Prüfung zur VO Grundbegriffe der Topologie (Stoffsemester WS 21/22)

Henk Bruin Termin 2: 7 April 2022

Dauer: 90 Minuten. 2 Seiten.

Gesamtpunktezahl 30, jeweils 10 Punkte pro Aufgabe 1–3; positive Bewertung ab 15 Punkten.

Name:.. Matrikelnummer:...............................

Aufgabe 1 (a)[2P] Geben Sie die Definitionen von "separabel" und "AA2 Raum". Zeigen Sie dass jeder separabele metrischer ein Raum AA2 ist.

(b)[6P] Für die folgenden topologischen Räumen, zeigen Sie ob sie kompakt, Hausdorff und/oder zusammenhägend sind.

(i) $[0, 1]$ mit Sorgenfrey Topologie.

(ii) $[0, 1]$ mit ko-endlicher Topologie.

(ii) Der Quotientenraum $[0, 1]/\sim$ des Euklidischen Intervalls bzl. der Äquivalenzrelation $\frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{n}$ für $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$.

(c) [2P] Zeigen Sie, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung wieder zusammenhängend ist.

Aufgabe 2 (a)[3P] Definieren Sie die Ordnungstopologie auf einem wohl-geordneten Raum. Was bedeutet wohl-geordnet?

(b)[4P] Sei $\Omega = [0, \omega_1]$ mit Ordnungstopologie, wobei ω_1 die erste überabzählbare Ordinalzahl ist. Zeigen Sie, dass ω_1 nicht der Grenzwert einer Folge in $\Omega_0 := \Omega \setminus \{\omega_1\}$ ist, aber dass trotzdem ω_1 ein Häufungspunkt von Ω_0 ist.

(c)[3P] Geben Sie die Definition eines Netzes, und finden Sie ein Netz in Ω_0 das gegen ω_1 konvergiert.

Aufgabe 3 (a)[3P] Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Raum auch gleichmäßig stetig ist.

(b) [3P] Beschreiben Sie den Funktionsraum $X = \{f : \mathbb{R} \to [0,1]\}$ als Produktraum, und zeigen Sie, dass Konvergenz in diesem Raum punktweiser Konvergenz entspricht.

(c) [2P] Ist X aus Teil 3(b) kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) [2P] Ist die Abbildung $T : X \to [0,1]$, $T(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Exam for VO Grundbegriffe der Topologie (Semester WS 21/22)

Henk Bruin Exam Opportunity 1: 8 April 2022

Duration: 90 Minutes. 2 Pages.

Total number of points 30, 10 points each for Problem 1–3; Passmark 15 Points.

Name:.. Student number:..............................

Question 1 (a)[2P] Define "separable" and "AA2 space". Show that every separable metric space is an AA2 space.

(b)[6P] For the following topological space, show if they are compact, Hausdorff and/or connected or not.

(i) $[0, 1]$ with Sorgenfrey topology.

(ii) $[0, 1]$ with co-finite topology.

(ii) The quotient space $[0, 1]/\sim$ of the Euclidean interval w.r.t. the equivalence relation $\frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{n}$ for $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$.

(c) [2P] Show that the image of a connected set under a continuous map is again connected.

Question 2 (a)[3P] Define the order topology on a well-ordered space. What is meant by well-ordered?

(b)[4P] Set $\Omega = [0, \omega_1]$ with order topology, where ω_1 is the first uncountable ordinal number. Show that ω_1 is not the limit of any sequence in $\Omega_0 := \Omega \setminus \{\omega_1\}$, but that still ω_1 is an accumulation point of Ω_0.

(c)[3P] Give the definition of a net, and find a net in Ω_0 that converges to ω_1.

Question 3 (a)[3P] Show that a continuous function $f : X \to \mathbb{R}$ on a compact space is also uniformly continuous.

(b) [3P] Describe the function space $X = \{f : \mathbb{R} \to [0, 1]\}$ as product space, and show that convergence in this space corresponds to pointwise convergence.

(c) [2P] Is X from part 3(b) compact? Justify your answer.

(d) [2P] Is the mapping $T : X \to [0, 1]$, $T(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ continuous? Justify your answer.