UE zu WTheorie und Statistik, SS 2015, Blatt 4

1. Wir haben zwei (gemischte) Pakete von jeweils 32 Karten, eines mit 4 und eines mit 8 Assen. Man wählt zufällig ein Paket und deckt die ersten beiden Karten auf. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten beiden aufgedeckten Karten Asse sind? b) Wenn die ersten beiden aufgedeckten Karten Asse sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Karte des anderen Paketes ein As ist?

2. Dichte φ und Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung erfüllen

$$\varphi(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) < 1-\Phi(x) < \varphi(x)\,\frac{1}{x} \qquad \text{für } x > 0.$$

   (Hinweis: Ableitungen vergleichen.)

3. Es seien X und Y unabhängig und $\mathrm{E}(\lambda)$- bzw $\mathrm{E}(\mu)$-verteilt. Welche Dichte hat $X+Y$?

4. Es sei X eine ZV mit Dichte $f(x) := \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ (die Cauchy Verteilung). Man bestimme die Dichte von $Y := \frac{1}{X}$.

5. Der Zufallsvektor (X, Y) habe Dichte f. Welche Dichte hat $Z := XY$?

6. Der Zufallsvektor (X, Y) habe Dichte f. Welche Dichte haben $R := \sqrt{X^2+Y^2}$ und der Winkel S zwischen x-Achse und dem Vektor $\binom{X}{Y}$? Welche Dichte hat (R, S)?

7. Es seien X und Y unabhängig und beide $\mathrm{E}(\lambda)$-verteilt. Welche Dichten haben $X-Y$ und $\frac{X}{X+Y}$?

8. Es seien X und Y unabhängig und beide auf $[0, 1]$ uniform verteilt. Welche Dichten haben XY und X/Y?

9. Es seien X und Y unabhängig und beide $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt. Welche Dichte hat $\sqrt{X^2+Y^2}$?

10. a) Im Königreich Poissonien werden im Schnitt 3 Kinder pro Tag geboren. Nach der Ankündigung, Entbindungen die am Geburtstag des Königs stattfinden zu belohnen, wurden an jenem Tag 8 Kinder geboren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würden ohne Aussicht auf Belohnung an diesem Tag mindestens 8 Kinder geboren?

    b) Am genannten Feiertag fallen ein Paar Regentropfen auf den (langen) königlichen Balkon, im Schnitt 2 Tropfen pro Laufmeter. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt der 80 cm breite Thron trocken?

11. Eine Fabrik produziert Schrauben, wobei jede einzelne mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.001$ defekt ist. Bestimme (mittels Poisson-Approximation) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schachtel mit 500 Schrauben wenigstens zwei defekte enthält.

12. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$F(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0, \\ 1 - e^{-\alpha(x-\beta)} & \text{falls } t \geq 0. \end{cases}$$
mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für welche Paare (α, β) ist dies die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X? Für welche (α, β) besitzt X eine Dichte, und wie lautet diese?

13. Die Exponentialverteilung erhält man zum Beispiel auch durch folgenden Grenzübergang: Sei $\mu > 0$ fest, und $n \geq \mu$ eine ganze Zahl. Zu den Zeitpunkten $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ führen wir (unabhängige) Münzwürfe durch, jeweils mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p_n = \mu/n$. Es sei V_n die Wartezeit bis zum ersten Erfolg. Man zeige, dass für jedes $t > 0$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[V_n > t] = e^{-t\mu}.$$

14. Eine Bankfiliale betreibt zwei Schalter, die Dauer die ein Kunde an seinem Schalter verbringt werde als exponentialverteilt (und von anderen Kunden unabhängig) angenommen. Drei Kunden A,B,C betreten die Bank, A und B werden zuerst bedient, C wartet, bis A oder B fertig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird C vor A fertig sein? Mit welcher erst nach A und B?

15. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable, mit Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$. Man bestimme die Verteilungsfunktionen von $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$ und $K_n := \min(X_1, \ldots, X_n)$.

16. Erklären Sie den Beweis von Satz 25.

17. Sei X eine Zufallsvariable. Man widerlege oder beweise formal folgende Aussagen über Folgen von Ereignissen (wenn $m \to \infty$). a) $\{X < \pi + \frac{1}{m}\} \searrow \{X < \pi\}$ b) $\{e - \frac{1}{m} < X \leq 5\pi - \frac{1}{m}\} \searrow \{e \leq X < 5\pi\}$.

    Welche der folgenden Aussagen ist/sind stets korrekt? a') $\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}[X < \pi + \frac{1}{m}] = \mathbb{P}[X < \pi]$ b') $\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}[e - \frac{1}{m} < X \leq 5\pi - \frac{1}{m}] = \mathbb{P}[e \leq X < 5\pi]$.

18. Es seien X und N Zufallsvariable, N diskret mit Wertebereich $R \subseteq \mathbb{N}$. Man zeige, dass X und N genau dann unabhängig sind, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ und $k \in R$ gilt, dass $\mathbb{P}[X \leq t, N = k] = \mathbb{P}[X \leq t] \cdot \mathbb{P}[N = k]$.

19. Unter 32 Karten befinden sich 4 Asse. Die Karten werden gemischt und nacheinander aufgedeckt. a) Man beschreibe ein passendes Modell und bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten beiden aufgedeckten Karten Asse sind. b) Sei X die Position des zweiten aufgedeckten Asses. Bestimme die Verteilung von X.