Eben weil $\mathbb{R}$ diese Eigenschaften hat kann man in $C(X)$

- addieren : $$(f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } C(X)}}{+} g)(x) = f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } \mathbb{R}}}{+} g(x)$$

$C(X)$ ist eine additive Gruppe mit Einselement $f \equiv 0$

- multiplizieren $$(f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } C(x)}}{\cdot} g)(x) = f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } \mathbb{R}}}{\cdot} g(x)$$

$C(X)$ ist eine multiplikative halb-Gruppe ohne Inverse aber mit Einselement $f \equiv 1$
Diese Struktur macht $C(X)$ zu einer $\mathbb{R}$-Algebra.

Wegen dieser Struktur kann man den Satz von Stone-Weierstraß formulieren der gilt als Erweiterung vom

<u>Satz von Weierstraß</u> Sei $X = [a, b]$ ein Euklidisches Intervall. Die Menge der Polynome liegt dicht in $C(X)$ bzl. d_∞.

<u>Satz von Stone-Weierstraß</u> Sei X ein kompakter Hausdorff Raum und $D \subset C(X)$ habe die Eigenschaften

(i) $\forall x \in X \ \exists f \in D \quad f(x) \neq 0$

(ii) $\forall x, y \in X \ \exists f \in D \quad f(x) \neq f(y)$ (D ist punktetrennend)

Dann liegt die von D erzeugte Teilalgebra

$$A(D) = \left\{ g \in C(X) : \begin{array}{l} g \text{ entsteht durch endlich} \\ \text{viele Summen und Produkte von} \\ \text{Elementen aus } D \end{array} \right\}$$

dicht in $C(X)$.

Bernstein Polynome auf $[0,1]$

Definiere $\quad b_{j,n}(x) = \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \qquad x \in [0,1]$, $\; 0 \le j \le n$

Der Grad von $b_{j,n}$ ist n und zusammen ergeben $\{b_{j,n}\}_{j=0}^{n}$ eine Basis des linearen Raums der Polynome bis Grad n.

Wichtige Eigenschaften
$$\sum_{j=0}^{n} \overbrace{b_{j,n}(x)}^{\text{Wahrs. auf } j \text{ Erfolge in } n \text{ Bernoulli Versuche}} = 1 \quad \forall x. \qquad \circledast$$

Erwartung von Proportion der Erfolge. ⟶
$$\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{n}\, b_{j,n}(x) = x$$

Varianz ⟶
$$\sum_{j=0}^{n} \left(x - \frac{j}{n}\right)^2 b_{j,n} = \frac{x(1-x)}{n} \qquad (**)$$

Def Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Bernstein Approximierung von Grad n ist

$$B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) b_{j,n}(x).$$

Beweis des Approximationssatz von Weierstraß mit Hilfe von Bernstein Polynomen.

Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, also gleichgradig stetig und beschränkt weil $[0,1]$ kompakt ist.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Also es gibt $\delta > 0$ und $M \in \mathbb{R}$ so dass

$$\begin{cases} |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ |f(x)| < M \end{cases} \qquad \forall\, x, y \in [0,1] \text{ mit } |x-y| < \delta$$

Sei nun $B_n(f)$ die Bernstein Approximation von f von Grad n. Dann

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{|x - \frac{j}{n}| < \delta} \underbrace{|f(\tfrac{j}{n}) - f(x)|}_{< \varepsilon} \underbrace{b_{j,n}(x)}_{\text{summiert zu } 1}$$

$$+ \sum_{|x - \frac{j}{n}| \geq \delta} \underbrace{|f(\tfrac{j}{n}) - f(x)|}_{< M} b_{j,n}(x)$$

$$\leq \varepsilon + M \sum_{|x - \frac{j}{n}| \geq \delta} b_{j,n}(x)$$

Aus der Chebyshev Ungleichung erfolgt

$$\sum_{|x-\frac{j}{n}|\geq\delta} b_{j,n}(x) \leq \frac{1}{\delta^2}\underbrace{\sum_{j}\left(x-\frac{j}{n}\right)^2 b_{j,n}(x)}_{\text{Varianz}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{wegen } \circledast}}{\leq} \frac{1}{\delta^2 n}$$

Also $$\underbrace{\sup_{x\in[0,1]}\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|}_{=\|B_n(f)-f\|_\infty} \leq \varepsilon + \frac{M}{\delta^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon$$

und weil $\varepsilon>0$ beliebig war

$$\|B_n(f)-f\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad \text{als } n\to\infty$$

▨