}$$

Es folgt $m_{iH} = \frac{1}{q_i} + \sum_{j_1 \notin H} p_{ij_1} m_{j_1 H}$ unter nochmaliger Verwendung obiger Formel. Wegen $m_{j_1 H} = 0$ für $j_1 \in H$ ist damit gezeigt, dass die $m_{iH}$ Lösungen des Gleichungssystems sind.
Sei $x_i$ mit $i \in S$ eine nichtnegative Lösung des Gleichungssystems. Dann gilt $x_i = m_{iH} = 0$ für $i \in H$. Für $i \notin H$ gilt $x_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \notin H} p_{ij} x_j$, da ja $x_j = 0$ für $j \in H$ gilt. Setzt man diese

Gleichung in sich selbst ein, so folgt $x_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{j\notin H} p_{ij}\frac{1}{q_j} + \sum_{j\notin H}\sum_{k\notin H} p_{ij}p_{jk}x_k$. Setzt man diese Gleichung $n-1$ Mal in sich selbst ein, so erhält man

$$x_i \geq \frac{1}{q_i} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{j_1\notin H,\dots,j_l\notin H} p_{ij_1}p_{j_1j_2}\dots p_{j_{l-1}j_l}\frac{1}{q_{j_l}}$$

da ja $\frac{1}{q_{j_l}} \leq x_{j_l}$ für $j_l \notin H$ gilt.

Sei jetzt $u_l = \sum_{j_1\notin H,\dots,j_{l-1}\notin H, j_l\in H}(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_{j_1}} + \dots + \frac{1}{q_{j_{l-1}}})p_{ij_1}p_{j_1j_2}\dots p_{j_{l-1}j_l}$. Es folgt

$$u_l = \sum_{j_1\notin H,\dots,j_{l-1}\notin H}(\frac{1}{q_i} + \dots + \frac{1}{q_{j_{l-1}}})p_{ij_1}\dots p_{j_{l-2}j_{l-1}} - \sum_{j_1\notin H,\dots,j_l\notin H}(\frac{1}{q_i} + \dots + \frac{1}{q_{j_{l-1}}})p_{ij_1}\dots p_{j_{l-1}j_l}$$

für $l \geq 2$ und $u_1 = \frac{1}{q_i} - \sum_{j_1\notin H}\frac{1}{q_i}p_{ij_1}$. Daraus erhalten wir

$$\sum_{l=1}^{n} u_l = \frac{1}{q_i} + \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j_1\notin H,\dots,j_l\notin H}\frac{1}{q_{j_l}}p_{ij_1}\dots p_{j_{l-1}j_l} - \sum_{j_1\notin H,\dots,j_n\notin H}(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_{j_1}} + \dots + \frac{1}{q_{j_n}})p_{ij_1}\dots p_{j_{n-1}j_n}$$

Daraus sieht man, dass $\sum_{l=1}^{n} u_l \leq x_i$ für alle $n$ gilt. Da oben $m_{iH} = \sum_{l=1}^{\infty} u_l$ gezeigt wurde, ist damit $m_{iH} \leq x_i$ bewiesen. □

Beim Geburts- und Todesprozess kann man das Eintreffen im Zustand 0 als Aussterben bezeichnen. Die Aussterbewahrscheinlichkeit bei Start in $i$ ist dann $g_{iH}$ mit $H = \{0\}$. Wegen Satz 14 findet man sie, indem man die minimale nichtnegative Lösung des Gleichungssystems

$$x_0 = 1 \quad \text{und} \quad \mu_i x_{i-1} - (\mu_i + \lambda_i)x_i + \lambda_i x_{i+1} = 0 \ \text{ für } \ i \geq 1$$

sucht. Es folgt $x_{i+1} - x_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}(x_i - x_{i-1})$. Setzt man $\varrho_0 = 1$ und $\varrho_j = \frac{\mu_1\dots\mu_j}{\lambda_1\dots\lambda_j}$, so hat man $x_{i+1} - x_i = \varrho_i(x_1 - 1)$ für $i \geq 1$. Summiert man über $i$ von 1 bis $j-1$, so ergibt sich $x_j - x_1 = (x_1 - 1)\sum_{i=1}^{j-1}\varrho_i$ für $j \geq 2$. Durch $x_j = 1$ für alle $j$ ist eine Lösung gegeben. Wenn $\sum_{i=1}^{\infty}\varrho_i = \infty$ gilt, dann ist das die minimale nichtnegative Lösung. Aus $x_1 < 1$ würde sich $x_m < 0$ für große $m$ ergeben. Für $\sum_{i=1}^{\infty}\varrho_i = \infty$ haben wir also $g_{iH} = 1$ für alle $i$ gefunden.

Sei jetzt $c = \sum_{i=1}^{\infty}\varrho_i < \infty$. Es gilt $x_j = x_1 - (1-x_1)\sum_{i=1}^{j-1}\varrho_i$ für $j \geq 2$. Die $x_j$ konvergieren monoton fallend gegen $x_1 - (1-x_1)c$. Das muss $\geq 0$ sein, sodass $x_1 \geq \frac{c}{1+c}$ ist. Die minimale nichtnegative Lösung erhält man bei Gleichheit. Es folgt $g_{jH} = \frac{1}{1+c}\sum_{i=j}^{\infty}\varrho_i$ für $j \geq 1$.

Wenn $\sum_{i=1}^{\infty}\varrho_i = \infty$ ist, dann gilt $g_{iH} = 1$ für alle $i$. In diesem Fall findet man wegen Satz 15 die durchschnittlichen Wartezeiten $m_{iH}$ mit $H = \{0\}$ bis zum Aussterben als minimale nichtnegative Lösung des Gleichungssystems

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad \mu_i x_{i-1} - (\mu_i + \lambda_i)x_i + \lambda_i x_{i+1} + 1 = 0 \ \text{ für } \ i \geq 1$$

Es folgt $x_{i+1} - x_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}(x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{\lambda_i}$ für $i \geq 1$. Definiert man die $\varrho_j$ genauso wie oben, multipliziert dann diese Gleichung mit $\frac{1}{\varrho_i}$ und summiert über $i$ von 1 bis $j$, dann erhält man $\frac{1}{\varrho_j}(x_{j+1} - x_j) = x_1 - \sum_{i=1}^{j}\frac{1}{\lambda_i\varrho_i}$ für $j \geq 1$. Es folgt $x_{j+1} - x_j = \varrho_j(x_1 - c_j)$ mit $c_j = \sum_{i=1}^{j}\frac{1}{\lambda_i\varrho_i}$. Summation über $j$ von 1 bis $m-1$ ergibt $x_m = x_1 + \sum_{j=1}^{m-1}\varrho_j(x_1 - c_j)$ für $m \geq 1$.

Sei $c = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i\varrho_i}$. Wenn $x_1 < c$ ist, dann existiert ein $\alpha > 0$ und ein $j_0$ mit $x_1 - c_j \leq -\alpha$ für $j \geq j_0$. Wegen $\sum_{i=1}^{\infty}\varrho_i = \infty$ folgt $\sum_{j=1}^{m-1}\varrho_j(x_1 - c_j) \to -\infty$ für $m \to \infty$, sodass $x_m \geq 0$ nicht für alle $m$ gelten kann. Wir erhalten $x_1 \geq c$.

Wenn $c = \infty$ ist, dann auch $x_1$. Es folgt $m_{iH} = \infty$ für alle $i$. Wenn $c < \infty$ ist, dann ist $x_1 = c$, da wir die minimale Lösung suchen. Es folgt $x_j = c + \sum_{l=1}^{j-1}\varrho_l(c - c_l)$, das heißt $m_{jH} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i\varrho_i} + \sum_{l=1}^{j-1}\varrho_l\sum_{i=l+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i\varrho_i}$ für $j \geq 1$.

Wählt man insbesondere $\lambda_i = \lambda$ und $\mu_i = \mu$, dann folgt $\varrho_i = (\frac{\mu}{\lambda})^i$. Wir erhalten $g_{iH} = 1$ für alle $i$, wenn $\lambda \le \mu$ gilt, und $g_{iH} = (\frac{\mu}{\lambda})^i$, wenn $\lambda > \mu$ gilt. Für $\lambda < \mu$ berechnen wir noch $m_{1H} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \varrho_k} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^k = \frac{1}{\mu - \lambda}$.

## 9. Bestimmen der Übergangsraten

Beispiele können natürlich komplizierter sein als das am Ende des vorletzten Kapitels behandelte. Meistens läuft nicht nur eine Arbeitsperiode, nach deren Ablauf der Übergang erfolgt, sondern es laufen mehrere Zeiten, das können Arbeitsperioden, Wartezeiten, Bedienzeiten und dergleichen sein, wobei der Übergang erfolgt, sobald die erste dieser Zeiten abgelaufen ist. In welchen Zustand der Übergang erfolgt, ergibt sich daraus, welche dieser Zeiten als erste abgelaufen ist. Um solche Situationen behandeln zu können, benötigen wir den folgenden Satz.

**Satz 16:** *Seien $V_1, V_2, \dots V_n$ unabhängige Zufallsvariable, wobei $V_j$ die $E(\lambda_j)$-Verteilung habe. Sei $U = \min(V_1, V_2, \dots, V_n)$, sei $N$ der*[1] *Index $i$ mit $V_i = U$, und sei $W_j = V_j - U$ für alle $j$. Dann gilt*
(a) *$N$ und $U$ sind unabhängig.*
(b) *$U$ ist $E(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$-verteilt, das heißt $P(U \ge t) = e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t}$ für $t > 0$.*
(c) *$P(N = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$ für $1 \le i \le n$*
(d) *$P(W_j \le s_j$ für alle $j \ne i | N = i) = \prod_{j \ne i} (1 - e^{-\lambda_j s_j})$*
(e) *$P(W_j \le s_j$ für alle $j \ne i, U \ge t | N = i) = P(W_j \le s_j$ für alle $j \ne i | N = i) P(U \ge t)$*

**Beweis:** Sei $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sei $t \ge 0$ und $s_j \ge 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
P(N = i, U \ge t, W_j \le s_j \text{ für alle } j \ne i) &= P(t \le V_i \le V_j \le s_j + V_i \text{ für alle } j \ne i) \\
&= \int_t^\infty \int_{y_i}^{s_1 + y_i} \cdots \int_{y_i}^{s_n + y_i} \lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1} \dots \lambda_n e^{-\lambda_n y_n} dy_1 \dots dy_{i-1} dy_{i+1} \dots dy_n dy_i \\
&= \int_t^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i y_i} \prod_{j \ne i} (e^{-\lambda_j y_i} - e^{-\lambda_j (s_j + y_i)}) dy_i \\
&= \int_t^\infty \lambda_i e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) y_i} dy_i \prod_{j \ne i} (1 - e^{-\lambda_j s_j}) \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t} \prod_{j \ne i} (1 - e^{-\lambda_j s_j})
\end{aligned}$$

Lässt man alle $s_j$ gegen $\infty$ gehen, so folgt

$$P(N = i, U \ge t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t}$$

Daraus folgt, dass $N$ und $U$ unabhängig sind und die in (b) und (c) angegebenen Verteilungen haben. Setzt man $t = 0$ so folgt

$$P(N = i, W_j \le s_j \text{ für alle } j \ne i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \prod_{j \ne i} (1 - e^{-\lambda_j s_j})$$

Dividiert man durch die Gleichung (c), so folgt (d). Man erhält (e), indem man die zu Beginn des Beweises bewiesene Gleichung durch die Gleichung (c) dividiert und dann (b) und (d) verwendet. □

[1] Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei der Zufallsvariablen $V_j$ denselben Wert annehmen, ist 0. Daher ist der Index $i$ eindeutig bestimmt.

Satz 16 wird zum Bestimmen der Übergangsraten verwendet. Es laufen $n$ unabhängige Zeiten $V_1, \dots, V_n$. Sobald die erste dieser Zeiten abgelaufen ist, springt man in einen anderen Zustand. Die Verweilzeit ist $U = \min(V_1, \dots, V_n)$. Sie ist nach Satz 16 (b) exponentialverteilt. Die Zufallsvariable $N$ gibt den Index der abgelaufenen Zeit an und bestimmt den Zustand, in den man springt. Dieser neue Zustand ist wegen Satz 16 (a) von der Verweilzeit im alten Zustand unabhängig. Sobald man den neuen Zustand betritt, ist $N = i$ bekannt. Die Restzeiten $W_j = V_j - U$ für $j \neq i$ sind nach Satz 16 (d) voneinander unabhängig und haben dieselbe Exponentialverteilung wie die Zeiten $V_j$ für $j \neq i$. Man kann also so tun, als ob die Zeiten $V_j$ für $j \neq i$ erst zum Zeitpunkt des Überganges in den neuen Zustand zu laufen beginnen. Außerdem sind nach Satz 16 (e) die $W_j$ für $j \neq i$ von der Verweilzeit $U$ im alten Zustand unabhängig. Zusätzlich zu diesen Restzeiten können beim Übergang von diesen unabhängige neue exponentialverteilte Zeiten zu laufen beginnen. Nach dem Übergang in den neuen Zustand ist man dann in der selben Situation wie zu Beginn und kann dieselbe Überlegung für den neuen Zustand durchführen. Daraus sieht man, dass eine Markovkette vorliegt, für die man die Übergangsraten aus Satz 16 (b) und aus Satz 16 (c) berechnen kann.

Wir führen das an einem einfachen Beispiel durch.

**Beispiel 5:** Wir behandeln jetzt zwei Maschinen von der Art wie in Beispiel 4 beschrieben. Der Zustand 0 bedeute, dass beide Maschinen in Reparatur sind. Zustand 1 bedeute, dass eine Maschine in Betrieb, die andere in Reparatur ist, und Zustand 2 bedeute, dass beide Maschinen in Betrieb sind. Weiters soll angenommen werden, dass immer nur eine Maschine repariert werden kann.

Zu Beginn sind beide Maschinen in Betrieb, das heißt man befindet sich im Zustand 2. Es laufen die beiden unabhängigen $E(\lambda)$-verteilten Arbeitsperioden $V_1$ und $V_2$ der beiden Maschinen. Die Verweilzeit im Zustand 2 ist $U = \min(V_1, V_2)$. Nach Satz 16 (b) hat sie die $E(2\lambda)$-Verteilung. Nach Ablauf der Verweilzeit springt man in den Zustand 1. Daraus ergibt sich $q_2 = 2\lambda$ und $\frac{q_{21}}{q_2} = 1$, also $q_{21} = 2\lambda$.

Unmittelbar nach dem Übergang beginnt eine $E(\mu)$-verteilte Reparaturzeit $V_1$ zu laufen und unabhängig davon läuft die Restarbeitsperiode $V_2$ der anderen Maschine, die nach Satz 16 (d) wieder $E(\lambda)$-verteilt ist. Die Verweilzeit im Zustand 1 ist $U = \min(V_1, V_2)$. Nach Satz 16 (b) hat sie die $E(\lambda + \mu)$-Verteilung. Nach Satz 16 (c) läuft mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ die Raparaturzeit zuerst aus und man springt in den Zustand 2. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ läuft die Arbeitsperiode zuerst aus und man springt in den Zustand 0. Wir erhalten $q_1 = \lambda+\mu$, $\frac{q_{12}}{q_1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ und $\frac{q_{10}}{q_1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, woraus $q_{12} = \mu$ und $q_{10} = \lambda$ folgt.

Nach dem Übergang ist man entweder im Zustand 2, wo eine Restarbeitsperiode und eine Arbeitsperiode zu laufen beginnen, die beide $E(\lambda)$-verteilt sind, und es geht so weiter wie eingangs beschrieben, oder man ist im Zustand 0. Hier läuft eine $E(\mu)$-verteilte Reparaturzeit, während die andere Maschine auf das Ende der Reparatur wartet, um danach repariert zu werden. Die Verweilzeit ist daher $E(\mu)$-verteilt, nach deren Ablauf man in den Zustand 1 springt. Wir erhalten $q_0 = \mu$ und $\frac{q_{01}}{q_0} = 1$, also $q_{01} = \mu$. Nach dem Übergang ist man in Zustand 1 und es geht weiter wie im vorigen Absatz.

Wir haben also eine Markovkette gefunden mit

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \lambda & -\lambda - \mu & \mu \\ 0 & 2\lambda & -2\lambda \end{pmatrix}$$

als Matrix der Übergangsraten.

Aus der Gleichung $\pi Q = 0$ kann man wieder den stationären Vektor $\pi$ berechnen. Er gibt an, wie viele Maschinen welchen Zeitanteil in Betrieb sind. Wir tun das nicht, sondern berechnen die durchschnittliche Zeit, die es dauert, um vom Zustand 2 aus den Zustand 0 zu erreichen, das heißt, bis beide Maschinen außer Betrieb sind, wenn man mit zwei neuen Maschinen startet. Sei $H = \{0\}$. Gesucht ist $m_{2H}$. Zuerst berechnen wir $g_{iH}$ für $i \in S$. Die Gleichungen aus Satz 14 sind

$$x_0 = 1, \qquad \lambda x_0 - (\lambda + \mu)x_1 + \mu x_2 = 0, \qquad 2\lambda x_1 - 2\lambda x_2 = 0$$

Die einzige Lösung ist $x_0 = x_1 = x_2 = 1$. Daher gilt $g_{iH} = 1$ für $i \in S$. Die Voraussetzung von Satz 15 ist erfüllt. Die Gleichungen aus Satz 15 sind

$$x_0 = 0, \qquad \lambda x_0 - (\lambda + \mu)x_1 + \mu x_2 = -1, \qquad 2\lambda x_1 - 2\lambda x_2 = -1$$

Die einzige Lösung ist $x_1 = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda^2}$ und $x_2 = \frac{3}{2\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda^2}$. Insbesondere gilt $m_{2H} = \frac{3}{2\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda^2}$.

## 10. Warteschlangentheorie

Warteschlangen, die sich zum Beispiel vor einem Bankschalter bilden, können ebenfalls durch eine Markovkette beschrieben werden. Wir werden solche Warteschlangen in verschiedenen Versionen behandeln. Wir nehmen an, dass die Kunden, die die Bank betreten, einen Poissonprozess mit Parameter $\lambda$ bilden. Die Zwischenankunftszeiten sind daher voneinander unabhägig und alle $E(\lambda)$-verteilt. Die Bedienzeit eines Kunden nehmen wir als $E(\mu)$-verteilt an. Natürlich sind die Bedienzeiten der Kunden voneinander unabhängig.

**Beispiel 6:** Es ist ein Bankschalter geöffnet, vor dem sich die Kunden anstellen. Als Zustand nehmen wir die Anzahl aller Kunden vor dem Schalter, entweder wartend oder in Bedienung. Wir haben den Zustandsraum $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Wir ermitteln die Übergangsraten. Ist man im Zustand $n \geq 1$, so läuft eine $E(\lambda)$-verteilte Zwischenankunftszeit und eine $E(\mu)$-verteilte Bedienzeit. Läuft zuerst die Zwischenankunftszeit ab, so springt man in den Zustand $n+1$, da ein neuer Kunde eintrifft, bevor der gerade Bediente geht. Nach Satz 16 geschieht das mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. Läuft zuerst die Bedienzeit ab, so springt man in den Zustand $n-1$, da der gerade Bediente geht, bevor ein neuer Kunde eintrifft. Nach Satz 16 geschieht das mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Die Verweilzeit im Zustand $n$ ist das Minimum der Zwischenankunftszeit und der Bedienzeit, also $E(\lambda+\mu)$-verteilt. Es folgt $q_n = \lambda + \mu$, $\frac{q_{n,n+1}}{q_n} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ und $\frac{q_{n,n-1}}{q_n} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$, und daraus $q_{n,n+1} = \lambda$ und $q_{n,n-1} = \mu$. Läuft die Zwischenankunftszeit zuerst ab, dann beginnt nach dem Übergang eine neue $E(\lambda)$-verteilte Zwischenankunftszeit zu laufen und die Restbedienzeit läuft weiter, die jedoch nach Satz 16 wieder $E(\mu)$-verteilt ist, sich also genauso verhält, wie wenn eine neue zu laufen beginnen würde. Läuft die Bedienzeit zuerst ab, dann beginnt nach dem Übergang eine neue $E(\mu)$-verteilte Bedienzeit zu laufen und die Restzwischenankunftszeit läuft weiter, die jedoch nach Satz 16 wieder $E(\lambda)$-verteilt ist, sich also genauso verhält, wie wenn eine neue zu laufen beginnen würde.

Der Zustand 0 verhält sich anders. Es wird niemand bedient. Der Schalter wartet auf einen Kunden. Es läuft nur die $E(\lambda)$-verteilte Zwischenankunftszeit, nach deren Ablauf man in den Zustand 1 übergeht. Wie oben folgt $q_0 = \lambda$ und $q_{0,1} = \lambda$.

Wir haben einen Geburts- und Todesprozess erhalten mit $\lambda_i = \lambda$ für $i \geq 0$ und $\mu_i = \mu$ für $i \geq 1$. Wir nehmen an, dass $\lambda < \mu$ gilt, das heißt, dass die durchschnittliche Zwischenankunftszeit größer als die durchschnittliche Bedienzeit ist. Wäre das nicht so, dann würde die Warteschlange ja immer länger werden. Wir setzen $a = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Nach Beispiel 3 existiert ein stationärer Vektor, der durch $\pi_n = (1-a)a^n$ für $n \in S$ gegeben ist. Nach einer gewissen

Anlaufzeit ist $\pi_n$ die Wahrscheinlichkeit, zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt die Markovkette im Zustand $n$, also $n$ anwesende Kunden, vorzufinden. Man kann $\pi_n$ auch als Anteil der Zeit, den sich die Markovkette im Zustand $n$ befindet, auffassen.

Bezeichnet $L$ die Länge der Warteschlange ohne den Bedienten, dann gilt $P(L = n) = \pi_{n+1}$ für $n \geq 1$ und $P(L \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \pi_{k+1} = a^{n+1}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zu einem zufälligen Zeitpunkt die Bank betretender Kunde eine Warteschlange der Länge $\geq n$ vorfindet. Die durchschnittliche Länge der Warteschlange ist $\mathrm{E}(L) = \sum_{n=1}^{\infty} P(L \geq n) = \frac{a^2}{1-a}$.

Sei $W$ die Wartezeit eines Kunden, der zu einem zufälligen Zeitpunkt die Bank betritt. Sei $N$ der Zustand, den der Kunde beim Betreten der Bank vorfindet. Es gilt $P(N = k) = \pi_k$. Sei $t \geq 0$. Ist $N = 0$, dann kommt der Kunde sofort dran, also $P(W > t|N = 0) = 0$. Ist $k \geq 1$ und $N = k$, dann ist die Wartezeit des Kunden die Summe der $E(\mu)$-verteilten Restbedienzeit des gerade Bedienten und von den $E(\mu)$-verteilten Bedienzeiten der $k - 1$ Personen, die vor ihm warten. Die Summe von $k$ unabhängigen $E(\mu)$-verteilten Zufallsvariablen hat eine $E_k(\mu)$-Verteilung (Erlangverteilung oder Gammaverteilung) mit Dichte $g(x) = \frac{\mu^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x}$. Daher gilt $P(W > t|N = k) = \int_t^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$. Daraus folgt

$$P(W > t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(W > t|N = k)P(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-a)a^k \int_t^\infty \frac{\mu^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x}\,\mathrm{d}x = ae^{-\mu(1-a)t}$$

Damit haben wir die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass ein zu einem zufälligen Zeitpunkt die Bank betretender Kunde länger als $t$ Zeiteinheiten warten muss. Weiters gilt

$$\mathrm{E}(W) = \int_0^\infty P(W > t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{\mu(1-a)}$$

Das ist die durchschnittliche Wartezeit eines Kunden.

**Beispiel 7:** Jetzt seien $s$ Bankschalter geöffnet, vor denen sich eine Warteschlange bildet. Als Zustand nehmen wir die Anzahl der vor den Schaltern Wartenden einschließlich der gerade Bedienten. Der Zustandsraum ist also $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Wir ermitteln die Übergangsraten. Im Zustand 0 wartet man auf einen Kunden. Es läuft die $E(\lambda)$-verteilte Zwischenankunftszeit, nach deren Ablauf man in den Zustand 1 übergeht. Wir erhalten $q_0 = \lambda$ und $\frac{q_{0,1}}{q_0} = 1$, also $q_{0,1} = \lambda$.

Sei jetzt $1 \leq n \leq s$. Im Zustand $n$ werden alle $n$ anwesenden Kunden bedient. Es laufen eine $E(\lambda)$-verteilte Zwischenankunftszeit und $n$ unabhängige $E(\mu)$-verteilte Bedienzeiten. Läuft zuerst die Zwischenankunftszeit ab, so springt man in den Zustand $n+1$, da ein neuer Kunde eintrifft, bevor einer der gerade Bedienten geht. Nach Satz 16 geschieht das mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\lambda}{\lambda+n\mu}$. Läuft zuerst eine Bedienzeit ab, so springt man in den Zustand $n-1$, da einer der gerade Bedienten geht, bevor ein neuer Kunde eintrifft. Nach Satz 16 geschieht das mit Wahrscheinlichkeit $\frac{n\mu}{\lambda+n\mu}$. Die Verweilzeit im Zustand $n$ ist das Minimum der Zwischenankunftszeit und der Bedienzeiten, also $E(\lambda+n\mu)$-verteilt. Es folgt $q_n = \lambda+n\mu$, $\frac{q_{n,n+1}}{q_n} = \frac{\lambda}{\lambda+n\mu}$ und $\frac{q_{n,n-1}}{q_n} = \frac{n\mu}{\lambda+n\mu}$, und daraus $q_{n,n+1} = \lambda$ und $q_{n,n-1} = n\mu$. Läuft die Zwischenankunftszeit zuerst ab, dann beginnt nach dem Übergang eine neue $E(\lambda)$-verteilte Zwischenankunftszeit zu laufen und die Restbedienzeiten laufen weiter, die jedoch nach Satz 16 wieder alle $E(\mu)$-verteilt ist, sich also genauso verhalten, wie wenn neue Bedienzeiten zu laufen beginnen würden. Läuft eine der Bedienzeiten zuerst ab, dann beginnt nach dem Übergang eine neue $E(\mu)$-verteilte Bedienzeit zu laufen und die übrigen Restbedienzeiten und die Restzwischenankunftszeit laufen weiter. Sie verhalten sich jedoch nach Satz 16 genauso, wie wenn sie neu zu laufen beginnen würden.

Ist man in einem Zustand $n > s$, dann werden $s$ der $n$ anwesenden Kunden bedient und die anderen warten. Es läuft eine $E(\lambda)$-verteilte Zwischenankunftszeit und $s$ unabhängige $E(\mu)$-verteilte Bedienzeiten. Genauso wie oben erhält man $q_n = \lambda + s\mu$, $\frac{q_{n,n+1}}{q_n} = \frac{\lambda}{\lambda+s\mu}$ und $\frac{q_{n,n-1}}{q_n} = \frac{s\mu}{\lambda+s\mu}$, und daraus $q_{n,n+1} = \lambda$ und $q_{n,n-1} = s\mu$.
Wir haben wieder einen Geburts- und Todesprozess erhalten mit $\lambda_i = \lambda$ und $\mu_i = \mu \min(i, s)$ für alle $i \in S$. Wir nehmen an, dass $\lambda < s\mu$ gilt. Sei $a = \frac{\lambda}{\mu} < s$. Nach Beispiel 3 existiert ein stationärer Vektor. Mit $c = (\sum_{j=0}^{s-1} \frac{a^j}{j!} + \frac{a^s}{s!} \frac{1}{1-\frac{a}{s}})^{-1}$ ist der stationäre Vektor dann durch

$$\pi_n = c\frac{a^n}{n!} \text{ für } 0 \leq n \leq s-1 \quad\text{und}\quad \pi_n = c\frac{a^s}{s!}(\frac{a}{s})^{n-s} \text{ für } n \geq s$$

gegeben. Nach einer gewissen Anlaufzeit ist $\pi_n$ die Wahrscheinlichkeit, zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt $n$ anwesende Kunden vorzufinden.
Bezeichnet $L$ die Länge der Warteschlange ohne die Kunden, die gerade bedient werden, dann gilt $P(L = n) = \pi_{n+s}$ für $n \geq 1$ und

$$P(L \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \pi_{k+s} = c\frac{a^s}{s!}(\frac{a}{s})^n \frac{1}{1-\frac{a}{s}}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zu einem zufälligen Zeitpunkt eintreffender Kunde eine Warteschlange der Länge $\geq n$ vorfindet. Die durchschnittliche Länge der Warteschlange ist

$$\mathrm{E}(L) = \sum_{n=1}^{\infty} P(L \geq n) = c\frac{a^s}{s!}\frac{a}{s}\frac{1}{(1-\frac{a}{s})^2}$$

Sei $W$ die Wartezeit eines Kunden, der zu einem zufälligen Zeitpunkt die Bank betritt, und sei $t \geq 0$. Sei $N$ der Zustand, den der Kunde beim Betreten der Bank vorfindet. Es gilt $P(N = k) = \pi_k$. Ist $N < s$, dann kommt der Kunde sofort dran, also $P(W > t|N = k) = 0$ für $k < s$. Solange alle $s$ Schalter besetzt sind, sind die Zeiten zwischen den Abgängen nach Satz 16 voneinander unabhängig und und haben alle eine $E(s\mu)$-Verteilung. Ist $k \geq s$ und $N = k$, dann müssen $k - s + 1$ Personen weggehen, bis der Kunde drankommt. Seine Wartezeit ist daher die Summe von $k - s + 1$ unabhängigen $E(s\mu)$-verteilten Zeiten zwischen den Abgängen, die eine $E_{k-s+1}(s\mu)$-Verteilung mit Dichte $h(x) = \frac{(s\mu)^{k-s+1}x^{k-s}}{(k-s)!}e^{-s\mu x}$ hat. Daher gilt $P(W > t|N = k) = \int_t^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} P(W > t) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(W > t|N = k)P(N = k) = \sum_{k=s}^{\infty} \pi_k \int_t^\infty h(x)\,\mathrm{d}x \\ &= c\frac{a^s}{s!}s\mu \int_t^\infty \sum_{k=s}^{\infty} \frac{(\mu a x)^{k-s}}{(k-s)!} e^{-s\mu x}\,\mathrm{d}x = c\frac{a^s}{s!}s\mu \int_t^\infty e^{\mu a x}e^{-s\mu x}\,\mathrm{d}x \\ &= c\frac{a^s}{(s-1)!}\frac{e^{-\mu(s-a)t}}{s-a} \end{aligned}$$

Damit haben wir die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass ein Kunde länger als $t$ Zeiteinheiten warten muss. Aus der Formel $\mathrm{E}(W) = \int_0^\infty P(W > t)\,\mathrm{d}t$ erhalten wir $\mathrm{E}(W) = c\frac{a^s}{(s-1)!}\frac{1}{\mu(s-a)^2}$, die durchschnittliche Wartezeit eines Kunden.

Exponentialverteilte Bedienzeiten stimmen nicht so gut mit der Wirklichkeit überein. Die Annahme exponentialverteilter Bedienzeiten würde bedeuten, das die ganz kurzen Bedienzeiten am häufigsten auftreten. Eine Verbesserung kann man erreichen, indem man die Bedienzeiten als $E_k(\mu)$-verteilt mit $k \geq 2$ annimmt. Diese Verteilungen sehen ähnlich aus wie eine Normalverteilung.

**Beispiel 8:** Wir untersuchen die Warteschlange vor einem Bankschalter mit $E_2(\mu)$-verteilten Bedienzeiten. Um diese durch eine Markovkette beschreiben zu können, müssen wir uns etwas einfallen lassen, um wieder mit exponentialverteilten Zeiten arbeiten zu können. Wir denken uns die Bedienzeit aus zwei Phasen $a$ und $b$ zusammengesetzt, die unabhängig sind und von denen jede eine $E(\mu)$-Verteilung hat. Dann ist die Bedienzeit als deren Summe $E_2(\mu)$-verteilt. Um den Zustandsraum $S$ festzulegen, bezeichnen wir mit $(n, a)$ den Zustand, dass $n$ Kunden anwesend sind (wartend oder in Bedienung) und der gerade Bediente sich in Phase $a$ befindet. Mit $(n, b)$ bezeichnen wir den Zustand, dass $n$ Kunden anwesend sind und der gerade Bediente sich in Phase $b$ befindet. Wir erhalten $S = \{0, (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), \dots\}$.

Im Zustand 0 wartet man auf einen Kunden. Es läuft eine $E(\lambda)$-verteilte Zwischenankunftszeit, nach deren Ablauf man in den Zustand $(1, a)$ übergeht. Es gilt also $q_0 = \lambda$ und $q_{0(1,a)} = \lambda$. Im Zustand $(n, a)$ laufen eine $E(\lambda)$-verteilte Zwischenankunftszeit und eine $E(\mu)$-verteilte Phase $a$ der Bedienzeit. Läuft erstere zuerst ab, so geht man in den Zustand $(n + 1, a)$ über. Läuft die zweite zuerst ab, so geht man in den Zustand $(n, b)$ über. Somit erhält man $q_{(n,a)} = \lambda + \mu$, $q_{(n,a)(n+1,a)} = \lambda$ und $q_{(n,a)(n,b)} = \mu$. Im Zustand $(n, b)$ laufen eine $E(\lambda)$-verteilte Zwischenankunftszeit und eine $E(\mu)$-verteilte Phase $b$ der Bedienzeit. Läuft erstere zuerst ab, so geht man in den Zustand $(n + 1, b)$ über. Läuft die zweite zuerst ab, so geht man in den Zustand $(n - 1, a)$ über. Somit erhält man $q_{(n,b)} = \lambda + \mu$, $q_{(n,b)(n+1,b)} = \lambda$ und $q_{(n,b)(n-1,a)} = \mu$. Wir erhalten folgende Ratenmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda-\mu & \mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & 0 & -\lambda-\mu & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda-\mu & \mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -\lambda-\mu & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

In diesem Fall lässt sich keine Formel für den stationären Vektor angeben.

Zum Abschluss soll noch kurz auf Warteschlangennetzwerke eingegangen werden. Wir haben eine endliche Menge $K = \{1, 2, \dots, k\}$ von Schaltern (server). Die Bedienzeit am Schalter $i$ sei $E(\mu_i)$-verteilt. Nach Beendigung der Bedienung geht der Kunde weg oder zu einem anderen Schalter. Eintreffende Kunden werden durch Poissonprozesse beschrieben. Solche Modelle werden zum Beschreiben von Computernetzwerken verwendet, wo die Schalter Computer sind und die Kunden Programme, die von den Computern bearbeitet werden.

**Beispiel 9:** Wir untersuchen ein geschlossenes Netzwerk. Es treffen keine Kunden ein und es gehen keine Kunden weg. Nach Beendingung der Bedienung am Schalter $i$ geht ein Kunde mit Wahrscheinlichkeit $s_{ij}$ zum Schalter $j$ und stellt sich dort an. Wir nehmen an, dass er zu einem anderen Schalter geht, sodass $s_{ii} = 0$ ist. Natürlich gilt $\sum_{j \in K} s_{ij} = 1$. Als Zustandsmenge wählen wir $S = \{n = (n_1, n_2, \dots, n_k) : n_j \geq 0\}$. Im Zustand $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ befinden sich $n_j$ Kunden am Schalter $j$, entweder wartend oder in Bedienung. Da das Netzwerk geschlossen ist, ändert sich $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ nicht.

Sei $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der $j$-te Einheitsvektor. Übergänge sind nur vom Zustand $n$ in den Zustand $n - e_i + e_j$ mit $i \neq j$ möglich (ein Kunde wird am Schalter $i$ fertig und geht zum Schalter $j$). Aus den oben gemachten Annahmen bestimmen wir die Übergangsraten.

Wir sind im Zustand $n$. Sei $\delta_j(n) = 0$, wenn $n_j = 0$ ist und $\delta_j(n) = 1$, wenn $n_j > 0$ ist. Für jedes $l$ mit $\delta_l(n) = 1$ läuft eine $E(\mu_l)$-verteilte Bedienzeit. Die Verweilzeit im Zustand $n$ ist das Minimum dieser Zeiten, also $E(\sum_{l=1}^{k} \delta_l(n)\mu_l)$-verteilt. Es folgt $q_n = \sum_{l=1}^{k} \delta_l(n)\mu_l$. Sei $i \in K$

so, dass $\delta_i(n) = 1$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Bedienzeit am Schalter $i$ zuerst abläuft, ist $\mu_i / \sum_{l=1}^{k} \delta_l(n)\mu_l$. Ein Kunde verlässt den Schalter $i$ und geht mit Wahrscheinlichkeit $s_{ij}$ zum Schalter $j$. Die Wahrscheinlichkeit $\frac{q_{n,n-e_i+e_j}}{q_n}$, dass der nächste Zustand $n - e_i + e_j$ ist, ist daher $s_{ij}\mu_i / \sum_{l=1}^{k} \delta_l(n)\mu_l$. Daraus folgt $q_{n,n-e_i+e_j} = \mu_i s_{ij}$. Ist $\delta_i(n) = 0$, dann ist kein Kunde am Schalter $i$, der Übergang nach $n - e_i + e_j$ nicht möglich, also $q_{n,n-e_i+e_j} = 0$. Wir schreiben $q_{n,n-e_i+e_j} = \mu_i s_{ij} \delta_i(n)$. Ist $n \in S$ und $n_j > 0$, dann können wir $n + e_i - e_j$ für $n$ einsetzen und erhalten $q_{n+e_i-e_j,n} = \mu_i s_{ij}$. Ist $n_j = 0$, dann existiert der Zustand $n + e_i - e_j$ nicht. Wir schreiben daher $q_{n+e_i-e_j,n} = \mu_i s_{ij} \delta_j(n)$, um es später zu verwenden.

Aus den soeben berechneten Übergangsraten kann man den stationären Vektor bestimmem. Die Gesamtanzahl $m$ der Kunden im Netz ändert sich nicht. Wir können daher auf dem eingeschränkten Zustandsraum $S = \{n = (n_1, n_2, \dots, n_k) : n_j \geq 0, n_1 + n_2 + \dots + n_k = m\}$ arbeiten. Wir nehmen an, dass die Matrix $(s_{ij})_{i,j \in K}$ irreduzibel ist. Man findet $\alpha_i > 0$ mit $i \in K$, die eine Lösung des Gleichungssystems

$$\sum\nolimits_{i \in K} \alpha_i \mu_i s_{ij} = \alpha_j \mu_j \quad \text{mit} \quad j \in K$$

bilden (der Vektor $(\alpha_i \mu_i)_{i \in K}$ ist stationärer Vektor der Markovkette mit diskreter Zeit, die Übergangsmatrix $(s_{ij})_{i,j \in K}$ hat). Für $n \in S$ sei $\pi_n = c\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \dots \alpha_k^{n_k}$, wobei $c$ so bestimmt wird, dass $\sum_{n \in S} \pi_n = 1$ gilt. Multipliziert man obige Gleichung mit $\frac{\pi_n \delta_j(n)}{\alpha_j}$, so ergibt sich $\sum_{i \in K} \pi_{n+e_i-e_j} \mu_i s_{ij} \delta_j(n) = \pi_n \mu_j \delta_j(n)$. Summiert man über $j \in K$, beachtet, dass $s_{ii} = 0$ ist, und setzt die oben gefundenen Übergangsraten ein, so erhält man

$$\sum\nolimits_{i \in K} \sum\nolimits_{j \in K \setminus \{i\}} \pi_{n+e_i-e_j} q_{n+e_i-e_j,n} = \pi_n q_n \qquad \text{für } n \in S$$

Da Übergänge nur von $n + e_i - e_j$ nach $n$ stattfinden können, sind diese Gleichungen äquivalent zu $\pi Q = 0$. Damit ist gezeigt, dass durch $(\pi_n)_{n \in S}$ ein stationärer Vektor gegeben ist.

**Beispiel 10:** Ein offenes Netzwerk ist genauso wie ein geschlossenes definiert, nur können jetzt bei jedem Schalter $i$ auch Kunden von außen gemäß einem Poissonprozess mit Parameter $\lambda_i$ eintreffen, und Kunden, deren Bedienzeit beim Schalter $i$ abgelaufen ist, gehen mit Wahrscheinlichkeit $s_{ij}$ zum Schalter $j$ und verlassen mit Wahrscheinlichkeit $r_i$ das Netzwerk. Es gilt $r_i + \sum_{j \in K} s_{ij} = 1$ für alle $i \in K$. Wenn $i$ ein Schalter ist, bei dem keine Kunden von außen eintreffen können, setzen wir $\lambda_i = 0$. Die Übergangsraten findet man wie in Beispiel 9: $q_n = \sum_{l=1}^{k} \delta_l(n)\mu_l + \sum_{l=1}^{k} \lambda_l$, $q_{n,n-e_i+e_j} = \mu_i s_{ij} \delta_i(n)$, $q_{n,n-e_i} = \mu_i r_i \delta_i(n)$ und $q_{n,n+e_j} = \lambda_j$. Einen stationären Vektor kann man wie in Beispiel 9 berechnen. Bilden die $\alpha_i > 0$ mit $i \in K$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$\sum\nolimits_{i \in K} \alpha_i \mu_i s_{ij} + \lambda_j = \alpha_j \mu_j \quad \text{mit} \quad j \in K$$

dann sei $\pi_n = c\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \dots \alpha_k^{n_k}$ für $n \in S$ und $c$ so, dass $\sum_{n \in S} \pi_n = 1$ gilt (ist $\sum_{n \in S} \pi_n = \infty$, dann existiert kein stationärer Vektor). Multipliziert man obige Gleichung mit $\frac{\pi_n \delta_j(n)}{\alpha_j}$, so ergibt sich $\sum_{i \in K} \sum_{j \in K \setminus \{i\}} \pi_{n+e_i-e_j} q_{n+e_i-e_j,n} + \sum_{j \in K} \pi_{n-e_j} q_{n-e_j,n} = \pi_n \sum_{j \in K} \mu_j \delta_j(n)$ wie in Beispiel 9. Summiert man obige Gleichung über $j \in K$ und verwendet $r_i = 1 - \sum_{j \in K} s_{ij}$, dann erhält man $\sum_{i \in K} \alpha_i \mu_i r_i = \sum_{j \in K} \lambda_j$. Multipliziert man jetzt mit $\pi_n$, so ergibt sich $\sum_{i \in K} \pi_{n+e_i} q_{n+e_i,n} = \pi_n \sum_{j \in K} \lambda_j$. Addiert man das zur Gleichung vorher, so folgt

$$\sum\nolimits_{i \in K} \sum\nolimits_{j \in K \setminus \{i\}} \pi_{n+e_i-e_j} q_{n+e_i-e_j,n} + \sum\nolimits_{j \in K} \pi_{n-e_j} q_{n-e_j,n} + \sum\nolimits_{i \in K} \pi_{n+e_i} q_{n+e_i,n} = \pi_n q_n$$

für $n \in S$. Da Übergänge nur von $n + e_i - e_j$, $n - e_j$ und $n + e_i$ nach $n$ stattfinden können, sind diese Gleichungen äquivalent zu $\pi Q = 0$. Somit ist $(\pi_n)_{n \in S}$ ein stationärer Vektor.

# Inhaltsverzeichnis