

STOCHASTISCHE PROZESSE

Jiří Černý

Vorlesungsskript

Universität Wien, Wintersemester 2012

Vorbemerkung

Diese Vorlesung behandelt stochastische Prozesse, die häufig in Anwendungen vorkommen. Typische Beispiele sind der Poissonprozess, Markovketten in diskreter und stetiger Zeit, Erneuerungsprozesse, und die Brown'sche Bewegung.

Der Skriptteil über Markovketten basiert wesentlich auf dem Skript *Stochastische Prozesse I* von Wolfgang König (WIAS/TU Berlin) [Kö], dem ich hiermit für die freundliche Überlassung danke.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	ii
Kapitel 1. Einleitung	1
1. Präsentation der Vorlesung	1
2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie	6
3. Weiterführende Literatur	10
Kapitel 2. Markovketten in diskreter Zeit	11
1. Definition und einfache Eigenschaften	11
2. Beispiele	16
3. Stoppzeiten und starke Markoveigenschaft	19
4. Klasseneigenschaften, Rekurrenz, Transienz	21
5. Gleichgewichtsverteilungen	26
6. Konvergenz gegen die Gleichgewichtsverteilung	32
7. Exkursion in die lineare Algebra: Satz von Perron-Frobenius	36
8. Reversible Markovketten	37
9. Harmonische Funktionen und Eintrittswahrscheinlichkeiten	40
10. Reversible Markovketten und elektrische Netzwerke	44
11. Verzweigungsprozess	51
Kapitel 3. Poissonprozesse	54
1. Definition und erste Eigenschaften	54
2. Poissonprozess als Markovkette	58
3. Stationäre Poissonprozesse auf \mathbb{R}	59
4. Superposition und Verdünnung von Poissonprozessen	60
5. Inhomogene Poissonprozesse	63
6. Abstrakte Poissonpunktprozesse	65
Kapitel 4. Markovketten in stetiger Zeit	67
1. Definition	67
2. Starke Markoveigenschaft	69
3. Konstruktion von pure-jump Prozessen	71
4. Kolmogorovsche Gleichungen und Generator	74
5. Transienz, Rekurrenz und invariante Maße	78
Literaturverzeichnis	80

KAPITEL 1

Einleitung

1. Präsentation der Vorlesung

Ein *stochastischer Prozess* ist ein mathematisches Modell für einen realen Vorgang, der zufällig ist und von einem Parameter (meist der Zeit) abhängt. Beispiele für zufällige reale Vorgänge, auf die die Theorie der stochastischen Prozesse mit Erfolg angewendet wird, sind:

- Warteschlangen (auch Netze von Warteschlangen),
- Ausbreitung von Epidemien oder von Genen,
- Populationsentwicklung,
- Bewegung eines Elektrons in einem magnetischen Feld,
- Aktienkurse,
- Entwicklung des Kapitals eines Versicherungsunternehmens,
- Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche,
- Kartenmischen,
- Simulation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung,
- Stochastisches Optimieren,

Alle diese Beispiele sind zeitabhängig und in der Regel nicht mit Sicherheit vorhersagbar, weswegen sich eine stochastische Modellierung anbietet. Zu stochastischen Prozessen werden diese Beispiele erst dann, wenn man festlegt, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die einzelnen Realisierungen auftreten.

Im Folgenden werden einige wichtigen Beispiele der stochastischen Prozessen kurz vorgestellt.

Markovketten. Die Markovketten tragen den Namen des russischen Mathematikers Andrey Markov, der sie zu Beginn des 20. Jahrhunderts eingeführt hat. Zu einer Markovkette gehört immer ein Zustandsraum S , in diesem Skript höchstens abzählbar, und eine Parametermenge I .

Wenn $I = \mathbb{N}$, (oder \mathbb{Z}) spricht man von einer Markovkette in diskreter Zeit. In diesem Fall definiert man die Markovkette wie eine Familie $(X_n)_{n \in I}$ von S -wertigen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, die die Bedingungen

$$E[f(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n] \stackrel{P-f.s.}{=} E[f(X_{n+1})|X_n], \quad (1.1.1)$$

für jedes $n \geq 0$ und jede beschränkte Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllen. Intuitiv bedeutet diese Bedingung, dass die beste Vorhersage der Folge X_n gegeben die

“Glauber-Dynamik”. Hier wählt man den Zustandsraum $E = \{1, \dots, K\}^\Lambda$ mit $\Lambda = \{1, \dots, L\}^2 \subset \mathbb{Z}^2$. Diesen Zustandsraum kann man als die Menge aller Konfigurationen von Pixeln in Box Λ ansehen, die K unterschiedlichen Graustufen haben können, $x \in E$ ist ein Bild. Eine mögliche Übergangswahrscheinlichkeit ist dann

$$p_{xy} = \begin{cases} 0, & x, y \text{ unterscheiden sich in mehr als einem Pixel,} \\ \frac{1}{(K-1)|\Lambda|}, & x, y \text{ unterscheiden sich in gerade einem Pixel,} \\ & H(y) < H(x), \\ \frac{e^{-\beta(H(y)-H(x))}}{(K-1)|\Lambda|}, & x, y \text{ unterscheiden sich in gerade einem Pixel,} \\ & H(y) \geq H(x), \\ 1 - \sum_{z \neq x} p_{xz}, & \text{wenn } x = y, \end{cases} \quad (1.1.5)$$

wobei $H : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist und $\beta \geq 0$ ein Parameter. Diese Markovkette kann man z.B. benutzen um das Minimum einer wenig bekannten, oder sehr komplexen, Funktion H auf E zu finden. Der Parameter β beeinflusst die Fähigkeit der Kette, Umgebungen von lokalen Minima zu verlassen.

Typische Fragen über Markovketten sind:

- Besucht die Kette einen Zustand $x \in E$, endlich oder unendlich vielmal?
- Welche Verteilung hat X_n für große n ?
- Konvergiert diese Verteilung zu einer deterministischen Verteilung?
- Wie schnell ist die Konvergenz?

Wenn die Parametermenge $I = [0, \infty)$ (oder \mathbb{R}) ist, spricht man von Markovketten in stetiger Zeit. In diesem Fall ersetzt man (1.1.1), durch

$$E[f(X_{t_{n+1}}) | X_{t_0}, \dots, X_{t_n}] = E[f(X_{t_{n+1}}) | X_{t_n}], \quad (1.1.6)$$

für jedes $n \geq 0$, jede Folge $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$, und jede beschränkte Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Die Fragen, die man hier stellt, sind ähnlich wie in der diskreten Situation; es gibt sogar wichtige Verbindungen zwischen den beiden Fällen, die wir in der Vorlesung erklären.

Poissonprozess. Ein Poisson-Prozess ist ein stochastischer Prozess, benannt nach dem französischen Mathematiker Siméon Denis Poisson, der die Poissonverteilung in seinem Werk “Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et en matière civile” eingeführt hat.

Grob kann man den Poissonprozess folgendermaßen definieren: Wir haben eine zufällige Menge von Punkten auf $[0, \infty)$, sodass für jedes Intervall $I \subset [0, \infty)$ die Anzahl $N(I)$ der Punkte in I die Poissonverteilung mit Parameter $\lambda|I|$ hat, wobei $|I|$ die Länge von I ist, und $\lambda > 0$ eine Konstante, d.h.

$$P[N(I) = k] = \frac{(\lambda|I|)^k}{k!} e^{-\lambda|I|}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.1.7)$$

und für jede endliche Folge I_1, \dots, I_k von paarweise disjunkten Intervallen die Zufallsvariablen $N(I_1), \dots, N(I_k)$ unabhängig sind. Der Poissonprozess beschreibt dann die Anzahl der Punkte im Intervall $[0, t]$,

$$N_t := N([0, t]), \quad t \geq 0. \quad (1.1.8)$$

Es folgt, dass N_t eine zufällige, steigende, rechtsstetige Funktion von t ist. Die Sprünge dieser Funktion habe Größe 1 und fallen genau auf die obgenannten Punkte.

Der Poissonprozess kommt in vielen Anwendungen vor: Er beschreibt die Zeitpunkte der Ankunft der Kunden in einer Warteschlange, der Verbindungen mit einer Telefonzentrale oder einem Server, die Zeitpunkte, in denen eine radioaktive Substanz ein α -Teilchen emittiert, oder diejenigen, zu denen Großschäden einer Versicherung eintreten, usw.

Wir werden verschiedene Eigenschaften von Poissonprozessen sehen. Z.B. wenn $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ die Sprungzeiten des Poissonprozesses bezeichnen, werden wir beweisen, dass die Zufallsvariablen $(S_i = T_i - T_{i-1})_{i \geq 1}$ unabhängig und identisch verteilt sind, und S_i exponentiell mit Parameter λ verteilt ist. Der Poissonprozess ist das einfachste Beispiel einer Markovkette in stetiger Zeit.

Erneuerungsprozesse. Seien jetzt $(S_i)_{i \geq 1}$ unabhängige identisch verteilte, nicht-negative Zufallsvariablen mit $P[S_i = 0] < 1$, und mit endlichem Erwartungswert $\mu = E[S_i]$. Definiere $T_i = S_1 + \dots + S_i$, $i \geq 1$, die Erneuerungszeiten. Der Erneuerungsprozess ist definiert durch

$$N_t = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}\{T_i \leq t\}, \quad (1.1.9)$$

er zählt die Anzahl der Erneuerungen vor dem Zeitpunkt t . Wenn alle S_i exponentiellverteilt sind, ist N_t ein Poissonprozess, d.h. Erneuerungsprozesse verallgemeinern die Poissonprozesse.

Eine wichtige Eigenschaft der Erneuerungsprozesse ist, dass nach der Zeit T_i der Prozess “frisch” beginnt und sich in gleicher Weise wie vorher entwickelt, was die Terminologie “Erneuerung” erklärt. Mathematisch ausgedrückt also

$$(N_{T_i+s} - i)_{s \geq 0} \text{ hat die gleiche Verteilung wie } (N_s)_{s \geq 0} \text{ und} \quad (1.1.10)$$

is unabhängig von T_1, \dots, T_i .

Wir werden das Langzeitverhalten der Erneuerungsprozessen betrachten. Wir werden z.B. sehen, dass (mit geeigneten Annahmen über die Verteilung von S_i), das ‘Blackwell Erneuerungstheorem’ gilt, also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[N_{t+h} - N_t] = h/\mu, \quad h > 0. \quad (1.1.11)$$

Andere interessante Objekte sind “Alter” $A_t = t - \sup\{T_i : T_i \leq t\}$ und “Exzess” $E_t = \inf\{T_i : T_i \geq t\}$, wobei t eine große deterministische Zeit ist.

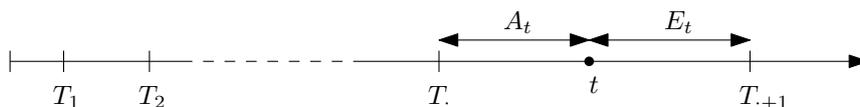


ABBILDUNG 2. Alter und Exzess

Brown'sche Bewegung und Diffusionsprozesse. In manchen Fällen, wenn man das Langzeitverhalten von stochastischen Prozessen untersucht, ist es geeignet, nicht nur die Zeit, sondern auch den Raum zu skalieren. Als Ergebnis dieser Konstruktion erhält man Prozesse in stetiger Zeit, mit stetigen Pfaden.

Nehmen wir als Beispiel die einfache Irrfahrt, die wir im Abschnitt über Markovketten schon erwähnt haben. Es ist einfach zu sehen, dass wir die Irrfahrt mit Hilfe einer u.i.v. Folge von Bernoulli-Zufallsvariablen ξ_i beschreiben können, wobei $P[\xi_i = \pm 1] = 1/2$:

$$X_0 = 0, \quad X_j = \sum_{i=1}^j \xi_i, \quad j \geq 1. \quad (1.1.12)$$

Aus der Vorlesung 'Wahrscheinlichkeit und Statistik' wissen Sie, dass X_n den Zentralen Grenzwertsatz erfüllt,

$$n^{-1/2}X_n \text{ konvergiert in Verteilung zu einer Gauss'schen Zufallsvariablen.} \quad (1.1.13)$$

Statt nur einen Zeitpunkt anschauen, ist es natürlich mehrere Zeitpunkte gleichzeitig zu untersuchen, oder sogar X wie eine Funktion zu betrachten. Man kann beweisen, dass X einen "funktionalen Grenzwertsatz (Theorem von Donsker)" erfüllt ,

$$n^{-1/2}X[tn] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B_t, \text{ in Verteilung,} \quad (1.1.14)$$

wobei B eine zufällige stetige Funktion ist, die man Brown'sche Bewegung nennt.

In dieser Vorlesung werden wir aber nicht die Brown'sche Bewegung als eine zufällige Funktion konstruieren, da es die abstrakte Maßtheorie verlangt, wobei diese in der Vorlesung nicht vorausgesetzt wird. Wir nehmen deswegen eine andere Perspektive und beobachten, dass nach dem Zentralen Grenzwertsatz B_t die Gauss'sche Verteilung mit Varianz t hat, deren Dichte

$$p_t(x) = p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} \quad (1.1.15)$$

ist. Weiter beobachten wir, dass $p(t, x)$ die Fundamentallösung der Partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(t, x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t, x), \\ p(t, x) &= \delta_0(x) \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

ist, d.h. die "Übergangswahrscheinlichkeiten" $p(t, x)$ der (hypothetischen) Zufallsfunktion B können mit einer Differentialgleichung beschrieben werden.

Wir werden sehen, dass eine ähnliche Konstruktion auch für andere Prozesse möglich ist. Die Prozesse, die so entstehen, heißen Diffusionsprozesse. Ihre Übergangswahrscheinlichkeiten erfüllen möglicherweise andere Differentialgleichungen.

2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1. Wahrscheinlichkeitsräume. Ein zufälliges Experiment wird durch einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) modelliert, wobei:

- Ω — *der Grundraum*, eine nicht leere Menge, die alle mögliche Ergebnisse des Experiments beschreibt. $\omega \in \Omega$ heißt *Elementarereignis*
- \mathcal{F} — eine σ -*Algebra* (d.h. \mathcal{F} ist eine Familie von Teilmengen von Ω mit $\Omega \in \mathcal{F}$; $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$; und für jede Folge $(A_i)_{i \geq 1}$, $A_i \in \mathcal{F}$ gilt $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$). Die Elemente von \mathcal{F} heißen *Ereignisse* oder *messbare Mengen*.
- P — ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf (Ω, \mathcal{F}) . D.h. P ist eine Abbildung, $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, mit $P(\Omega) = 1$, und für jede Folge $(A_i)_{i \geq 1}$ von paarweise disjunkten Elementen aus \mathcal{F} gilt $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)$. $P(A)$ gibt die Wahrscheinlichkeit (oder relative Häufigkeit) an, dass das Ergebnis des Experiments in A liegt.

BEISPIEL 1.2.1 (diskrete Verteilung). Ω endlich oder abzählbar. In diesem Fall wird normalerweise $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt, wobei $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge (Familie aller Teilmengen) von Ω ist.

Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß kann mit Hilfe der Folge $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ beschrieben werden, sodass

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega. \quad (1.2.1)$$

Die Folge (p_ω) erfüllt $p_\omega \geq 0$ und $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

BEISPIEL 1.2.2 (Verteilung mit der Dichte f auf \mathbb{R}). In diesem Fall wählt man $\Omega = \mathbb{R}$. Die Maßtheorie legt fest, dass man nicht $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ nehmen kann.¹ Natürlich will man die Wahrscheinlichkeit aller Intervalle bestimmen können. Deswegen wählt man

$$\mathcal{F} = \text{'die kleinste } \sigma\text{-Algebra, die alle offene Intervalle enthält'}. \quad (1.2.2)$$

Diese σ -Algebra heißt Borel- σ -Algebra und wird mit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Sie enthält nicht alle Teilmengen von \mathbb{R} , es ist aber relativ schwierig eine Menge zu konstruieren, die nicht in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß P mit der Dichte f wird durch

$$P((a, b)) = \int_a^b f(\omega) d\omega \quad (1.2.3)$$

¹Es ist nicht möglich eine Abbildung $P: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ zu konstruieren, so dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und dass $P((a, b)) = \int_a^b f(\omega) d\omega$ für jedes $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$.

bestimmt. Aus Maßtheorie folgt, dass (1.2.3) ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ bestimmt.

BEISPIEL 1.2.3 (Produkttraum). Dieses Beispiel spielt eine große Rolle für die Konstruktion von Stochastischen Prozessen. Sei (S, \mathcal{S}) ein messbarer Raum (d.h. Raum S mit einer σ -Algebra \mathcal{S}), und setze $\Omega = S^{\mathbb{N}}$. Dann ist $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega$ ist eine S -wertige Folge.

In diesem Fall ist $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ auch meistens zu groß. Man wählt

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{l} \text{die kleinste } \sigma\text{-Algebra, die alle } \textit{Zylindermengen} \\ \{\omega \in \Omega : \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_k \in A_k\}, \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ und} \\ A_i \in \mathcal{S}, \text{ enthält.} \end{array} \right. \quad (1.2.4)$$

Dieses \mathcal{F} heißt *Zylinder- σ -Algebra*.

Sei jetzt μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (S, \mathcal{S}) . Man definiert das Produktmaß $P = \mu^{\otimes \mathbb{N}}$ durch

$$P(A) = \prod_{i=1}^k \mu(A_i), \quad A = \{\omega \in \Omega : \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_k \in A_k\} \text{ eine Zylindermenge.} \quad (1.2.5)$$

Diese Relation bestimmt wieder ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Zylinder- σ -Algebra \mathcal{F} .

2.2. Zufallsvariablen. Eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (reelle) *Zufallsvariable*, wenn X messbar ist, d.h.

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \text{ für jedes } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (1.2.6)$$

Ähnlich definiert man eine Zufallsvariable mit Werten in einem messbaren Raum (S, \mathcal{S}) : Es wird verlangt

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \text{ für jedes } B \in \mathcal{S}. \quad (1.2.7)$$

Man kann zeigen, dass die Familie $\sigma_X = \{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} : B \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{F}$ der Teilmengen von Ω eine σ -Algebra ist, die so genannte von X *erzeugte* σ -Algebra. Intuitiv beschreibt σ_X die Information, die man über ω über die Zufallsvariable X lernen kann.

Die *Verteilung* von X ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_X auf (S, \mathcal{S}) so dass

$$\mu_X(B) = P(\{X \in B\}), \text{ für } B \in \mathcal{S}. \quad (1.2.8)$$

2.3. Erwartungswert. Es ist bekannt, dass der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable (Beispiel 1.2.1), $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, durch

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p_\omega \quad (1.2.9)$$

definiert ist. Ähnlich setzt man für stetige Zufallsvariablen (Beispiel 1.2.2)

$$EX = \int_{\mathbb{R}} X(\omega) f(\omega) d\omega. \quad (1.2.10)$$

Wir erweitern jetzt diese Definitionen auf allgemeine Zufallsvariablen. Wir starten mit zwei natürlichen Annahmen

- Für jede messbare Menge $A \in \mathcal{F}$,

$$E[\mathbf{1}_A] = P(A). \quad (1.2.11)$$

- Der Erwartungswert ist linear: Für zwei beschränkte Zufallsvariablen X, Y und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]. \quad (1.2.12)$$

Mit Hilfe von (1.2.11), (1.2.12), kann man EX für alle ‘Stufenfunktionen’ X ,

$$X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad c_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{F}, \quad (1.2.13)$$

definieren, nämlich durch

$$EX = \sum_{i=1}^n c_i P(A_i). \quad (1.2.14)$$

Für nicht-negative Zufallsvariablen X wird EX durch Approximation von Stufenfunktionen definiert. Wir setzen

$$X_n(\omega) = \sum_{i=0}^{n2^n} i2^{-n} \mathbf{1}_{\{X \in [i2^{-n}, (i+1)2^{-n}]\}}(\omega) + n \mathbf{1}_{\{X \geq n\}}(\omega). \quad (1.2.15)$$

Weil X eine Zufallsvariable ist, sind die Mengen $\{X \in [i2^{-n}, (i+1)2^{-n}]\}$ und $\{X \geq n\}$ messbar. Deswegen ist X_n eine Stufenfunktion wie in (1.2.13), und aus (1.2.14) folgt

$$EX_n = \sum_{i=0}^{n2^n} i2^{-n} P[X \in [i2^{-n}, (i+1)2^{-n}]] + nP[X \geq n]. \quad (1.2.16)$$

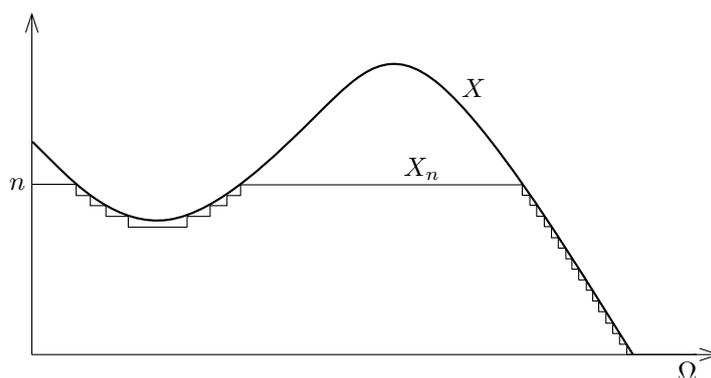


ABBILDUNG 3. Approximation durch X_n .

Weil $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$, ist die Folge EX_n nicht fallend. Es ist dann natürlich

$$EX = \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n \in [0, \infty]. \quad (1.2.17)$$

zu setzen.

Schließlich schreiben wir für allgemeines $X = X_+ - X_-$, wobei $X_+ = \max(X, 0)$ und $X_- = \max(-X, 0)$ nicht-negativ sind, und definieren

$$EX = EX_+ - EX_- \quad (1.2.18)$$

wenn dieser Ausdruck Sinn hat.

Wir werden oft die ‘Integral-Notation’ für den Erwartungswert benutzen

$$\int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) := EX. \quad (1.2.19)$$

Diese Notation verallgemeinert (1.2.9), (1.2.10).

2.4. Unabhängigkeit. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ heißen *unabhängig* wenn

$$P[A \cap B] = P[A]P[B]. \quad (1.2.20)$$

Zwei (reelle) Zufallsvariablen X, Y sind unabhängig, wenn die Ereignisse $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ unabhängig für jedes $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind.²

2.5. Bedingte Wahrscheinlichkeit. Die bedingte Wahrscheinlichkeit Ereignisses A gegeben Ereignis B definiert man durch

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}, \quad \text{falls } P[B] > 0. \quad (1.2.21)$$

Es ist einfach zu sehen, dass die Abbildung $P[\cdot|B] : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) ist. Man kann deswegen den Erwartungswert bezüglich dieses Maßes betrachten, den *bedingten Erwartungswert*,

$$E[X|B] = \int_{\Omega} X(\omega) P[d\omega|B].^3 \quad (1.2.22)$$

Sei jetzt X eine Zufallsvariable mit Werten in einer höchstens abzählbaren Menge S (versehen mit der Potenzmenge als σ -Algebra), wobei wir annehmen, dass $P(X = x) > 0$ für alle $X \in S$ gilt. Für Ereignisse $A \in \mathcal{F}$ ist $P(A|X = x)$ in diesem Fall wohldefiniert.

Diese Definition ist so nicht mehr möglich, wenn $P(X = x) = 0$ für eine Menge von x mit positiver μ_X -Wahrscheinlichkeit gilt. Ist X zum Beispiel eine reelle Zufallsvariable, deren Verteilung eine Dichte hat, so gilt $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man ist natürlich versucht, $P(A|X = x)$ als Limes von $P(A|X \in U_n)$ zu definieren, wobei $U_n \nearrow \{x\}$ gilt. Dieser Einsatz führt jedoch zu großen

²Um die Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen zu beweisen, reicht es diese Bedingung nur für alle Intervalle A, B zu testen.

³Z.B., für eine diskrete Zufallsvariable X mit Werten in \mathbb{N} bedeutet diese Notation $\sum_{k \in \mathbb{N}} k P[X = k|B]$. Wenn $X = 1_A$ dann $E[X|B] = P[A|B]$.

Schwierigkeiten. Wir nehmen deswegen einen anderen Weg, der $P(A|X = x)$ als eine Funktion auf Ω definiert, die nur P -f.s. bestimmt ist.

Daher untersuchen wir zunächst den Fall $P(X = x) > 0$ für alle $x \in S$. Wir definieren zuerst eine Funktion $P[A|X] : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$P[A|X](\omega) = P[A|X = x] \quad \text{wenn } X(\omega) = x. \quad (1.2.23)$$

Diese Funktion hat zwei wichtige Eigenschaften: Sie ist σ_X -messbar (d.h. für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ hat man $P[A|X]^{-1}(B) \in \sigma_X$), und für jede Teilmenge $C \in \sigma_X$ mit $C = X^{-1}(D)$, $D \in \mathcal{S}$, gilt offenbar:

$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= \sum_{x \in D} P(A|X = x)P(X = x) \\ &= \int_D P(A|X = x)\mu_X(dx) \\ &= \int_C P(A|X)(\omega)P(d\omega). \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Für allgemeine (S, \mathcal{S}) -wertige Zufallsvariable X nehmen wir diese Eigenschaften als Definition. Wir sagen, dass eine Funktion $\psi_A : S \rightarrow [0, \infty)$ eine *Version der bedingten Wahrscheinlichkeit von A gegeben X* ist, wenn

$$\begin{aligned} \psi_A \text{ ist } \sigma_X\text{-messbar,} \\ \int_C \psi_A(\omega)P(d\omega) = P(A \cap C) \quad \text{für alle } C \in \sigma_X. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym kann man dann beweisen, dass ein solches ψ_A existiert und bis auf μ_X -fast sichere Gleichheit eindeutig ist. Unter ‘normalen’ Umständen⁴ kann man dazu annehmen dass die Abbildung $\mathcal{F} \ni A \mapsto \psi_A(x)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (S, \mathcal{S}) ist. Mit Hilfe dieses Maßes kann man $E[Y|X]$ wie vorher definieren.

3. Weiterführende Literatur

- R. Durrett: Essentials of Stochastic Processes [Dur99]
- G. Grimmett, D. Stirzaker: Probability and Random Processes [GS01]
- W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications [Fel68, Fel71]
- S. Karlin, H.M. Taylor: A (first) second course in stochastic processes [KT75, KT81]
- J.R. Norris: Markov Chains [Nor98]
- D.A. Levin, Y. Peres, E. Wilmer: Markov chains and mixing times [LPW09]

⁴Z.B. wenn Ω vollständiger, separabler metrischer Raum, \mathcal{F} ist die Borel- σ -Algebra (d.h. die kleinste σ -Algebra die alle offenen Mengen in Ω enthält).

Markovketten in diskreter Zeit

In diesem Kapitel behandeln wir einen der wichtigsten stochastischen Prozesse, die Markovketten auf einem diskreten Raum in diskreter Zeit. Wir werden also immer die Parametermenge $I = \mathbb{N}_0$ wählen, und der Zustandsraum S ist eine beliebige nichtleere diskrete Menge, also endlich oder höchstens abzählbar unendlich. S ist immer mit der σ -Algebra $\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$ ausgestattet.

Man stelle sich ein Teilchen vor, das sich durch eine Menge S zufällig bewegt und zu den Zeitpunkten $0, 1, 2, 3, \dots$ jeweils zu einem (eventuell anderen) Punkt springt. Die besondere Eigenschaft der Sprungentscheidungen, die die Markoveigenschaft ausmacht, ist die Tatsache, dass diese Entscheidung nur von der aktuellen Position des Teilchens abhängt, aber (gegeben, man kennt diese Position) nicht von dem Verlauf des ganzen bisherigen Pfades, den das Teilchen zurück gelegt hat.

Markovketten spielen eine wichtige Rolle bei der Modellierung vieler zeitlich sich entwickelnder Prozesse: bei Mischungsvorgängen, bei Sortieralgorithmen und anderen stochastischen Algorithmen, bei der Modellierung physikalischer Prozesse oder von Finanzmärkten und vielem mehr.

1. Definition und einfache Eigenschaften

Wir beginnen mit der Definition der Markovkette: Selbst wenn der gesamte bisherige Verlauf bekannt ist, hat nur die aktuelle Position einen Einfluss auf die Sprungentscheidung.

DEFINITION 2.1.1 (Markovkette). Wir sagen, eine (endliche oder unendliche) Folge X_0, X_1, X_2, \dots von S -wertigen Zufallsgrößen, die auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) definiert sind, heißt *eine Markovkette*, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in S$ gilt:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n), \quad (2.1.1)$$

sofern alle auftretenden bedingten Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert sind.

Das legt nahe, dass eine Markovkette im Wesentlichen durch die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$ festgelegt wird. Ihre Kollektion ist also ein ganz wesentliches Objekt:

DEFINITION 2.1.2 (stochastische Matrix). Eine Matrix $\mathcal{P} = (p_{x,y})_{x,y \in S}$ heißt *stochastisch*, falls $p_{x,y} \in [0, 1]$ für alle $x, y \in S$ gilt und $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$ für jedes $x \in S$ gilt.

Wir werden im Folgenden immer still schweigend davon ausgehen, dass die Koeffizienten einer stochastischen Matrix \mathcal{P} mit $p_{x,y}$ bezeichnet sind.

Die Sprungwahrscheinlichkeiten einer Folge von Zufallsgrößen, die die Markoveigenschaft besitzt, sind also durch stochastische Matrizen gegeben, die *a priori* noch von dem Zeitpunkt des Sprunges abhängen dürfen. Wir werden im Folgenden nur solche Folgen betrachten, deren Sprungwahrscheinlichkeiten nicht von diesem Zeitpunkt abhängen:

DEFINITION 2.1.3 ((zeitlich homogene) Markovkette). Sei \mathcal{P} eine stochastische Matrix. Eine (endliche oder unendliche) Folge X_0, X_1, X_2, \dots von S -wertigen Zufallsgrößen heißt eine (zeitlich homogene) *Markovkette mit Übergangsmatrix* \mathcal{P} , falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in S$ mit $P(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) > 0$ gilt:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = p_{x_n, x_{n+1}}. \quad (2.1.2)$$

Die Einträge $p_{x,y}$ von \mathcal{P} heißen die *Übergangswahrscheinlichkeiten*, und die *Startverteilung* ν der Kette ist definiert durch $\nu(x) = P(X_0 = x)$ für $x \in S$.

Eine Startverteilung ist also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, oder kurz eine Verteilung, auf S , genau wie jede Zeile einer stochastischen Matrix. Wir schreiben auch oft P_ν an Stelle von P , um die Startverteilung zu betonen. Im Fall, dass ν in einem $x \in S$ konzentriert ist (also $\nu(x) = 1$), schreiben wir P_x . Die Elemente von S nennt man auch oft *Zustände*, die Menge S selber den *Zustandsraum*.

BEMERKUNG 2.1.4. Mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, die wir im Kapitel 1 eingeführt haben, kann man die obige Definitionen kürzer schreiben. Sei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ die von X_0, \dots, X_n erzeugte σ -Algebra, die intuitiv die Vergangenheit und Gegenwart im Zeitpunkt n beschreibt. Die Bedingung (2.1.1) ist dann äquivalent mit

$$P[X \in A \mid \mathcal{F}_n] = P[X \in A \mid X_n] \quad P\text{-f.s.}, \quad A \subset S \text{ und } n \geq 0., \quad (2.1.3)$$

(2.1.2) entspricht $P[X_{n+1} = x \mid \mathcal{F}_n] = p_{X_n, x}$ P -f.s. für jedes $n \geq 0$ und $x \in S$.

Es folgen Charakterisierungen von Markovketten. Notationell ist es angenehm, für $s < t$ den Pfad $(X_s, X_{s+1}, \dots, X_t)$ mit $X_{[s,t]}$ abzukürzen, ebenso schreiben wir für (nicht zufällige) Vektoren $x_{[s,t]}$ statt $(x_s, x_{s+1}, \dots, x_t) \in S^{t-s+1}$.

SATZ 2.1.5 (Charakterisierung der Markovkette). *Es seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von S -wertigen Zufallsgrößen, ν eine Verteilung auf S und \mathcal{P} eine stochastische Matrix. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist genau dann eine Markovkette mit Übergangsmatrix \mathcal{P} und Startverteilung ν , wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x_{[0,n]} \in S^n$ gilt*

$$P(X_{[0,n]} = x_{[0,n]}) = \nu(x_0) p_{x_0, x_1} p_{x_1, x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}. \quad (2.1.4)$$

BEWEIS. Der Beweis von (2.1.4) wird leicht mit einer Vollständigen Induktion über n geführt, und eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die (2.1.4) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle

$x_0, x_1, \dots, x_n \in S$ erfüllt, wird mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit leicht als eine Markovkette identifiziert. \square

Wir diskutieren jetzt kurz Existenz der Markovketten. Wir betrachten $\Omega = S^{\mathbb{N}}$, \mathcal{F} die Zylinder- σ -Algebra auf Ω , und die kanonischen Koordinaten $X_n : \Omega \rightarrow S$,

$$X_n(\omega) = x_n, \quad \text{wenn } \omega = (x_0, x_1, \dots), n \geq 0. \quad (2.1.5)$$

Wie vorher setzen wir $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n) \subset \mathcal{F}$.

SATZ 2.1.6 (Existenzsatz). *Sei \mathcal{P} eine stochastische Matrix und ν eine Verteilung auf S . Es gibt ein eindeutiges Maß P_ν auf (Ω, \mathcal{F}) , sodass die Folge $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix \mathcal{P} und Startverteilung ν ist.*

BEWEIS. Eindeutigkeit. Eine Markovkette mit Übergangsmatrix \mathcal{P} und Startverteilung ν muss die Bedingungen (2.1.4) erfüllen. Es folgt von der Maßtheorie, dass diese Bedingungen ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) eindeutig bestimmen.

Existenz. Sei $(U_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen, die uniform verteilt auf $[0, 1]$ sind, und auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ definiert sind. Sei dazu \tilde{X}_0 eine ν -verteilte, S -wertige Zufallsvariable auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum, die unabhängig von $(U_i)_{i \geq 1}$ ist. (Einen solchen Wahrscheinlichkeitsraum kann man wie im Beispiel 1.2.3 konstruieren.)

Für jedes $x \in S$, sei $\Phi_x(\cdot) : [0, 1] \rightarrow S$ eine Funktion, sodass $\tilde{P}[\Phi_x(U_i) = y] = p_{x,y}$ (z.B. teilt man das Intervall $[0, 1]$ in Intervalle der Länge $p_{x,y}$, auf denen Φ_x Wert y nimmt). Wir definieren dann eine Folge $(\tilde{X}_i)_{i \geq 1}$ von Zufallsvariablen auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ durch,

$$\tilde{X}_1 = \Phi_{\tilde{X}_0}(U_1), \quad \tilde{X}_2 = \Phi_{\tilde{X}_1}(U_2), \quad \dots, \quad \tilde{X}_{n+1} = \Phi_{\tilde{X}_n}(U_{n+1}), \quad \dots \quad (2.1.6)$$

Es ist einfach zu zeigen mit Induktion nach n , dass

$$\tilde{P}[\tilde{X}_{[0,n]} = x_{[0,n]}] = \nu(x_0)p_{x_0,x_1} \cdots p_{x_{n-1},x_n}, \quad n \geq 0, x_{[0,n]} \in S^{n+1}. \quad (2.1.7)$$

Schlussendlich, sei $\Psi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ eine Abbildung, sodass

$$\Psi(\tilde{\omega}) = (\tilde{X}_0(\tilde{\omega}), \tilde{X}_1(\tilde{\omega}), \dots). \quad (2.1.8)$$

Es ist einfach zu sehen, dass das Maß $P_\nu := \Psi \circ \tilde{P}$ auf (Ω, \mathcal{F}) definiert durch $P_\nu(A) = \tilde{P}(\Psi^{-1}(A))$, (2.1.4) erfüllt, und deswegen $(X_n)_{n \geq 0}$ auf (Ω, \mathcal{F}, P) die gewünschte Markovkette ist. \square

Die Folge $(X_n)_{n \geq 0}$, die wir in dem letzten Beweis konstruiert haben heißt *kanonische Markovkette*. Die Folge $(\tilde{X}_n)_{n \geq 0}$ ist dann eine ‘nicht kanonische Version der gleichen Kette’. Die Konstruktion der Folge $(\tilde{X}_n)_{n \geq 0}$ ist geeignet für Simulationen.

Definition 2.1.1 der Markovkette befasst sich nur mit der ‘nächsten Zukunft’ X_{n+1} . Wir zeigen jetzt dass man ‘beliebig lange Zukunft’ betrachten kann:

SATZ 2.1.7 (Markoveigenschaft). *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette. Dann gilt für alle $n < m$, $x_n \in S$ und alle $A \subset I^n$ mit $P(X_{[0,n-1]} \in A, X_n = x_n) > 0$ und für alle $B \subset I^{m-n}$:*

$$P(X_{[n+1,m]} \in B \mid X_{[0,n-1]} \in A, X_n = x_n) = P(X_{[n+1,m]} \in B \mid X_n = x_n). \quad (2.1.9)$$

Wenn die Markovkette zeitlich homogen ist, dann kann man die rechte Seite von (2.1.9) mit $P(X_{[1,m-n]} \in B \mid X_0 = x_n) = P_{x_n}(X_{[1,m-n]} \in B)$ ersetzen.

BEWEIS. Mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und des Satzes 2.1.5 errechnet man

$$\begin{aligned} P(X_{[n+1,m]} \in B \mid X_{[0,n-1]} \in A, X_n = x_n) &= \frac{P(X_{[n+1,m]} \in B, X_{[0,n-1]} \in A, X_n = x_n)}{P(X_{[0,n-1]} \in A, X_n = x_n)} \\ &= \frac{\sum_{x_{[n+1,m]} \in B} \sum_{x_{[0,n-1]} \in A} \nu(x_0) p_{x_0, x_1} \cdots p_{x_{m-1}, x_m}}{\sum_{x_{[0,n-1]} \in A} \nu(x_0) p_{x_0, x_1} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}} \\ &= \sum_{x_{[n+1,m]} \in B} p_{x_n, x_{n+1}} p_{x_{n+1}, x_{n+2}} \cdots p_{x_{m-1}, x_m}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hängt nicht von A ab. Wir können insbesondere $A = I^n$ setzen und erhalten

$$P(X_{[n+1,m]} \in B \mid X_n = x_n) = \sum_{x_{[n+1,m]} \in B} p_{x_n, x_{n+1}} p_{x_{n+1}, x_{n+2}} \cdots p_{x_{m-1}, x_m}.$$

Wenn wir dies in der obigen Rechnung wieder einsetzen, ist der Beweis beendet. \square

Den letzten Satz kann man auch einprägsam wie folgt formulieren:

KOROLLAR 2.1.8 (Unabhängigkeit von Zukunft und Vergangenheit bei gegebener Gegenwart). *Falls $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette ist, so gilt für alle $n < m$, $x_n \in I$ mit $P(X_n = x_n) > 0$ und alle $A \subset I^n$ und $B \subset I^{m-n}$:*

$$\begin{aligned} P(X_{[0,n-1]} \in A, X_{[n+1,m]} \in B \mid X_n = x_n) \\ = P(X_{[0,n-1]} \in A \mid X_n = x_n) P(X_{[n+1,m]} \in B \mid X_n = x_n). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

BEWEIS. Im Fall $P(X_{[0,n-1]} \in A, X_n = x_n) > 0$ ergibt sich (2.1.11) direkt aus (2.1.9) nach Multiplikation mit $P(X_{[0,n-1]} \in A \mid X_n = x_n)$. Ansonsten steht Null auf beiden Seiten von (2.1.11), und die Aussage gilt trivialerweise. \square

Man überlege sich an einem Beispiel, dass die Aussage von Korollar 2.1.8 im Allgemeinen falsch wird, wenn man das Ereignis $\{X_n = x_n\}$ ersetzt durch $\{X_n \in C\}$ für beliebige Teilmengen C von S .

BEMERKUNG 2.1.9. Wie in Bemerkung 2.1.4 kann man die Markoveigenschaft mit Hilfe des im Kapitel 1 eingeführten Konzepts der bedingten Wahrscheinlichkeit

umschreiben. Dazu betrachten wir die kanonische (zeitlich homogene) Kette vom Satz 2.1.6, und definieren den Shift-Operator $\theta_n : \Omega \rightarrow \Omega$ durch

$$\theta_n((x_0, x_1, x_2, \dots)) = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots). \quad (2.1.12)$$

Intuitiv schiebt dieser Operator den ‘Zeitanfang’ von 0 auf n . Die Markoveigenschaft kann man dann folgend schreiben: Sei Y eine beschränkte \mathcal{F} -messbare Zufallsgröße. Dann gilt für jedes $n \geq 0$,

$$E_\nu[Y \circ \theta_n | \mathcal{F}_n](\omega) = E_{X_n(\omega)}[Y], \quad P_\nu\text{-f.s.}^1 \quad (2.1.13)$$

Es gibt einen sehr engen Zusammenhang zwischen dem Markovschen Mechanismus und der Matrixmultiplikation, wie wir uns kurz klar machen wollen.

BEMERKUNG 2.1.10 (Potenzen stochastischer Matrizen). Stochastische Matrizen \mathcal{P} und \mathcal{Q} kann man ohne Probleme im Sinne der Matrixmultiplikation mit einander multiplizieren, und das Produkt ist ebenfalls eine stochastische Matrix. Die Koeffizienten der n -ten Potenz \mathcal{P}^n von \mathcal{P} bezeichnen wir mit $\mathcal{P}^n = (p_{x,y}^n)_{x,y \in S}$. Es ist $\mathcal{P}^0 = (\delta_{x,y})_{x,y \in S}$ die Einheitsmatrix, wobei $\delta_{x,y}$ das Kroneckersymbol bezeichnet. Wenn man die Gleichung $\mathcal{P}^n \mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{n+m}$ ausschreibt, erhält man die sogenannten *Chapman-Kolmogorov-Gleichungen*:

$$p_{x,y}^{n+m} = \sum_{z \in S} p_{x,z}^n p_{z,y}^m, \quad x, y \in S. \quad (2.1.14)$$

Insbesondere haben wir

$$p_{x,y}^{n+m} \geq p_{x,z}^n p_{z,y}^m, \quad x, y, z \in S, n, m \in \mathbb{N}_0. \quad (2.1.15)$$

Auf Grund des folgenden Lemmas 2.1.11 nennt man die Koeffizienten $p_{x,y}^n$ von \mathcal{P}^n auch die *n -stufigen Übergangswahrscheinlichkeiten*.

Wir stellen uns eine Verteilung ν als *Zeilenvektoren* vor (wie auch z. B. die Zeilen einer stochastischen Matrix), so dass das Matrixprodukt $\nu \mathcal{P}$ wohldefiniert ist, also $(\nu \mathcal{P})_y = \sum_{x \in S} \nu(x) p_{x,y}$.

LEMMA 2.1.11. *Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Startverteilung ν und Übergangsmatrix \mathcal{P} . Dann gilt $P_\nu(X_n = y) = (\nu \mathcal{P}^n)_y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $y \in S$. Insbesondere gilt $P_x(X_n = y) = p_{x,y}^n$ für alle $x, y \in S$.*

BEWEIS. Wir summieren die Gleichung (2.1.4) über alle $x_0, \dots, x_{n-1} \in S$, setzen $y = x_n$, und beachten die Regeln der Matrixmultiplikation. \square

Die Verteilung einer Markovkette zum Zeitpunkt n ist also nichts Anderes als die n -te Potenz der Übergangsmatrix, multipliziert von links mit der Startverteilung. Wir halten noch fest, wie sich dies auf zeitliche Verschiebung auswirkt:

¹Um zu sehen, dass (2.1.13) dem (2.1.9) entspricht setze $Y = \mathbf{1}\{X_{[1,m-n]} \in B\}$. (2.1.13) ist eigentlich etwas stärker als (2.1.9), weil es ‘beliebige’ Zukunft und nicht ‘beliebig lange aber endliche Zukunft’ betrachtet. Wir werden die stärkere Aussage (2.1.13) nicht zeigen, da es die Maßtheorie verlangt.

KOROLLAR 2.1.12. *Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix \mathcal{P} . Dann gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und alle $x, y \in S$ mit $P(X_m = x) > 0$:*

$$P(X_{m+n} = y \mid X_m = x) = p_{x,y}^n.$$

2. Beispiele

In diesem Abschnitt führen wir die wichtigsten Beispiele der Markovketten ein. Wir werden meistens nicht die kanonische Konstruktion geben, sondern benutzen ein ähnliches Prinzip wie im Beweis des Satzes 2.1.6: Mit einer Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsgrößen Y_1, Y_2, Y_3, \dots mit Werten in einem beliebigen messbaren Raum S' und mit einer Funktion $\Psi : S \times S' \rightarrow S$ setzt man rekursiv $X_{n+1} = \Psi(X_n, Y_{n+1})$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Kette wird also rekursiv fortgesetzt, indem man den aktuellen Wert der Kette mit einem festgelegten Mechanismus einem unabhängigen Zufall unterwirft.

BEISPIEL 2.2.1 (unabhängige identisch verteilte Folgen). Wenn $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter S -wertiger Zufallsgrößen ist, so ist sie auch eine Markovkette. Die Übergangsmatrix ist gegeben durch $p_{x,y} = q_y$ für alle $x, y \in S$, wobei q die Verteilung von X_0 ist. Natürlich ist q auch die Startverteilung. Andersherum ist eine Markovkette, deren Übergangsmatrix identische Zeilen besitzt (d. h. deren $p_{x,y}$ nicht von x abhängen), eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen. \diamond

BEISPIEL 2.2.2 (Irrfahrten auf Gruppen). Es sei S eine abzählbare Gruppe G , die wir multiplikativ schreiben und nicht unbedingt als kommutativ voraus setzen wollen. Ferner sei μ eine beliebige Verteilung auf G . Wir definieren $p_{g,h} = \mu(g^{-1}h)$ für alle $g, h \in G$. Wegen der Gruppeneigenschaft ist für jedes g die Abbildung $h \mapsto g^{-1}h$ bijektiv auf G , und es gilt

$$\sum_{h \in G} p_{g,h} = \sum_{h \in G} \mu(g^{-1}h) = \sum_{h' \in G} \mu(h') = 1,$$

also ist $P = (p_{g,h})_{g,h \in G}$ eine stochastische Matrix.

Die zugehörige Markovkette heißt die μ -Irrfahrt auf G . Mit Hilfe einer Folge von unabhängigen, nach μ verteilten Zufallsgrößen Y_1, Y_2, Y_3, \dots erhält man eine μ -Irrfahrt, indem man rekursiv setzt: $X_0 = 1$ und $X_{n+1} = X_n Y_n$, denn dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $g, h \in G$ mit $P(X_n = g) > 0$:

$$P(X_{n+1} = h \mid X_n = g) = P(gY_n = h) = \mu(g^{-1}h) = p_{g,h}.$$

Die Wahl von $S = G$ als die Menge der Permutationen einer endlichen Menge führt zum Beispiel auf ein Modell für die Mischung eines Kartenstapels; man beachte, dass diese Gruppe nicht kommutativ ist. \diamond

BEISPIEL 2.2.3 (Irrfahrten auf \mathbb{Z}^d). Dies ist ein Spezialfall des Beispiels 2.2.2. Wir nehmen die Gruppe $G = \mathbb{Z}^d$, die wir wie üblich additiv schreiben, und die kommutativ ist. Es seien $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter

\mathbb{Z}^d -wertiger Zufallsgrößen, $X_0 = 0$, und $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Die Übergangsmatrix dieser Kette hat die Koeffizienten $p_{x,y} = P(Y_1 = y - x)$, die also nur von der Differenz der Indizes abhängt. Man nennt $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine *Irrfahrt* auf \mathbb{Z}^d .

Wenn $P[Y = \pm e_i] = \frac{1}{2d}$ für alle Vektoren e_i der Standardbasis des \mathbb{Z}^d , spricht man über *einfache Irrfahrt*. Die zugehörige Markovkette beschreibt einen Nächstnachbarschaftspfad durch \mathbb{Z}^d , wobei jeder Nachbar mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird, unabhängig von allen anderen Sprungentscheidungen. \diamond

BEISPIEL 2.2.4 (eindimensionale Irrfahrt). Der folgende wichtige Spezialfall von Beispiel 2.2.3 wird die *eindimensionale Irrfahrt (mit drift)* genannt. Setze $S = \mathbb{Z}$, und Y_n nehme die Werte 1 und -1 mit Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$ an, wobei $p \in [0, 1]$ ein Parameter sei. Dann beschreibt die Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ den Weg eines Teilchens durch die diskrete Achse mit unabhängigen Sprüngen, wobei es zu jedem Zeitpunkt mit Wahrscheinlichkeit p um eine Einheit nach rechts springt und sonst nach links. Die Übergangsmatrix besitzt die Einträge p auf der rechten Nebendiagonalen und $1 - p$ auf der linken, ansonsten besteht sie aus Nullen. Im Fall $p = \frac{1}{2}$ wird die Irrfahrt *symmetrisch* genannt. \diamond

BEISPIEL 2.2.5 (Irrfahrten auf $\{0, \dots, N\}$, Gambler's Ruin Problem). Ähnlich wie in Beispiel 2.2.4 soll ein Sprung innerhalb von $I = \{0, \dots, N\}$ mit Wahrscheinlichkeit p zum rechten Nachbarn und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ zum linken ausgeführt werden. Für die Sprungentscheidungen an den Rändern 0 und N müssen wir allerdings gesonderte Vereinbarungen treffen, und es gibt dafür mehrere Möglichkeiten. Ein Randpunkt, sagen wir 0, heißt *absorbierend*, falls $p_{0,0} = 1$ gilt, falls also das springende Teilchen nie mehr von der 0 sich entfernen kann. Im Fall $p_{0,1} = 1$, wenn also das Teilchen sofort wieder unweigerlich zurück springen muss, heißt der Randpunkt 0 *reflektierend*. \diamond

BEISPIEL 2.2.6 (Polyas Urnenschema). In einer Urne liegen gewisse (endliche) Anzahlen roter und schwarzer Kugeln. Zu jedem Zeitpunkt wird eine Kugel zufällig gezogen und zusammen mit einer neuen Kugel der selben Farbe in die Urne zurück gelegt. Dann bildet das Paar der Anzahlen der roten und der schwarzen Kugeln zu den Zeitpunkten $0, 1, 2, \dots$ eine Markovkette auf \mathbb{N}_0^2 . Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch $p_{(r,s),(r+1,s)} = \frac{r}{r+s}$ und $p_{(r,s),(r,s+1)} = \frac{s}{r+s}$; alle anderen sind Null. \diamond

BEISPIEL 2.2.7 (Ehrenfests Urnenmodell, Irrfahrt auf N -Würfel). Insgesamt N Kugeln liegen in zwei Urnen. Zu jedem Zeitpunkt $1, 2, \dots$ wählen wir eine der Kugeln mit gleicher Wahrscheinlichkeit und lassen sie die Urne wechseln. Dann ist die Anzahl der Kugeln in der linken Urne zum Zeitpunkt n eine Markovkette auf $I = \{0, \dots, N\}$ im Zeitparameter n . Die Übergangsmatrix P ist gegeben durch $p_{k,k-1} = \frac{k}{N}$ und $p_{k,k+1} = 1 - \frac{k}{N}$, und alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten sind Null.

Das Model ist eng verbunden mit der folgenden Irrfahrt auf dem N -Würfel $G_N = \{-1, +1\}^N$, den wir wie eine multiplikative Gruppe ansehen. Sei μ die

Verteilung auf G_n , die jedem Elementen des G mit genau einer ‘-1’ Maß $1/N$ gibt,

$$\mu((1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)) = 1/N, \quad (2.2.1)$$

und sei (X_n) die zugehörige μ -Irrfahrt. Informal, um den Zustand X_{n+1} der Kette zu bekommen, wählt man zufällig eine Koordinate des X_n und ändert ihr Vorzeichen. Betrachten wir jetzt eine Funktion $f : G_N \rightarrow \{0, \dots, N\}$,

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in G_n \mapsto f(x) = \# \text{ von ‘-1’ zwischen } x_1, \dots, x_N. \quad (2.2.2)$$

Es ist einfach zu sehen, dass $Y_n = f(X_n)$ genau das Ehrenfests Urnenmodell ist. \diamond

BEMERKUNG 2.2.8. Im Allgemeinen gilt es nicht, dass eine Funktion der Markovkette wieder Markovkette ist, wie im obigen Beispiel. Siehe Übungsaufgaben für mehr Details.

BEISPIEL 2.2.9 (Bernoulli-Laplace-Diffusionsmodell). In zwei Behältern A und B befinden sich insgesamt w weiße und s schwarze Kugeln, wobei s Kugeln in A liegen, und es sei $w \leq s$. Zu den diskreten Zeitpunkten $n = 1, 2, 3, \dots$ wird jeweils in A und in B eine Kugel zufällig ausgewählt und in den jeweils anderen Behälter gelegt. Dann ist die Anzahl der weißen Kugeln in A eine Markovkette auf $\{0, 1, \dots, w\}$ im Zeitparameter n . Siehe Beispiel 2.5.14 für interessante Eigenschaften dieses Modells. \diamond

BEISPIEL 2.2.10 (Irrfahrten-Maxima). Falls $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf \mathbb{Z} wie in Beispiel 2.2.4 ist, dann bildet die Folge der Maxima $M_n = \max\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ im Allgemeinen keine Markovkette, aber die Folge $(M_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Paare (Übungsaufgabe). \diamond

BEISPIEL 2.2.11 (Verzweigungsprozesse). Wir nehmen an, dass zur Zeit $n = 0$ ein Individuum existiert, das mit Wahrscheinlichkeit $p_k \in [0, 1]$ genau $k \in \mathbb{N}_0$ Nachkommen produziert. Jeder der Nachkommen produziert wieder unabhängig voneinander Nachkommen mit derselben Verteilung. Sei X_n die Zahl der Individuen in der n -ten Generation. Offenbar ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum \mathbb{N}_0 und Startwert 1. Ein solcher Prozess heißt *Galton-Watson-Prozess*. Wir können diesen Prozess auch wie folgt konstruieren. Sei ξ_i^n die Anzahl der Nachkommen des i -ten Individuums der n -ten Generation, dann gilt

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_i^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir können annehmen, dass die Familie $(\xi_i^n)_{n \in \mathbb{N}_0, i \in \mathbb{N}}$ u.i.v. ist. Damit ist der Galton-Watson-Prozess von der Form, die wir am Beginn dieses Abschnitts erwähnten. \diamond

3. Stoppzeiten und starke Markoveigenschaft

Stoppzeiten sind zufällige Zeiten, die nicht in die Zukunft blicken können. Im Zusammenhang mit Markovketten sind Stoppzeiten die Eintrittszeitpunkte gewisser Ereignisse, deren Eintreten durch die bisherige ‘Geschichte’ der Kette beurteilt werden kann.

Im Folgenden sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf S mit Übergangsmatrix \mathcal{P} , definiert auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum Ω .

DEFINITION 2.3.1 (Filtration, Stoppzeit). (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei \mathcal{F}_n die σ -Algebra erzeugt von X_0, \dots, X_n , $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Die Familie $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennt man die zu $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gehörige *Filtration*.

(b) Eine Abbildung $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt eine *Stoppzeit* (bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$), wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das Ereignis $\{T = n\}$ in \mathcal{F}_n liegt.

Eine Filtration ist immer aufsteigend, denn es gilt ja $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ für jedes n . Das Ereignis $\{T = \infty\}$ kann man interpretieren als das Ereignis, dass die Stoppzeit T nie eintritt. Ein Beispiel von Stoppzeiten sind die Ersteintrittszeiten $H_x = \inf\{n \geq 0 : X_n = x\}$ in einen Punkt x für eine Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Um zu zeigen, dass H_x eine Stoppzeit ist, schreibt man $\{H_x = n\} = \{X_0 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = x\}$, was offensichtlich in \mathcal{F}_n liegt.

Etwas allgemeiner definiert man die *Ersteintrittszeit* in eine nichtleere Menge $A \subset S$ als

$$H_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}.$$

Falls $x \in A$, so gilt $P_x(H_A = 0) = 1$. Falls man den Zeitpunkt 0 nicht einbeziehen möchte, benutzt man die *Rückkehrzeit*²

$$\tilde{H}_A = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}.$$

Für $x \notin A$ gilt die Beziehung $P_x(H_A = \tilde{H}_A) = 1$. H_A und \tilde{H}_A sind ebenfalls Stoppzeiten.

Ein Beispiel einer zufälligen Zeit, die keine Stoppzeit ist, ist die Zeit des letzten Besuchs in A ,

$$L_A = \sup\{n \geq 0 : X_n \in A\}. \quad (2.3.1)$$

Wir kommen nun zur *starken Markoveigenschaft*. Diese besagt im Wesentlichen, dass die gewöhnliche Markoveigenschaft, die in Satz 2.1.7 formuliert wurde, auch an Stoppzeiten gilt, d.h. dass die ab einer Stoppzeit T betrachtete Restkette (X_T, X_{T+1}, \dots) , gegeben das Ereignis $\{X_T = x\}$ für ein $x \in S$, wieder eine Markovkette mit der selben Übergangsmatrix und Start in x ist und dass sie ferner unabhängig von der Kette vor dem Zeitpunkt T ist, also unabhängig von (X_0, X_1, \dots, X_T) .

²Die Terminologie ‘Eintrittszeit’ und ‘Rückkehrzeit’ ist nicht standardisiert. Auch im Englischen benutzt man ‘hitting time’ (kann H_A oder \tilde{H}_A bedeuten), ‘return time’ (meistens \tilde{H}_A) oder ‘entrance time’ (meistens H_A).

Die Menge aller Ereignisse, die der Kette (X_0, X_1, \dots, X_T) zustoßen können, ist ein wichtiges System von Ereignissen:

DEFINITION 2.3.2 (Prä- T -Ereignis). Es sei $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ eine Stoppzeit. Wir nennen ein Ereignis $A \subset \Omega$ ein *Prä- T -Ereignis*, falls das Ereignis $A \cap \{T = n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ in \mathcal{F}_n liegt. Die Menge aller Prä- T -Ereignisse bezeichnen wir mit \mathcal{F}_T .

ÜBUNG 2.3.3. Zeigen Sie, dass \mathcal{F}_T eine σ -Algebra ist.

Wir definieren die S -wertige Zufallsgröße X_T als $X_{T(\omega)}(\omega)$, allerdings nur auf der Menge $\{\omega \in \Omega: T(\omega) < \infty\}$. Falls $T(\omega) = \infty$, so ist also X_T nicht definiert. Daraus folgt, dass das Ereignis $\{X_T = x\}$ insbesondere impliziert, dass $T < \infty$.

Nun folgt eine exakte Formulierung der starken Markoveigenschaft.

SATZ 2.3.4 (Starke Markoveigenschaft). *Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette, T eine Stoppzeit, $x \in S$, $A \in \mathcal{F}_T$ und $B \subset S^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Falls $P(X_T = x, A) > 0$, so gilt*

$$P(X_{[T+1, T+m]} \in B \mid X_T = x, A) = P_x(X_{[1, m]} \in B). \quad (2.3.2)$$

BEWEIS. Wir multiplizieren mit $P(X_T = x, A)$ und brauchen nur die Gleichung

$$P(X_{[T+1, T+m]} \in B, X_T = x, A) = P_x(X_{[1, m]} \in B)P(X_T = x, A)$$

zu zeigen. Dies tun wir durch Aufspaltung nach allen (endlichen) Werten, die T annehmen kann: Die linke Seite ist gleich

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} P(X_{[n+1, n+m]} \in B, X_n = x, A, T = n).$$

Da $A \in \mathcal{F}_T$, liegt das Ereignis $A \cap \{T = n\}$ in \mathcal{F}_n . Also können wir die gewöhnliche Markoveigenschaft anwenden (siehe etwa Korollar 2.1.8) und erhalten

$$P(X_{[n+1, n+m]} \in B, X_n = x, A, T = n) = P(X_n = x, A, T = n)P_x(X_{[1, m]} \in B).$$

Aufsummation über $n \in \mathbb{N}_0$ beendet den Beweis. \square

BEMERKUNG 2.3.5. Wie in Bemerkung 2.1.9 schreiben wir die starke Markoveigenschaft im Fall der kanonischen Kette anders um. Dazu beobachten wir, dass nach der Übung 2.3.3 \mathcal{F}_T eine σ -Algebra ist, und deswegen $P[\cdot | \mathcal{F}_T]$ wohldefiniert ist. Satz 2.3.4 ist äquivalent mit:

Es seien ν eine Verteilung auf S , Y eine beschränkte \mathcal{F} -messbare Zufallsgröße und T eine (\mathcal{F}_n) -Stoppzeit. Dann

$$E_\nu[Y \circ \theta_T | \mathcal{F}_T] = E_{X_T}[Y] \quad P_\nu\text{-f.s. auf } \{T < \infty\}. \quad (2.3.3)$$

Hier wird $Y \circ \theta_T$ als $(Y \circ \theta_{T(\omega)})(\omega)$ verstanden, wenn $T < \infty$. Ähnlich $E_{X_T}[Y] = E_{X_{T(\omega)}(\omega)}[Y]$.

4. Klasseneigenschaften, Rekurrenz, Transienz

In diesem Abschnitt sei \mathcal{P} eine stochastische Matrix auf S und (X_n) die zugehörige Markovkette. Wir wollen die Frage untersuchen, ob die Markovkette gegebene Punkte in S mit Sicherheit besucht oder nicht, und wenn dann wieviel mal. Es wird sich heraus stellen, dass der Zustandsraum zerlegt werden kann in rekurrente und transiente Klassen. Eine in einer rekurrenten Klasse gestartete Markovkette verlässt die Klasse nie und besucht jeden Punkt dieser Klasse mit Sicherheit unendlichmal.

Wir müssen zunächst die Frage untersuchen, ob ein gegebener Punkt überhaupt mit positiver Wahrscheinlichkeit jemals erreicht werden kann. Diese Unterscheidung induziert auf natürliche Weise eine Einteilung von S in Klassen.

DEFINITION 2.4.1 (erreichbar). Ein Punkt $y \in S$ heißt von einem Punkt $x \in S$ aus *erreichbar*, falls ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $p_{x,y}^n > 0$. Wir schreiben dann $x \rightsquigarrow y$. Falls $x \rightsquigarrow y$ und $y \rightsquigarrow x$, so schreiben wir $x \longleftrightarrow y$.

BEMERKUNG 2.4.2 (\longleftrightarrow als Äquivalenzrelation). Die Relation \rightsquigarrow auf S ist reflexiv und transitiv, denn wegen $p_{x,x}^0 = 1$ gilt $x \rightsquigarrow x$ für jedes $x \in S$, und falls $x \rightsquigarrow y$ und $y \rightsquigarrow z$ gelten, so folgt aus (2.1.15) leicht, dass auch $x \rightsquigarrow z$ gilt. Also ist \longleftrightarrow eine Äquivalenzrelation auf S und teilt S folglich in Klassen ein. Für zwei Klassen $A, B \subset S$ schreiben wir $A \rightsquigarrow B$, falls es $x \in A$ und $y \in B$ gibt mit $x \rightsquigarrow y$, und wir sagen dann, dass B von A aus erreichbar ist. (Offensichtlich ist diese Sprechweise wohldefiniert, d.h. die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten.)

DEFINITION 2.4.3 (abgeschlossen, irreduzibel). (a) Eine Teilmenge A von S heißt *abgeschlossen*, wenn $A \not\rightsquigarrow S \setminus A$ gilt, d.h. wenn keine zwei Elemente $x \in A$ und $y \in S \setminus A$ existieren mit $x \rightsquigarrow y$.

(b) \mathcal{P} heißt *irreduzibel*, falls S aus einer einzigen Klasse besteht, d.h. wenn je zwei Elemente aus S äquivalent sind.

Man sieht leicht, dass die Einschränkung $\mathcal{P}_A = (p_{x,y})_{x,y \in A}$ von \mathcal{P} auf eine abgeschlossene Klasse A von S ihrerseits eine stochastische Matrix auf A ist. Falls \mathcal{P} irreduzibel ist, so existieren keine abgeschlossenen echten Teilmengen von S .

BEISPIEL 2.4.4. (a) Die symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d ist irreduzibel.

(b) In Polyas Urnenschema (siehe Beispiel 2.2.6) sind keine zwei Elemente aus $S = \mathbb{N}_0^2$ äquivalent. Für jede $r_0, s_0 \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{(r, s) \in S : r \geq r_0, s \geq s_0\}$ abgeschlossen.

(c) Die Irrfahrt auf $\{0, \dots, n\}$ (siehe Beispiel 2.2.5) mit absorbierenden Rändern besitzt die Äquivalenzklassen $\{0\}$, $\{1, \dots, n-1\}$ und $\{n\}$. Die Mengen $\{0\}$ und $\{n\}$ sind abgeschlossen, und es gelten $\{1, \dots, n-1\} \rightsquigarrow \{0\}$ und $\{1, \dots, n-1\} \rightsquigarrow \{n\}$.

Wir kommen jetzt zurück zu der Frage wie viel mal eine Kette einen Zustand besucht und betrachten weitere zentrale Begriffe der Theorie der Markovketten.

DEFINITION 2.4.5. Ein Zustand $x \in S$ heißt *rekurrent* wenn

$$P_x[X_n = x \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}] = 1. \quad (2.4.1)$$

Er heißt *transient* wenn

$$P_x[X_n = x \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}] = 0. \quad (2.4.2)$$

Die Definition lässt scheinbar viel Raum zwischen den beiden Möglichkeiten. Wir werden später zeigen, dass es keine andere Möglichkeit gibt. Im Allgemeinen ist es aber meistens schwierig zu entscheiden ob ein Zustand rekurrent oder transient ist.

Erinnere, dass \tilde{H}_x die Rückkehrzeit nach $x \in S$ bezeichnet, $\tilde{H}_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$. Wir definieren die aufeinanderfolgenden Rückkehrzeiten nach x , $(\tilde{H}_x^i)_{i \geq 0}$, durch

$$\begin{aligned} \tilde{H}_x^0 &= 0, & \tilde{H}_x^1 &= \tilde{H}_x, \\ \tilde{H}_x^{i+1} &= \tilde{H}_x^i + \tilde{H}_x \circ \theta_{\tilde{H}_x^i} & \text{wobei } \tilde{H}_x^{i+1} &= \infty \text{ auf } \{\tilde{H}_x^i = \infty\}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

(Für die Notation nehmen wir an, dass die Kette auf dem kanonischen Raum definiert ist, so dass θ . Sinn hat.) Schlussendlich setzen wir

$$S_x^i = \begin{cases} \tilde{H}_x^i - \tilde{H}_x^{i-1}, & i \geq 1, \text{ auf } \{\tilde{H}_x^{i-1} < \infty\}, \\ 0, & i \geq 1, \text{ auf } \{\tilde{H}_x^{i-1} = \infty\}. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

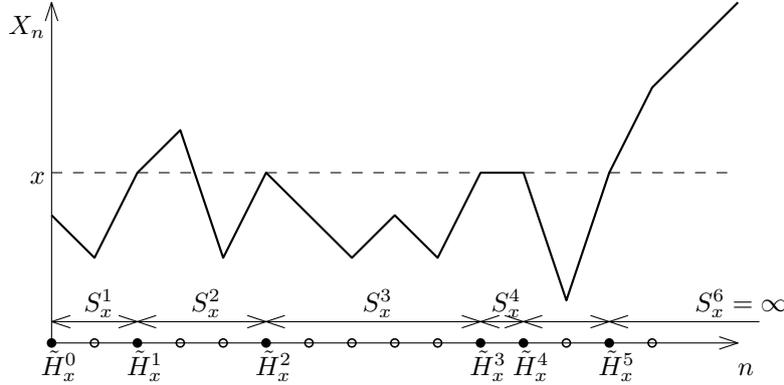


ABBILDUNG 1. Die aufeinanderfolgenden Rückkehrzeiten

LEMMA 2.4.6. Für $n \geq 2$, bedingt auf $\{\tilde{H}_x^{n-1} < \infty\}$, ist S_x^n unabhängig von $\mathcal{F}_{\tilde{H}_x^{n-1}}$, und

$$P_x[S_x^n = k | \tilde{H}_x^{n-1} < \infty] = P_x[\tilde{H}_x = k], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.4.5)$$

BEWEIS. Es folgt aus der Definition, dass $S_x^n = \tilde{H}_x \circ \theta_{\tilde{H}_x^{n-1}}$ auf $\{\tilde{H}_x^{n-1} < \infty\}$. Weil \tilde{H}_x^{n-1} eine Stoppzeit ist, folgt die Behauptung des Lemmas aus der starken Markoveigenschaft (Satz 2.3.4, siehe auch Bemerkung 2.3.5). \square

SATZ 2.4.7. *Es gilt die folgende Dichotomie*

- (i) Wenn $P_x[\tilde{H}_x < \infty] = 1$, dann ist x rekurrent und $\sum_{n=0}^{\infty} p_{xx}^n = \infty$.
- (ii) Wenn $P_x[\tilde{H}_x < \infty] < 1$, dann ist x transient und $\sum_{n=0}^{\infty} p_{xx}^n < \infty$.

BEWEIS. Sei $N_x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\{X_n = x\}$ und $f_x = P_x[\tilde{H}_x < \infty]$. Zuerst zeigen wir dass

$$\begin{aligned} \text{Wenn } f_x < 1, \text{ dann } P_x[N_x = k] &= f_x^k(1 - f_x), k \geq 0. \\ \text{Wenn } f_x = 1, \text{ dann } P_x[N_x = \infty] &= 1. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

(Die erste Zeile bedeutet, dass N_x geometrisch verteilt ist.) Um (2.4.6) zu beweisen, schreiben wir

$$\begin{aligned} P_x[N_x \geq k + 1] &= P_x[\tilde{H}_x^{k+1} < \infty] \\ &= P_x[\tilde{H}_x^k < \infty \cap S_x^{k+1} < \infty] \\ &= P_x[S_x^{k+1} < \infty | \tilde{H}_x^k < \infty] P_x[\tilde{H}_x^k < \infty] \\ &= f_x P_x[\tilde{H}_x^k < \infty], \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

wo wir für die letzte Gleichheit das Lemma 2.4.6 benutzt haben. Wenn $f_x < 1$, gilt die erste Aussage in (2.4.6) durch Induktion. Sonst, wenn $f_x = 1$, dann folgt von (2.4.7) für alle $k \in \mathbb{N}$, dass

$$P_x[N_x \geq k] = P_x[N_x \geq k - 1] = \dots = P_x[N_x \geq 0] = 1, \quad (2.4.8)$$

und so $P_x[N_x = \infty] = 1$. Aus (2.4.6) sehen wir dass $N_x < \infty$ P_x -f.s. wenn $f_x < 1$. Weiter beobachten wir dass

$$E_x[N_x] = E_x\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\{X_n = x\}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{xx}^n. \quad (2.4.9)$$

Mit Hilfe dieser Aussage ist der Beweis vollständig. \square

LEMMA 2.4.8. *Sei $r_{xy} = P_x[\tilde{H}_y < \infty]$. Dann gilt*

- (i) $P_x[\tilde{H}_y^n < \infty] = r_{xy} r_{yy}^{n-1}$, $n \geq 1$.
- (ii) Wenn y transient ist, dann $E_x[N_y] = \frac{r_{xy}}{1 - r_{yy}} = \frac{r_{xy}}{1 - f_y} < \infty$.

BEWEIS. (i) Für $n = 1$ ist das die Definition. Für $n > 1$, mit Hilfe der starken Markoveigenschaft,

$$P_x[\tilde{H}_y^n < \infty] = P_x[\tilde{H}_y^{n-1} < \infty \cap \tilde{H}_y \circ \theta_{\tilde{H}_y^{n-1}} < \infty] = r_{yy} P_x[\tilde{H}_y^{n-1} < \infty] = r_{xy} r_{yy}^{n-1}, \quad (2.4.10)$$

per Induktion.

(ii) Wir haben

$$\begin{aligned} E_x[N_y] &= \sum_{n \geq 1} P_x[N_y \geq n] = \sum_{n \geq 1} P_x[\tilde{H}_y^n < \infty] \\ &= \sum_{n \geq 1} r_{xy} r_{yy}^{n-1} = \frac{r_{xy}}{1 - r_{yy}}, \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

und (ii) folgt. \square

KOROLLAR 2.4.9. *Wenn S endlich ist, so ist mindestens ein $y \in S$ rekurrent.*

BEWEIS. Nehme an, dass alle $y \in S$ transient sind. Für beliebige $x \in S$ haben wir mit Hilfe des letzten Lemma

$$E_x[\sum_{y \in S} N_y] = \sum_{y \in S} \frac{r_{xy}}{1 - f_y} < \infty, \quad (2.4.12)$$

weil S endlich ist. Andererseits,

$$\sum_{y \in S} N_y = \sum_{y \in S} \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}\{X_n = y\} = \sum_{n \geq 0} 1 = \infty, \quad (2.4.13)$$

was zum Widerspruch führt. \square

SATZ 2.4.10. *Es seien $x, y \in S$ mit $x \rightsquigarrow y$. Falls x rekurrent ist, so gilt auch $y \rightsquigarrow x$, und y ist dann ebenfalls rekurrent.*

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass $r_{yx} = 1$. Von $x \rightsquigarrow y$ folgt die Existenz der kleinsten Zahl $k \geq 1$ mit $p_{xy}^k > 0$. Dann gilt

$$0 < p_{x,y}^k = \sum_{x_1, \dots, x_{k-1} \in S} p_{x,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{k-2},x_{k-1}} p_{x_{k-1},y}. \quad (2.4.14)$$

Die Minimalität von k bedeutet, dass für gewisse $x_1, \dots, x_{k-1} \neq x, y$ die Ungleichung $p_{x,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{k-2},x_{k-1}} p_{x_{k-1},y} > 0$ gilt. Der Zustand x ist rekurrent, deswegen

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - f_x = P_x[\tilde{H}_x = \infty] \geq P_x[X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}, X_k = y, \tilde{H}_x \circ \theta_k = \infty] \\ &= \underbrace{p_{x,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{k-2},x_{k-1}} p_{x_{k-1},y}}_{>0} \underbrace{P_y[\tilde{H}_x = \infty]}_{=1-r_{yx}}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Es folgt, dass $r_{yx} = 1$ und deswegen $y \rightsquigarrow x$.

Mit Hilfe der letzten Aussage können wir $\ell > 0$ finden, sodass $p_{yx}^\ell > 0$. Dann gilt für alle $n \geq 0$, $p_{yy}^{k+\ell+n} \geq p_{yx}^\ell p_{xx}^n p_{xy}^k$, und deswegen

$$\sum_{n \geq k+\ell} p_{yy}^n \geq \underbrace{[p_{xy}^k p_{yx}^\ell]^{-1}}_{>0} \sum_{n \geq 0} p_{xx}^n = \infty. \quad (2.4.16)$$

Aus Satz 2.4.7 sehen wir, dass y rekurrent ist. \square

Rekurrenz und Transienz sind Klasseigenschaften:

KOROLLAR 2.4.11. *Es seien $x, y \in S$ mit $x \leftrightarrow y$. Dann ist x genau dann rekurrent, wenn y es ist.*

Also können und werden wir in Zukunft auch von rekurrenten bzw. transienten Klassen sprechen und bei Irreduzibilität von rekurrenten bzw. transienten Markovketten.

BEMERKUNG 2.4.12. Mit Hilfe des Korollars können wir den Zustandsraum als disjunkte Vereinigung

$$S = T \cup R_1 \cup R_2 \cup \dots \quad (2.4.17)$$

schreiben, wobei T die Menge aller transienten Zustände ist, und R_i rekurrente Äquivalenzklassen sind.

Man sieht auch dass jede rekurrente Klasse zwangsläufig abgeschlossen ist, und deswegen

$$x \in R_i \implies P_x[X_n \in R_i, n \geq 0] = 1. \quad (2.4.18)$$

Insbesondere ist die Einschränkung von \mathcal{P} auf eine rekurrente Klasse (siehe die Bemerkung nach Definition 2.4.3) wieder eine stochastische Matrix, die dann natürlich auch irreduzibel ist. Daher lassen sich also die einzelnen rekurrenten Klassen getrennt diskutieren.

Andererseits, wenn der Prozess X in T startet, dann kann er für immer in T bleiben, oder er kann in eine rekurrente Klasse R_i eintreten, die er dann nie verlässt, wie es aus der starken Markoveigenschaft und (2.4.18) folgt. Insbesondere kann T abgeschlossen sein, aber auch nicht. \diamond

BEMERKUNG 2.4.13. Die Aussage $r_{xy} = 1$ im Beweis des Satzes 2.4.10 bedeutet, dass die Markovkette mit Sicherheit alle Zustände in der Klasse von x besucht, falls x rekurrent ist.

BEMERKUNG 2.4.14. Mit Hilfe des Korollars 2.4.9 kann man einfach sehen, dass wenn S endlich und \mathcal{P} irreduzibel ist, dann besteht S genau aus einer rekurrenten Äquivalenzklasse.

Das Kriterium aus Satz 2.4.7 kann man benutzen, um beispielsweise die Rekurrenz der d -dimensionalen Irrfahrt aus Beispiel 2.2.3 zu entscheiden:

SATZ 2.4.15. *Die d -dimensionale symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d ist rekurrent für $d \in \{1, 2\}$ und transient für $d \geq 3$.*

BEWEISSKIZZE. Wegen der Verschiebungsinvarianz genügt es, die Divergenz bzw. Konvergenz der Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_{0,0}^n$ zu untersuchen. Wir sind in der glücklichen Lage, den Wert von $p_{0,0}^n$ ausrechnen zu können. Natürlich ist immer $p_{0,0}^{2k-1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

In $d = 1$ ist leicht zu sehen, dass $p_{0,0}^{2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und Stirlings Formel zeigt, dass $p_{0,0}^{2k} \sim (\pi k)^{-1/2}$ für $k \rightarrow \infty$. Also ist $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_{0,0}^n = \infty$ für $d = 1$.

In $d = 2$ schreiben wir $X_n = (X_n^1, X_n^2)$ für die beiden Komponenten und nutzen die Beobachtung aus, dass die beiden Folgen $(X_n^1 - X_n^2)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(X_n^1 + X_n^2)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zwei unabhängige eindimensionale symmetrische Irrfahrten auf \mathbb{Z} sind. Folglich ist $p_{0,0}^{2k} = \left(\binom{2k}{k} 2^{-2k} \right)^2$, und wie oben sieht man, dass dies sich wie $\frac{1}{\pi k}$ verhält, also ebenfalls nicht summierbar ist.

Den Fall $d \geq 3$ kann man auf den Grenzfall $d = 3$ zurück führen. Im Fall $d = 3$ stellt man den Wert von $p_{0,0}^{2k}$ mit Hilfe einer Doppelsumme dar (nach einer Aufspaltung, wieviele Schritte jeweils in die drei Dimensionsrichtungen geschehen),

$$\begin{aligned} p_{0,0}^{2k} &= \sum_{k_1, k_2, k_3 \geq 0: k_1 + k_2 + k_3 = k} \binom{2k}{k_1 \ k_1 \ k_2 \ k_2 \ k_3 \ k_3} \left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right)^{2k} \\ &= \sum_{k_1, k_2, k_3 \geq 0: k_1 + k_2 + k_3 = k} \frac{(2k)!}{(k_1!)^2 (k_2!)^2 (k_3!)^2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right)^{2k}, \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

und schätzt diese mit einiger Arbeit geeignet ab, bis man sieht, dass $p_{0,0}^{2k}$ von der Ordnung $k^{-3/2}$ ist. (Für $d \geq 4$, hat man $p_{0,0}^{2k} \sim ck^{-d/2}$). \square

5. Gleichgewichtsverteilungen

Im Allgemeinen hängt die Verteilung einer Markovkette zu einem gegebenen Zeitpunkt auf sehr komplizierte Weise ab von der Startverteilung (und natürlich von dem Zeitpunkt). Oft gibt es aber für eine gegebene Übergangsmatrix spezielle Verteilungen, so dass die mit dieser Verteilung gestartete Kette zu jedem Zeitpunkt dieselbe Verteilung besitzt, nämlich diese Startverteilung. Man sagt, die Kette sei dann *im Gleichgewicht* bzw. sie sei *stationär*.

Wie bisher sei S eine höchstens abzählbare Menge und P eine stochastische Matrix auf S . Wir wollen jede Abbildung $\nu: S \rightarrow [0, \infty)$ ein *Maß* nennen und erinnern uns, dass ein Maß ν eine *Verteilung* heißt, falls $\sum_{x \in S} \nu(x) = 1$ gilt. Außerdem erinnern wir uns, dass νP das Matrixprodukt $(\nu P)(y) = \sum_{x \in S} \nu(x) p_{x,y}$ bezeichnet.

DEFINITION 2.5.1 (invariantes Maß, Gleichgewichtsverteilung). Ein Maß ν heißt *invariant* (oder *stationär*) für P , falls $\nu P = \nu$ gilt, d. h. falls ν ein (nichtnegativer) Links-Eigenvektor von P zum Eigenwert 1 ist. Falls ν eine Verteilung und invariant ist, nennt man ν auch eine *Gleichgewichtsverteilung* für P .

BEMERKUNG 2.5.2. (a) Wenn S endlich ist, kann jedes invariante Maß zu einer Gleichgewichtsverteilung normiert werden.

(b) Die Frage, ob P ein invariantes Maß besitzt, ist *a priori* nicht leicht zu beantworten. Man muss im Prinzip das Gleichungssystem $\nu P = \nu$ lösen und prüfen, ob es eine nichtnegative Lösung ν gibt.

(c) Offensichtlich ist ein für P -invariantes Maß auch für jede Potenz von P invariant. Insbesondere, wenn ν eine Gleichgewichtsverteilung ist, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $y \in S$:

$$P_\nu(X_n = y) = \sum_{x \in S} \nu(x) p_{x,y}^n = \nu(y),$$

d. h. die mit Verteilung ν gestartete Kette hat zu jedem Zeitpunkt die selbe Verteilung ν . Diese Aussage kann man noch leicht erweitern: ν ist genau dann invariant, wenn (für die kanonische Markovkette),

$$\theta_n \circ P_\nu = P_\nu, \quad \text{für alle } n \geq 0. \quad (2.5.1)$$

In der Tat, wenn (2.5.1) gilt, dann

$$\begin{aligned}\nu(y) &= P_\nu[X_0 = y] \stackrel{(2.5.1)}{=} (\theta_1 \circ P_\nu)[X_0 = y] = P_\nu[X \circ \theta_1 = y] \\ &= P_\nu[X_1 = y] = \sum_{x \in S} \nu(x) p_{xy},\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

d.h. $\nu P = \nu$ und ν ist invariant. Andererseits, wenn $\nu P = \nu$, dann haben wir für jedes $A \in \mathcal{F}$,

$$(\theta_1 \circ P_\nu)[A] = E_\nu[\mathbf{1}_A \circ \theta_1] = E_\nu[E_\nu[\mathbf{1}_A \circ \theta_1 | \mathcal{F}_1]] = E_\nu[P_{X_1}[A]],\tag{2.5.3}$$

mit Hilfe der Markoveigenschaft. Die rechte Seite kann man weiter umschreiben:

$$= \sum_{x \in S} \sum_{y \in S} \nu(x) p_{xy} P_y[A] = \sum_{y \in S} \nu(y) P_y[A] = P_\nu[A],\tag{2.5.4}$$

und die Behauptung (2.5.1) folgt. \diamond

Um die Terminologie 'Gleichgewichtsverteilung' besser zu begründen, zeigen wir das folgende Lemma, von dem folgt dass wenn die Verteilung einer Markovkette mit endlichem Zustandsraum konvergiert, dann konvergiert sie gegen die Gleichgewichtsverteilung.

LEMMA 2.5.3. *Sei S endlich und nehme an, dass für ein $x \in S$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{xy}^n = \nu(y), \quad \text{für alle } y \in S.\tag{2.5.5}$$

Dann ist ν eine Gleichgewichtsverteilung.

BEWEIS. Offensichtlich, $\nu(y) > 0$ und

$$\sum_{y \in S} \nu(y) = \sum_{y \in S} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{xy}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in S} p_{xy}^n = 1,\tag{2.5.6}$$

d.h. ν ist eine Verteilung. Weiter

$$\nu(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{xy}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{z \in S} p_{xz}^{n-1} p_{zy} = \sum_{z \in S} p_{zy} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{xz}^{n-1} = \sum_{z \in S} \nu(z) p_{zy},\tag{2.5.7}$$

d.h. ν ist invariant. Das Austauschen der Summen und Grenzwerte ist erlaubt, weil S endlich ist. \square

Wir zeigen jetzt, dass immer mindestens ein invariantes Maß existiert. Wir definieren für beliebiges $x \in S$ das Maß n_x durch

$$n_x(y) = E_x \left[\sum_{n=1}^{\tilde{H}_x} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}} \right].$$

In Worten: $n_x(y)$ ist die erwartete Zahl der Besuche in y für eine in x gestartete Markovkette, die betrachtet wird bis zur ersten Rückkehr zum Startpunkt x .

SATZ 2.5.4. *Sei x ein rekurrenter Zustand von P . Dann gilt*

(a) $n_x(x) = 1$.

(b) n_x ist ein invariantes Maß für P .

(c) $n_x(y) \in (0, \infty)$ für alle $y \leftrightarrow x$ und $n_x(y) = 0$ für $y \not\leftrightarrow x$.

BEWEIS. (a) ist offensichtlich aus der Definition. Um (b) zu zeigen, schreiben wir zunächst

$$\begin{aligned} n_x(y) &= E_x \sum_{n=1}^{\tilde{H}_x} \mathbf{1}\{X_n = y\} = E_x \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\{X_n = y, n \leq \tilde{H}_x\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \in S} P_x[X_n = y, X_{n-1} = z, n \leq \tilde{H}_x]. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Man beachte, dass das Ereignis $\{n \leq \tilde{H}_x\} = \{\tilde{H}_x \leq n - 1\}^c$ in \mathcal{F}_{n-1} liegt. Also können wir die Markoveigenschaft zum Zeitpunkt $n - 1$ anwenden:

$$\begin{aligned} n_x(y) &= \sum_{z \in S} p_{zy} \sum_{n=1}^{\infty} P_x[X_{n-1} = z, n \leq \tilde{H}_x] \\ &= \sum_{z \in S} p_{zy} E_x \sum_{n=0}^{\tilde{H}_x-1} \mathbf{1}\{X_n = z\} = \sum_{z \in S} p_{zy} E_x \sum_{n=1}^{\tilde{H}_x} \mathbf{1}\{X_n = z\} = \sum_{z \in S} p_{zy} n_x(y), \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

wobei die vorletzte Gleichung von $X_0 = X_{\tilde{H}_x} = x$ folgt.

(c) Wenn $y \leftrightarrow x$ und x rekurrent ist, dann können wir mit Hilfe des Satzes 2.4.10 Konstanten k und l finden sodass $p_{xy}^k > 0$ und $p_{yx}^l > 0$. Auf Grund von (b) ist n_x auch invariant für P^n für jedes $n \in \mathbb{N}$, also folgt insbesondere

$$\begin{aligned} n_x(y) &\stackrel{(b)}{=} (n_x P^k)(y) \geq n_x(x) p_{xy}(k) > 0, \\ 1 &= n_x(x) = (n_x P^l)(x) \geq n_x(y) p_{yx}^l, \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

und die erste Aussage von (c) folgt. Die zweite Aussage ist trivial. \square

Wir betrachten jetzt die Eindeutigkeit der invarianten Maße.

LEMMA 2.5.5. Sei ν ein invariantes Maß mit $\nu(x) = 1$. Dann

$$\nu(y) \geq n_x(y) \quad \text{für alle } y \in S. \quad (2.5.11)$$

BEWEIS. Sei ν ein invariantes Maß mit $\nu(x) = 1$. Dann haben wir für $z \neq x$

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \sum_{y_1 \in S} \nu(y_1) p_{y_1 z} = \sum_{y_1 \neq x} \nu(y_1) p_{y_1 z} + p_{xz} \\ &= \sum_{y_1 \neq x} \sum_{y_2 \neq x} \nu(y_2) p_{y_2 y_1} p_{y_1 z} + \sum_{y_1 \neq x} p_{x y_1} p_{y_1 z} + p_{xz}, \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

In dieser Weise fahren wir iterativ fort und erhalten für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \sum_{y_1, \dots, y_k \neq x} \nu(y_k) p_{y_k y_{k-1}} \cdots p_{y_1 z} \\ &+ \sum_{y_1, \dots, y_{k-1} \neq x} p_{x y_{k-1}} \cdots p_{y_1 z} + \sum_{y_1, \dots, y_{k-2} \neq x} p_{x y_{k-2}} \cdots p_{y_1 z} + \cdots + p_{xz}. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Die erste Summe ist nichtnegativ und kann ausgelassen werden. Die anderen Summanden schreiben wir um:

$$\begin{aligned}\nu(z) &\geq P_x[X_k = z, \tilde{H}_x \geq k] + P_x[X_{k-1} = z, \tilde{H}_x \geq k-1] + \cdots + P_x[X_1 = z] \\ &= E_x \sum_{l=1}^k \mathbf{1}\{X_l = z, l \leq \tilde{H}_x\}.\end{aligned}\tag{2.5.14}$$

Nun lassen wir $k \rightarrow \infty$ und erhalten auf der rechten Seite $n_x(z)$ als Grenzwert. \square

KOROLLAR 2.5.6. (a) Sei ν wie im Lemma 2.5.5 und sei x ein rekurrenter Zustand. Dann $\nu(y) = n_x(y)$ für alle $y \leftrightarrow x$.

(b) Wenn P eine irreduzible stochastische Matrix ist, dann ist n_x das einzige invariante Maß, das die Normierung $n_x(x) = 1$ erfüllt.

BEMERKUNG 2.5.7. Die Bedingung $\nu P = \nu$ für Invarianz des Maßes ν ist linear. Deswegen ist jedes Vielfache eines invarianten Maßes ebenfalls ein invariantes Maß. Nach Punkt (b) des Korollars sind also alle invarianten Maße einer irreduziblen Markovkette Vielfache von n_x .

BEWEIS. (a) Von Rekurrenz von x und Satz 2.5.4 folgt, dass n_x invariant ist. Das Maß $\lambda = \nu - n_x$ ist dann ebenso invariant und erfüllt $\lambda \geq 0$ und $\lambda(x) = 0$. Folglich

$$0 = \lambda(x) = \sum_{y \in S} \lambda(y) p_{yx}^n.\tag{2.5.15}$$

Wenn $y \leftrightarrow x$, dann $p_{yx}^n > 0$ für ein $n \geq 1$, und deswegen $\lambda(y) = 0$.

(b) folgt von (a) weil P ist genau dann irreduzibel wenn $x \leftrightarrow y$ für alle $x, y \in S$. \square

Bis jetzt haben wir die Existenz und Eindeutigkeit der invarianten Maßen betrachtet. Der folgende Satz 2.5.9 klärt die Frage nach der Existenz von Gleichgewichtsverteilungen (nicht nur Maßen) und ist einer der wichtigsten Sätze über Markovketten. Die Antwort ist eng verknüpft mit der *erwarteten Rückkehrzeit* zu einem Startpunkt $x \in S$:

$$\mu_x = E_x(\tilde{H}_x) = \sum_{n \geq 1} n P_x(\tilde{H}_x = n) + \infty P_x(\tilde{H}_x = \infty) \in [0, \infty].$$

(Wir benutzen die Konvention $\infty 0 = 0$.) Falls $\mu_x < \infty$ (d.h. falls die Irrfahrt nach endlicher erwarteter Zeit zu ihrem Startpunkt x zurück kehrt), dann ist natürlich $P_x(\tilde{H}_x < \infty) = 1$, die Irrfahrt also rekurrent. Mit Hilfe von μ_x können wir also rekurrente Zustände feiner unterteilen:

DEFINITION 2.5.8 (positive und Nullrekurrenz). Ein Zustand $x \in S$ heißt *positiv rekurrent*, falls $\mu_x < \infty$, und *nullrekurrent*, falls x rekurrent, aber nicht positiv rekurrent ist.

Der folgende Satz zeigt insbesondere, dass die Existenz von Gleichgewichtsverteilungen äquivalent zur positiven Rekurrenz ist:

SATZ 2.5.9. *Sei P irreduzible stochastische Matrix. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.*

- (i) *Es gibt einen positiv rekurrenten Zustand $x \in S$.*
- (ii) *Alle Zustände in S sind positiv rekurrent.*
- (iii) *Es existiert eine Gleichgewichtsverteilung.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die Gleichgewichtsverteilung π eindeutig bestimmt und durch $\pi(y) = \frac{n_x(y)}{\mu_x}$, $y \in S$, gegeben.

BEMERKUNG 2.5.10. Der Satz zeigt, dass für ein gegebenes $y \in S$, die Quantität $n_x(y)/\mu_x$ unabhängig von x und gleich $1/\mu_y$ ist.

BEWEIS. Die Richtung (ii) \implies (i) ist trivial. Wir zeigen nun (i) \implies (iii). Sei $x \in S$ mit $\mu_x < \infty$, dann ist wegen Irreduzibilität die Kette rekurrent. Nach Satz 2.5.4 ist n_x ein invariantes Maß. Man sieht, dass

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S} n_x(y) &= \sum_{y \in S} E_x \left[\sum_{n=1}^{\tilde{H}_x} \mathbf{1}\{X_n = y\} \right] \\ &= E_x \left[\sum_{n=1}^{\tilde{H}_x} \sum_{y \in S} \mathbf{1}\{X_n = y\} \right] = E_x(\tilde{H}_x) = \mu_x < \infty. \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

Also kann man n_x zu einer Gleichgewichtsverteilung normieren, d.h. (iii) folgt.

Nun beweisen wir (iii) \implies (ii). Sei $x \in S$ ein beliebiger Zustand und π eine Gleichgewichtsverteilung, die existiert nach (iii). Weil π eine Gleichgewichtsverteilung ist, existiert $y \in S$ mit $\pi(y) > 0$. Dank der Irreduzibilität, gibt es n mit $p_{yx}^n > 0$. Es folgt dass

$$\pi(x) = \sum_{z \in S} \pi(z) p_{zx}^n > \pi(y) p_{yx}^n > 0. \tag{2.5.17}$$

Wir definieren $\lambda(z) = \pi(z)/\pi(x)$, $z \in S$. λ ist ein invariantes Maß mit $\lambda(x) = 1$. Nach Lemma 2.5.5, $\lambda \geq n_x$. Wie in (2.5.16) sieht man, dass

$$\mu_x = \sum_{y \in S} n_x(y) \leq \sum_{y \in S} \lambda(y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in S} \pi(y) = \frac{1}{\pi(x)} < \infty. \tag{2.5.18}$$

Also ist (ii) gezeigt.

Die Eindeutigkeit von π folgt von Korollar 2.5.6: x ist rekurrent und deswegen ist die Ungleichung in (2.5.18) eine Gleichung. \square

BEISPIEL 2.5.11. (a) Die eindimensionale einfache Irrfahrt (siehe Beispiel 2.2.4) besitzt das konstante Maß $\pi \equiv 1$ als ein invariantes Maß. Die Irrfahrt ist rekurrent, deswegen sind alle invariante Maße Vielfachen von π und lassen sich nicht

normieren. Die Irrfahrt besitzt also keine Gleichgewichtsverteilung und ist deswegen nullrekurrent.

(b) Einfache Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$ ist transient (siehe Satz 2.4.15). Das Maß $\pi \equiv 1$ ist invariant. Das bedeutet, dass Existenz des invarianten Maßes nicht die Rekurrenz impliziert.

(c) Sei X die Irrfahrt auf \mathbb{Z} mit Drift, $p_{x,x+1} = 1 - p_{x,x-1} = p \in (0, \frac{1}{2})$. Um ein invariantes Maß zu finden, lösen wir das System $\pi(x) = p\pi(x-1) + (1-p)\pi(x+1)$. Die Lösung ist

$$\pi(x) = A + B\left(\frac{p}{1-p}\right)^x, \quad A \geq 0, B \geq 0. \quad (2.5.19)$$

Die invarianten Maße bilden also eine Zweiparametermenge, das invariante Maß ist nicht eindeutig modulo Normierung. Diese Irrfahrt ist also transient.

(d) Es gibt transiente Markovketten die nur $\pi \equiv 0$ als invariantes Maß besitzen, siehe Übungsaufgaben. \diamond

BEMERKUNG 2.5.12 (Klassifikation). Wir fassen die obige Beispiele zusammen. Eine irreduzible Markovkette kann transient, nullrekurrent oder rekurrent sein. Die Tabelle gibt Anzahl der invarianten Maße und Gleichgewichtsverteilungen für diese drei Fälle. “(n.N)” steht für “nach Normierung”.

Markovkette	pos. rekurrent	nullrekurrent	transient
inv. Maße	1 (n.N)	1 (n.N)	0 (nur $\equiv 0$), 1 (n.N.), ∞
GGVerteilungen	1	0	0

In den meisten Fällen, selbst bei endlichem S , kann man die Gleichgewichtsverteilung nicht sinnvoll explizit angeben, die Formel wäre zu kompliziert. Ein schönes Gegenbeispiel ist die μ -Irrfahrt auf einer Gruppe, siehe Beispiel 2.2.2:

LEMMA 2.5.13. *Es seien G eine endliche Gruppe und μ eine Verteilung auf G . Dann ist die Gleichverteilung auf G eine Gleichgewichtsverteilung der μ -Irrfahrt. Falls die Irrfahrt irreduzibel ist, so ist sie auch die einzige Gleichgewichtsverteilung.*

BEWEIS. Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung $g \mapsto g^{-1}h$ bijektiv auf G , und es gilt

$$\sum_{g \in G} p_{g,h} = \sum_{g \in G} \mu(g^{-1}h) = \sum_{g' \in G} \mu(g') = 1.$$

\square

BEISPIEL 2.5.14 (Bernoulli-Laplace-Diffusionsmodell). Noch ein Beispiel, in dem die invariante Verteilung explizit angegeben werden kann, ist das Diffusionsmodell aus Beispiel 2.2.9. Hier ist die hypergeometrische Verteilung $\nu(i) = \binom{s}{i} \binom{w}{w-i} / \binom{s+w}{w}$ invariant auf $\{0, 1, \dots, w\}$. \diamond

6. Konvergenz gegen die Gleichgewichtsverteilung

Wir betrachten hier eine irreduzible Markovkette X mit Übergangsmatrix P und Gleichverteilung π . Nach Satz 2.5.9 sind alle Zustände in S positiv rekurrent. Wir untersuchen jetzt das asymptotische Verhalten der Markovkette X .

LEMMA 2.6.1. *Sei $y \in S$ und ν eine Verteilung auf S . Dann*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i = y\} = \pi(y), \quad P_\nu\text{-f.s.} \quad (2.6.1)$$

BEWEIS. Mit Hilfe der Notation von (2.4.3),

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i = y\} = \frac{1}{n} \max\{k \geq 0 : \tilde{H}_y^k \leq n\}. \quad (2.6.2)$$

Folglich ist (2.6.1) äquivalent (Übung!) mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \tilde{H}_y^k = \frac{1}{\pi(y)}, \quad P_\nu\text{-f.s.} \quad (2.6.3)$$

Allerdings, $\frac{1}{k} \tilde{H}_y^k = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k S_y^l$, wo S_y^l in (2.4.4) definiert ist. Nach Lemma 2.4.6 ist die Folge $(S_y^i)_{i \geq 2}$ u.i.v., und $P_\nu[S_y^i = k] = P_y[\tilde{H}_y = k]$, $i \geq 2$. Nach dem (starken) Gesetz großer Zahlen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \tilde{H}_y^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k S_y^l = E_\nu[S_y^i] = E_y[\tilde{H}_y] = \mu_y = \frac{1}{\pi(y)}, \quad (2.6.4)$$

was zeigt (2.6.3). □

BEMERKUNG 2.6.2 (Fluktuationen von $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i = y\}$). Die Methode des Beweises von Lemma 2.6.1 kann man (mit zusätzlicher Annahme $E_y[(\tilde{H}_y)^2] < \infty$) benutzen um einen Zentralen Grenzwertsatz zu zeigen, nämlich

$$\sqrt{n} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i = y\}}{n} - \pi(y) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \sigma_y), \quad (2.6.5)$$

in Verteilung unter P_ν , wobei $\sigma_y = \pi(y)^{3/2} \text{Var}_y(\tilde{H}_y)$.

KOROLLAR 2.6.3 (Ergodensatz). *Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei $\int f d\pi := \sum_{z \in S} f(z)\pi(z)$. Dann*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) = \int f d\pi. \quad P_\nu\text{-f.s.} \quad (2.6.6)$$

BEWEIS. Wir schreiben,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) = \sum_{y \in S} f(y) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i = y\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in S} f(y)\pi(y), \quad (2.6.7)$$

nach Lemma 2.6.1 und Satz von Lebesgue (Dominated convergence theorem). □

KOROLLAR 2.6.4 (Césaro-Konvergenz von p_{xy}^n). Für alle $x, y \in S$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p_{xy}^n = \pi(y). \quad (2.6.8)$$

BEWEIS. Es reicht $\nu = \delta_x$ zu setzen, E_x auf beiden Seiten von (2.6.1) anzuwenden. Behauptung folgt mit Hilfe des Satzes von Lebesgue. \square

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes (und eine der wichtigsten Eigenschaften von Markovketten) ist die Tatsache, dass man in vielen Fällen die Césaro-Konvergenz (2.6.8) durch die übliche Konvergenz ersetzen kann. Wir werden zeigen, dass jede irreduzible aperiodische und positiv rekurrente Markovkette bei divergierender Laufzeit gegen ihre Gleichgewichtsverteilung konvergiert. Hierbei nennen wir eine Markovkette bzw. ihre Übergangsmatrix P *aperiodisch*, wenn für jedes $x \in S$ die sogenannte *Periode von x* ,

$$d_x = \text{ggT}\{n \in \mathbb{N} : p_{x,x}^n > 0\},$$

gleich Eins ist.

Wir wollen uns im Folgenden auf aperiodische Markovketten beschränken, d. h. wir werden voraussetzen, dass $d_x = 1$ für jedes $x \in S$ gilt. Unser Hauptergebnis ist:

SATZ 2.6.5. *Es sei P irreduzibel, aperiodisch und positiv rekurrent mit Gleichgewichtsverteilung π . Dann gilt für alle $x, y \in S$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{x,y}^n = \pi(y).$$

Als Übungsaufgabe zeigt man leicht, dass auch für jede Startverteilung ν und jedes $y \in S$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} P_\nu(X_n = y) = \pi(y)$.

Als Vorbereitung des Beweises von Satz 2.6.5 charakterisieren wir die Aperiodizität:

LEMMA 2.6.6. *P ist genau dann irreduzibel und aperiodisch, wenn für jede $x, y \in S$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $p_{x,y}^n > 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt.*

BEWEIS. ³ Es reicht zu zeigen dass für jedes $y \in S$

$$p_{yy}^n > 0 \quad \text{für alle } n \geq n_0(y). \quad (2.6.9)$$

Die Aussage des Lemmas folgt dann mit Hilfe von (2.1.15). Sei $\mathcal{T}(y) = \{n \geq 1 : p_{yy}^n > 0\}$. Wir zeigen zuerst, dass

$$\text{es gibt } m, l \in \mathcal{T}(y) \text{ mit } m - l = 1. \quad (2.6.10)$$

In der Tat, sei r die kleinste natürliche Zahl, die eine Linearkombination (mit ganzzahligen Koeffizienten) der Elementen von $\mathcal{T}(y)$ ist. Offensichtlich, $\text{ggT } \mathcal{T}(y) \mid$

³Dieser Beweis ist länglich und benutzt ausschließlich zahlentheoretische Argumente, und wird daher in der Vorlesung weggelassen.

r und daher $\text{ggT } \mathcal{T}(x) \leq r$. Andererseits, $r \mid \mathcal{T}(y)$. Um das zu sehen nehme an, dass es gibt $s \in \mathcal{T}(y)$ mit $r \nmid s$. Dann $y = kr + j$ für ganze Zahlen $k \geq 0$ und $1 \leq j < r$. Dann aber ist $j = s - kr$ eine Linearkombination der Elemente von $\mathcal{T}(y)$ und $0 < m < r$, was widerspricht der Minimalität des r . Wir sehen also dass $r = \text{ggT } \mathcal{T}(y) = 1$. Mit Die Aussage (2.6.10) ist dann offensichtlich: wenn $r = c_1 n_1 + \dots + c_q n_q$, mit $c_i \in \mathbb{Z}$ und $n_i \in \mathcal{T}(y)$, es reicht zu wählen

$$l = |c_1|n_1 + \dots + |c_q|n_q, \quad m = l + r = l + 1, \quad (2.6.11)$$

und beachten das m, l beide Linearkombinationen der Elemente von $\mathcal{T}(y)$ mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten sind, und daher $m, l \in \mathcal{T}(y)$ mit Hilfe von (2.1.15).

Weiter zeigen wir dass

$$\text{wenn } k \geq l^2, k \in \mathbb{N}, \text{ dann } k = am + bl \text{ für } a, b \in \mathbb{N}_0. \quad (2.6.12)$$

In der Tat, sei $k = ql + s$, $q \geq l$, $s \in \{0, \dots, l-1\}$. Dann $k = ql + s = ql + s(m-l) = (q-s)l + sm$, und (2.6.12) folgt. Das Lemma ist dann Folge von (2.6.12) und einer Iteration von (2.1.15), man wählt $n_0(y) = l^2$. \square

BEWEIS VON SATZ 2.6.5. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix P und gestartet in x , d.h. mit Verteilung P_x . Wir wollen also zeigen, dass $P_x(X_n = y)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $\pi(y)$ konvergiert.

Wir benutzen ein sogenanntes *Kopplungsargument*, das die Untersuchung der betrachteten Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ koppelt mit einer weiteren, unabhängigen Markovkette $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit der selben Übergangsmatrix, wobei allerdings $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit der Gleichgewichtsverteilung π gestartet wird. Daraus folgt, dass die Verteilung von Y_n zu jedem festen Zeitpunkt n exakt gleich π ist, siehe Bemerkung 2.5.2(c). Unsere Hauptaufgabe besteht nun darin zu beweisen, dass die erste Kette irgendwann einmal die zweite trifft, d.h. dass sich beide Ketten jemals im selben Zustand befinden. Mit anderen Worten, wir werden zeigen, dass die *Treffzeit*

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = Y_n\}$$

mit Sicherheit endlich ist. Dann definieren wir die gekoppelte Kette $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$Z_n = \begin{cases} X_n & \text{für } n \leq T, \\ Y_n & \text{für } n > T, \end{cases}$$

und zeigen, dass $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ebenfalls eine Markovkette mit Übergangsmatrix P gestartet in x ist. Danach ist der Beweis schnell beendet.

Wir kommen zu den Details. Als Erstes sieht man, dass die Paar-Markovkette $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Übergangsmatrix \hat{P} auf $S \times S$ mit $\hat{p}_{(x,y),(u,v)} = p_{x,u}p_{y,v}$ für alle $x, y, u, v \in S$ besitzt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $\hat{p}_{(x,y),(u,v)}^n = p_{x,u}^n p_{y,v}^n$, wovon man sich leicht überzeugt. Die Aperiodizität von \hat{P} zeigt man leicht als Übungsaufgabe mit Hilfe von Lemma 2.6.6 und (2.1.15). Da P die Gleichgewichtsverteilung π besitzt,

hat \hat{P} die Gleichgewichtsverteilung $\hat{\pi}$, die gegeben ist durch $\hat{\pi}(x, y) = \pi(x)\pi(y)$ für $x, y \in S$. Also ist \hat{P} insbesondere positiv rekurrent (siehe Satz 2.5.9).

Ab jetzt sei $X_0 = x$ fest. Die Markovkette $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $S \times S$ besitzt die Startverteilung $\hat{\nu}(u, v) = \delta_x(u)\pi(v)$, wobei $\delta_x(u)$ das Kroneckersymbol ist.

Nun argumentieren wir, dass die Treffzeit T mit Wahrscheinlichkeit Eins endlich ist. Für einen beliebigen Zustand $z \in S$ sei $H_{(z,z)}$ der erste Zeitpunkt, an dem die Kette $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ den Punkt (z, z) trifft. Offensichtlich ist $T \leq H_{(b,b)}$. Wegen der Rekurrenz von \hat{P} ist $H_{(b,b)}$ f.s. endlich, also auch T .

Nun beweisen wir, dass die oben definierte Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix P ist. Dazu reicht es nach Lemma 2.1.5(a) zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_0, \dots, x_n \in S$ gilt:

$$P_{\hat{\nu}}(Z_{[0,n]} = x_{[0,n]}) = \delta_x(x_0) \prod_{r=1}^n p_{x_{r-1}, x_r}. \quad (2.6.13)$$

Dies zeigen wir durch Aufspaltung nach allen Werten, die T annehmen kann:

$$\begin{aligned} P_{\hat{\nu}}(Z_{[0,n]} = x_{[0,n]}) &= \sum_{r=0}^n P_{\hat{\nu}}(Z_{[0,n]} = x_{[0,n]}, T = r) + P_{\hat{\nu}}(Z_{[0,n]} = x_{[0,n]}, T > n) \\ &= \sum_{r=0}^n P_{\hat{\nu}}(X_{[0,r]} = x_{[0,r]}, Y_{[r+1,n]} = x_{[r+1,n]}, Y_0 \neq x_0, \dots, Y_{r-1} \neq x_{r-1}, Y_r = x_r) \\ &\quad + P_{\hat{\nu}}(X_{[0,n]} = x_{[0,n]}, Y_0 \neq x_0, \dots, Y_n \neq x_n). \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

Nun nutzt man die Unabhängigkeit der Ketten $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sowie die Markoveigenschaft der Kette $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zum Zeitpunkt r bzw. n aus, um zu erhalten:

$$\begin{aligned} &P_{\hat{\nu}}(X_{[0,r]} = x_{[0,r]}, Y_{[r+1,n]} = x_{[r+1,n]}, Y_0 \neq x_0, \dots, Y_{r-1} \neq x_{r-1}, Y_r = x_r) \\ &= P_i(X_{[0,r]} = x_{[0,r]}) P_{\pi}(Y_{[r+1,n]} = x_{[r+1,n]} \mid Y_0 \neq x_0, \dots, Y_{r-1} \neq x_{r-1}, Y_r = x_r) \\ &\quad \times P_{\pi}(Y_0 \neq x_0, \dots, Y_{r-1} \neq x_{r-1}, Y_r = x_r) \\ &= \delta_i(x_0) \left(\prod_{j=1}^n p_{x_{j-1}, x_j} \right) P_{\pi}(Y_0 \neq x_0, \dots, Y_{r-1} \neq x_{r-1}, Y_r = x_r) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &P_{\hat{\nu}}(X_{[0,n]} = x_{[0,n]}, Y_0 \neq x_0, \dots, Y_n \neq x_n) \\ &= \delta_i(x_0) \left(\prod_{j=1}^n p_{x_{j-1}, x_j} \right) P_{\pi}(Y_0 \neq x_0, \dots, Y_n \neq x_n). \end{aligned}$$

Nun kombiniere man all diese Gleichungen und beachte, dass

$$\sum_{r=0}^n P_{\pi}(Y_0 \neq x_0, \dots, Y_{r-1} \neq x_{r-1}, Y_r = x_r) + P_{\pi}(Y_0 \neq x_0, \dots, Y_n \neq x_n) = 1,$$

um bei (2.6.13) anzukommen. Also ist $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix P .

Nun ist der Beweis von Satz 2.6.5 leicht zu beenden. Wir schreiben $p_{x,y}^n$ mit Hilfe von $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als

$$p_{x,y}^n = P_{\hat{\nu}}(Z_n = y) = P_{\hat{\nu}}(Z_n = y, T \leq n) + P_{\hat{\nu}}(Z_n = y, T > n)$$

und analog $\pi(y)$ als

$$\pi(y) = P_{\pi}(Y_n = y) = P_{\hat{\nu}}(Z_n = y, T \leq n) + P_{\hat{\nu}}(Y_n = y, T > n).$$

Somit folgt

$$|p_{x,y}^n - \pi(y)| \leq 2P_{\hat{\nu}}(T > n),$$

und dies konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen Null, da ja $P_{\hat{\nu}}(T < \infty) = 1$. \square

BEMERKUNG 2.6.7. (a) Falls die Markovkette X_n nicht aperiodisch ist, also wenn sie etwa die Periode $d > 1$ hat⁴, existieren, im Allgemeinen, $x, y, u, v \in S$ mit $\tilde{p}_{(x,y),(u,v)}^n = 0$ für alle n . Markovkette (X_n, Y_n) ist dann nicht irreduzibel und man kann den Satz 2.5.9 nicht anwenden. Um dies zu sehen, reicht es eine sehr einfache Markovkette mit $S = \{1, 2\}$ und $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zu betrachten.

(b) Das Problem mit den periodischen Markovketten kann man immer umgehen, indem man die sogenannte faule (lazy) Version der Kette betrachtet, nämlich, die Markovkette \bar{X}_n mit Übergangsmatrix $\bar{p}_{xy} = \frac{1}{2}\delta_{xy} + \frac{1}{2}p_{xy}$. Diese Markovkette ist offensichtlich aperiodisch, irreduzibel, wenn X ist, und besitzt die gleiche invarianten Maße und Gleichgewichtsverteilungen wie X .

(c) Wenn X eine Periode $d > 1$ hat, ist es einfach zu zeigen, dass man S als eine Partition $S = S_1 \cup \dots \cup S_d$ schreiben kann, wobei $p_{xy} > 0$ genau dann wenn $x \in S_i, y \in S_{i+1}, 1 \leq i < d$, oder $x \in S_d, y \in S_1$. Auf jedem S_i kann man dann eine Markovkette mit Übergangsmatrix $(p_{xy}^d)_{x,y \in S_i}$ betrachten, die aperiodisch ist. Diese Dekomposition von S heißt *zyklische Dekomposition*.

7. Exkursion in die lineare Algebra: Satz von Perron-Frobenius

Alle wichtigen Ergebnisse, die wir bisher gesehen haben, sind für beliebiges, höchstens abzählbares S gültig. Falls S endlich ist, folgen viele direkt von der linearen Algebra.

Z.B., um die Existenz der Gleichgewichtsverteilung zu zeigen reicht es zu beobachten, dass wenn P eine stochastische Matrix ist, dann ist $f(x) \equiv 1$ ein rechts-Eigenvektor von P zum Eigenwert 1. Daher besitzt P einen links-Eigenvektor zum Eigenwert 1 mit nicht-negativen Koordinaten, d.h. die Gleichgewichtsverteilung.

Um die Eindeutigkeit und die Konvergenz zu der Gleichgewichtsverteilung zu zeigen, braucht man einen der wichtigsten Sätze der linearen Algebra, den Satz von Perron-Frobenius

⁴Man kann leicht zeigen, dass die Periode eine Klasseneigenschaft ist, d.h. dass die Abbildung $y \mapsto d_y$ konstant auf den Klassen ist.

SATZ 2.7.1. Sei A eine $N \times N$ Matrix mit nicht-negativen Einträgen, und $\rho(A)$ der Spektralradius von A , $\rho(A) := \max\{|z| : z \in \text{Spec}(A)\}$. Dann

(a) $\rho(A)$ ist ein Eigenwert von A und der zugehörige (rechts- oder links-) Eigenvektor hat nicht-negative Einträge.

(b) Falls A irreduzibel ist (d.h. für alle $1 \leq i, j \leq N$ gibt es $n > 0$ sodass $A^n(i, j) > 0$), dann $\rho(A) > 0$, $\rho(A)$ ist einfacher Eigenwert und der zugehörige Eigenvektor hat positive Einträge.

(c) Falls A irreduzibel und aperiodisch (d.h. es gibt n mit $A^n(i, j) > 0$ für alle $1 \leq i, j \leq N$), dann ist $\rho(A)$ der einzige Eigenwert mit Betrag $\rho(A)$.

(d) Falls A stochastisch ist, dann $\rho(A) = 1$.

BEWEIS. Für Beweis, siehe z.B. [SC97], Section 1.2. □

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die Geschwindigkeit der Konvergenz im Satz 2.6.5 kontrollieren:

SATZ 2.7.2. Seien S endlich und P irreduzibel und aperiodisch. Dann konvergiert die zugehörige Markovkette X exponentiell zur Gleichgewichtsverteilung: Es gibt $c < \infty$ und $\lambda < 1$ sodass

$$|p_{xy}^n - \pi(y)| \leq c\lambda^n, \quad \text{für alle } x, y \in S. \quad (2.7.1)$$

BEWEIS. Nach Lemma 2.1.11, $p_{xy}^n = (\delta_x P^n)_y$. Sei $P = UJU^{-1}$ die Jordansche Dekomposition von P , wobei

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & J_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}. \quad (2.7.2)$$

und $|\lambda_i| < 1$. Als erste Zeile von U (resp. erste Spalte von U^{-1}) kann man π (resp.) $\mathbf{1}$ wählen. Dann $P^n = UJ^nU^{-1}$. Für jeden Jordanblock der Größe $k \times k$ zugehörig zu $|\lambda_i| < 1$ hat man

$$\max_{k,l} (J_i^n)_{m,l} \leq Q(n)\lambda^{n-k+1}, \quad (2.7.3)$$

wobei $Q(n)$ ein Polynom in n ist. Daher $(J^n)_{ij} \leq Q(n)\lambda^{n-k-1}$ wenn $(i, j) \neq (1, 1)$ mit $\lambda = \max\{|\lambda_i|\}$. Mit Hilfe dieser Aussage ist es einfach den Beweis zu beenden. □

8. Reversible Markovketten

Im Korollar 2.1.8 haben wir gesehen, dass für Markovketten die Vergangenheit und die Zukunft unabhängig sind gegeben Gegenwart. Intuitiv kann man also annehmen, dass Umkehrung der Zeitrichtung auch eine Markovkette geben sollte. Auf der anderen Seite haben wir im Satz 2.6.5 gesehen, dass Markovketten zur Gleichgewichtsverteilung konvergieren, und diese Eigenschaft offensichtlich asymmetrisch

in Zeitrichtung ist. Dies deutet die Möglichkeit an, dass man eine Markovkette *im Gleichgewicht* umkehren kann.

SATZ 2.8.1. Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine irreduzible Markovkette mit Übergangsmatrix P und mit Start- und Gleichgewichtsverteilung π . Für gegebenes N , sei $Y_n = X_{N-n}$. Dann ist $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix \hat{P} definiert durch

$$\pi(x)\hat{p}_{xy} = \pi(y)p_{yx}, \quad \text{für alle } x, y \in S. \quad (2.8.1)$$

\hat{P} ist ebenfalls irreduzibel und hat π als Gleichgewichtsverteilung.

BEWEIS. π ist invariant für P und daher $\sum_{y \in S} \hat{p}_{xy} = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in S} \pi(y)p_{yx} = 1$, d.h. \hat{P} ist stochastisch. π ist ebenfalls invariant für \hat{P} , weil $\sum_{x \in S} \pi(x)\hat{p}_{xy} = \sum_{x \in S} \pi(y)p_{yx} = \pi(y)$. Weiter, für $k \leq N$,

$$\begin{aligned} P[Y_{[0,k]} = x_{[0,k]}] &= P[X_N = x_0, \dots, X_{N-k} = x_k] \\ &= \pi(x_k)p_{x_k, x_{k-1}} \cdots p_{x_1, x_0} \\ &= \pi(x_0)\hat{p}_{x_0, x_1} \cdots \hat{p}_{x_{k-1}, x_k}, \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

und nach Satz 2.1.5 ist Y eine Markovkette mit Übergangsmatrix \hat{P} . Schlussendlich, weil P irreduzibel ist, gibt es für alle $x, y \in S$ ein n mit $p_{xy}^n > 0$. Dann aber $\hat{p}_{yx}^n > 0$ und \hat{P} ist auch irreduzibel. \square

Ein wichtiger Spezialfall sind die Markovketten die nach der Zeitumkehr die gleiche Verteilung haben wie vorher.

DEFINITION 2.8.2 (reversibel). Ein Maß π auf S heißt *reversibel* bezüglich der stochastischen Matrix P , falls gilt:

$$\pi(x)p_{xy} = \pi(y)p_{yx}, \quad \text{für alle } x, y \in S. \quad (2.8.3)$$

In diesem Fall nennen wir auch P reversibel. Die Bedingung (2.8.3) ist die sogenannte *detailed balance condition*.

Eine Markovkette heißt reversibel, falls sie ein reversibles Maß besitzt.

BEMERKUNG 2.8.3. (a) Es ist offensichtlich, dass jedes reversible Maß invariant ist. Im positiv rekurrenten Fall ist also die Gleichgewichtsverteilung der einzige Kandidat für eine reversible Verteilung. Allerdings sind bei weitem nicht alle Gleichgewichtsverteilungen reversibel. Die Reversibilität ist eine sehr spezielle Eigenschaft.

(b) Wenn π eine reversible Verteilung ist, so ist die Verteilung der Markovkette unter P_π invariant unter Zeitumkehr, d.h. die Markovkette Y definiert in Satz 2.8.1 hat die gleiche Verteilung wie X (beschränkt auf Zeitintervall $[0, N]$). \diamond

Es folgen zwei Beispiele, in denen die reversible Gleichgewichtsverteilung existiert und explizit angegeben werden kann.

BEISPIEL 2.8.4. Sei G eine endliche Gruppe und μ eine Verteilung auf G mit $\mu(g) = \mu(g^{-1})$ für jedes $g \in G$. Dann ist die Gleichverteilung auf G reversibel für die μ -Irrfahrt auf G (siehe Beispiele 2.2.2 und 2.5.13). Dies sieht man leicht, indem man nachrechnet, dass die Übergangsmatrix P symmetrisch ist. \diamond

BEISPIEL 2.8.5 (Ehrenfests Urnenmodell). Wir betrachten jetzt das Ehrenfest-Modell von Beispiel 2.2.7. Als Übungsaufgabe rechnet man nach, dass die Binomialverteilung $\pi(k) = \binom{N}{k} 2^{-N}$ reversibel ist.

Eine andere Betrachtungsweise macht es möglich, die reversible Verteilung durch Deduktion zu finden. Wir erweitern das Modell, indem wir den Aufenthaltsort jeder einzelnen Kugel registrieren: ‘0’ für die linke Urne, ‘1’ für die rechte. Dann ist der Vektor der N Aufenthaltsorte der N Kugeln ein Element des neuen Zustandsraumes $\{0, 1\}^N$. Wir können diesen Zustandsraum als eine Gruppe auffassen, wobei die Verknüpfung die Addition modulo 2 ist. Die Markovkette der N Labels gehorcht der Regel, dass zu den Zeitpunkten $1, 2, \dots$ ein zufällig gewähltes der N Indizes geflippt wird. Dies ist eine μ -Irrfahrt im Sinne von Beispiel 2.2.2 mit $\mu(x) = \frac{1}{N}$, falls $x = (x_1, \dots, x_N)$ genau eine von Null verschiedene Komponente hat. Nach Beispiel 2.8.4 ist die Gleichverteilung reversibel für diese Irrfahrt. Projiziert man diese Verteilung wieder zurück auf die Anzahl der Kugeln in der linken Urne, erhält man gerade die Binomialverteilung.

Da die Kehrwerte der Verteilung $\pi(k)$ gerade die erwarteten Rückkehrzeiten zu k sind, erhält man die interessante Folgerung, dass das System im Mittel viel später in seinen Anfangszustand zurückkehrt, wenn es in einem extremen Zustand startet (d.h. alle Kugeln in einer Urne), als wenn es mit etwa ausgeglichenen Kugelbeständen beginnt. \diamond

BEISPIEL 2.8.6 (MCMC). In vielen Anwendungen des Konvergenzsatzes 2.6.5 dreht man den Spieß folgendermaßen um: Auf einer endlichen Menge S hat man eine gewisse Verteilung π gegeben und möchte eine Stichprobe mit dieser Verteilung ziehen, d.h. man möchte eine Zufallsvariable mit der Verteilung π generieren. Diese Aufgabe ist zwar endlich, aber in den meisten Fällen höchst nichttrivial, weil S oft gigantisch groß ist. Ein beliebter Ansatz ist die sogenannte *Markov Chain Monte Carlo* Methode: Man wählt eine Markovkette, deren invariante Verteilung π ist, und man lässt diese Kette mit einem beliebigen Startwert ‘genügend lange’ laufen, bis man auf Grund von Satz 2.6.5 (oder Satz 2.7.2) meint, dass die Kette ‘nahe genug’ an π heran gekommen ist. Dabei wählt man meist eine Übergangsmatrix mit vielen Nullen, so dass π sogar reversibel ist, etwa die Matrix $P = (p_{x,y})_{x,y \in S}$ mit

$$p_{x,y} = \begin{cases} q_{x,y} \min\left\{1, \frac{\pi(y)q_{y,x}}{\pi(x)q_{x,y}}\right\}, & \text{falls } x \neq y, \\ 1 - \sum_{z \in S \setminus \{x\}} p_{x,z}, & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

wobei $Q = (q_{x,y})_{x,y \in S}$ eine stochastische ‘Referenzmatrix’ auf S ist (mit vielen Nullen). Dieser Ansatz wird der *Metropolis-Algorithmus* genannt. Man beachte,

dass nur die Quotienten $\pi(j)/\pi(i)$ bekannt sein müssen, die bei geeigneter Wahl von Q meist nicht extrem klein oder extrem groß sind und deren Berechnung dann auch nicht aufwendig ist.

Der Vorteil einer solchen MCMC-Methode ist, dass sie einfach zu definieren und zu implementieren ist. Der Nachteil ist, dass man oft keine guten Kriterien hat, wann man die Iterationen abbrechen sollte. In jedem Fall werden Abschätzungen für die Konvergenzgeschwindigkeit benötigt, und es ist oft nicht leicht, effektive Abschätzungen zu erhalten.

Viele Beispiele für zu simulierende Verteilungen kommen aus der statistischen Physik, wo auf Gitterkonfigurationsräumen der Form $S = \{0, 1\}^{\Lambda_n}$, wobei $\Lambda_n = \mathbb{Z}^d \cap [-n, n]^d$ eine große Box ist, gewisse Verteilungen der Form $\pi(x) = \frac{1}{Z_{n,\beta}} e^{-\beta H_n(x)}$ gegeben sind, wobei $Z_{n,\beta}$ die Normierung ist, $\beta > 0$ ein Stärkenparameter und $H_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Hamiltonsche Abbildung*. Dies ist ein Maß, das Konfigurationen x mit kleinem Wert von $H_n(x)$ bevorzugt, und dieser Effekt ist desto stärker, je größer β ist. Ein Beispiel ist die Anzahl der 0-1-Übergänge $H_n(x) = \sum_{i,j \in \Lambda_n: |i-j|=1} |x_i - x_j|$, das ein Stück Eisen modelliert (Ladung in Nachbarpunkten soll möglichst oft gleich gerichtet sein), oder die Anzahl der Nachbarpaare, in denen ein Molekül sitzt, $H_n = \#\{(i, j) \in \Lambda_n^2: |i - j| = 1, x_i = x_j = 1\}$. \diamond

9. Harmonische Funktionen und Eintrittswahrscheinlichkeiten

In diesem Abschnitt ist X eine irreduzible Markovkette mit Übergangsmatrix P . Wir definieren formell den Operator L auf dem Raum der Funktionen auf S durch $L = I - P$, d.h.

$$(Lf)(x) = f(x) - \sum_{y \in S} p_{xy} f(y) = f(x) - E_x(f(X_1)), \quad x \in S. \quad (2.9.1)$$

Der Operator L heißt *Generator* der Markovkette X . Für $A \subset S$ definieren wir

$$\bar{A} = A \cup \{y \in S : p_{xy} > 0 \text{ für mindestens ein } x \in A\} \quad (2.9.2)$$

(die zweite Menge ist der ‘natürliche Rand’ von A bezüglich P). Wir betrachten jetzt eine wichtige Familie von Funktionen.

DEFINITION 2.9.1. Sei $A \subset S$. Eine Funktion $f: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch* auf A falls

$$(Lf)(x) = 0, \quad \text{für alle } x \in A. \quad (2.9.3)$$

Sie heißt sub-(super-)harmonisch auf A falls $Lf(x) \leq 0$, (resp. $Lf(x) \geq 0$) auf A .

BEMERKUNG 2.9.2. Um die Verbindung mit den ‘klassischen’ harmonischen Funktionen auf \mathbb{R}^d zu sehen, die durch $\Delta f = 0$ definiert sind, bemerke, dass der Generator der einfachen Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d genau der diskrete (-)Laplace-Operator ist:

$$Lf(x) = f(x) - \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} f(y) = -\frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)), \quad (2.9.4)$$

Die harmonischen Funktionen der Markovketten haben die folgende wichtige Eigenschaft:

LEMMA 2.9.3. *Sei $A \subset S$ und T_A die Austrittszeit aus A , $T_A = H_{A^c} = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin A\}$. Falls f eine (sub-,super-)harmonische Funktion auf A ist, dann ist der Prozess $Y_n := f(X_{n \wedge T_A})$ ein (sub-,super-)Martingal⁵ bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i, 0 \leq i \leq n)$, dies gilt für jede Startverteilung ν der Markovkette.*

BEMERKUNG 2.9.4. Der Prozess $X_{n \wedge T_A}$ ist Markovkette gestoppt nach dem Austritt aus A . Er ist wieder eine Markovkette mit Übergangsmatrix P^A definiert durch

$$p_{xy}^A = \begin{cases} p_{xy}, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A, y \neq x, \\ 1, & \text{falls } x = y \notin A. \end{cases} \quad (2.9.5)$$

BEWEIS. Sei $L^A = I - P^A$. Wir definieren (beliebig) $f(x) = 0$ für $x \notin \bar{A}$. Es ist einfach zu sehen, dass f harmonisch für L^A auf dem ganzen Raum S ist, d.h.

$$(L^A f)(x) = f(x) - E_x^{P^A}[f(X_1)] = 0, \quad (2.9.6)$$

wobei E^{P^A} der Erwartungswert für eine Markovkette mit Übergangsmatrix P^A ist. Sei jetzt $m \geq n$. Mit Hilfe der starken Markoveigenschaft, für beliebige Startverteilung ν ,

$$E_\nu[f(X_{m \wedge T_A}) | \mathcal{F}_n] = E_{X_{n \wedge T_A}}[f(X_{(m-n) \wedge T_A})] = E_{X_{n \wedge T_A}}^{P^A}[f(X_{m-n})] = f(X_{n \wedge T_A}). \quad (2.9.7)$$

Die letzte Gleichung folgt von (2.9.6) für $m = n + 1$ und mit Hilfe der Induktion für allgemeines $m \geq n$. Der Beweis für f sub-/super-harmonisch ist ähnlich. \square

Das Lemma erlaubt die Methoden der Martingaltheorie zu benutzen, um die Markovketten besser zu verstehen. Zum Beispiel erhalten wir:

SATZ 2.9.5. *Sei X_n eine irreduzible rekurrente Markovkette. Dann sind alle beschränkte harmonische oder nicht-negative superharmonische Funktionen für diese Markovkette konstant.*

BEWEIS. Falls f eine beschränkte harmonische Funktion ist, dann ist $f(X_n)$ ein beschränktes Martingal, nach Lemma 2.9.3 mit $A = S$. Mit Hilfe des Martingalkonvergenzsatzes⁶ konvergiert $f(X_n)$ f.s. Nehmen wir jetzt an, dass f nicht konstant ist. Dann existieren $x, y \in S$ mit $f(x) \neq f(y)$. Weil X rekurrent ist, besucht X jeden Zustand unendlich oft. Das steht aber im Widerspruch mit der Konvergenz von $f(X_n)$. \square

⁵Ein Prozess Y ist Martingal bezüglich \mathcal{F}_n , falls $E[Y_m | \mathcal{F}_n] = Y_n$ für alle $m \geq n \geq 0$. Er ist Sub-(Super-)martingal, falls $E[Y_m | \mathcal{F}_n] \geq Y_n$ (resp. $\leq Y_n$).

⁶Sei $(M_n)_{n \geq 0}$ ein beschränktes Martingal, oder ein nicht-negatives Supermartingal. Dann konvergiert M_n f.s.

BEISPIEL 2.9.6. Die Situation ist komplexer, wenn X nicht rekurrent ist. Betrachte z.B. eine Markovkette auf \mathbb{Z} mit Nächstnachbarschaftspfaden, die in Richtung zu 0 mit Wahrscheinlichkeit $q < 1/2$, und in Richtung von 0 mit Wahrscheinlichkeit $p = 1 - q > 1/2$ springt; dazu $P[X_{n+1} = \pm 1 | X_n = 0] = 1/2$. Diese Markovkette ist offensichtlich transient, weil $p > q$. Eine nicht-negative harmonische Funktion f erfüllt

$$\begin{aligned} f(x) &= pf(x+1) + qf(x-1), & x \geq 1, \\ f(x) &= qf(x+1) + pf(x-1), & x \leq -1, \\ f(0) &= \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1). \end{aligned} \tag{2.9.8}$$

Die erste Gleichung hat Lösung $f(x) = A + B(1 - (\frac{q}{p})^x)$, $x \geq 0$, die zweite $f(x) = A' + B'(1 - (\frac{q}{p})^{(-x)})$, $x \leq 0$. Um die dritte Gleichung zu erfüllen, braucht man dann $A = A'$ und $B + B' = 0$. Es folgt, dass jede nicht-negative harmonische Funktion die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} f &= c_+ h^+ + c_- h^-, & \text{mit } c_+, c_- \geq 0, \text{ und,} \\ h_x^+ &= h_{-x}^- = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - (\frac{q}{p})^x), & x \geq 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - (\frac{q}{p})^{-x}), & x < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.9.9}$$

Bemerke dass $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h^\pm(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} h^\pm(x) = 0$.

BEMERKUNG 2.9.7. Die ‘‘Generatoren’’ h_+ , h_- der Familie der harmonischen Funktionen entsprechen der Menge aller ‘‘Grenzwerte’’ der Markovkette. Im Allgemeinen kann die Menge aller nicht-negativen harmonischen Funktionen benutzt werden, um den Begriff des allgemeinen Rands (generalised boundary) für Markovketten zu definieren, siehe [Rev84], Kapitel 7.

LEMMA 2.9.8. Sei $A \subset S$ eine nichtleere Menge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist es möglich f auf S zu erweitern, so dass f harmonisch auf A^c ist. Falls A^c endlich ist, dann ist die Erweiterung eindeutig.

BEWEIS. Sei $f(x) = E_x[f(X_{H_A}); \mathbf{1}\{H_A < \infty\}] + cP_x[H_A = \infty]$, $c \in \mathbb{R}$. Diese Funktion ist harmonisch auf A^c , es reicht zu bemerken, dass für $x \in A^c$

$$E_x[f(X_{H_A}); \mathbf{1}\{H_A < \infty\}] = \sum_{y \in S} p_{xy} E_y[f(X_{H_A}); \mathbf{1}\{H_A < \infty\}]. \tag{2.9.10}$$

Um die Eindeutigkeit zu sehen, bemerken wir zuerst, dass von der Irreduzibilität von P und der Endlichkeit von A^c folgt dass H_A P_x -f.s. endlich ist für alle $x \in S$. Nach Lemma 2.9.3 ist $M_n = f(X_{n \wedge H_A})$ ein Martingal, das beschränkt ist (weil A^c endlich ist und f beschränkt ist auf A). Mit Hilfe der Martingaleigenschaft und des des Satzes von Lebesgue sehen wir dann, dass $f(x) = E_x[M_0] = E_x[M_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_x[f(X_{H_A})]$, was die Eindeutigkeit zeigt. \square

Die Eintrittswahrscheinlichkeiten sind eng mit den harmonischen Funktionen verbunden.

SATZ 2.9.9. Sei $A \subset S$ und $h^A(x) = P_x[H_A < \infty]$. Dann ist h^A die kleinste nicht-negative Funktion auf S , sodass

$$h^A(x) = 1 \text{ f\u00fcr } x \in A, \quad h^A \text{ ist harmonisch auf } A^c. \quad (2.9.11)$$

BEWEIS. Sei $x \in A^c$. Es folgt aus der Markoveigenschaft, dass

$$h^A(x) = P_x[H_A < \infty] = \sum_{y \in S} p_{xy} P_y[H_A < \infty] = Ph^A(x), \quad (2.9.12)$$

d.h. h^A ist harmonisch auf A^c . Offenbar ist $h^A(x) = 1$ auf A , und daher erf\u00fcllt h^A die Bedingung (2.9.11). Sei jetzt g eine andere nicht-negative Funktion die (2.9.11) erf\u00fcllt. Dann ist $M_n = g(X_{n \wedge H_A})$ ein Martingal und daher

$$g(x) = E_x[M_0] = E_x[M_n] = E_x[g(X_{H_A}); H_A \leq n] + E_x[g(X_n); H_A > n]. \quad (2.9.13)$$

Nun lassen wir $n \rightarrow \infty$, benutzen $g \geq 0$, $g \equiv 1$ auf A , und erhalten dass

$$g(x) \geq E_x[g(X_{H_A}); H_A < \infty] = P_x[H_A < \infty], \quad (2.9.14)$$

was zu zeigen war. \square

Ein \u00e4hnlicher Satz gilt f\u00fcr die erwartete Eintrittszeit von $A \subset S$,

$$k^A(x) = E_x[H_A]. \quad (2.9.15)$$

SATZ 2.9.10. Die Funktion k^A die kleinste nicht-negative Funktion auf S , sodass

$$k^A(x) = 0 \text{ f\u00fcr } x \in A, \quad Lk^A = 1 \text{ auf } A^c. \quad (2.9.16)$$

BEWEIS. Offensichtlich $k^A(x) = 0$ auf A und f\u00fcr $x \in A^c$, nach der Markoveigenschaft,

$$k^A(x) = E_x[H_A] = 1 + \sum_{y \in S} p_{xy} E_y[H_A]. \quad (2.9.17)$$

Daher ist (2.9.16) gezeigt. Um die Minimalit\u00e4t zu beweisen, sei g eine andere Funktion die (2.9.16) erf\u00fcllt. Daher, f\u00fcr $x \in A^c$,

$$g(x) = 1 + \sum_{y \in S} p_{xy} g(y) = 1 + \sum_{y \in A^c} p_{xy} g(y). \quad (2.9.18)$$

Jetzt k\u00f6nnen wir, \u00e4hnlich wie im Beweis von Lemma 2.5.5, das $g(y)$ auf der rechten Seite noch einmal expandieren,

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \sum_{y_1 \in A^c} p_{xy_1} \left(1 + \sum_{y_2 \in S} p_{y_1 y_2} g(y_2) \right) \\ &= 1 + \sum_{y_1 \in A^c} p_{xy_1} + \sum_{y_1, y_2 \in A^c} p_{xy_1} p_{y_1 y_2} g(y_2) \\ &= P_x[H_A > 0] + \cdots + P_x[H_A > n - 1] + \sum_{y_1, \dots, y_n \in A^c} p_{xy_1} \cdots p_{y_{n-1} y_n} g(y_n). \end{aligned} \quad (2.9.19)$$

Der letzte Summand ist nicht-negativ. Dann lassen wir $n \rightarrow \infty$ und erhalten $g(x) \geq E_x[H_A] = k^A(x)$. \square

10. Reversible Markovketten und elektrische Netzwerke

In dieser Abschnitt bauen wir die Verbindungen zwischen reversiblen Markovketten und elektrischen Netzwerken aus. Wir erklären welche Rolle die Leitfähigkeit dieser Netzwerke spielt, und geben einige Variationsformeln, die ermöglichen die Leitfähigkeit zu bestimmen.

Sei X_n eine reversible Markovkette mit Übergangsmatrix P und reversiblen Maß π . Von Abschnitt 8 wissen wir, dass π und P die Detailed Balance Condition erfüllen,

$$\pi_x p_{xy} = \pi_y p_{yx}. \quad (2.10.1)$$

Zu jeder reversiblen Markovkette assoziieren wir einen nicht-orientierten gewichteten Graph $G = (S, E)$, wobei $E = \{\{x, y\} \in S^2 : \pi_x p_{xy} > 0\}$, mit der Gewicht-Funktion $w : E \rightarrow (0, \infty)$, $w_{xy} = \pi_x p_{xy}$. Dank der Bedingung 2.10.1 ist diese Funktion wohldefiniert.

Umgekehrt, zu jedem nicht-orientierten gewichteten Graph (S, E, w) mit lokal-endlichem Gewicht (d.h. $\sum_{y \in S} w_{xy} < \infty$ für alle $x \in S$) assoziieren wir eine reversible Markovkette auf S mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{xy} = \frac{w_{xy}}{\sum_{z \in S} w_{xz}}. \quad (2.10.2)$$

BEMERKUNG 2.10.1. Um die Notation zu vereinfachen ist es nützlich $w_{xy} = 0$ für alle $\{x, y\} \notin E$ zu definieren. Dann ist w eine Funktion auf $S \times S$.

LEMMA 2.10.2. *Die Markovkette X_n ist irreduzibel genau wenn (S, E) ein zusammenhängender Graph ist.*

ÜBUNG 2.10.3. Zeigen Sie das Lemma.

Wir nehmen jetzt immer an, dass (S, E) ein zusammenhängender Graph ist. Es ist praktisch den Graph (S, E) wie ein Netzwerk von Drähten, die die Elemente von S verbinden, anzuschauen. Der Draht von x nach y hat die elektrische Leitfähigkeit (conductance) w_{xy} und Widerstand (resistance) $r_{xy} = 1/w_{xy}$.

Um diese Analogie besser verstehen, betrachten wir jetzt das folgende Problem. Sei $A, B \subset S$ mit $A \cap B = \emptyset$, und sei

$$h(x) = h_{A,B}(x) = P_x[H_A < H_B] \quad (2.10.3)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass X gestartet in x die Menge A vor der Menge B besucht. Offensichtlich ist $h = 1$ auf A , $h = 0$ auf B und die einfache Markoveigenschaft impliziert, dass

$$h(x) = \sum_{y \sim x} p_{xy} h(y); \quad (2.10.4)$$

die Notation $y \sim x$ bedeutet $\{x, y\} \in E$. Daher sehen wir, dass h harmonisch auf $(A \cup B)^c$ ist, d.h. h ist eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} Lh_{A,B}(x) &= 0 & \text{für } x \in S \setminus (A \cup B), \\ h(x) &= 1 \text{ auf } A, & h(x) = 0 \text{ auf } B. \end{aligned} \quad (2.10.5)$$

Bevor wir dieses System betrachten brauchen wir mehr Definitionen zu den elektrischen Netzwerken.

DEFINITION 2.10.4. Eine Abbildung $I : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein Fluss auf (S, E, w) falls

- (i) $I_{xy} = -I_{yx}$ für alle $x, y \in S$,
- (ii) $I_{xy} = 0$ falls $\{x, y\} \notin E$.

Für einen Fluss I definiert man die Divergenz in $x \in S$,

$$\operatorname{div} I(x) = \sum_{y \sim x} I_{xy}. \quad (2.10.6)$$

Die Stromstärke von A ist gegeben durch

$$F(I, A) = \sum_{x \in A} \operatorname{div} I(x) = \sum_{x \in A} \sum_{y \sim x} I_{xy} = \sum_{x \in A} \sum_{y \in A^c} I_{xy} \quad (2.10.7)$$

Gegeben $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den Gradient-Fluss assoziiert mit f ,

$$(\operatorname{grad} f)_{xy} = \begin{cases} w_{xy}(f(y) - f(x)), & \text{falls } x \sim y, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.10.8)$$

Der Fluss $(\operatorname{grad} f)$ ist der elektrische Fluss zwischen x und y wenn wir die Spannung f auf die Knoten des Graphs anwenden.

LEMMA 2.10.5 (2. Kirchhoff'sches Gesetz). *Ein Fluss ist ein Gradient-Fluss assoziiert zu einer Funktion f genau dann wenn*

$$\text{für jeden Zyklus } x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_n = x_0, n \geq 2 \text{ hat man } \sum_{i=1}^n r_{x_{i-1}x_i} I_{x_{i-1}x_i} = 0. \quad (2.10.9)$$

BEWEIS. Wenn $I = \operatorname{grad} f$, dann ist (2.10.9) erfüllt, es reicht die Definition 2.10.8 anzuwenden. Umgekehrt wählen wir $x^* \in S$ als Basispunkt und definieren $f(x) = \sum_{i=1}^n r_{x_{i-1}x_i} I_{x_{i-1}x_i}$, für $x^* = x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_n = x$. Die Bedingung 2.10.9 bedeutet, dass die Definition von f nicht von dem benutzten Pfad (x_i) abhängt. \square

Wir betrachten jetzt (S, E, w) wie ein elektrisches Netzwerk. Sei A und B wie vorher. Wir wenden jetzt die Spannung 1 auf A und Spannung 0 auf B an. Um den elektrischen Fluss der von A nach B fließt zu finden, benutzen wir die elementare Physik. Der Fluss muss die folgenden Gesetze erfüllen:

$$\text{Ohm'sches Gesetz: } I_{xy} = (\operatorname{grad} V)_{xy}, \quad (2.10.10)$$

$$1. \text{ Kirchhoff'sches Gesetz: } (\operatorname{div} I)_x = 0 \text{ für } x \notin A \cup B. \quad (2.10.11)$$

Wenn wir die beiden Gesetze kombinieren, finden wir für $x \notin A \cup B$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V)(x) = \sum_{y \sim x} w_{xy}(V(y) - V(x)) = 0. \quad (2.10.12)$$

Wenn wir diese Gleichung durch $\sum_{z \sim x} w_{xz}$ dividieren, finden wir dass $LV = 0$ auf $(A \cup B)^c$. Daher erfüllt die Spannung V die gleichen Bedingungen (2.10.5) wie $h_{A,B}$.

LEMMA 2.10.6. *Falls $S \setminus (A \cup B)$ endlich ist, dann hat das System (2.10.5) eine eindeutige Lösung.*

ÜBUNG 2.10.7. Benutzen Sie Lemma 2.9.8 (und sein Beweis) um dieses Lemma zu zeigen.

Das Lemma zeigt, dass wenn $(A \cup B)^c$ endlich ist, dann hat die elektrische Spannung V mit $V|_A = 1$, $V|_B = 0$ eine natürliche wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation, nämlich

$$V(x) = h_{A,B}(x) = P_x[H_A < H_B]. \quad (2.10.13)$$

Die Funktion $h_{A,B}$ nennt man Gleichgewichtspotenzial oder Kapacitor von A , B .

Das nächste Ziel ist die wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation der effektiven Leitfähigkeit zwischen A und B definiert durch

$$C(A, B) = F(\text{grad } V, A) \in (0, \infty]. \quad (2.10.14)$$

Wir definieren die Dirichlet Form assoziiert mit X

$$\mathcal{D}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in S} w_{xy} (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) \quad (2.10.15)$$

für alle $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sum_{x,y \in S} w_{xy} |(f(y) - f(x))(g(y) - g(x))| < \infty$, und betrachten den Raum

$$D = \{f : S \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{x,y \in S} w_{xy} (f(y) - f(x))^2 < \infty\}. \quad (2.10.16)$$

Für $f, g \in D$ ist $\mathcal{D}(f, g)$ wohldefiniert, nach Cauchy-Schwarz Ungleichung.

BEMERKUNG 2.10.8. Wenn wir f wie Spannung interpretieren, ist die Dirichlet Form $\mathcal{D}(f, f)$ einfach die Energie des elektrischen Flusses induziert von f .

Gleichung (2.10.14) definiert die effektive Leitfähigkeit $C(A, B)$ nur dann eindeutig, wenn $(A \cup B)^c$ endlich ist. Wir erweitern jetzt diese Definition auf allgemeine A, B .

DEFINITION 2.10.9. Sei (S, E, w) ein gewichteter Graph, $A, B \subset S$ mit $A \cap B \neq \emptyset$. Wir definieren die effektive Leitfähigkeit zwischen A und B durch

$$C(A, B) = \inf\{\mathcal{D}(f, f) : f \in \mathcal{F}(A, B)\} \in [0, \infty], \quad (2.10.17)$$

wobei

$$\mathcal{F}(A, B) = \{f \in D : f|_A = 1, f|_B = 0\}. \quad (2.10.18)$$

Den effektiven Widerstand definiert man durch $R(A, B) = 1/C(A, B)$.

BEMERKUNG 2.10.10. (a) Falls $\mathcal{F}(A, B) = \emptyset$, dann $C(A, B) = \infty$. (Beispiel: $S = \mathbb{Z}^2$ mit Nächstnachbarschaftskanten, $w \equiv 1$, $A = \{x : x \cdot e_1 \leq 0\}$ und $B = \{x : x \cdot e_1 \geq 1\}$.)

(b) Es folgt direkt von der Definition, dass $C(A, B) = C(B, A)$ und für $B' \subset B$, $C(A, B) \geq C(A, B')$. Dies war nicht offensichtlich von (2.10.14).

Der folgende Satz erklärt die Verbindung zwischen den zwei Definitionen der Leitfähigkeit, (2.10.14) und Definition 2.10.9.

SATZ 2.10.11 (Dirichlet Prinzip). *Sei (S, E, w) ein gewichteter Graph, $A, B \subset S$ mit $A \cup B \neq \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$ und $\mathcal{F}(A, B) \neq \emptyset$. Dann wird das Minimum im Variationsproblem (2.10.17) angenommen durch eine eindeutige Funktion $h \in \mathcal{F}(A, B)$, und h ist eine Lösung des Systems (2.10.5).*

Wir brauchen zwei Lemmas um den Satz zu zeigen

LEMMA 2.10.12. *Sei $x^* \in S$ ein beliebiger Basispunkt, und*

$$|f|_D^2 = \mathcal{D}(f, f) + f(x^*)^2, \quad (f, g)_D = \mathcal{D}(f, g) + f(x^*)g(x^*). \quad (2.10.19)$$

Dann

- (a) $f \in D$ und $\mathcal{D}(f, f) = 0$ genau wenn f konstant auf S ist.
- (b) $|f(x)| \leq c(x)|f|_D$, im Besonderen impliziert die Konvergenz in $|\cdot|_D$ die punktweise Konvergenz.
- (c) $(D, (\cdot, \cdot)_D)$ ist ein Hilbertraum.
- (d) Wenn man den Basispunkt wechselt, sind die zugehörige Normen äquivalent.

BEWEIS. (a) ist offensichtlich, weil (S, E) ein zusammenhängender Graph ist.

(b) Es reicht $x \neq x^*$ zu betrachten. Wähle einen Nächstnachbarschaftspfad $x^* = x_0 \sim \dots \sim x_n = x$. Dann für $f \in D$, mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x^*)| &\leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 w_{x_i x_{i-1}} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n w_{x_i x_{i-1}}^{-1} \right)^{1/2} \\ &\leq |f|_D \left(\sum_{i=1}^n w_{x_i x_{i-1}}^{-1} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.10.20)$$

Daher,

$$|f(x)| \leq |f(x^*)| + |f(x^*) - f(x)| \leq |f|_D \left(1 + \left(\sum_{i=1}^n w_{x_i x_{i-1}}^{-1} \right)^{1/2} \right). \quad (2.10.21)$$

(c) Wir müssen zeigen, dass D vollständig ist. Daher sei $f_n \in D$ eine Cauchy-Folge in D . Mit Hilfe der Eigenschaft (b) sehen wir, dass $f_n(x)$ für alle $x \in S$ eine

Cauchy-Folge in \mathbb{R} ist. Daher ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ wohldefiniert. Das Lemma von Fatou gibt dann

$$\begin{aligned} |f - f_m|_D^2 &= \frac{1}{2} \sum_{x,y} w_{xy} (f(x) - f(y))(f_m(x) - f_m(y)) + (f(x^*) - f_m(x^*))^2 \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n - f_m|_D^2 \end{aligned} \quad (2.10.22)$$

Die (f_n) eine Cauchy-Folge ist, sehen wir, dass $f_n \xrightarrow{D} f$ und $|f|_D \leq |f_n|_D - |f - f_n|_D$, d.h. $f \in D$ und D ist vollständig.

(d) Für zwei Basispunkte x^*, \tilde{x} haben wir mit Hilfe von (b),

$$f(\tilde{x})^2 + \mathcal{D}(f, f) \leq (c(\tilde{x}) + 1)(f(x^*)^2 + \mathcal{D}(f, f)) \quad (2.10.23)$$

und ähnlich mit x^*, \tilde{x} vertauscht. □

LEMMA 2.10.13 (diskrete Green-Gauß Formel). *Sei $f \in D$ und g eine Funktion mit endlichem Träger $\{x : g(x) \neq 0\}$. Dann*

$$\mathcal{D}(f, g) = - \sum_{x \in S} \mu_x (Lf)(x) g(x), \quad \text{wobei } \mu_x = \sum_{y \sim x} w_{xy}. \quad (2.10.24)$$

BEMERKUNG 2.10.14. (a) Die rechte Seite von (2.10.24) ist das Skalarprodukt von g und Lf in $L^2(\mu)$, $(Lf, g)_{L^2(\mu)}$. schreiben.

(b) Im Allgemeinen ist (2.10.24) nicht gültig für $f, g \in D$.

BEWEIS. Wir schreiben mit Hilfe der Symmetrie von w_{xy} ,

$$\begin{aligned} (Lf, g)_{L^2(\mu)} &= \sum_{x \in S} \mu_x \sum_{y \in S} \frac{w_{xy}}{\mu_x} (f(y) - f(x)) g(x) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_x \sum_y w_{xy} (f(y) - f(x)) g(x) + \frac{1}{2} \sum_x \sum_y w_{xy} (f(x) - f(y)) g(y) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_x \sum_y w_{xy} (f(y) - f(x)) (g(y) - g(x)) = -\mathcal{D}(f, g). \end{aligned} \quad (2.10.25)$$

Alle Summen sind hier endlich, weil g endlichen Träger hat. □

BEMERKUNG 2.10.15. Es ist einfach zu sehen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(h_{A,B}, h_{A,B}) &= -(Lh_{A,B}, h_{A,B})_{L^2(\mu)} \\ &= -(Lh_{A,B}, \mathbf{1}_A)_{L^2(\mu)} = F(\text{grad } h_{A,B}, A). \end{aligned} \quad (2.10.26)$$

BEWEIS VON SATZ 2.10.11. Wir wählen $x^* \in A \cup B$. Die Menge $\mathcal{F}(A, B)$ ist nichtleere konvexe (Übung!) Teilmenge von D . Mit Hilfe von Lemma 2.10.12(b) zeigt man, dass diese Menge auch abgeschlossen ist. Nach der Theorie der Hilberträume, gibt es daher ein eindeutiges $h \in \mathcal{F}(A, B)$, das $|f|_D = \mathcal{D}(f, f) + f(x^*)^2$ minimiert. Weil $x^* \in A \cup B$ ist, ist $f(x^*)$ konstant auf $\mathcal{F}(A, B)$, und daher minimiert h die Dirichlet Form.

Um zu sehen, dass h die Lösung von (2.10.5) ist, nehmen wir $x \notin A \cup B$ und wählen $f(y) = \delta_x(y)$. Dann, $h + uf \in \mathcal{F}(A, B)$ für alle $u \in \mathbb{R}$, und

$$\mathcal{D}(h, h) \leq \mathcal{D}(h + uf, h + uf) = \mathcal{D}(h, h) + 2u\mathcal{D}(h, f) + u^2\mathcal{D}(f, f). \quad (2.10.27)$$

Diese Ungleichung kann nur dann für alle $u \in \mathbb{R}$ wahr sein, wenn $0 = \mathcal{D}(f, h) = -(Lh, f)_{L^2(\mu)} = -\mu_x(Lh)(x)$. \square

BEMERKUNG 2.10.16. Definition 2.10.9 erlaubt oberen Schranken für die effektive Leitfähigkeit einfach zu finden.

Wir kommen jetzt zur Interpretation der effektiven Leitfähigkeit.

SATZ 2.10.17. Sei (S, E, w) und A, B wie üblich, mit $(A \cup B)^c$ endlich (d.h. das System (2.10.5) hat eine eindeutige Lösung). Dann

$$C(A, B) = \sum_{x \in A} \mu_x P_x[\tilde{H}_A > H_B], \quad (\text{Fluchtwahrscheinlichkeit}). \quad (2.10.28)$$

Im Besonderen, falls $x \notin B$,

$$C(x, B) = \mu_x P_x[\tilde{H}_x > H_B]. \quad (2.10.29)$$

BEWEIS. Nach (2.10.5), (2.10.13), und Satz 2.10.11 wissen wir, dass für $h(x) = P_x[H_A < H_B]$, $C(A, B) = \mathcal{D}(h, h) = -(Lh, h)_{L^2(\mu)}$. h ist harmonisch auf $(A \cup B)^c$ und null auf B . Deswegen

$$\begin{aligned} -(Lh, h) &= - \sum_{x \in A} \mu_x Lh(x) \\ &= - \sum_{x \in A} \sum_{y \in S} \mu_x p_{xy} (h(y) - h(x)) \\ &= \sum_{x \in A} \mu_x \sum_{y \sim x} p_{xy} (1 - h(y)) \\ &= \sum_{x \in A} \mu_x \sum_{y \sim x} p_{xy} P_y[H_B < H_A] \\ &= \sum_{x \in A} \mu_x P_x[H_B \circ \theta_1 < H_A \circ \theta_1] \\ &= \sum_{x \in A} \mu_x P_x[\tilde{H}_A > H_B], \end{aligned} \quad (2.10.30)$$

wobei wir $x \in A \subset B^c$ für die letzte Gleichung benutzt haben. \square

Wir definieren jetzt die Leitfähigkeit ‘ins Unendliche’ (conductance to infinity): Für $A \subset S$ setzen wir

$$C(A, \infty) = \inf\{\mathcal{D}(f, f) : f|_A \equiv 1, \text{supp } f \text{ ist endlich}\}. \quad (2.10.31)$$

Diese Quantität hat Bezug auf Rekurrenz/Transienz.

LEMMA 2.10.18. (*A endlich*) Die Funktion $h(x) = P_x[H_A < \infty]$ ist Element von D und

$$C(A, \infty) = \mathcal{D}(h, h) = \sum_{x \in A} \mu_x P_x[\tilde{H}_A = \infty] \quad (2.10.32)$$

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass $h \in D$. Sei B_n eine Folge von endlichen Teilmengen von S mit $A \subset B_n$ und $B_n \uparrow S$. Setze $C_n = C(A, B_n^c) = \mathcal{D}(h_n, h_n)$, wobei $h_n = P_x[H_A < H_{B_n^c}]$. Von der Variationsformel für die Leitfähigkeit sehen wir, dass $C_n \geq C_{n+1}$. Für $l \leq n$ haben wir dann

$$\mathcal{D}(h_n, h_l) = -(Lh_n, h_l) = (-Lh_n, \mathbf{1}_A) = C_n. \quad (2.10.33)$$

Daher, $\mathcal{D}(h_n - h_l, h_n - h_l) = C_n - 2C_n + C_l = C_l - C_n$. Weil die Folge C_n fallend und nicht-negativ ist, ist sie auch Cauchy. Daher ist auch h_n D -Cauchy und $\bar{h} = \lim h_n$ existiert und ist in D . Weiter, weil für jedes $B \subset S$ mit $A \subset B^c$ ein B_n mit $B_n^c \supset B^c$ gibt, sehen wir

$$C(A, \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n. \quad (2.10.34)$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\bar{h} = h$. Allerdings,

$$\bar{h}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_x[H_A < H_{B_n^c}] = P_x[H_A < \infty] = h(x), \quad (2.10.35)$$

weil P_x -f.s. $H_{B_n^c} \leq H_{B_{n+1}^c}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{B_n^c} = \infty$.

Um (2.10.32) zu zeigen schreiben wir

$$\begin{aligned} C(A, \infty) &= \lim C_n = \lim \mathcal{D}(h_n, h_n) \\ &= \lim (-Lh_n, \mathbf{1}_A) = (-Lh, \mathbf{1}_A) = \sum_{x \in A} \mu_x P_x[\tilde{H}_A = \infty]. \end{aligned} \quad (2.10.36)$$

□

SATZ 2.10.19. Ein Zustand $x \in S$ ist rekurrent genau dann, wenn $C(x, \infty) = 0$.

BEWEIS. Nach Lemma 2.10.18, $P_x[\tilde{H}_x < \infty] = 1 - \frac{C(x, \infty)}{\mu_x} = 1$. Daher ist x rekurrent, nach Satz 2.4.7. □

BEMERKUNG 2.10.20. Der letzte Satz gibt uns gewisse Monotonieeigenschaften der Rekurrenz/Transienz. Z.B., wenn die Kanten von einem rekurrenten Graph (S, E, w) gelöscht werden, dann wird $C(x, \infty)$ kleiner, d.h. der Graph bleibt rekurrent.

BEMERKUNG 2.10.21. Es gibt ein duales Variationsproblem zum Dirichlet Prinzip (Satz 2.10.11), sogenanntes Thompson Prinzip, das erlaubt untere Schranken für die Leitfähigkeit zu finden, dessen Anwendung aber meistens schwieriger ist, als die von Dirichlet Prinzip. Für A, B mit $A \cap B = \emptyset$ hat man

$$C(A, B)^{-1} = \inf\{\mathcal{E}(I) : I \in \mathcal{I}(A, B)\}, \quad (2.10.37)$$

wobei $\mathcal{I}(A, B)$ die Menge der Einheit-Flüsse von A nach B ist,

$$\mathcal{I}(A, B) = \{I \text{ Fluss auf } (S, E, w) : F(I, A) = 1, \operatorname{div} I(x) = 0 \forall x \in (A \cup B)^c\}, \quad (2.10.38)$$

und

$$\mathcal{E}(I) = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} \sum_{y \sim x} \frac{I_{xy}^2}{w_{xy}}. \quad (2.10.39)$$

Für Beweis dieses Prinzipes siehe [AF], Kapitel 3.

11. Verzweigungsprozess

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Verzweigungsprozesse (die wir schon in Beispiel 2.2.11 erwähnt haben). Diese Prozesse werden in der Biomathematik verwendet und beschreiben die Entwicklung einer Population in aufeinanderfolgenden Generationen. Sei X_n die Anzahl der Individuen in der n -ten Generation. Ist $X_n = k$, dann seien $\xi_i^n, i = 1, \dots, k$, die Anzahlen der Nachkommen der k Individuen in der n -ten Generation. Die Anzahl X_{n+1} der Individuen in der $n+1$ -Generation ist dann $\xi_1^n + \dots + \xi_k^n$.

Wir nehmen an, dass die Zufallsvariablen $\xi_i^n, i \geq 1, n \geq 1$, unabhängig sind. Ihr Wertbereich ist $\{0, 1, \dots\}$ und sie haben die Wahrscheinlichkeiten $P[\xi_i^n = k] = p_k, k \geq 0$. Es ist einfach zu sehen, dass dieser Verzweigungsprozess eine Markovkette in diskreter Zeit ist. Um ihn zu untersuchen, verwenden wir jedoch nicht die Methoden aus den letzten Abschnitten, sondern benutzen wir (meistens) erzeugende Funktionen.

Die Frage, die wir beantworten wollen, ist

$$\text{Mit welcher Wahrscheinlichkeit stirbt die Population nie aus?} \quad (2.11.1)$$

‘Aussterben’ bedeutet hier, dass X_n den (absorbierenden) Zustand ‘0’ erreicht. Wir werden sehen, dass die Antwort auf diese Frage kann mit Hilfe der erwartete Anzahl von Nachkommen eines Individuums festgestellt werden. Sei

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \quad (2.11.2)$$

Die Linearität des Erwartungswerts gibt uns

$$E[X_{n+1}|X_n] = \mu X_n. \quad (2.11.3)$$

Wir wenden jetzt den Erwartungswert auf beide Seiten dieser Gleichung und bekommen $E[X_{n+1}] = \mu E[X_n]$. Iterieren dann gibt

$$EX_n = \mu^n EX_0. \quad (2.11.4)$$

Falls $\mu < 1$, dann konvergiert $EX_n \rightarrow 0$ exponentiell schnell. Mit Hilfe der Ungleichung $EX_n \geq P[X_n \geq 1]$ sehen wir dass $P[X_n \geq 1] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Wir haben daher das folgende Lemma gezeigt:

LEMMA 2.11.1. *Wenn $\mu < 1$, dann stirbt das Verzweigungsprozess f.s. aus.*

ÜBUNG 2.11.2. Betrachte eine Modifikation des Verzweigungsprozesses mit $p_{01} = 1$, d.h. wenn die Population ausstirbt, wir starten im nächsten Schritt wieder mit einem Individuum. Zeige, dass für $\mu < 1$ ist die modifizierte Markovkette positiv rekurrent.

Um den Fall $\mu \geq 1$ zu verstehen, machen wir zuerst eine kurze Berechnung. Sei ρ die Wahrscheinlichkeit dass X (mit $X_0 = 1$) ausstirbt. Wenn $X_1 = k$ müssen alle k unabhängige ‘Zweige’ austerben damit die ganze Population ausstirbt. D.h.

$$\rho = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \rho^k. \quad (2.11.5)$$

Sei jetzt $\phi(s)$ die erzeugende Funktion von (p_k) ,

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad s \in [0, 1]. \quad (2.11.6)$$

Dann ist (2.11.5) äquivalent mit $\rho = \phi(\rho)$. Diese Gleichung kann mehrere Lösungen haben. Der folgende Satz bestimmt die richtige.

SATZ 2.11.3. Die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens ρ ist die kleinste Lösung von $\phi(x) = x$ im Intervall $[0, 1]$. Weiter, $\rho = 1$ für $\mu \leq 1$ und $\rho < 1$ für $\mu > 1$.

Um den Satz zu beweisen, brauchen wir ein Lemma.

LEMMA 2.11.4. Sei $h_n = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P[X_n = k] = E[s^{X_n}]$ die erzeugende Funktion von X_n und sei $X_0 = 1$. Dann $h_0(s) = s$ und

$$h_n(s) = \phi^{\circ n}(s) = \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{n\text{-mal}}(s). \quad (2.11.7)$$

BEWEIS. Die erste Aussage des Satzes ist offensichtlich. Mit Hilfe der Unabhängigkeit sehen wir dann

$$E[s^{X_{n+1}} | X_n = k] = E[s^{\xi_1^n + \dots + \xi_k^n}] = (E[s^{\xi_1^n}])^k = \phi(s)^k; \quad (2.11.8)$$

diese Gleichung ist auch für $k = 0$ gültig. Daher,

$$h_{n+1}(s) = E[s^{X_{n+1}}] = \sum_{k=0}^{\infty} P[X_n = k] \phi(s)^k = h_n(\phi(s)). \quad (2.11.9)$$

Die zweite Aussage folgt mit Induktion. □

BEWEIS DES SATZES 2.11.3. Wir machen uns zuerst klar wie die Funktion $\phi(s)$ aussieht. Wir nehmen an, dass weder $p_0 = 1$ noch $p_1 = 1$. (Diese zwei Fälle sind trivial. Im ersten Fall $X_2 = 0$, d.h. $\rho = 1$. Im zweiten, $X_k = 1$ für alle k , d.h. $\rho = 0$.) Die Funktion ϕ ist auf $[0, 1]$ wohldefiniert weil $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Daher auch $\phi(1) = 1$. Wegen $\phi'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} > 0$ ist ϕ streng monoton wachsend auf $[0, 1]$.

Weiter gilt es $\phi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2}$. Wenn $p_2 = p_3 = \dots = 0$, dann ist ϕ eine Gerade mit Anstieg $p_1 < 1$, d.h. 1 ist der einzige Fixpunkt von ϕ . In

diesem Fall es ist auch einfach zu sehen, dass die Population f.s. ausstirbt, $\rho = 1$. Ansonsten gilt $\phi'' > 0$ und ϕ ist strikt konvex. Daraus folgt, dass der Graph von ϕ außer im Punkt 1 keinen weiteren Schnittpunkt mit der Diagonalen hat, wenn $g'(1) \leq 1$. Wenn aber $\phi'(1) > 1$ gilt, dann gibt es genau einen Punkt $u \in [0, 1)$, wo der Graph die Diagonale schneidet. Für $s \in [0, u)$ gilt $\phi(s) > s$ und für $s \in (u, 1)$ gilt $g(s) < s$.

Wir zeigen jetzt dass $\rho = u$. Sei $q_n = P[X_n = 0]$, $n \geq 0$. Nach dem Lemma 2.11.4,

$$q_n = P[X_n = 0] = h_n(0) = \phi^{o_n}(0). \quad (2.11.10)$$

Wenn $X_n = 0$ ist, dann folgt daraus auch $X_{n+1} = 0$. Die Ereignisse $\{X_n = 0\}$ bilden eine aufsteigende Folge, sodass $q = P[\cup_{n \geq 0} \{X_n = 0\}] = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$. Also,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{o_n}(0). \quad (2.11.11)$$

Von (2.11.5) wissen wir, dass q ein Fixpunkt von ϕ ist. Da ϕ monoton wachsend ist, erhalten wir $\phi^{o_n}(0) \leq \phi^{o_n}(\rho) = \rho$. Das heißt $h_n(0) \leq \rho$ für alle n . Daraus ist ρ der kleinste Fixpunkt von ϕ , und den Satz ist gezeigt. \square

KAPITEL 3

Poissonprozesse

1. Definition und erste Eigenschaften

Wir diskutieren im diesen Kapitel die Poissonprozesse und ihre wichtigsten Eigenschaften. Bevor wir diese Diskussion anfangen, brauchen wir einige Definitionen, die allgemeine stochastische Prozesse betreffen.

DEFINITION 3.1.1. Sei $(Y_t)_{t \in [0, \infty)}$ ein stochastischer Prozess (in stetiger Zeit) definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Wir sagen, dass Y unabhängigen Zuwächse hat, falls für alle $k \geq 1$ und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ die Zufallsvariablen $(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})_{i=1, \dots, k}$ unabhängig sind.

Wir sagen, dass Y stationäre Zuwächse hat, falls für alle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ und $h > 0$ die Vektoren $(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})_{i=1, \dots, k}$ und $(Y_{t_i+h} - Y_{t_{i-1}+h})_{i=1, \dots, k}$ die gleiche Verteilung haben.

DEFINITION 3.1.2. Wir sagen, dass ein stochastischer Prozess $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Zählprozess (counting process) ist, falls seine Trajektorien $t \mapsto N_t(\omega)$ für jedes ω steigend, rechtsstetig und mit Werten in \mathbb{N} sind.

Für einen Zählprozess definieren wir die aufeinanderfolgenden Sprungzeiten $(S_i)_{i \geq 1}$ durch

$$S_1(\omega) = \inf\{t \geq 0 : N_t(\omega) > N_0(\omega)\} \leq \infty, \quad (3.1.1)$$

und induktiv für $k \geq 1$,

$$S_{k+1}(\omega) = \inf\{t \geq 0 : N_t(\omega) > N_{S_k(\omega)}(\omega)\} \leq \infty. \quad (3.1.2)$$

Wir benutzen die üblichen Konventionen: $\inf \emptyset = \infty$, und $S_{k+1} = \infty$ falls $S_k = \infty$. Daher haben wir

$$S_1(\omega) \leq S_2(\omega) \leq \dots \leq S_k(\omega) \leq \dots, \quad (3.1.3)$$

mit strikten Ungleichungen wenn die Sprungzeiten endlich sind, und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(\omega) = \infty. \quad (3.1.4)$$

Der folgende Satz gibt einige äquivalente Eigenschaften, die alle einen Poissonprozess charakterisieren.

SATZ 3.1.3. Sei $\lambda > 0$ und $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Zählprozess mit Sprunggröße 1 und $N_0 = 0$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

(a) N hat unabhängige und stationäre Zuwächse und für $t \rightarrow 0$

$$P[N_t = 1] = \lambda t + o(t), \quad P[N_t \geq 2] = o(t). \quad (3.1.5)$$

(b) N hat unabhängige und stationäre Zuwächse und N_t ist $\text{Poisson}(\lambda t)$ -verteilt.
(c) Die aufeinander folgenden Sprungzeiten S_i sind P -a.s. endlich und die Zufallsvariablen $T_i = S_i - S_{i-1}$ (mit $S_0 = 0$) sind u.i.v. $\text{exponenziell}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariablen.

(d) Für jedes $t > 0$ ist N_t $\text{Poisson}(\lambda t)$ -verteilt, und für $k \geq 1$, bedingt auf $N_t = k$ sind die Zufallsvariablen S_1, \dots, S_k verteilt wie eine geordnete Folge von k unabhängigen $\text{uniform}[0, t]$ -verteilten Zufallsvariablen, d.h. der Zufallsvektor (S_1, \dots, S_k) hat die Dichte

$$f(s_1, \dots, s_k) = k! t^{-k} \mathbf{1}\{0 < s_1 < \dots < s_k < t\} \quad \text{auf } \mathbb{R}^k. \quad (3.1.6)$$

DEFINITION 3.1.4. Der Poissonprozess mit Rate λ ist ein Zählprozess mit $N_0 = 0$, Sprunggröße 1, der die äquivalenten Eigenschaften des Satzes 3.1.3 erfüllt.

BEWEIS. (b) \implies (a): N_t ist $\text{Poisson}(\lambda t)$ -verteilt, daher

$$\begin{aligned} P[N_t = 1] &= e^{-\lambda t} \lambda t = \lambda t + o(t) && \text{für } t \rightarrow 0, \\ P[N_t = 2] &= 1 - e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \lambda t = o(t) && \text{für } t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

(a) \implies (b): Sei für $t > 0$ und $n \geq 0$

$$M_{n,t} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{N_{kt/n} - N_{(k-1)t/n} \geq 1\}. \quad (3.1.8)$$

Mit Hilfe der Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse sehen wir, dass $M_{n,t}$ die Binomialverteilung mit Parametern n und $P[N_{t/n} \geq 1]$ hat. Aus (a) folgt, dass

$$nP[N_{t/n} \geq 1] = n(\lambda t/n + o(t/n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda t. \quad (3.1.9)$$

Die übliche Approximation der Binomialverteilung durch die Poissonverteilung impliziert dass $M_{n,t}$ zur Poissonverteilung mit Parameter λt in Verteilung konvergiert. Weiter haben wir

$$\begin{aligned} P[N_t \neq M_{n,t}] &= P\left[\bigcup_{k=1}^n \{N_{kt/n} - N_{(k-1)t/n} \geq 2\}\right] \\ &\leq \sum_{k=1}^n P[N_{kt/n} - N_{(k-1)t/n} \geq 2] = no(t/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Daher ist N_t Poissonverteilt mit Parameter λt .

(b) \implies (c): Wir geben zuerst ein nicht-rigoroses Argument. Es ist leicht zu sehen, dass $P[T_1 > t] = P[N_t = 0] = e^{-\lambda t}$, also ist T_1 $\text{exponenziell}(\lambda)$ -verteilt. Weiter

$$\begin{aligned} P[T_2 > t | T_1 = s] &\sim P[N_{t+s} - N_s = 0 | N_u = 0, u < s, N_s = 1] \\ &\sim P[N_{t+s} - N_s = 0] = P[N_t = 0] = e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

wo wir die Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse benutzt haben. Also ist T_2 exponentiell verteilt, unabhängig von T_1 , und so weiter

Rigoros,

$$P[T_1 > t] = P[N_t = 0] = e^{-\lambda t} \quad \text{für } t > 0. \quad (3.1.12)$$

Daher ist T_1 P -f.s. endlich und exponentiell(λ)-verteilt. Weiter, für $0 \leq s_1 \leq t_1 < s_2 \leq t_2$, mit Hilfe der Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse,

$$\begin{aligned} P[s_1 < S_1 \leq t_1, s_2 < S_2 \leq t_2] &= P[N_{s_1} = 0, N_{t_1} - N_{s_1} = 1, N_{s_2} - N_{t_1} = 0, N_{t_2} - N_{s_2} \geq 1] \\ &= e^{-\lambda s_1} \times \lambda(t_1 - s_1)e^{-\lambda(t_1 - s_1)} \times e^{-\lambda(s_2 - t_1)} \times (1 - e^{-\lambda(t_2 - s_2)}) \\ &= \lambda(t_1 - s_1)(e^{-\lambda s_2} - e^{-\lambda t_2}) \\ &= \int_{s_1 < y_1 \leq t_1} \int_{s_2 < y_2 \leq t_2} \lambda^2 e^{-\lambda y_2} dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Wir lassen $t_2 \rightarrow \infty$ und dann $s_2 \rightarrow \infty$ streben, und finden, dass $P[s_1 < S_1 \leq t_1, S_2 = \infty] = 0$ und daher $P[0 < S_1 < S_2 < \infty] = 1$. Wir sehen auch, dass der Vektor (S_1, S_2) die Dichte

$$f(y_1, y_2) = \lambda^2 e^{-\lambda y_2} \mathbf{1}\{0 < y_1 < y_2\} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \quad (3.1.14)$$

hat. Mit ähnlichen Argumenten bekommen wir für jedes $k \geq 1$ die Dichte des Vektors (S_1, \dots, S_k) ,

$$f(y_1, \dots, y_k) = \lambda^k e^{-\lambda y_k} \mathbf{1}\{0 < y_1 < \dots < y_k\}. \quad (3.1.15)$$

Sei jetzt $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ definiert durch

$$h(t_1, \dots, t_k) = (t_1, t_1 + t_2, \dots, t_1 + \dots + t_k), \quad (3.1.16)$$

und μ_k das Produkt-Maß auf \mathbb{R}^k mit Dichte $\prod_{i=1}^k \lambda e^{-\lambda t_i} \mathbf{1}\{t_i \geq 0\}$. Das Bild dieses Maßes unter Abbildung h (die Determinante 1 hat) ist das Maß mit Dichte $\lambda^k e^{-\lambda y_k} \mathbf{1}\{0 < y_1 < \dots < y_k\}$ von (S_1, \dots, S_k) . Daher ist $(T_1, \dots, T_k) = h^{-1}(S_1, \dots, S_k)$ μ_k -verteilt und (c) folgt.

(c) \implies (d): Sei $g(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{1}\{t > 0\}$ die exponentielle Dichte. Da $S_2 = T_1 + T_2$, hat S_2 die Dichte $g \star g(t) = \int_0^t g(t-s)g(s)ds = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \mathbf{1}\{t > 0\}$. (Gamma-Dichte). Induktiv besitzt S_{k+1} die Dichte

$$g^{*(k+1)}(g) = g^{*k} \star g(t) = \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} \mathbf{1}\{t \geq 0\} \quad (3.1.17)$$

(d.h. dass S_k ist Gamma(k, λ)-verteilt). Daher,

$$P[N_t = 0] = P[S_1 > t] = e^{-\lambda t} \quad (3.1.18)$$

und für $k \geq 1$

$$P[N_t = k] = P[S_k \leq t, S_{k+1} > t] = P[S_k \leq t] - P[S_{k+1} \leq t] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad (3.1.19)$$

was man mit Hilfe von (3.1.17) nach einer partiellen Integration bekommt. N_t ist also Poissonverteilt.

Sei h wie oben. Dann ist $(S_1, \dots, S_k) = h(T_1, \dots, T_k)$. Daher folgt wie oben dass (S_1, \dots, S_{k+1}) Dichte $\lambda^{k+1} e^{-\lambda s_{k+1}} \mathbf{1}\{0 < s_1 < \dots < s_{k+1}\}$ besitzt. Daher ist die Dichte von (S_1, \dots, S_{k+1}) gegeben $N_t = k$ die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} f(s_1, \dots, s_{k+1} | N_t = k) &= \frac{1}{P[N_t = k]} \lambda^{k+1} e^{-\lambda s_{k+1}} \mathbf{1}\{0 < s_1 < \dots < s_k \leq t < s_{k+1}\} \\ &= \lambda e^{-\lambda s_{k+1}} \frac{e^{-\lambda t}}{t^k} k! \mathbf{1}\{0 < s_1 < \dots < s_k \leq t < s_{k+1}\}. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Nach einer Integration über $s_{k+1} \in (t, \infty)$ finden wir die bedingte Dichte von (S_1, \dots, S_k) ,

$$\frac{k!}{t^k} \mathbf{1}\{0 < s_1 < \dots < s_k < t\}, \quad (3.1.21)$$

und (d) folgt.

(d) \implies (b): Wir brauchen ein Lemma.

LEMMA 3.1.5. *Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, und $p_i = \lambda_i / \lambda$. Für \mathbb{N} -wertige Zufallsvariablen Z_1, \dots, Z_n und $Z = Z_1 + \dots + Z_n$ sind die folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) Z_1, \dots, Z_n sind unabhängig Poisson(λ_i)-verteilt

(ii) Z ist Poisson(λ)-verteilt und bedingt auf $Z = k$, $k \geq 1$, ist (Z_1, \dots, Z_k) multinomial($k; p_1, \dots, p_n$)-verteilt, d.h.

$$P[Z_1 = j_1, \dots, Z_n = j_n | Z = k] = \frac{k!}{j_1! \dots j_n!} p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n} \quad (3.1.22)$$

für $0 \leq j_1, \dots, j_n$ mit $j_1 + \dots + j_n = k$.

BEWEIS. (i) \implies (ii): Von (i) sehen wir, dass

$$P[Z_1 = j_1, \dots, Z_n = j_n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda_1^{j_1} \dots \lambda_n^{j_n}}{j_1! \dots j_n!} \quad (3.1.23)$$

Daher, für $k \geq 0$,

$$P[Z = k] = e^{-\lambda} \sum_{j_1 + \dots + j_n = k} \frac{\lambda_1^{j_1} \dots \lambda_n^{j_n}}{j_1! \dots j_n!} = \frac{e^{-\lambda}}{k!} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (3.1.24)$$

d.h. Z ist Poisson(λ)-verteilt. Die Behauptung (3.1.22) folgt direkt von (3.1.23), (3.1.24).

(ii) \implies (i): Für $j_1, \dots, j_n \geq 0$ mit $j_1 + \dots + j_n = k$

$$P[Z_1 = j_1, \dots, Z_n = j_n] = P[Z = k] P[Z_1 = j_1, \dots, Z_n = j_n | Z = k]. \quad (3.1.25)$$

Z ist Poisson(λ)-verteilt und (3.1.22) erfüllt. Wenn wir diese zwei Eigenschaften in (3.1.25) benutzen, folgt (i) direkt. \square

Wir können jetzt die letzte Implikation des Satzes zeigen. Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, $k \geq 1$ und $j_1, \dots, j_n \geq 0$ mit $j_1 + \dots + j_n = k$. Dann, für unabhängige uniform-verteilte Zufallsvariablen U_i auf $[0, t]$, haben wir

$$\begin{aligned} P[N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = j_i \forall i = 1, \dots, n | N_t = k] \\ = P\left[\sum_{l=1}^k \mathbf{1}\{U_l \in (t_{i-1}, t_i]\} = j_i \forall i = 1, \dots, n\right] \quad (3.1.26) \\ = \frac{k!}{j_1! \dots j_n!} \left(\frac{t_1 - t_0}{t}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{t_n - t_{n-1}}{t}\right)^{j_n}. \end{aligned}$$

Daher sehen wir, dass $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$ bedingt auf $N_t = k$ multinomial mit Parametern $(k, t_1/t, \dots, t_n - t_{n-1}/t)$ verteilt sind, und (b) folgt von Lemma 3.1.5. \square

2. Poissonprozess als Markovkette

Ein Poissonprozess ist wahrscheinlich das einfachste Beispiel einer Markovkette in stetiger Zeit. Der folgende Satz zeigt die Markoveigenschaft.

SATZ 3.2.1 (Markoveigenschaft). *Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess mit Rate $\lambda > 0$, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ und $s \geq 0$. Dann*

$$E[f(N_{t+s}) | N_{t_0}, \dots, N_{t_n}] = R_s f(N_t), \quad P\text{-f.s.}, \quad (3.2.1)$$

wobei für $n \geq \mathbb{N}$

$$R_s f(n) = \sum_{m \geq n} f(m) e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{m-n}}{(m-n)!}. \quad (3.2.2)$$

$(R_s)_{s \geq 0}$ ist eine Halbgruppe von beschränkten Operatoren definiert auf $L^\infty(\mathbb{N})$.

BEWEIS. Mit Hilfe der Eigenschaft (b) in Satz 3.1.3

$$\begin{aligned} E[f(N_{t+s}) | N_{t_0}, \dots, N_{t_n}] &= E[f(N_{t+s} - N_t + N_t) | N_{t_0}, \dots, N_{t_n}] \\ &\stackrel{P\text{-f.s.}}{=} \sum_{k \geq 0} f(k + N_t) e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = R_s f(N_t). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Sei jetzt $s, t \geq 0$, $k \geq 0$ und f wie angenommen. Dann

$$\begin{aligned} R_s(R_t(f))(k) &= R_s\left(\sum_{n \geq k} f(n) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}\right)(k). \\ &= e^{-\lambda s} \sum_{m \geq k} \frac{(\lambda s)^{m-k}}{(m-k)!} \sum_{n \geq m} f(n) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{n \geq m \geq k} f(n) \frac{(\lambda t)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{(\lambda s)^{m-k}}{(m-k)!} \\ &= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{n \geq k} f(n) \frac{(\lambda(s+t))^{n-k}}{(n-k)!} = R_{s+t} f(k), \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

und die zweite Aussage des Satzes folgt. \square

BEMERKUNG 3.2.2. Wir berechnen jetzt den *Generator der Halbgruppe* (R_s) definiert durch

$$\begin{aligned} Lf(n) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (R_t f - f)(n) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (e^{-\lambda t} - 1)f(n) + \lambda e^{-\lambda t} f(n+1) + \sum_{k \geq 2} \frac{e^{-\lambda t} \lambda^k t^{k-1}}{k!} f(n+k) \\ &= \lambda(f(n+1) - f(n)). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

L ist ein beschränkter Operator auf $L^\infty(\mathbb{N})$.

3. Stationäre Poissonprozesse auf \mathbb{R}

Wir wollen jetzt den Poissonprozess auf ganz \mathbb{R} definieren. Daher betrachten wir zwei unabhängige Poissonprozesse $(N_t^+)_{t \geq 0}$ und $(N_t^-)_{t \geq 0}$ mit respektiven Sprungzeiten (S_i^+) , (S_i^-) . Von diesen Sprungzeiten erzeugen wir eine von \mathbb{Z} indizierte Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ durch

$$S_k = \begin{cases} S_k^+, & \text{falls } k \geq 1, \\ -S_{1+|k|}^-, & \text{falls } k \leq 0. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Die Zufallsvariablen $(S_i - S_{i-1})_{i \neq 1}$ sind dann u.i.v. $\text{exponenziell}(\lambda)$.

Der Zeitanfang 0 spielt eine spezielle Rolle, weil $S_0 < 0 < S_1$. Wir wählen jetzt $t > 0$ (der Fall $t < 0$ ist ähnlich) und lassen t die Rolle des Zeitanfangs: Wir definieren

$$\tilde{S}_k = S_{N_t^+ + k} - t, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.3.2)$$

TODO picture

SATZ 3.3.1 (Stationarität). *Die Folge $(\tilde{S}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ hat die gleiche Verteilung wie $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.*

BEWEIS. Sei $N_{u-}^+ := \lim_{v \uparrow u} N_v^+$ und setze

$$\tilde{N}_s^+ = N_{t+s}^+ - N_t^+, \quad s \geq 0 \quad (3.3.3)$$

$$\tilde{N}_s^- = \begin{cases} N_t^+ - N_{(t-s)-}^+, & 0 \leq s < t \\ N_s^- + N_t^+, & s \geq t. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Merke, dass $\tilde{N}_0^+ = 0$ aber \tilde{N}_0^- kann möglicherweise auch 1 sein, falls t eine Sprungzeit von N_t^+ ist (was mit Wahrscheinlichkeit 0 passiert). Falls t nicht eine Sprungzeit von N_t^+ ist, dann sind $(\tilde{S}_k)_{k \geq 1}$ die Sprungzeiten von \tilde{N}^+ und $(-\tilde{S}_{1-k})_{k \geq 1}$ die Sprungzeiten von \tilde{N}^- . \tilde{N}^+ und \tilde{N}^- haben beide unabhängige Zuwächse und die Zufallsvariablen \tilde{N}_s^+ , \tilde{N}_s^- sind $\text{Poisson}(\lambda s)$ -verteilt. Von Satz 3.1.3 folgt dann, dass \tilde{N}^+ und $\tilde{N}^- \mathbf{1}\{\tilde{N}_0^- = 0\}$ zwei unabhängige Poissonprozesse mit Rate λ sind. Weil

(\tilde{S}_i^+) , (\tilde{S}_i^-) die Sprungzeiten dieser Prozesse sind, hat die Folge $(\tilde{S}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ die gleiche Verteilung wie $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. \square

Wir sehen von dem letzten Satz, dass der Zeitpunkt wovon man den Poissonprozess beobachtet eine spezielle Rolle spielt. Genauer gesagt ist das Intervall zwischen zwei Sprüngen, das ein gegebenes t enthält, "länger" als die anderen Intervalle zwischen den Sprüngen. Der folgende Korollar ist eine andere Version dieser Aussage. Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess mit Rate λ und setze (siehe Abbildung 2).

$$\begin{aligned} A_t &= t - S_{N_t} && \text{'age'-Prozess} \\ E_t &= S_{N_t+1} - t && \text{'excess'-Prozess} \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

KOROLLAR 3.3.2. *Sei (N_t) ein Poissonprozess mit Rate λ und $t > 0$. Dann hat (A_t, E_t) die gleiche Verteilung wie $(U \wedge t, V)$, wobei U, V zwei unabhängige exponentielle Zufallsvariablen mit Parameter λ sind.*

BEWEIS. Es reicht $(N_s)_{s \geq 0}$ wie in Satz 3.3.1 auf $s \in \mathbb{R}$ zu ergänzen, und den Zeitanfang auf t zu verschieben. Mit der Notation des Beweises von Satz 3.3.1, haben wir $A_t = (-\tilde{S}_0) \wedge t$ und $E_t = \tilde{S}_1$, und der Korollar folgt. \square

4. Superposition und Verdünnung von Poissonprozessen

Wir diskutieren hier einige natürliche Operationen mit den Poissonprozessen, die erlauben von einem oder mehreren Poissonprozessen neue Prozesse herzustellen.

DEFINITION 3.4.1 (Markierter Poissonprozess). Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess mit Rate λ und Sprungzeiten $(S_i)_{i \geq 0}$, und sei (X_i) eine Folge von u.i.v., im Allgemeinen (S, \mathcal{S}) -wertigen Zufallsvariablen mit Marginal μ . Die Folge $(S_i, X_i)_{i \geq 0}$ heißt eine Markierung des Poissonprozess $(N_t)_{t \geq 0}$.

4.1. Verdünnung. Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess markiert mit einer Folge von Bernoulli Zufallsvariablen $(X_i)_{i \geq 1}$ mit Erfolgsparameter p . Wir definieren zwei neue Prozesse:

$$\begin{aligned} N_t^0 &= \sum_{i \geq 0} \mathbf{1}\{S_i \leq t, X_i = 0\}, && t \geq 0 \\ N_t^1 &= \sum_{i \geq 0} \mathbf{1}\{S_i \leq t, X_i = 1\}, && t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

BEMERKUNG 3.4.2. (a) Der so markierte Poissonprozess (N_t) kann z.B. die Ankünfte der Kunden in einer Warteschlange beschreiben, die zwei Typen, 0 oder 1, haben. N_t^i beschreibt dann die Ankünfte der Kunden mit Typ i .

(b) Offenbar gilt $N_t = N_t^0 + N_t^1$.

SATZ 3.4.3 (Verdünnung). *Die Prozesse $(N_t^1)_{t \geq 0}$ und $(N_t^0)_{t \geq 0}$ sind zwei unabhängige Poissonprozesse mit respektiven Raten $\lambda_1 = p\lambda$ und $\lambda_0 = (1-p)\lambda$.*

Zu dem Beweis brauchen wir zwei Lemmas. Das erste gibt zwei wohlbekannte Eigenschaften der Poissonverteilung.

LEMMA 3.4.4. (a) Seien X und Y zwei unabhängige Poissonzufallsvariablen mit Parametern λ und μ . Dann ist $X + Y$ eine Poissonzufallsvariable mit Parameter $\lambda + \mu$.

(b) Sei X eine Poissonzufallsvariable mit Parameter λ und, gegeben X , M eine binomial-verteilte Zufallsvariable mit Parametern (X, p) . Dann sind M und $X - M$ zwei unabhängige Poissonzufallsvariablen mit Parametern $p\lambda$ und $(1 - p)\lambda$.

BEWEIS. Den Beweis kann man mit elementaren Methoden geben. Wir benutzen hier aber den schon bekannten Charakterisierungssatz der Poissonprozesse.

(a) Sei (N_t) ein Poissonprozess mit Rate 1. Setze $\tilde{X} = N_\lambda$ und $\tilde{Y} = N_{\mu+\lambda} - N_\lambda$. Dann, nach Satz 3.1.3, $(X, Y) \stackrel{d}{=} (\tilde{X}, \tilde{Y})$ und $\tilde{X} + \tilde{Y} = N_{\lambda+\mu}$. $X + Y \stackrel{d}{=} \tilde{X} + \tilde{Y}$ hat daher die gesuchte Eigenschaft.

(b) Ähnlich, sei (N_t) ein Poissonprozess mit Rate λ und $\tilde{M} = N_p$ die Anzahl der Sprünge von N vor dem Zeitpunkt p . Von Satz 3.1.3(d) folgt, dass gegeben N_1 , ist M Binomial(N_1, p)-verteilt, d.h. $(X, M) \stackrel{d}{=} (N_1, \tilde{M})$. Deswegen $(M, X - M) \stackrel{d}{=} (\tilde{M}, N_1 - \tilde{M}) = (N_p, N_1 - N_p)$. Die Aussage folgt dann wieder von Satz 3.1.3. \square

Das zweite Lemma, das wir zum Beweis des Satzes 3.4.3 brauchen, gibt uns mehr als nötig, aber wird später benutzt.

LEMMA 3.4.5. Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess mit Rate λ und $(X_i)_{i \geq 0}$ eine (S, \mathcal{S}) -wertige Markierung mit Marginal μ . Sei $\nu = \lambda dt \otimes \mu$ ein Maß auf $[0, \infty) \times S$, und, für $A \in \mathcal{B}([0, \infty) \times S)$ mit $A \subset [0, T] \times S$ für ein $T > 0$, sei

$$N(A) = \sum_{i \geq 0} \mathbf{1}\{(S_i, X_i) \in A\}. \quad (3.4.2)$$

(a) $N(A)$ ist eine Poissonzufallsvariable mit Parameter $\nu(A)$.

(b) Seien $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}([0, \infty) \times S)$, $A_1, \dots, A_k \subset [0, T] \times S$, paarweise disjunkte Mengen. Dann sind $N(A_1), \dots, N(A_k)$ unabhängig.

BEWEIS. (a) Sei N eine Poissonzufallsvariable mit Parameter λT , $(U_i)_{i \geq 1}$ auf $[0, T]$ uniformverteilte Zufallsvariablen, und (X_i) die obige Markierung. Von dem Charakterisierungssatz 3.1.3(d) ist einfach zu sehen, dass

$$N(A) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}\{(U_i, X_i) \in A\}. \quad (3.4.3)$$

Die Zufallsvariablen (U_i, X_i) sind u.i.v. Daher, gegeben $N = k$, ist $N(A)$ binomialverteilt mit Parametern $(k, \nu(A)/\lambda T)$. Die Aussage (a) folgt dann von Lemma 3.4.4(b).

(b) Das Argument ist ähnlich. Wie vorher,

$$(N(A_j))_{j=1, \dots, k} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}\{(U_i, X_i) \in A_j\} \right)_{j=1, \dots, k}. \quad (3.4.4)$$

Induktiven Anwendung Lemmas 3.4.4(b) impliziert dann die Aussage (Übung!) \square

BEWEIS DES SATZES 3.4.3. Wir sehen, dass N^0 und N^1 Zählprozesse mit Sprunggröße 1 sind. Mit der Notation des Lemma 3.4.5, für $i \in \{0, 1\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, und $k \leq n$

$$N_{t_k}^i - N_{t_{k-1}}^i = N((t_{k-1}, t_k] \times \{i\}). \quad (3.4.5)$$

Die Mengen auf der rechten Seite sind paarweise disjunkt für $i \in \{0, 1\}$ und $k \leq n$. Nach Lemma 3.4.5 haben N^0 und N^1 unabhängige Poisson-verteilte Zuwächse; die Parameter bestimmt man von $\nu = \lambda dt \otimes (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)$. Die Aussage des Satzes folgt dann von Satz 3.1.3. \square

4.2. Superposition. Seien (N_t^0) und (N_t^1) zwei unabhängige Poissonprozesse mit respektiven Raten λ_0 und λ_1 , und sei (N_t) der Superposition-Prozess

$$N_t = N_t^0 + N_t^1, \quad t \geq 0. \quad (3.4.6)$$

Wir bezeichnen mit S_i^0, S_i^1 die respektiven Sprünge von N^0 und N^1 . Es folgt von Satz 3.1.3, dass

$$P[S_i^0 \neq S_j^1 \text{ für alle } i, j \in \mathbb{N}] = 1. \quad (3.4.7)$$

Wir können daher die Sprungzeiten $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von (N_t) wie eine f.s. disjunkte Vereinigung schreiben:

$$\{S_i : i \in \mathbb{N}\} = \{S_i^0 : i \in \mathbb{N}\} \cup \{S_i^1 : i \in \mathbb{N}\}. \quad (3.4.8)$$

Schlussendlich definieren wir Zufallsvariablen X_i durch

$$X_i = 1 \text{ falls } S_i \in \{S_i^1 : i \in \mathbb{N}\}, X_i = 0 \text{ falls } S_i \in \{S_i^0 : i \in \mathbb{N}\}. \quad (3.4.9)$$

Von (3.4.7) folgt, dass X_i 's f.s. wohldefiniert sind.

SATZ 3.4.6 (Superposition). *Der Prozess $(N_t)_{t \geq 0}$ ist (nach einer Modifikation auf einer Null-Menge) Poissonprozess mit Rate $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, und $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine Markierung dieses Prozesses mit Bernoulli Marginal mit Parameter $p = \lambda_1/\lambda$.*

BEWEIS. Es ist einfach zu sehen, dass $N_t = N_t^0 + N_t^1$ ein Prozess mit unabhängigen und stationären Zuwächsen ist. N_t kann aber (mit Wahrscheinlichkeit null) Sprünge der Größe 2 haben. Wenn das passiert, setzen wir $N_t \equiv 0$. Diese Modifikation ändert nicht die Verteilung von N und macht davon einen Zählprozess mit Sprunggröße 1. Nach Lemma 3.4.4 ist N_t Poisson(λt)-verteilt. Daher ist N_t ein Poissonprozess mit Rate λ , nach Satz 3.1.3.

Die Tatsache, dass $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ u.i.v. Bernoulli(p) sind, lassen wir als Übung. \square

5. Inhomogene Poissonprozesse

In vielen praktischen Situationen ist die Zeithomogenität des Poissonprozesses keine realistische Annahme.

DEFINITION 3.5.1. Sei $\rho : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ eine stetige Funktion. Ein Zählprozess $(N_t)_{t \geq 0}$ mit $N_0 = 0$ und Sprunggröße 1 heißt ein Poissonprozess mit (momentaner) Rate ρ , falls er unabhängige Zuwächse hat und uniform für beschränktes t , für $h \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} P[N_{t+h} - N_t = 1] &= \rho(t)h + o(h), \\ P[N_{t+h} - N_t \geq 2] &= o(h). \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Wir geben jetzt zwei Konstruktionen solcher Prozesse.

5.1. Konstruktion via Zeitwechsel. Sei R die Funktion

$$R(t) = \int_0^t \rho(s) ds, \quad t \geq 0, \tag{3.5.2}$$

und $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess mit Rate $\lambda = 1$.

LEMMA 3.5.2. Sei $N_t := \tilde{N}_{R(t)}$. Dann ist $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess mit Rate ρ .

BEWEIS. Merke, dass (N_t) unabhängige Zuwächse hat (weil (\tilde{N}_t) unabhängige Zuwächse hat). Weiter, für $h \rightarrow 0$, uniform für $t \leq T$,

$$\begin{aligned} P[N_{t+h} - N_t = 1] &= P[\tilde{N}_{R(t+h)} - \tilde{N}_{R(t)} = 1] \\ &= (R(t+h) - R(t))e^{-R(t+h)+R(t)} \\ &= \int_t^{t+h} \rho(s) ds e^{-\int_t^{t+h} \rho(s) ds} \\ &= \rho(t)h + o(h). \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Ähnlich zeigt man, dass $P[N_{t+h} - N_t \geq 2] = o(h)$. Daher ist (N_t) ein Poissonprozess mit Rate ρ . □

5.2. Konstruktion via Verdünnung. Wenn die Rate ρ beschränkt ist, d.h.

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \rho(t) \leq C < \infty, \tag{3.5.4}$$

dann kann man eine alternative Konstruktion verwenden: Sei jetzt (\tilde{N}_t) ein Poissonprozess mit Rate C . Wir markieren diesen Prozess mit einer Folge $(X_i)_{i \geq 0}$ von u.i.v. auf $[0, 1]$ uniformverteilten Zufallsvariablen. Wir definieren einen neuen Prozess

$$N_t = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}\{\tilde{S}_i \leq t, X_i \leq \rho(\tilde{S}_i)/C\}, \tag{3.5.5}$$

wobei \tilde{S}_i die Sprungzeiten des Prozesses (\tilde{N}_t) sind.

LEMMA 3.5.3. $(N_t)_{t \geq 0}$ ist ein inhomogener Poissonprozess mit Rate ρ .

BEWEIS. Wir benutzen Lemma 3.4.5. Sei, für $A \in \mathcal{B}([0, \infty) \times [0, 1])$, $N(A) = \sum_{i \geq 0} \mathbf{1}\{(\tilde{S}_i, X_i) \in A\}$. Dann, für $s \leq t$, $N_t - N_s = N(A_{s,t})$ mit $A_{s,t} = \{(u, x) : s < u \leq t, x \leq \rho(u)/C\}$. Von Lemma 3.4.5 sehen wir, dass N_t unabhängige Zuwächse hat, und auch (3.5.1) erfüllt ist. \square

BEMERKUNG 3.5.4. Die Uniformität in der Definition des inhomogenen Poissonprozesses spielt eine wichtige Rolle. Um dies zu sehen sei $\rho \equiv \lambda > 0$, N_t ein (üblicher) Poissonprozess mit Rate λ und

$$\tilde{N}_t = N_t + \lfloor t \rfloor, \quad t \geq 0. \quad (3.5.6)$$

Es ist einfach zu sehen, dass (\tilde{N}_t) die Bedingung (3.5.1) für *jedes* t erfüllt, die Konvergenz ist aber nicht uniform für $t \leq T$. \tilde{N}_t ist auch kein Poissonprozess, da die Verteilung von N_t im Allgemeinen nicht Poisson ist.

Wir zeigen jetzt, dass die inhomogene Poissonprozess viele Eigenschaften haben, die denen von üblichen Poissonprozessen entsprechen (siehe Satz 3.1.3).

SATZ 3.5.5. Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein inhomogener Poissonprozess mit Rate $\rho(\cdot)$. (a) $N_t - N_s$ ist eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter $R(t) - R(s)$, für alle $0 \leq s < t$.

(b) Gegeben $\{N_t = k\}$, $k \geq 1$, ist die Verteilung von (S_1, \dots, S_k) gegeben durch

$$\mu(ds_1 \dots ds_k) = k! \rho(s_1) \dots \rho(s_k) R(t)^{-k} \mathbf{1}\{s_1 < \dots < s_k\} ds_1 \dots ds_k. \quad (3.5.7)$$

BEWEIS. (a) Die Aussage ist offensichtlich von der Konstruktion des inhomogenen Poissonprozess via Zeitwechsel (wenn man annimmt, dass jeder inhomogene Poissonprozess ein Zeitwechsel eines üblichen Poissonprozess mit Rate 1 ist, was wir strikt gesagt nicht gezeigt haben): Sei (\tilde{N}_t) ein Poissonprozess mit Rate $\lambda = 1$. Dann kann man $N_t = \tilde{N}_{R(t)}$ schreiben, und daher $N_t - N_s = \tilde{N}_{R(t)} - \tilde{N}_{R(s)}$ und (a) folgt.

Ohne diese Annahme, kann man eine ähnliche Methode wie im Beweis von Satz 3.1.3 benutzen. Sei

$$M_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{N_{s+(t-s)\frac{k}{n}} - N_{s+(t-s)\frac{(k-1)}{n}} \geq 1\}. \quad (3.5.8)$$

M_n ist eine Summe von unabhängigen Bernoulli Zufallsvariablen, die eventuell unterschiedliche Erfolgsparameter haben. Die charakteristische Funktion von M_n ist

$$\phi_n(z) = E[\exp(izM_n)] = \prod_{i=1}^k \left(1 + p_{n,k}(1 - e^{iz})\right), \quad z \in \mathbb{R}, \quad (3.5.9)$$

wobei $p_{n,k} = P[N_{s+(t-s)\frac{k}{n}} - N_{s+(t-s)\frac{(k-1)}{n}} \geq 1]$. Mit (3.5.1) haben wir

$$\sup_{1 \leq k \leq n} p_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n p_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_s^t \rho(u) du = R(t) - R(s). \quad (3.5.10)$$

Daher, $\phi_n(z) = \exp\{\sum_{k=1}^n \log(1 + p_{n,k}(e^{iz} - 1))\}$, und

$$\left| \sum_{k=1}^n \log(1 + p_{n,k}(e^{iz} - 1)) - \sum_{k=1}^n p_{n,k}(e^{iz} - 1) \right| \leq C \sum_{k=1}^n p_{n,k}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.5.11)$$

Das zeigt, dass für $z \in \mathbb{R}$, $\phi_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\{(R(t) - R(s))(e^{iz} - 1)\}$, was die charakteristische Funktion einer Poissonverteilten Zufallsvariable mit Parameter $R(t) - R(s)$ ist. Daher konvergiert M_n in Verteilung zu einer solchen Zufallsvariable.

Das Argument das $P[N(t) - N(s) \neq M_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ist analog zum Beweis von Satz 3.1.3 und wird hier nicht wiederholt. Es folgt dass $N(t) - N(s)$ eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter $R(t) - R(s)$ ist.

(b) Für $k \geq 1$ und $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_k < t_k \leq t$ haben wir

$$\begin{aligned} & P[s_i < S_i \leq t_i \forall i \leq k | N_t = k] \\ &= P[s_i < S_i \leq t_i \forall i \leq k, S_{k+1} > t] / P[N_t = k] \\ &= P \left[\begin{array}{l} N_{s_1} = 0, N_{t_1} - N_{s_1} = 1, \\ N_{s_2} - N_{t_1} = 0, N_{t_2} - N_{s_2} = 1, \dots, \\ N_{t_k} - N_{s_k} = 1, N_t - N_{t_k} = 0 \end{array} \right] / P[N_t = k]. \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Mit Hilfe der Unabhängigkeit der Zuwächse und des Teils (a) des Satzes kann man beide Wahrscheinlichkeiten explizit ausrechnen und findet

$$= k! \prod_{k=1}^n (R(t_i) - R(s_i)) R(t)^{-k} = \mu((s_1, t_1] \times \dots \times (s_k, t_k]). \quad (3.5.13)$$

Die Aussage (b) folgt, weil die Maße von k -dimensionalen Intervallen $(s_1, t_1] \times \dots \times (s_k, t_k]$ die Verteilung von (S_1, \dots, S_k) eindeutig bestimmen. \square

6. Abstrakte Poissonpunktprozesse

Wir haben gesehen, dass man zu einem (inhomogenen) Poissonprozess auf \mathbb{R}_+ eine ‘zufällige Menge’ von Punkten auf \mathbb{R}_+ assoziieren kann, nämlich die Menge der Sprungzeiten $(S_i, i \geq 1)$. Diese Menge von Punkten kann man auch mit einem Maß ξ auf $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(R_+))$ beschreiben, das ein Atom von Größe 1 auf jedem Punkt S_i hat,

$$\xi(dx) = \sum_{i \geq 1} \delta_{S_i}(dx). \quad (3.6.1)$$

Anders gesagt ist ξ ein Lebesgue-Stieltjes Maß assoziiert zu N_t , oder N_t ist ‘Verteilungsfunktion von ξ ’. Einen Poissonprozess auf \mathbb{R} kann man daher wie ein ‘zufälliges Maß’ ξ auf \mathbb{R} ansehen. Die zwei wichtigen Eigenschaften dieses Maßes sind

- Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit $\int_A \rho(s) ds < \infty$ ist $\xi(A)$ eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\int_A \rho(s) ds$.
- Wenn A_1, \dots, A_k paarweise disjunkte messbare Mengen sind, dann sind die Zufallsvariablen $\xi(A_1), \dots, \xi(A_k)$ unabhängig.

Der Vorteil dieser Ansicht ist, dass man es auf einen beliebigen messbaren Raum verallgemeinern kann. Wir müssen allerdings zuerst klären, was ein zufälliges Maß ist.

Sei (S, \mathcal{S}) ein beliebiger messbarer Raum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}(S)$ den Raum von allen signierten σ -endlichen¹ Maßen auf (S, \mathcal{S}) . Wir statten $\mathcal{M}(S)$ mit einer σ -Algebra \mathcal{F}_S aus, wobei

$$\mathcal{F}_S = \left\{ \begin{array}{l} \text{die kleinste } \sigma\text{-Algebra, so dass die Funktionen} \\ \mathcal{M}(S) \ni \xi \mapsto \xi(B) \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), B \in \mathcal{S}, \text{ messbar} \\ \text{sind.} \end{array} \right\} \quad (3.6.2)$$

Ein *zufälliges Maß* ist dann eine messbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum in den messbaren Raum $(\mathcal{M}(S), \mathcal{F}_S)$.

Sei weiter $\mathcal{M}_p(S) \subset \mathcal{M}(S)$ der Raum aller Maße auf S , die nur atomisch sind und alle Atome ein ganzzahliges Maß haben,

$$\mathcal{M}_p(S) = \left\{ \xi \in \mathcal{M}(S) : \xi(ds) = \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}(ds) \text{ für } N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, x_1, x_2, \dots \in S \right\}. \quad (3.6.3)$$

Ein *Punktprozess* ist ein zufälliges Maß mit Werten in $\mathcal{M}_p(S)$.

Wir können jetzt einen allgemeinen Poissonprozess definieren.

DEFINITION 3.6.1. Sei μ ein σ -endliches Maß auf (S, \mathcal{S}) . Ein Poissonpunktprozess mit Intensitätsmaß μ ist ein Punktprozess ξ mit folgenden zwei Eigenschaften

- Für jede messbare Menge $A \subset S$ mit $\mu(A) < \infty$ ist $\xi(A)$ eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\mu(A)$.
- Wenn $A_1, \dots, A_k \subset S$ paarweise disjunkten messbaren Mengen sind, dann sind die Zufallsvariablen $\xi(A_1), \dots, \xi(A_k)$ unabhängig.

BEMERKUNG 3.6.2. Wenn wir diese Definition mit der obigen Diskussion vergleichen, sehen wir, dass $\rho(s)ds$ die Rolle des Intensitätsmaßes μ spielt.

Wir beschreiben jetzt die Konstruktion des Poissonpunktprozesses: Wir nehmen zuerst an, dass μ endlich ist, $\mu(S) < \infty$. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem wir eine Poissonverteilte Zufallsvariable N mit Parameter $\mu(S)$ und eine u.i.v. Folge von S -wertigen Zufallsvariablen $(S_i)_{i \geq 1}$ mit Marginal $\mu(\cdot)/\mu(S)$ definieren.

LEMMA 3.6.3. *Das zufällige Maß $\xi = \sum_{i=1}^N \delta_{S_i}$ ist ein Poissonpunktprozess mit Intensitätsmaß μ .*

ÜBUNG 3.6.4. Zeigen Sie das Lemma und verallgemeinern Sie die Konstruktion auf den Fall wenn $\mu(S) = \infty$ (nutzen Sie, dass μ σ -endlich ist).

¹Ein Maß ist σ -endlich, wenn eine höchstens abzählbare Partition $(A_i)_{i \geq 1}$ von S existiert, s.d. $\mu(A_i) < \infty$ für alle $i \geq 1$.

KAPITEL 4

Markovketten in stetiger Zeit

1. Definition

In diesem Kapitel behandeln wir die Markovketten in stetiger Zeit. Wir werden zuerst diese Prozesse konstruieren und dann einige ihre Eigenschaften untersuchen. Wir beschränken uns meistens auf die sogenannte ‘pure-jump’ Prozesse, d.h. zeitlich homogene Prozesse, die auf jeder Stelle eine positive Zeit bleiben, und die nur endlich viele Sprünge in jedem endlichen Intervall haben.

Wie in vorherigen Kapiteln ist der Zustandsraum der Markovketten eine höchstens abzählbare Menge S .

DEFINITION 4.1.1. Eine Familie $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ von S -wertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) nennt man Markovkette in stetiger Zeit, falls

$$E[f(X_{t_{n+1}})|X_{t_0}, \dots, X_{t_n}] = E[f(X_{t_{n+1}})|X_{t_n}] \quad (4.1.1)$$

für jede beschränkte Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 0$ und $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$.

Um die Konstruktion durchzuführen, definieren wir zuerst den kanonischen Raum für die ‘pure-jump’ Prozesse. Sei

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \text{rechtsstetige Funktionen } \omega : [0, \infty) \rightarrow S \text{ mit} \\ \text{endlich vielen Sprüngen in jedem kompakten Intervall} \end{array} \right\}. \quad (4.1.2)$$

Bemerke, dass die Funktionen in Ω zwischen den Sprüngen konstant sein müssen, weil S mit der diskreten Topologie ausgestattet ist.

Wir statten Ω mit einer σ -Algebra \mathcal{F} aus, welche die kleinste σ -Algebra ist, so dass alle kanonischen Koordinaten $X_s : \Omega \rightarrow S$, $\omega \mapsto X_s(\omega) = \omega(s)$, $s \geq 0$, messbar sind:

$$\mathcal{F} = \sigma(X_s : s \geq 0). \quad (4.1.3)$$

Wir schreiben $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ für die kanonische Filtration,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t), \quad (4.1.4)$$

und $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$ für die kanonischen Translationen

$$\theta_t(\omega)(\cdot) = \omega(t + \cdot). \quad (4.1.5)$$

DEFINITION 4.1.2. Ein ‘pure-jump’ Prozess (ohne Explosion) mit Zustandsraum S ist eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(P_x)_{x \in S}$ auf (Ω, \mathcal{F}) so dass

$$E_x[f(X_{t_{n+1}})|X_{t_0}, \dots, X_{t_n}] = E_{X_{t_n}}[f(X_{t_{n+1}-t_n})], \quad P_x\text{-f.s.} \quad (4.1.6)$$

für jede beschränkte Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 0$, $0 \leq t_0 < \dots < t_{n+1}$, und

$$P_x[X_0 = x] = 1. \quad (4.1.7)$$

BEMERKUNG 4.1.3. (a) Die zeitliche Homogenität folgt von Bedingung (4.1.6), weil die rechte Seite nur von der Differenz $t_{n+1} - t_n$ abhängt.

(b) Die Bedingung (4.1.6) kann man mit folgenden zwei äquivalenten Bedingungen ersetzen:

$$E_x[f(X_{t+h})|\mathcal{F}_t] = E_{X_t}[f(X_h)], \quad P_x\text{-f.s.} \quad (4.1.8)$$

für alle $x \in S$, $t, h \geq 0$, und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

$$E_x[Y \circ \theta_t | \mathcal{F}_t] = E_{X_t}[Y], \quad P_x\text{-f.s.} \quad (4.1.9)$$

für jede beschränkte Zufallsvariable $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, und alle $x \in S$, $t \geq 0$.

Der Beweis der Äquivalenz dieser Bedingungen ist eine einfache Übung in Maßtheorie. Vergleiche die Bedingung (4.1.9) mit der Formulierung (2.1.13) der Markoveigenschaft für Markovketten in diskreter Zeit.

Wir betrachten jetzt die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette,

$$p_{xy}(t) = P_x[X_t = y], \quad x, y \in S, t \geq 0. \quad (4.1.10)$$

LEMMA 4.1.4 (Eigenschaften der Übergangswahrscheinlichkeiten).

(a) $p_{xy}(t) \geq 0$,

(b) $\sum_{y \in S} p_{xy}(t) = 1$ für alle $x \in S$, $t \geq 0$.

(c) (Chapman-Kolmogorov Gleichung)

$$p_{xy}(t+s) = \sum_{z \in S} p_{xz}(t)p_{zy}(s) \quad (4.1.11)$$

für alle $x, y \in S$ und $t, s \geq 0$.

(d) $\lim_{t \downarrow 0} p_{xy}(t) = \mathbf{1}\{x = y\} = p_{xy}(0)$.

(e)

$$R_t f(x) := \sum_{z \in S} p_{xz}(t)f(z) = E_x[f(X_t)], \quad t \geq 0, x \in S, f \text{ beschränkt,}$$

definiert eine Halbgruppe beschränkter Operatoren auf $L^\infty(S)$.

BEWEIS. (a) und (b) sind offensichtlich. (c) folgt aus der Definition:

$$\begin{aligned} p_{xy}(t+s) &= P_x[X_{t+s} = y] = E_x[P[X_{t+s} = y|X_t]] \\ &= E_x[P_{X_t(\omega)}[X_s = y]] = \sum_{z \in S} p_{xz}(t)p_{zy}(s). \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Die Rechtsstetigkeit der Elemente von Ω impliziert (d), und (e) folgt direkt von (c). \square

Wir untersuchen jetzt die Folgerungen der Definition, im Besonderen der Eigenschaft (4.1.6), auf die Struktur der pure-jump Prozesse. Sei

$$J = \inf\{s \geq 0 : X_s \neq X_0\} \in [0, \infty] \quad (4.1.13)$$

die Zeit des ersten Sprunges. Es ist einfach zu sehen, dass J ein \mathcal{F}_t -Stoppzeit ist: Dank der Rechtsstetigkeit,

$$\{J \leq t\} = \{X_t \neq X_0\} \cup \bigcup_{r \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} \{X_r \neq X_0\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0. \quad (4.1.14)$$

LEMMA 4.1.5. *Sei $(P_x)_{x \in S}$ ein pure-jump Prozess. Dann*

(a) *Für jedes $x \in S$ gibt es $\lambda(x) \in [0, \infty)$ so dass*

$$P_x[J > t] = e^{-\lambda(x)t}, \quad t \geq 0, \quad (4.1.15)$$

d.h. J hat exponentielle Verteilung mit Parameter $\lambda(x)$ (wenn $\lambda(x) = 0$, dann $J = \infty$ P_x -f.s., x ist absorbierend).

(b) *Falls $\lambda(x) \neq 0$, dann sind J und $X_J = X_{J(\omega)}(\omega)$ unabhängig.*

BEWEIS. (a) Wir benutzen (4.1.9),

$$\begin{aligned} P_x[J > t + s] &= E_x[\mathbf{1}\{J > s\} \circ \theta_t; J > t] \\ &= E_x[P_{X_t}[J > s]; J > t] \\ &= P_x[J > s]P_x[J > t] \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

weil $X_t = x$ auf $J > t$. Daher erfüllt die nicht-steigende Funktion $\phi(t) = P_x[J > t]$ die Gleichung $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$. Die Rechtsstetigkeit impliziert, dass $\lim_{t \downarrow 0} \phi(t) = 1$ und daher $\phi(t) = e^{-\lambda(x)t}$ wie behauptet.

(b) Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann, für $t \geq 0$, ähnlich wie für (a),

$$\begin{aligned} E_x[f(X_J); J > t] &= E_x[f(X_J) \circ \theta_t; J > t] \\ &\stackrel{(4.1.9)}{=} E_x[E_{X_t}(f(X_J)); J > t] \\ &= P_x[J > t]E_x[f(X_J)] \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

und die Unabhängigkeit von J und X_J folgt. \square

2. Starke Markoveigenschaft

Ähnlich wie diskrete Markovketten, erfüllen die Markovketten in stetiger Zeit die starke Markoveigenschaft. Sei T eine (\mathcal{F}_t) -Stoppzeit, und sei $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \forall t \geq 0\}$ die gestoppte σ -Algebra.

SATZ 4.2.1. *Sei $x \in S$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Zufallsvariable und T eine Stoppzeit. Dann*

$$E_x[Y \circ \theta_T | \mathcal{F}_T] = E_{X_T}[Y], \quad P_x\text{-f.s. auf } \{T < \infty\}. \quad (4.2.1)$$

BEWEIS. Für $n \geq 1$ definieren wir

$$T_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} \mathbf{1}\left\{\frac{k}{2^n} \leq T < \frac{k+1}{2^n}\right\}. \quad (4.2.2)$$

T_n sind Stoppzeiten und $T_n \downarrow T$, P_x -f.s., d.h. $\mathcal{F}_{T_n} \supset \mathcal{F}_T$. Sei $A \in \mathcal{F}_T$ und $Y = \prod_{l=0}^m f_l(X_{t_l})$ für f_l beschränkt, $m \geq 1$ und $0 \leq t_0 < \dots < t_m$. Dann

$$\begin{aligned} E_x[Y \circ \theta_{T_n}; A \cap \{T < \infty\}] &= \sum_{k=0}^{\infty} E_x[Y \circ \theta_{T_n}; A \cap \{T = k2^{-n}\}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E_x[E_{X_{k2^{-n}}} Y; A \cap \{T = k2^{-n}\}] \\ &= E_x[E_{X_{T_n}}[Y]; A \cap T < \infty]. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Bemerke jetzt, dass P_x -f.s. auf $\{T < \infty\}$,

$$Y \circ \theta_{T_n} = \prod_l f_l(X_{t_l+T_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y \circ \theta_T, \quad (4.2.4)$$

und

$$\mathbf{1}\{A \cap \{T < \infty\}\} E_{X_{T_n}}[Y] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}\{A \cap \{T < \infty\}\} E_{X_T}[Y], \quad (4.2.5)$$

und beide diese Quantitäten sind beschränkt. Deswegen, mit Hilfe des Satzes von Lebesgue,

$$E_x[Y \circ \theta_T; A \cap \{T < \infty\}] = E_x[E_{X_T}[Y]; A \cap \{T < \infty\}]. \quad (4.2.6)$$

(4.2.1) folgt für $Y = \prod_l f_l(X_{t_l})$. Die Erweiterung auf alle Zufallsvariablen ist eine Übung in Maßtheorie. \square

KOROLLAR 4.2.2. Für $A \in \mathcal{F}$,

$$E_x[\mathbf{1}_A \circ \theta_J | J, X_J] = P_{X_J}[A], \quad P_x\text{-f.s.} \quad (4.2.7)$$

Dank Lemma 4.1.5 und Korollars 4.2.2, definieren wir für jeden pure-jump Prozess

- die Sprungraten $\lambda(x) \in [0, \infty)$, $x \in S$, sodass $P_x[J > t] = e^{-\lambda(x)t}$,
- die Sprungübergangswahrscheinlichkeiten

$$q_{xy} = \begin{cases} P_x[X_J = y], & \text{für } x \in S \text{ mit } \lambda(x) > 0 \text{ und } y \in S, \\ \mathbf{1}\{x = y\} & \text{für } x \in S \text{ mit } \lambda(x) = 0 \text{ und } y \in S. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

BEISPIEL 4.2.3 (Poissonprozess mit Rate $\lambda > 0$). Sei $S = \mathbb{N}_0$, $\lambda_x = \lambda$ für alle $x \in S$ und $q_{xy} = \mathbf{1}\{y = x + 1\}$. Dann ist P_x die Verteilung auf Ω von $(x + N_t)_{t \geq 0}$, wobei (N_t) ein üblicher Poissonprozess ist. (Die Verteilung von N_t ist P_0). Die Übergangswahrscheinlichkeiten dieses Prozesses sind

$$p_{xy}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{y-x}}{(y-x)!}, & \text{falls } y \geq x \text{ und } t \geq 0, \\ 0, & \text{falls } y < x. \end{cases} \quad (4.2.9)$$

3. Konstruktion von pure-jump Prozessen

Wir haben gesehen, dass für jeden pure-jump Prozess eine Sprungrate $\lambda : S \rightarrow [0, \infty)$ und Sprungübergangswahrscheinlichkeiten q_{xy} existieren. Wir untersuchen jetzt die umgekehrte Frage. Gegeben

$$\lambda : S \rightarrow [0, \infty) \quad (4.3.1)$$

$$(q_{xy})_{x,y \in S} \text{ mit } 0 \leq q_{xy}, \sum_{y \in S} q_{xy} = 1 \quad x \in S, \quad (4.3.2)$$

$$q_{xx} = 0 \text{ falls } \lambda(x) > 0,$$

$$q_{xx} = 1 \text{ falls } \lambda(x) = 0,$$

gibt es einen pure-jump Prozess mit diesen λ und q_{xy} ? Ist er eindeutig?

Die Frage der Eindeutigkeit kann man mit Hilfe des Korollar 4.2.2 schnell lösen. Sei λ und q_{xy} wie im (4.3.1),(4.3.2). Für $\omega \in \Omega$ definiere die aufeinanderfolgenden Sprungzeiten von (X_t) durch

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, & S_1 &= J \\ S_{n+1} &= J \circ \theta_{S_n} \leq \infty & \text{für } n &\geq 1. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Gegeben $X_0 = x$ bestimmt die iterative Anwendung Korollars 4.2.2 die Verteilung der Folge $(S_n, X_{S_n})_{n \geq 0}$ eindeutig (wir benutzen die Konvention $S_{n+1} = \infty$ und $X_{S_n} = X_{S_{n-1}}$ falls $S_n = \infty$). Da die Definition des kanonischen Raums die Explosionen verbietet, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = \infty$ für jedes $\omega \in S$, bestimmt diese Folge die Verteilung der Funktion ω ,

$$\omega(t) = X_{S_n} \quad \text{auf } \{S_n \leq t < S_{n+1}\}, \quad (4.3.4)$$

und daher das Wahrscheinlichkeitsmaß P_x .

Wir untersuchen jetzt die Existenz des pure-jump Prozesses zugehörig zu Daten (4.3.1), (4.3.2). Die Sprungübergangswahrscheinlichkeiten $(q_{xy})_{x,y \in S}$ ermöglichen eine kanonische Markovkette $(\bar{X}_n)_{n \geq 0}$ in diskreter Zeit mit Verteilungen $\bar{P}_x, x \in S$, auf Raum $\bar{\Omega} = S^{\mathbb{N}_0}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten (q_{xy}) zu konstruieren. Auf einem anderen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ konstruieren wir unabhängige Zufallsvariablen $T_n(y), n \geq 0, y \in S$, mit

$$\begin{aligned} P'[T_n(y) \geq t] &= e^{-\lambda(y)t} & \text{falls } \lambda(y) > 0, \\ P'[T_n(y) = \infty] &= 1 & \text{falls } \lambda(y) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Auf $\bar{\Omega} \times \Omega'$ betrachten wir dann

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, & S_1 &= T_0(\bar{X}_0), & S_2 &= T_0(\bar{X}_0) + T_1(\bar{X}_1), \dots \\ S_{n+1} &= T_0(\bar{X}_0) + \dots + T_n(\bar{X}^n). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Wir möchten jetzt eine ähnliche Konstruktion wie in (4.3.4) benutzen, um von $(S_n)_{n \geq 0}$ und $(\bar{X}_n)_{n \geq 0}$, die die Rolle von X_{S_n} spielen, ein pure-jump Prozess zu erzeugen. Das ist aber nur dann möglich, wenn S_n divergieren:

DIE NICHTEXPLOSIONSANNAHME. Für alle $x \in S$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty, \quad Q_x := (\bar{P}_x \times P')\text{-f.s.} \quad (4.3.7)$$

LEMMA 4.3.1. (4.3.7) ist äquivalent mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(\bar{X}_n)^{-1} = \infty \quad \bar{P}_x\text{-f.s. für alle } x \in S. \quad (4.3.8)$$

BEWEIS. (4.3.7) \implies (4.3.8): Nehme an, dass $\bar{P}_x[\sum \lambda(\bar{X}_n)^{-1} < \infty] > 0$ für ein $x \in S$ gilt. Weil $E^{Q_x}[S_n | (\bar{X}_\cdot)] = \sum_{l=0}^{n-1} \lambda(\bar{X}_l)^{-1}$, sehen wir, dass $E^{Q_x}[\lim_n S_n | (\bar{X}_\cdot)] < \infty$ mit positiver \bar{P}_x -Wahrscheinlichkeit, das zum Widerspruch mit (4.3.7) führt.

(4.3.8) \implies (4.3.7): Für $n \geq 1$, mit Hilfe der Unabhängigkeit von $(T_n(y))$,

$$\begin{aligned} E^{Q_x}[e^{-S_n}] &= E^{Q_x}[\exp\{-T_0(\bar{X}_0) - \dots - T_{n-1}(\bar{X}_{n-1})\}] \\ &= E^{\bar{P}_x}[\prod_{l=0}^{n-1} (1 + \lambda(\bar{X}_l)^{-1})^{-1}]. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Daher, nach dem Satz von der monotonen Konvergenz,

$$E^{Q_x}[\exp(-\lim_n S_n)] = E^{\bar{P}_x}[\prod_{l=0}^{\infty} (1 + \lambda(\bar{X}_l)^{-1})^{-1}] = 0. \quad (4.3.10)$$

Es folgt, dass $\lim_n S_n = \infty$ Q_x -f.s. □

SATZ 4.3.2. Gegeben λ und q wie in (4.3.1), (4.3.2) die die Nichtexplosionsannahme (4.3.7) (oder (4.3.8)) erfüllen existiert ein eindeutiger pure-jump Prozess ohne Explosion zugehörig zu λ und q .

BEWEIS. Die Eindeutigkeit haben wir schon gezeigt, es bleibt die Existenz. Auf dem Raum $\bar{\Omega} \times \Omega'$ definiere Zufallsvariablen Z_t durch (vergleiche mit (4.3.4))

$$Z_t = \bar{X}_n \text{ auf } \{S_n \leq t < S_{n+1}\}, \quad t \geq 0. \quad (4.3.11)$$

Die Nichtexplosionsannahme sichert, dass $t \mapsto Z_t$ Q_x -f.s. ein Element von Ω ist. Daher definieren wir

$$P_x = \text{Bild von } Q_x \text{ unter } Z. \quad (4.3.12)$$

Wir müssen jetzt zeigen, dass P_x die Bedingungen (4.1.6) und (4.1.7) erfüllt. Das ist einfach für (4.1.7): $P_x[X_0 = x] = Q_x[Z_0 = x] = Q_x[\bar{X}_0 = x] = 1$.

Um (4.1.6) zu überprüfen, nehmen wir $x \in S$, $h > 0$, $0 \leq s_0 < \dots < s_k$, $f, f_0, \dots, f_k : S \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, und zeigen dass

$$E^{Q_x}[f_0(Z_{s_0}) \dots f_k(Z_{s_k}) f(Z_{s_k+h})] = E^{Q_x}[f_0(Z_{s_0}) \dots f_k(Z_{s_k}) E^{Q_{Z_{s_k}}} f(Z_h)]. \quad (4.3.13)$$

Um die mühsamen Notationprobleme zu vermeiden nehmen wir $\lambda(x) > 0$ für alle $x \in S$ an. Sei

$$N_t = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\} \quad (4.3.14)$$

die Anzahl der Sprünge vor t . Die linke Seite von (4.3.13) ist gleich

$$\begin{aligned} E^{Q_x} & \left[f_0(\bar{X}_{N_{s_0}}) \cdots f_k(\bar{X}_{N_{s_k}}) f(\bar{X}_{N_{s_k+h}}) \right] \\ & = \sum_{n_0 \leq \cdots \leq n_k, n \geq 0} E^{Q_x} \left[f_0(\bar{X}_{n_0}) \cdots f_k(\bar{X}_{n_k}) f(\bar{X}_{n_k+n}); C \right], \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

wobei $C = C(n_0, \dots, n_k, n) = \{N_{s_0} = n_0, \dots, N_{s_k} = n_k, N_{s_k+h} = n_k + n\}$.

Wir berechnen jetzt die Wahrscheinlichkeit von C . Für $x_0, \dots, x_{n_k+n} \in S$ sei

$$\nu_{x_0, \dots, x_{n_k+n}}(dt_0, \dots, dt_{n_k+n}) = \prod_{i=0}^{n_k+n} \mu_{\lambda(x_i)}(dt_i) \quad (4.3.16)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, \infty)^{n_k+n+1}$, wobei μ_λ die exponentielle Verteilung mit Parameter λ ist. Wir definieren

$$\begin{aligned} h(x_0, \dots, x_{n_k+n}) & = h(x_0, \dots, x_{n_k+n}; n_0, \dots, n_k, n) \\ & = \nu_{x_0, \dots, x_{n_k+n}} \left(\begin{array}{l} t_0 + \cdots + t_{n_i-1} \leq s_i < t_0 + \cdots + t_{n_i} \quad \forall 0 \leq i \leq k, \\ t_0 + \cdots + t_{n_k+n-1} \leq s_k + h < t_0 + \cdots + t_{n_k+n} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Es folgt von (4.3.6), dass

$$Q_x[C | \bar{X}_0, \dots, \bar{X}_{n_k+n}] = h(\bar{X}_0, \dots, \bar{X}_{n_k+n}). \quad (4.3.18)$$

Die Bedingungen in (4.3.17), die t_{n_k} enthalten, schreiben wir als

$$\begin{aligned} t_{n_k} & > s_k - (t_0 + \cdots + t_{n_{k-1}}) := u \geq 0, \\ t_{n_k} - u + t_{n_k+1} + \cdots + t_{n_k+n-1} & \leq h < t_{n_k} - u + t_{n_k+1} + \cdots + t_{n_k+n}. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Dank der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

$$\int_{t \geq u} \phi(t-u) \rho e^{-\rho t} dt = e^{-\rho u} \int_{s \geq 0} \phi(s) \rho e^{-\rho s} ds. \quad (4.3.20)$$

Wir nehmen jetzt $\rho = \lambda(\bar{X}_{n_k})$ und $t = t_{n_k}$ in (4.3.17) und erhalten

$$h(x_0, \dots, x_{n_k+n}) = h_1(x_0, \dots, x_{n_k}) h_2(x_{n_k}, \dots, x_{n_k+n}) \quad (4.3.21)$$

wobei

$$\begin{aligned} h_1(x_0, \dots, x_{n_k}) & = \nu_{x_0, \dots, x_{n_k}}(t_0 + \cdots + t_{n_i-1} \leq t_i < t_0 + \cdots + t_{n_i}, 0 \leq i \leq n_k) \\ h_2(y_0, \dots, y_n) & = \nu_{y_0, \dots, y_n}(t_0 + \cdots + t_{n-1} \leq h < t_0 + \cdots + t_n). \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Wir kehren jetzt zurück zu der linken Seite von (4.3.13), genauer zu (4.3.15). Diese enthält Ausdrücke wie $E^{Q_x}[F \mathbf{1}_C]$ wobei $F = f_0(\bar{X}_{n_0}) \cdots f_k(\bar{X}_{n_k}) f(\bar{X}_{n_k+n})$. Mit Hilfe von (4.3.18) und (4.3.22)

$$E^{Q_x}[F \mathbf{1}_C] = E^{\bar{P}_x}[F h_1(\bar{X}_0, \dots, \bar{X}_{n_k}) h_2(\bar{X}_{n_k}, \dots, \bar{X}_{n_k+n})]. \quad (4.3.23)$$

Wir können jetzt die Markoveigenschaft für Markovketten in diskreter Zeit anwenden und die rechte Seite von (4.3.23) wie

$$E^{\bar{P}_x} \left[f_0(\bar{X}_{n_0}) \dots f_k(\bar{X}_{n_k}) h_1(\bar{X}_0, \dots, \bar{X}_{n_k}) G_n(\bar{X}_{n_k}) \right] \quad (4.3.24)$$

schreiben, wobei $G_n(\bar{X}_{n_k}) = E^{\bar{P}_{\bar{X}_{n_k}}} [f(\bar{X}_n) h_2(\bar{X}_0, \dots, \bar{X}_n)]$. Mit Hilfe einer Identität ähnlich wie (4.3.18) haben wir dann

$$= E^{Q_x} \left[f_0(\bar{X}_{n_0}) \dots f_k(\bar{X}_{n_k}) G(\bar{X}_{n_k}), N_{s_0} = n_0, \dots, N_{s_k} = n_k \right] \quad (4.3.25)$$

Summierung über n_0, \dots, n_k zeigt, dass die linke Seite von (4.3.13) gleich

$$\sum_{n \geq 0} E^{Q_x} [f_0(Z_{t_0}) \dots f_k(Z_{t_k}) G_n(Z_{t_k})] \quad (4.3.26)$$

ist. Ähnlich, für $y \in S$, $G_n(y) = E^{Q_y} [f(\bar{X}_{N_h}), N_h = n]$, und daher

$$(4.3.26) = E^{Q_x} \left[f_0(Z_{s_0}) \dots f_k(Z_{s_k}) E^{Q_{Z_{s_k}}} f(Z_h) \right], \quad (4.3.27)$$

was zu zeigen war. \square

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem folgenden Lemma ab, das erlaubt $\lambda(x)$ (und q_{xy}) wirklich wie *Raten* zu interpretieren.

LEMMA 4.3.3. *Gegeben ein pure-jump Prozess, für alle $x \neq y \in S$ und $t \downarrow 0$.*

$$p_{xx}(t) = 1 - \lambda(x)t + o(t), \quad (4.3.28)$$

$$p_{xy}(t) = \lambda(x)q_{xy}t + o(t), \quad (4.3.29)$$

BEWEIS. Übung! \square

4. Kolmogorovsche Gleichungen und Generator

Im Beweis des letzten Satzes haben wir gesehen, dass es nicht trivial ist, explizite Formeln für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{xy}(t)$ zu schreiben. In diesem Abschnitt werden wir daher Differentialgleichungen für $p_{xy}(t)$ suchen.

Es ist einfacher Integralgleichungen zu finden:

LEMMA 4.4.1. *Gegeben ein pure-jump Prozess (ohne Explosion) auf S , für alle $x, y \in S$ und $t \geq 0$,*

$$p_{xy}(t) = \delta_{xy} e^{-\lambda(x)t} + \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z \neq x} q_{xy} p_{zy}(t-s) ds \quad (4.4.1)$$

(Rückwärts-Integralgleichung),

$$p_{xy}(t) = \delta_{xy} e^{-\lambda(x)t} + \int_0^t \sum_{z \neq y} p_{xz}(s) \lambda(z) q_{zy} e^{-\lambda(z)(t-s)} ds \quad (4.4.2)$$

(Vorwärts-Integralgleichung).

BEMERKUNG 4.4.2. Intuitiv entspricht die Rückwärts-Integralgleichung dem Bedingen auf den ersten Sprung des Prozesses vor der Zeit t ; die Vorwärts-Integralgleichung entspricht dann dem Bedingen auf den letzten Sprung vor t .

BEWEIS. Für (4.4.1) schreiben wir

$$p_{xy}(t) = P_x[X_t = y] = P_x[X_t = y, J > t] + P_x[X_t = y, J \leq t]. \quad (4.4.3)$$

Der erste Summand erfüllt $P_x[X_t = y, J > t] = e^{\lambda(x)}\delta_{xy}$, also müssen wir uns nur auf den zweiten konzentrieren. Bemerke dass P_x -f.s.

$$\mathbf{1}\{X_t = y, J \leq t\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\left\{\frac{k-1}{n}t < J \leq \frac{k}{n}t\right\} \mathbf{1}\{X_{(n-k+1)t/n} = y\} \circ \theta_J. \quad (4.4.4)$$

Daher, mit Hilfe des Satzes von Lebesgue und der starken Markoveigenschaft,

$$\begin{aligned} P_x[X_t = y, J \leq t] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P_x\left[\frac{k-1}{n}t < J \leq \frac{k}{n}t, X_{(n-k+1)t/n} = y \circ \theta_J\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E_x\left[\frac{k-1}{n}t < J \leq \frac{k}{n}t, P_{X_J}[X_{(n-k+1)t/n} = y]\right]. \end{aligned}$$

Von Lemma 4.1.5(b) wissen wir das X_J und J unabhängig sind. Daher

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E_x\left[\frac{k-1}{n}t < J \leq \frac{k}{n}t\right] P_{X_J}[X_{(n-k+1)t/n} = y] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}t}^{\frac{k}{n}t} \lambda(x)e^{-\lambda(x)u} du \sum_{z \neq x} q_{xz}p_{zy}\left(t - \frac{k-1}{n}t\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \lambda(x)e^{-\lambda(x)u} \sum_{z \neq x} q_{xz}p_{zy}(t - u) du, \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

wobei $u_n = \sum_{k=1}^n (k-1)t/n \mathbf{1}\{(k-1)t/n < u \leq kt/n\}$, d.h. $u_n \uparrow u$ für $n \rightarrow \infty$. Von der Rechtsstetigkeit von X folgt die Rechtsstetigkeit von $s \mapsto p_{xy}(s)$. Wir können daher den Satz von Lebesgue noch einmal anwenden, und zeigen, dass der zweite Summand in (4.4.3)

$$\int_0^t \lambda(x)e^{-\lambda(x)u} \sum_{z \neq x} q_{xz}p_{zy}(t - u) du \quad (4.4.6)$$

ist, was (4.4.1) zeigt.

Um (4.4.2) zu beweisen, müssen wir den zweiten Summand in (4.4.3) anders umschreiben. Mit der Notation aus Abschnitt 3,

$$P_x[X_t = y, J \leq t] = \sum_{n \geq 1} Q_x[\bar{X}_n = y, S_n \leq t < S_{n+1}]. \quad (4.4.7)$$

BEMERKUNG 4.4.4. Informal kann man diese Differentialgleichungen so zeigen, dass man die Ableitung wie

$$\frac{d}{dt}p_{xy}(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(p_{xy}(t+h) - p_{xy}(t)) \quad (4.4.13)$$

schreibt und die Chapman-Kolmogorov Gleichung anwendet:

$$\frac{1}{h}(p_{xy}(t+h) - p_{xy}(t)) = \sum_{z \neq x} \underbrace{\frac{p_{xz}(h)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \lambda_{xz}} p_{zy}(t) + \underbrace{\frac{p_{xx}(h) - 1}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \lambda(x)} p_{xy}(t). \quad (4.4.14)$$

Wenn man das Austauschen des Limes und der Summe begründen kann, konvergiert die rechte Seite gegen die rechte Seite von (4.4.11). Die Gleichung (4.4.12) kann man analog zeigen (Übung!). Die Integralgleichungen erlauben die Probleme mit dem Austauschen zu vermeiden.

BEWEIS. Wenn wir in (4.4.1) im Integral s durch $t - s$ ersetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} p_{xy}(t) &= \delta_{xy}e^{-\lambda(x)t} + \int_0^t \lambda(x)e^{-\lambda(x)(t-s)} \sum_{z \in x} q_{xz}p_{xy}(s)ds \\ &= e^{-\lambda(x)t} \left(\delta_{xy} + \int_0^t \lambda(x)e^{\lambda(x)s} \sum_{z \in x} q_{xz}p_{xy}(s)ds \right). \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Der Integrand ist beschränkt, und daher ist $p_{xy}(t)$ eine stetige Funktion. Wenn wir jetzt diese Information in (4.4.15) verwenden, sehen wir dass p_{xy} sogar differenzierbar ist. Wir können daher ableiten,

$$\frac{d}{dt}p_{xy}(t) = -\lambda(x)p_{xy}(t) + e^{-\lambda(x)t} \lambda(x) e^{-\lambda(x)t} \sum_{z \neq x} q_{xz}p_{zy}(t) \quad (4.4.16)$$

was offensichtlich die rechte Seite von (4.4.11) ist.

Die (4.4.12) erhält man von (4.4.2), die man als

$$p_{xy}(t) = e^{\lambda(y)t} \left(\delta_{xy} + \int_0^t \sum_{z \neq y} p_{xz}(s) \lambda(z) q_{zy} e^{\lambda(y)s} ds \right) \quad (4.4.17)$$

umschreibt und ableitet. □

Wir definieren die Generatormatrix von dem pure-jump Prozess durch

$$A_{xy} = \begin{cases} \lambda_{xy}, & \text{falls } x \neq y, \\ -\lambda(x), & \text{falls } x = y. \end{cases} \quad (4.4.18)$$

Bemerke, dass $\sum_{y \in S} A_{xy} = 0$ für alle $x \in S$.

Mit dieser Definition können wir die Differentialgleichungen (4.4.11), (4.4.12) als Matrixdifferenzialgleichungen schreiben: Für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p(t) &= Ap(t), \\ \frac{d}{dt}p(t) &= p(t)A.\end{aligned}\tag{4.4.19}$$

Die Lösung dieser Gleichungen mit Startbedingung $p(0) = \text{Id}$ ist dann

$$p(t) = \exp(tA) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n.\tag{4.4.20}$$

5. Transienz, Rekurrenz und invariante Maße

An dieser Stelle wäre es natürlich die Theorie der Transienz, Rekurrenz und invarianten Maße zu entwickeln, wie in der diskreten Zeit. Diese Theorie ist sehr ähnlich wie im diskreten Fall und wir werden deswegen nur die wichtigsten Resultate formulieren und auf die Differenzen hinweisen.

Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein pure-jump Prozess und sei $(\bar{X}_n)_{n \geq 0}$ sein diskretes Skelett (siehe Seite 71 für die Notation). Wir definieren die erste Rückkehrzeit für X_t durch

$$\tilde{H}_x = \inf\{t \geq 0 : X_t = x, \exists s < t, X_s \neq x\}.\tag{4.5.1}$$

Bemerke, dass $\tilde{H}_x = \infty$, falls x ein absorbierender Zustand ist.

DEFINITION 4.5.1. Ein Zustand heißt rekurrent, falls

$$P_x[\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}\{X_t = x\} = 1] = 1.\tag{4.5.2}$$

Er heißt transient, falls

$$P_x[\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}\{X_t = x\} = 1] = 0.\tag{4.5.3}$$

Wie im diskreten Fall gibt keine anderen Möglichkeiten:

SATZ 4.5.2. (a) x ist rekurrent genau dann wenn $P_x[\tilde{H}_x < \infty] = 1$ oder x absorbierend ist.

(b) x ist transient genau dann wenn $P_x[\tilde{H}_x < \infty] < 1$ und x nicht absorbierend ist.

Die Rekurrenz und Transienz kann man von dem Skelett ablesen:

LEMMA 4.5.3. $x \in S$ ist transient/rekurrent für $(X_t)_{t \geq 0}$ genau dann wenn x transient/rekurrent für das Skelett $(\bar{X}_n)_{n \geq 0}$ ist.

DEFINITION 4.5.4. Ein Maß π auf S heißt invariant für den pure-jump Prozess X , falls

$$\sum_{x \in S} \pi(x) p_{xy}(t) = \pi(y) \quad \text{für alle } y \in S, t \geq 0.\tag{4.5.4}$$

Es heißt reversibel, falls

$$\pi(x)p_{xy}(t) = \pi(y)p_{yx}(t) \quad \text{für alle } y \in S, t \geq 0. \quad (4.5.5)$$

ÜBUNG 4.5.5. Zeigen Sie, dass es reicht diese Gleichungen nur für ein $t > 0$ zu verifizieren. Zeigen Sie, dass jedes reversible Maß invariant ist.

DEFINITION 4.5.6. Ein rekurrenter Zustand $x \in S$ heißt positiv rekurrent, falls $E_x[\tilde{H}_x] < \infty$. Sonst heißt er null-rekurrent.

BEMERKUNG 4.5.7. Die positive Rekurrenz kann man nicht von dem Skelett ablesen. Um das zu sehen sei $p, q > 0$ mit $p + q = 1$ und X_t ein pure-jump Prozess auf $S = \mathbb{N}_0$ mit

$$q_{xy} = \begin{cases} p, & \text{falls } y = x + 1, x \geq 1, \\ q, & \text{falls } y = 0, x \geq 1, \\ 1, & \text{falls } x = 0, y = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.5.6)$$

und $\lambda(x) = p^x$.

Sei \bar{H}_0 die erste Rückkehrzeit für das Skelett. Es ist einfach zu sehen, dass $\bar{P}_0[\bar{H}_0 = k] = qp^{k-2}$, $k \geq 2$. Daher $\bar{E}[\bar{H}_0] < \infty$, d.h. 0 ist positiv rekurrent für \bar{X} . Auf die andere Seite,

$$E^{Q^0}[\tilde{H}_0 | \bar{H}_0 = k] = \sum_{x=0}^{k-1} p^{-x} \sim cp^{-k}. \quad (4.5.7)$$

Deswegen

$$E[\tilde{H}_0] = \sum_{k \geq 2} E^{Q^0}[\tilde{H}_0 | \bar{H}_0 = k] \bar{P}_0[\bar{H}_0 = k] = \infty, \quad (4.5.8)$$

d.h. 0 ist null-rekurrent für X .

Ähnlich wie in der diskreten Zeit haben wir die folgenden zwei Sätze (siehe Satz 2.5.9 und Satz 2.6.5)

SATZ 4.5.8. Sei X ein irreduzibler pure-jump Prozess. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.

- (i) Es gibt einen positiv rekurrenten Zustand $x \in S$.
- (ii) Alle Zustände in S sind positiv rekurrent.
- (iii) Es existiert eine invariante Verteilung.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die invariante Verteilung π eindeutig bestimmt und durch $\pi(x) = \frac{1}{\lambda(x)E_x[\tilde{H}_x]} > 0$ gegeben.

SATZ 4.5.9. Es sei X ein irreduzibler, positiv rekurrenter pure-jump Prozess mit der invarianten Verteilung π . Dann gilt für alle $x, y \in S$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{xy}(t) = \pi(y).$$

Bemerke, dass wir in Satz 4.5.9 die Aperiodizität nicht annehmen müssen, die in der stetigen Zeit keinen Sinn hat.

Literaturverzeichnis

- [AF] David J. Aldous and James A. Fill, *Reversible markov chains and random walks on graphs*.
- [Dur99] Rick Durrett, *Essentials of stochastic processes*, Springer Texts in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1999. MR 1703359
- [Fel68] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*, Third edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968. MR 0228020
- [Fel71] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.*, Second edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1971. MR 0270403
- [GS01] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker, *Probability and random processes*, third ed., Oxford University Press, New York, 2001. MR 2059709
- [KT75] Samuel Karlin and Howard M. Taylor, *A first course in stochastic processes*, second ed., Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. MR 0356197
- [KT81] Samuel Karlin and Howard M. Taylor, *A second course in stochastic processes*, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1981. MR 611513
- [Kö] Wolfgang König, *Stochastische Prozesse I*, Skript, TU Berlin, zu unterladen auf <http://www.wias-berlin.de/people/koenig/www/Skripte.html>.
- [LPW09] David A. Levin, Yuval Peres, and Elizabeth L. Wilmer, *Markov chains and mixing times*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009, With a chapter by James G. Propp and David B. Wilson. MR 2466937
- [Nor98] J. R. Norris, *Markov chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Reprint of 1997 original. MR 1600720
- [Rev84] D. Revuz, *Markov chains*, second ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 11, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984. MR 758799
- [SC97] Laurent Saloff-Coste, *Lectures on finite Markov chains*, Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1996), Lecture Notes in Math., vol. 1665, Springer, Berlin, 1997, pp. 301–413. MR 1490046