UE zu WTheorie und Statistik, SS 2015, Blatt 3

1. Berechnen Sie die Erwartung und Varianz der
   (a) uniformen Verteilung (auf dem Einheitsintervall);
   (b) geometrischen Verteilung.

2. Ein Faden der Länge 1 zerbricht an einer beliebigen Stelle (uniforme Verteilung). Sei X die Länge des längsten Stücks. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und Erwartung von X.

3. Sei $\Phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ ein uniformverteilter Winkel, und $X = \tan(\Phi)$. Zeigen Sie dass X eine Cauchy-Verteilung hat, also mit Dichte $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{t^2+1}$.

4. Sei T die Lebensdauer einer Lampe; wir nehmen an sie ist exponential verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T > 26 | T > 25)$ und auch die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(T | T > 25)$. (Schlußfolgerung: Abnutzung spielt keine Rolle!)

5. Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Ereignissen und $B := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$. Man interpretiert B als das Ereignis, dass unendlich viele der A_k eintreten. Man zeige, dass $\mathbb{P}(B) = 0$ ist, wenn $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k) < \infty$ gilt. Hinweis: $B \subseteq \bigcup_{k \geq n} A_k$ für alle n, woraus $\mathbb{P}(B) \leq \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k)$ folgt.

6. Seien $A_1, A_2, \ldots$ *unabhängige* Ereignisse und $B := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$. Man zeige, dass $\mathbb{P}(B) = 1$ ist, wenn $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ gilt. Hinweis: Sei $B_n := \bigcup_{k \geq n} A_k$, sodass $B_n \supseteq \bigcup_{k=n}^{n+m} A_k$ für alle $m \geq 1$ gilt. Wegen Aufgabe 25 und $1 - x \leq e^{-x}$ erhalten wir $\mathbb{P}(B_n) \geq 1 - \prod_{k=n}^{n+m} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \geq 1 - \exp[-\mathbb{P}(A_n) - \ldots - \mathbb{P}(A_{n+m})]$. Daraus folgt $\mathbb{P}(B_n) = 1$. Jetzt Stetigkeitssatz.

7. Erfahrungsgemäß erscheinen 4% aller Fluggäste, die Plätze reservieren lassen, nicht zum Flug. Die Fluggesellschaft verkauft 75 Flugkarten für 73 verfügbare Plätze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Überbuchung gut geht?

8. Ein Prüfungstest enthält Fragen, zu denen jeweils vier Antworten vorgegeben sind, von denen genau eine richtig ist. Einen positiven Prüfungsabschluss erreicht man, wenn mehr als die Hälfte der Fragen richtig angekreuzt ist. Wie viele Fragen muss man stellen, damit jemand, der rein zufällig ankreuzt, mit Wahrscheinlichkeit 0.97 durchfällt?

9. Man würfelt so lange, bis zum n-ten Mal 6 auftritt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies beim j-ten Wurf passiert? ("negative Binomialverteilung")

10. Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$ ($\mathrm{E}(\lambda)$-verteilt), habe also die W-Dichte $f(x) := \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \in [0, \infty))$. Für $s, t \geq 0$ gilt dann $\mathbb{P}[X > t + s \mid X > s] = \mathbb{P}[X > t]$.

11. Die Lebensdauer X einer Glühbirne (in Stunden) sei $\mathrm{E}(\lambda)$-verteilt. Sie überlebt 100 Stunden mit Wahrscheinlichkeit 0.9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie 200 Stunden überlebt? Wie viele Stunden überlebt sie mit Wahrscheinlichkeit 0.95?

12. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und $a \in \mathbb{R}$. Man berechne die Verteilungsfunktion von $Y := \max(0, X - a)$.

13. Zum Schutz vor naiven Fehlinterpretationen des Gesetzes der großen Zahl. Für 0-1-Folgen $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ sei $H_n(\sigma) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j$ die relative Häufigkeit der 1 unter den ersten n Einträgen. Wir nennen σ *fair* wenn $\lim_{n\to\infty} H_n(\sigma) = \frac{1}{2}$ gilt. Man zeige: a) Für jedes $m \geq 1$ gibt es eine faire Folge σ mit $\sigma_1 = \ldots = \sigma_m = 0$. b) Es gibt es eine faire Folge σ mit beliebig langen Null-Blöcken, also für jedes $m \geq 1$ gibt es ein $k \geq 1$ so, dass $\sigma_{k+1} = \ldots = \sigma_{k+m} = 0$.

14. Es sei X eine gemäß der W-Dichte $f(x) = 2x$ $(x \in [0, 1])$ zufällig im Einheitsintervall gewählte Zahl. An der Stelle X zerschneiden wir das jenes in $[0, X]$ und $[X, 1]$. Unabhängig von X wird eine faire Münze Y geworfen. Falls $Y = 0$, so wird das linke Teilintervall gewählt, ansonsten das rechte. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das gewählte Intervall mindestens so lang wie das andere ist. Was geschieht, wenn statt Y eine unfaire Münze Z mit $\mathbb{P}[Z = 0] = \frac{1}{3}$ verwendet wird?

15. Es sei $n = 2m$, und X sei $B(n, \frac{1}{2})$-verteilt. Sei $b^*_{2m} := \mathbb{P}[X = m]$ das Maximum der Einzelwahrscheinlichkeiten dieser symmetrischen Binomialverteilung. Erinnern Sie sich an die Stirling'sche Formel, um zu sehen, dass $\lim_{m\to\infty} \sqrt{\pi m} \cdot b^*_{2m} = 1$.

16. Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$, tatsächlich eine W-Dichte ist, dh dass $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1$ gilt. Es gibt viele Wege, dies zu überprüfen. Versuchen Sie den folgenden und nutzen Sie die Gelegenheit, die verwendeten Resultate der Analysis (im Detail) zu wiederholen: Bestimme zuerst das Integral $I_b := \int\int_{\{(x,y): x^2+y^2 \leq b^2\}} e^{-x^2-y^2} dx$ $(b > 0)$ über die Kreisscheibe vom Radius b durch Übergang zu Polarkoordinaten, und damit $I := \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx$. Drücke I dann als Grenzwert der Integrale über Quadrate der Kantenlänge $2a$ aus, $\int\int_{[-a,a]^2} e^{-x^2-y^2} dx$.