Begriffe aus Kategorie Theorie

(topologischer Ansatz was große und kleine Mengen sind - in Gegensatz zu Maß)

Definition

Sei (X,τ) ein topologischer Raum

- $A \subset X$ heißt nirgends dicht falls $\bar{A}$ ein leeres Innere hat.

- $A \subset X$ heißt mager falls $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und A_n ist nirgends dicht für alle $n \in \mathbb{N}$ (Auch: Menge der ersten Kategorie)

- $A \subset X$ heißt eine residuale Menge falls A^c mager ist (Auch: Menge der zweiten Kategorie

- $A \subset X$ heißt G_δ - Menge (Geöffnet Durchschnitt) falls $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und A_n ist offen für alle $n \in \mathbb{N}$

- $A \subset X$ heißt F_σ - Menge (Fermé, somme) falls $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und A_n ist abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiele

- In Räumen ohne isolierte Punkte sind endliche Mengen nirgends dicht
- Cantor Mengen sind nirgends dicht in Euklidischen Räumen.
- $\mathbb{Q}$ ist mager in $\mathbb{R}$.
  (Alle abzählbare Mengen in Räumen ohne isolierte Punkte sind mager)
- Ränder von offenen (oder von abgeschlossenen) Mengen sind nirgends dicht.

- $\mathbb{Q}$ ist F_σ in $\mathbb{R}$ (wie alle abzählbare Mengen in Hausdorff-Räumen.
- $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ is F_σ (weil abgeschlossen) und auch G_δ (weil $[0,1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right)$)

  Ist $[0,1]$ mager oder residual ?

Proposition 8.3 Sei (X,τ) ein topologischer Raum
Die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) nicht-leere offene Teilmengen sind nicht mager.

(ii) magere Teilmengen haben ein leeres Inneres

(iii) Komplemente von mageren Mengen sind dicht

(iv) Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von offenen dichten Teilmengen. So ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \text{ dicht in } X$$

"dichte G_δ - Mengen" sind dicht.

Definition Jeder topologischer Raum der eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt heißt Baire'scher Raum
(nach dem französischen Mathematiker René-Louis Baire 1874 - 1932)

Beweis von Prop 8.3

(i) $\Rightarrow$ (ii) Teilmengen von nirgends dichten / mageren Mengen sind wieder nirgends dicht / mager.
Also wenn die magere Menge A ein nicht-leeres Innere A° hat, so ist auch $\overset{\circ}{A}$ mager.
Das widerspricht (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ \overset{\text{laut (ii)}}{=} X$,
also A^c ist dicht

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Wir setzen $A_n = X \setminus U_n$.
Also $(\overline{A_n})^\circ \underset{U_n \text{ offen}}{=} \overset{\circ}{A_n} = X \setminus \overline{U_n} \underset{U_n \text{ dicht}}{=} \emptyset$

Damit ist A_n nirgends dicht und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ mager. Aus (iii) folgt dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ dicht ist in X.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sei $E \subset X$ mager und offen
Dann gibt es nirgends dichte Mengen $A_n \subset X$ so dass $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist
$U_n := X \setminus \overline{A_n} = (X \setminus A_n)^\circ$ offen und auch dicht weil A_n nirgends dicht ist. Laut (iv) ist also
$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ dicht, also $E \underset{E \text{ offen}}{=} E^\circ = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^\circ = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \setminus U_n\right)^\circ$
$= \left(X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n\right)^\circ = X \setminus \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n} = \emptyset.$

<u>Zu Erinnerung</u>: eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum (X, d) ist eine <u>Cauchy-Folge</u> falls

$$\lim_{m,n\to\infty} d(a_m, a_n) = 0$$

Der Raum heißt <u>vollständig</u> falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert hat.

(Also $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, aber $\mathbb{R}$ ist es. $\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$.

<u>Satz von Baire</u> Vollständige metrische Räume sind Baire'sche Räume.

Beweis von Satz von Baire

Wir werden Eigenschaft (iv) von Prop. 8.3 nachweisen, also seien $\mathcal{U}_n$ offene dichte Mengen und G eine beliebige offene Menge in X.

Es reicht zu zeigen dass $G \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n \neq \emptyset$.

Weil $\mathcal{U}_0$ dicht ist, ist $G \cap \mathcal{U}_0$ nicht-leer (und offen).

Also $\left.\begin{array}{l} \exists\, r_0 \in (0,1) \\ x_0 \in X \end{array}\right\}$ so dass $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset G \cap \mathcal{U}_0$

Auf dieser Weise gehen wir induktiv weiter: Gegeben die Konstruktion bis $n-1$, $\exists\, x_n \in X$, $r_n \in (0, \frac{1}{n+1})$ so dass

$$\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset \underbrace{B_{r_{n-1}}(x_n)}_{\text{offen}} \cap \underbrace{G}_{\text{offen}} \cap \underbrace{\bigcap_{i=0}^{n-1} \mathcal{U}_i}_{\text{offen und dicht}} .$$

Sei $\mathcal{B} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$. Wir müssen zeigen dass $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Aber $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, denn für $m < n$ gilt $x_n \in B_{r_n}(x_n) \subset B_{r_m}(x_m)$, also

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{m+1} \to 0 \quad \text{als} \quad n, m \to \infty .$$

Der Raum (X, d) ist vollständig, also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat einen Grenzwert x, und nach Konstruktion, $x \in \overline{B_{r_n}(x_n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher $x \in \mathcal{B}$. ▨

Vervollständigungen von metrischen Räumen

Definition Seien (X,d) und (X',d') zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to X'$ heißt **Isometrie** falls $d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$ $\forall x,y \in X$.
Die Räume heißen **isometrisch** falls es eine **bijektive** Isometrie $f: X \to X'$ gibt.

Bemerkung Isometrien sind notwendigerweise **stetig**.

Theorem Zu jedem metrischen Raum (X,d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und eine Isometrie $f: X \to \tilde{X}$ so dass $f(X)$ dicht in $\tilde{X}$ ist. Diese **Vervollständigung** ist eindeutig in dem Sinne dass jede zwei Vervollständigungen isometrisch sind.

Beispiele

- $\mathbb{R}$, Euklidisch ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$
- $L^p([0,1])$ ist die Vervollständigung von $C([0,1])$ in der Norm

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|\, d\mu}$$

bzl. Lebesgue-Maß μ

Beweis Wir setzen erstmal

$$C = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \ ; \ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy Folge} \}$$

mit Äquivalenzrelation

$$(x_n) \sim (y_n) \qquad \text{falls} \quad \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Wir behaupten dass der Quotientraum

$$\tilde{X} = C/\sim \quad , \quad \tilde{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) \qquad (*)$$

die gesuchte Vervollständigung ist.

Aufgabe: $\tilde{d}$ ist eine Metrik, und wohl-definiert (also $(*)$ hängt nicht ab von der Wahl der Representanten $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Äquivalenzklassen.

Definiere

$$i : X \longrightarrow \tilde{X}$$
$$x \longmapsto [(x)_{n \in \mathbb{N}}] \qquad \text{wobei } x_n \equiv x.$$

Dann gilt

$$\tilde{d}(i(x), i(y)) = \tilde{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

also $i : X \to i(X)$ ist eine Isometrie.

Beweis fortgesetzt

- $i(X)$ ist dicht in $\tilde{X}$: Wähle $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ beliebig in $\tilde{X}$ und setze $x^m = y_m \in X$.

Dann gilt

$$\tilde{d}(i(x^m), [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x^m, y_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} d(y_m, y_n).$$

Weil $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ist folgt $\tilde{d}(i(x^m), [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) \to 0$ als $m\to\infty$, also jeder Punkt in $\tilde{X}$ kann beliebig na in $i(X)$ angenähert werden.

- $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ist vollständig: Sei $(\tilde{y}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\tilde{X}$. Da jede $\tilde{y}^{(k)}$ beliebig in $i(X)$ angenähert werden kann, gibt es x^k so dass $\tilde{d}(i(x^k), \tilde{y}^{(k)}) < \frac{1}{k+1}$.

Es gilt

$$d(x^k, x^l) \overset{i \text{ ist Isometrie}}{=} \tilde{d}(i(x^k), i(x^l))$$

$$\leq \tilde{d}(i(x^k), \tilde{y}^{(k)}) + \tilde{d}(\tilde{y}^{(k)}, \tilde{y}^{(l)}) + \tilde{d}(\tilde{y}^{(l)}, i(x^l))$$

$$< \frac{1}{k+1} + \underbrace{\tilde{d}(\tilde{y}^{(k)}, \tilde{y}^{(l)})}_{\text{Cauchy-Folge}} + \frac{1}{l+1}$$

$$\xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0$$

Also (x^k) ist eine Cauchy-Folge in X.

Beweis fortgesetzt.

Wir setzen $\tilde{y} = [(x^k)_{k\in\mathbb{N}}] \in \hat{X}$ und zeigen dass $\tilde{y}$ der Grenzwert von $(\tilde{y}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist:

$$\tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{y}^{(k)}) \leq \tilde{d}(\tilde{y}, i(x^k)) + \tilde{d}(i(x^k), \tilde{y}^{(k)})$$

$$\leq \lim_{\ell\to\infty} d(x^\ell, x^k) + \frac{1}{k+1}$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \qquad \text{weil } (x^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy ist.}$$

- $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ist eindeutig bis auf Isometrie

Sei $(\hat{X}, \hat{d})$ eine andere Vervollständigung mit Isometrie $\hat{\imath}: X \to \hat{X}$ so dass $\hat{\imath}(X)$ dicht ist in $\hat{X}$.

Für jedes $\hat{p} \in \hat{X}$ gibt es eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X so dass $\hat{\imath}(p_n) \longrightarrow \hat{p}$.

Definiere

$$f: \hat{X} \to \tilde{X}, \qquad f(\hat{p}) = \lim_{n\to\infty} i(p_n). \qquad (*)$$

Denn (*) hängt nicht von der Wahl der Folge (p_n) ab, denn wäre (q_n) eine andere Folge denn wegen Isometrie von i und $\hat{i}$

$$\tilde{d}\left(\lim_{n\to\infty} i(p_n), \lim_{n\to\infty} i(q_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(i(p_n), i(q_n))$$
$$= \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \hat{d}(\hat{i}(p_n), \hat{i}(q_n)) = 0$$

da sowohl $i(p_n) \to \hat{p}$ und $i(q_n) \to \hat{p}$.

f ist auch eine Isometrie, denn für jede $\hat{p} = \lim \hat{i}(p_n)$ und $\hat{q} = \lim \hat{i}(q_n) \in \hat{X}$ gilt

$$\tilde{d}(f(\hat{p}), f(\hat{q})) = \tilde{d}\left(\lim_{n} i(p_n), \lim_{n\to} i(q_n)\right)$$
$$= \hat{d}\left(\lim_{n\to\infty} \hat{i}(p_n), \lim_{n\to\infty} \hat{i}(q_n)\right)$$
$$= \hat{d}(\hat{p}, \hat{q}).$$

Schließlich gilt
$$f(\hat{i}(x)) = [(x)] = i(x)$$
wobei (x) die konstante Folge bezeichnet. ∎

In metrischen Räumen ist das Begriff Kompaktheit vergleichmäßig einfach: alle vorherbeschriebenen Versionen fallen zusammen.

Ein weiteres Begriff:

<u>Definition</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt <u>total beschränkt</u> (oder präkompakt) falls

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \subset A$ endlich $\forall x \in A \ \exists y \in N_\varepsilon$ s.d. $x \in B_\varepsilon(y)$.

Also für jedes $\varepsilon > 0$ kann man A mit endlich viele ε-Kugeln überdecken.

<u>Theorem</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

(i) A ist kompakt (jede Überdeckung hat endliche Teilüberdeckung)

(ii) A ist Folgenkompakt (jede Folge hat konvergente Teilfolge)

(iii) jede Folge in A hat einen Häufungspunkt in A.

(iv) A ist total beschränkt und <u>vollständig</u>

Bemerkung: Ohne <u>vollständig</u> geht es nicht: $(0,1) \subset \mathbb{R}$ ist total beschränkt doch nicht kompakt (auch nicht vollständig)

Gleichmäßige Stetigkeit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f: X \to Y$ **gleichmäßig stetig** falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in X \quad d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Also im Vergleich mit normaler Stetigkeit muß das δ uniform über alle $x, y \in X$ gewählt worden. Gleichmäßige Stetigkeit impliziert denn auch Stetigkeit.

Theorem Falls X kompakt ist und $f: X \to Y$ stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweis Wähle zu $\varepsilon > 0$ für jedes $x \in X$ ein $\delta(x) > 0$ nach der Stetigkeitsdefinition von f für $\varepsilon/2$.

Damit erhalten wir eine Überdeckung mit Kugeln:

$$X \subset \bigcup_{x \in X} B_{\delta(x)/2}(x)$$

Weil X kompakt ist gibt es $x_1, \dots, x_N$ so dass $\{B_{\delta(x_i)/2}(x_i)\}_{i=1}^N$ eine endliche Teilüberdeckung ist

Damit ist $\delta := \frac{1}{2} \min\{\delta(x_1), \dots, \delta(x_N)\} > 0$

Beweis fortgesetzt

Seien $x, y \in X$ jetzt beliebig mit $d_X(x,y) < \delta$.
Finde x_i so dass $x \in B_{\delta(x_i)/2}(x_i)$. Denn auch

$$d_X(x_i, y) \leq d_X(x_i, x) + d(x,y) < \frac{\delta(x_i)}{2} + \delta < \delta(x_i).$$

So gilt wegen Stetigkeit in x_i

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$ ☒

Neben gleichmäßiger Stetigkeit gibt es auch der Begriff <u>gleichgradige</u> Stetigkeit.
Es handelt sich hier um Familien stetiger Funktionen

$$H \subset C(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist stetig} \}.$$

Diese Familie ist <u>gleichgradig</u> stetig falls

$$\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ Umgebung } U \ni x_0 \ \forall x \in U \ \forall f \in H :$$

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon .$$

Die natürliche Metrik auf $C(X)$ ist

$$d_\infty(f, g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| .$$

Also die "sup-Metrik". Die davon erzeugte Topologie heißt auch "Topologie der gleichmäßigen Konvergenz". Mit dieser Metrik ist $C(X)$ vollständig (doch nicht notwendigerweise in anderen Metriken!).

Gleichgradige Stetigkeit ist der Schlüsselbegriff zur Karakterisierung von Kompaktheit in $(C(X), d_\infty)$

<u>Satz von Arzéla - Ascoli</u> Sei X ein kompakter Hausdorff Raum. Eine Teilmenge $H \subset C(X)$ ist genau dann kompakt bzl. d_∞ wenn gilt:

(i) H ist punktweise beschränkt: $\forall x \in X \ \sup_{f\in H} |f(x)| < \infty$

(ii) H ist abgeschlossen

(iii) H ist gleichgradig stetig.

Eben weil $\mathbb{R}$ diese Eigenschaften hat kann man in $C(X)$

- addieren : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

  $f+g$ in $C(X)$, $+$ in $\mathbb{R}$

  $C(X)$ ist eine additive Gruppe mit Einselement $f \equiv 0$

- multiplizieren $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

  $f \cdot g$ in $C(X)$, $\cdot$ in $\mathbb{R}$

  $C(X)$ ist eine multiplikative halb-Gruppe ohne Inverse aber mit Einselement $f \equiv 1$

Diese Struktur macht $C(X)$ zu einer $\mathbb{R}$-Algebra.

Wegen dieser Struktur kann man den Satz von Stone - Weierstraß formulieren der gilt als Erweiterung vom

<u>Satz von Weierstraß</u> Sei $X = [a, b]$ ein Euklidisches Intervall. Die Menge der Polynome liegt dicht in $C(X)$ bzw. d_∞.

<u>Satz von Stone - Weierstraß</u> Sei X ein kompakter Hausdorff Raum und $D \subset C(X)$ habe die Eigenschaften

(i) $\forall x \in X \ \exists f \in D \quad f(x) \neq 0$

(ii) $\forall x, y \in X \ \exists f \in D \quad f(x) \neq f(y)$ (D ist punktetrennend)

Dann liegt die von D erzeugte Teilalgebra

$$A(D) = \{ g \in C(X) : g \text{ entsteht durch endlich viele Summen und Produkte von Elementen aus } D \}$$

dicht in $C(X)$.