Prüfung zur VO Grundbegriffe der Topologie (Stoffsemester WS 20/21)

Günther Hörmann Termin: 1. Februar 2021

Dauer: 90 Minuten (inklusive Download der Angabe und Upload der Lösungen).
Gesamtpunktezahl 48, jeweils 8 Punkte pro Aufgabe $\boxed{1}$-$\boxed{6}$; positive Bewertung ab 24 Punkten.

$\boxed{1}$ (a)[4 P] Sei (M, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq M$ abgeschlossen und $U \subseteq M$ offen mit $U \supseteq A$. Gibt es eine stetige Funktion $f\colon M \to [0,1]$ mit $f(x) = 1$ für $x \in A$ und $f(x) = 0$ für $x \notin U$? (Begründung!)

(b)[4 P] Es seien X ein topologischer Raum und f und g stetige Abbildungen $X \to \mathbb{R}$. Ist die Menge $U := \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ offen in X? (Begründung!)

$\boxed{2}$ (a)[4 P] Gibt es zu jedem Punkt eines topologischen Raumes stets eine Umgebungsbasis aus offenen Teilmengen? (Begründung!)

(b)[4 P] Sei $\varphi\colon T \to S$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $t \in T$. Zeige: Ist $(t_i)_{i \in I}$ ein Netz in T, das gegen t konvergiert, dann konvergiert das Netz $(\varphi(t_i))_{i \in I}$ gegen $\varphi(t)$.

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ trage die Produkttopologie (bzw. Topologie der punktweisen Konvergenz).

(a)[4 P] Gib eine Umgebungsbasis für die Nullfunktion $0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ an.

(b)[4 P] Ist die Abbildung $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, gegeben durch $t \mapsto \Big(\sin(x + t)\Big)_{x \in \mathbb{R}}$, stetig? (Begründung!)

$\boxed{4}$ (a)[4 P] Zeige: Abgeschlossene Teilmengen von kompakten Räumen sind kompakt.

(b)[4 P] Zeige: Teilräume von T_2-Räumen sind T_2.

$\boxed{5}$ (a)[4 P] Zeige: Das Komplement einer offenen dichten Menge ist nirgends dicht.

(b)[4 P] Betrachte $W = [0,1]^n$ mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}^n$. Ist W homöomorph zu $\mathbb{R}^n$? (Begründung!)

$\boxed{6}$ (a)[4 P] Was sind Häufungspunkte von Netzen und welche Rolle spielen sie beim Begriff der Kompaktheit?

(b)[4 P] Sei $K \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ eine kompakte Teilmenge bzgl. der Produkttopologie. Ist dann für jedes $j \in I$ auch $\pi_j(K)$ kompakt in X_j? (Begründung!)

$\boxed{1}$ (a)[4 P] Let (M, d) be a metric space, $A \subseteq M$ closed and $U \subseteq M$ open with $U \supseteq A$. Does there exist a continuous function $f\colon M \to [0, 1]$ with $f(x) = 1$ for $x \in A$ and $f(x) = 0$ for $x \notin U$? (Justification!)

(b)[4 P] Let X be a topological space and f and g continuous mappings $X \to \mathbb{R}$.
Is the set $U := \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ open in X? (Justification!)

$\boxed{2}$ (a)[4 P] Does every point in any topological space have a neighborhood basis consisting of open sets? (Justification!)

(b)[4 P] Let $\varphi\colon T \to S$ be a continuous map between topological spaces and $t \in T$. Show: If $(t_i)_{i \in I}$ is a net in T, that converges to t, then the net $(\varphi(t_i))_{i \in I}$ converges to $\varphi(t)$.

$\boxed{3}$ Let $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ have the product topology (i.e., the topology of pointwise convergence).

(a)[4 P] Give a neighbor basis of the zero function $0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b)[4 P] Is the mapping $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, defined by $t \mapsto \Big(\sin(x + t)\Big)_{x \in \mathbb{R}}$, continuous?
(Explain your answer!)

$\boxed{4}$ (a)[4 P] Show that closed subsets of compact sets are compact.

(b)[4 P] Show that subspaces of T_2-spaces are T_2.

$\boxed{5}$ (a)[4 P] Show that the complement of an open dense set is nowhere dense.

(b)[4 P] Consider $W = [0, 1]^n$ with relative topology in $\mathbb{R}^n$. Is W homeomorphic to $\mathbb{R}^n$? (Explain your answer!)

$\boxed{6}$ (a)[4 P] What are the accumulation points of nets, and what role do they play in the notion of compactness?

(b)[4 P] Let $K \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ be a compact subset w.r.t. the product topologie. Is then for every $j \in I$ also $\pi_j(K)$ compact in X_j? (Explanation!)