UE zu WTheorie und Statistik, SS 2022, Blatt 4

1. Ein betrunkener läuft über den ganzen Zahlen, mit unabhängingen Schritten $(X_i)_{i\geq 1}$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Nach n Schritten ist der betrunkene an Stelle $S_n = X_1 + \cdots + X_n \in \mathbb{Z}$. Dieser Prozess heißt die symmetrische Irrfahrt. Zeigen Sie (mittels Kolmogorovs 0-1-Gesetz) dass fast sicher $S_n = 0$ unendlich oft passiert.

2. Seien $X_i \simeq \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Was ist die Dichte von $X_1 + X_2$, oder ganz allgemein von $X_1 + \cdots + X_n$? (Hinweis: Charakteristische Funktionen.)

3. Sei $X = (X_1, X_2) \simeq \mathcal{N}(0, \Sigma)$ wobei Σ eine positiv-definite 2×2 Matriz ist. Zeigen Sie dass Σ tatsächlich die Kovarianzmatriz von (X_1, X_2) ist. (Zur Erinnerung, die i, j-Komponente der Kovarianzmatriz ist gegeben durch $\mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))$.

4. Zwei ZV X und Y heißen **unkorreliert** falls $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Insbesondere sind unabhängige ZV immer unkorreliert.
   a) Zeigen Sie dass die Kovarianzmatriz $Cov(X, Y)$ eine Diagonalmatriz ist.
   b) Finden Sie zwei ZV X und Y die zwar unkorreliert aber nicht unabhängig sind.

5. Zwei Zufallsvariabelen X und$Y$ haben die gleiche Varianz. Zeigen Sie dass:
   a) $X - Y$ und $X + Y$ unkorreliert sind.
   b) $X - Y$ und $X + Y$ nicht immer unabhängig sind, auch nicht wenn X und Y unabhängig sind.

6. **a)** Die Komponenten X_1, X_2 eines $\mathcal{N}(0, \Sigma)$-verteilten Vektors X sind genau dann unabhängig wenn sie unkorreliert sind.
   b) Man konstruiere einen Vektor $X = (X_1, X_2)$ derart, dass X_j jeweils $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt sind mit $\mathbb{E}(X_1 X_2) = 0$, wobei X_1, X_2 aber nicht unabhängig sind.

7. Sei $X \simeq \mathcal{N}(0, 1)$. Zeigen Sie dass X^2 die Gamma-Verteilung $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ hat.

8. Der diskrete Zufallsvektor (X, Y) nimmt die Werte $(-1, -1)$, $(0, 0)$ und $(1, 1)$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$ und die Werte $(-1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, -1)$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$ an. Bestimmen Sie $Cov[X, Y]$. Sind X, Y unabhängig?

9. Der Winkel W sei in $(0, 2\pi)$ uniform verteilt, und (X, Y) der zugehörige Punkt am Einheitskreis $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Bestimme die Dichte von X und den Erwartungswert von $|X|$.

10. Der Punkt (X, Y) sei in der Einheitskreisscheibe $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ uniform verteilt. Bestimme die Dichte von X und den Erwartungswert von $|X|$.

11. Der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte $f(x, y) := 1_{\{(u.v):0 \leq v < u < 1\}}(x, y)\, 8xy$. Man bestimme den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}(X \mid Y > \frac{1}{2})$ von X, gegeben dass $Y > \frac{1}{2}$.

12. Zeigen Sie dass $X_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit dann und nur dann als $\mathbb{E}(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}) \to 0$.

13. Die Zufallsvariabele X sei geometrisch verteilt. Man bestimme die erzeugende Funktion $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$, sowie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}[(X)$.

14. Die Zufallsvariabele X hat erzeugende Funktion $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$.
a) Wie berechnet man die erzeugende Funktion der zentrierten ZV von X?
b) Wir wissen dass $G_X(s) = e^{s^2/2}$ falls $X \simeq \mathcal{N}(0,1)$. Was ist die erzeugende Funktion falls $X \simeq \mathcal{N}(\mu, \sigma)$?

15. Sei X eine ZV mit Werten in $\mathbb{N}_0$, und erzeugender Funktion $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$. Dann existiert $\mathbb{E}(X)$ genau wenn der Grenzwert $\lim_{s \nearrow 1} G'_X(s)$ existiert, und in diesem Fall stimmen die beiden Werte überein. Man beweise dies, und eine entsprechende Aussage für $\mathbb{E}(X^2)$ bzw $\mathrm{Var}(X)$.

16. Zeigen Sie dass:
a) Die Poisson-Verteilung mit Parameter λ die momenterzeugende Funktion $e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}$ und charakteristische Funktion $e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}$ hat.
b) Die Gamma-Verteilung $\Gamma(r, \lambda)$ die momenterzeugende Funktion $(\frac{\lambda}{\lambda - t})^r$ und charakteristische Funktion $(\frac{\lambda}{\lambda - it})^r$ hat.

17. Es sei X eine ZV mit $\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[X = -1] = \frac{1}{2}$. Man bestimme die Momenterzeugende Funktion, die Charakteristische Funktion, und sämtliche Momente von X.

18. Sei $a \in (0, \infty)$. Man bestimme die Fouriertransformierte einer ZV
a) X die auf $[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$ uniform verteilt ist;
b) Y mit Dichte $f(x) = ce^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ und c die passende Konstante.

19. Sei $\alpha > 0$ und seien Y_n diskrete Zufallsvariablen mgegeben durch $\mathbb{P}(Y_n = n^\alpha) = \frac{1}{n}$ und $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Zeigen Sie dass $Y_n \to 0$ in p-tem Mittel dann und nur dann also $\alpha < \frac{1}{p}$.

20. Sei Y_n geometrisch verteil mit Parameter λ/n. Zeigen Sie dass Y_n/n konvergiert in Verteilung. Was ist die Limesverteilung?

21. Seien $(X_i)_{i \geq 1}$ unabhängige ZV die alle die Cauchy Verteilung (mit Dichte $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$) haben.
a) Mit Hilkfe von Residuënrechnung oder auf einer anderen Weise, überprüfen Sie dass die charakteristische Funktion $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ ist.
b) Zeigen Sie dass $Y_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ auch Cauchy verteilt ist.