UE zu WTheorie und Statistik, SS 2015, Blatt 2

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass bei n mal Werfen einer fairen Münze die Anzahl der Köpfe genau gerade ist?
2. Der Kandidat erhält zwei Schachteln sowie 100 weiße und 100 schwarze Kugeln. Er darf die Kugeln nach Belieben auf beide Schachteln verteilen, wobei keine Schachtel leer bleiben darf. Danach wählt er zufällig eine Schachtel aus und zieht zufällig eine Kugel. Er gewinnt, wenn die Kugel weiß ist. Hängt die Gewinnwahrscheinlichkeit von der Aufteilung der Kugeln ab?
3. Das Licht auf einem Flur kann mittels zwei Schaltern, S_1 und S_2 , an oder ausgeschaltet werden. Wir fassen diese Schalter auf als unabhängige Zufallsvariablen wobei $S_i = 0$ und $S_i = 1$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Das Licht leuchtet genau dann, wenn $S_1 = S_2$. Ist das Ereignis dass das Licht leuchtet unabhängig von S_1 und S_2 ?
4. Die Walnußernte war schrecklich dieses Jahr. Nur eine von vier Schalen enthält tatsächlich eine Nuß. Wie viele Nüße muß ich kaufen um mit 95% Sicherheit wenigstens drei gute Nüße zu haben? Verwenden Sie wenn nötig eine Tabelle (zum Beispiel https://mat.iitm.ac.in/home/vetri/public_html/statistics/binomial.pdf).
5. Durch ein Loch in einer dicken Mauer hängen 10 Schnüre. Du stehst an einem Ende und knüpfst die Ende der Schnüre paarweise zusammen. An der anderen Seite der Mauer steht dein Freund und er knüpft die Ende der Schnüre an der Seite paarweise zusammen, ohne zu wissen was du gemacht hast. Was ist die Wahrscheinlichkeit dass die Schnüre jetzt eine Schleife formen?
6. Zwei Würfel, $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, 6\}\}$. Sei $A = \{(i, j) : i + j = 5 \text{ oder } 6\}$ und $B = \{(i, j) : i - j = 2\}$. Sind A und B unabhängig?
7. Wir würfeln zweimal hintereinander. Sei A das Ereignis, dass der erste Wurf gerade ist, B das Ereignis, dass der zweite Wurf ungerade ist und C das Ereignis, dass die Augensumme gerade ist. Sind diese Ereignisse unabhängig?
8. Die Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ seien unabhängig. Man zeige, dass dann auch die Ereignisse $A_1 \cap A_2, A_3, \dots, A_n$ unabhängig sind und ebenso die Ereignisse $A_1 \cup A_2, A_3, \dots, A_n$.
9. Es seien $A, B, A_1, A_2, \dots$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann sind auch $A \cap B$ und $A \setminus B$, sowie $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ Ereignisse (Also Elemente von $\mathcal{A}$).

10. Als Vorbereitung zur Weihnachtsfeier ziehen n Personen Lose (mit den eigenen Namen) um zu bestimmen wer für wen ein Weihnachtsgeschenk kaufen soll. Wenn jemand sich selber zieht muss die Losung nochmal gemacht werden. Berechne (mit der "Regel von Inklusion und Exklusion") die Wahrscheinlichkeit, dass jemand sich selbst zieht gleich

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots - (-1)^n \frac{1}{n!} \approx 1 - \frac{1}{e}$$

ist.

11. Bei einem bestimmten Prüfverfahren in der Qualitätskontrolle wird ein Ausschussstück mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.98 erkannt. Ein einwandfreies Stück wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 als solches eingestuft. Die Produktion enthält 3% Ausschuss. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein als fehlerhaft eingestuftes Stück tatsächlich Ausschuss ist?
12. Morsezeichen Punkt und Strich werden im Verhältnis 3:4 gesendet. Durch Übertragungsfehler wird Punkt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{40}$ zu Strich und Strich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{50}$ zu Punkt. Es wird Punkt registriert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde Punkt gesendet?
13. In einem Laden ist eine Alarmanlage, die im Fall eines Einbruchs mit Wahrscheinlichkeit 0.99 die Polizei alarmiert. In einer Nacht ohne Einbruch wird mit Wahrscheinlichkeit 0.002 Fehlalarm ausgelöst. Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht beträgt 0.0005. Die Alarmanlage hat gerade Alarm gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Einbruch im Gange?
14. An einem Straßenstück, wo man festgestellt hat, dass 30% der Autofahrer zu schnell fahren, wird ein Radarmessgerät aufgestellt. Dieses Gerät erkennt einen zu schnell fahrenden Autofahrer mit Wahrscheinlichkeit 0.98. Jedoch wird mit Wahrscheinlichkeit 0.05 ein nicht zu schnell fahrender Autofahrer irrtümlich als zu schnell gemessen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer, der Strafe zahlen muss, dies ungerechterweise tut?
15. Man zeige dass $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_i))$, wenn die Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ unabhängig sind.
16. Erklären Sie den Beweis von Satz 7 b) (siehe Skriptum).
17. Es seien $A_1, A_2, \dots$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, und $A := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k$. Man beschreibe das Ereignis A in Worten, und zeige, dass $A \in \mathcal{A}$ und $\mathbb{P}(A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$ gelten.