UE zu WTheorie und Statistik, SS 2022, Blatt 3

1. Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Ereignissen und $B := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$. Man interpretiert B als das Ereignis, dass unendlich viele der A_k eintreten. Man zeige, dass $\mathbb{P}(B) = 0$ ist, wenn $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(A_k) < \infty$ gilt. Hinweis: $B \subseteq \bigcup_{k\geq n} A_k$ für alle n, woraus $\mathbb{P}(B) \leq \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k)$ folgt.

2. Seien $A_1, A_2, \ldots$ *unabhängige* Ereignisse und $B := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$. Man zeige, dass $\mathbb{P}(B) = 1$ ist, wenn $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ gilt. Hinweis: Sei $B_n := \bigcup_{k\geq n} A_k$, sodass $B_n \supseteq \bigcup_{k=n}^{n+m} A_k$ für alle $m \geq 1$ gilt. Wegen Aufgabe 25 und $1 - x \leq e^{-x}$ erhalten wir $\mathbb{P}(B_n) \geq 1 - \prod_{k=n}^{n+m}(1 - \mathbb{P}(A_k)) \geq 1 - \exp[-\mathbb{P}(A_n) - \ldots - \mathbb{P}(A_{n+m})]$. Daraus folgt $\mathbb{P}(B_n) = 1$. Jetzt Stetigkeitssatz.

3. Für das Lebesgue'sche Maß λ auf $\mathbb{R}$, zeigen Sie dass abzählbare Mengen Nullmengen sind.

4. Für das Lebesgue'sche Maß λ auf $\mathbb{R}$, zeigen Sie dass $\lambda([a, b]) = b - a$ für alle $a < b$. Hierfür brauchen Sie nur dass das Lebesgue'sche Maß σ-additiv und translationsinvariant ist und normiert so dass $\lambda([0, 1]) = 1$.

5. Sei $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ der Raum von 0-1-Folgen mit Produkt Topologie. Zeigen Sie dass die Menge $\{x \in X : x_i = 1 \text{ nur endlich oft}\}$ zwar Borel aber nicht offen oder abgeschlossen ist.

6. Wir definieren die Mittel-ϵ_n Cantor Menge in $[0, 1]$ als $C = \bigcap_n C_n$, wobei $C_0 = [0, 1]$ und C_n entsteht aus C_{n-1} indem von allen Intervall Komponenten J von C_{n-1} dass mittlere Interval der Länge $\epsilon_n|J|$ entfernt wird. Wir nehmen immer an dass $\epsilon_n \in (0, 1)$. Zum Beispiel, wenn $\epsilon_n = \frac{1}{3}$ für alle $n \geq 1$, dann C ist die Mitteldrittel Menge.

   Wie schnell müssen die ϵ_n fallen damit das Lebesgue'sche Maß $\lambda(C) > 0$?

7. Ein Würfel wird unendlich oft geworfen und das i-te Ergebnis heißt $X_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Beschreiben Sie den zugehörige Wahrscheinlichkeitsraum, Borel σ-Algebra und Bernoulli-Maß.—— Sind die folgende Ergebnisse Borel Mengen? Berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeit:
   (i) Die Eins wird unendlich oft geworfen.
   (ii) $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq 4$.
   (iii) Von einem gewissen n abwärts ist die Anzahl geworfener Einsen immer gröser als die Anzahl Zweien.

8. Finden Sie eine Menge in $[0, 1]$ die nicht Borel ist. Finden Sie eine Nullmenge in $[0, 1]$ die nicht Borel ist.

9. Eine Folge von Zufallsvariabelen S_n **konvergiert** zu S **im 2-ten Mittel** falls
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|S_n - S|^2) = 0.$$
Sei nun $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_i)$, wobei (X_i) eine Folge von unabhängigen identisch verteiten Zufallsvariabelen mit Erwartung μ und Varianz $\sigma^2 < \infty$ ist. Zeigen Sie dass S_n im 2-ten Mittel gegen μ konvergiert. (Hier wird μ also als eine Zufallsvariabele die nur den Wert μ annimmt aufgefasst.)

10. Man bestimme den Erwartungswert und der Varianz einer ZV X mit Dichte $f(x) := 1_{(0,1)}(x)\, 12x^2(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

11. Sei X eine ZV mit Dichte f_X und endlichem k-tem Moment. Berechnen Sie die Dichte von X^k.

12. Berechnen Sie das k-te Moment der Standardnormalverteilung. (Hinweis: partielle Integration).

13. Dichte f und Verteilungsfunktion F der Standard-Normalverteilung erfüllen
$$f(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) < 1 - F(x) < f(x)\,\frac{1}{x} \qquad \text{für } x > 0.$$
(Hinweis: Ableitungen vergleichen.)

14. Es seien X und Y unabhängig und E(λ)- bzw E(μ)-verteilt. Welche Dichte hat $X + Y$?

15. Es sei X eine ZV mit Dichte $f(x) := \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ (die Cauchy Verteilung). Man bestimme die Dichte von $Y := \frac{1}{X}$.

16. Der Zufallsvektor (X, Y) habe Dichte f. Welche Dichte hat $Z := XY$?

17. Der Zufallsvektor (X, Y) habe Dichte f. Welche Dichte haben $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$ und der Winkel S zwischen x-Achse und dem Vektor $\binom{X}{Y}$? Welche Dichte hat (R, S)?

18. Der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte $f(x, y) := 1_{(0,4)\times(1,5)}(x, y)\,\frac{xy}{96}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Man bestimme $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[2X + 3Y]$.

19. Es seien X und Y unabhängig und beide E(λ)-verteilt. Welche Dichten haben $X - Y$ und $\frac{X}{X+Y}$?

20. Es seien X und Y unabhängig und beide auf $[0, 1]$ uniform verteilt. Welche Dichten haben XY und X/Y?

21. Es seien X und Y unabhängig und beide $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt. Welche Dichte hat $\sqrt{X^2 + Y^2}$?