UE zu WTheorie und Statistik, SS 2015, Blatt 5

1. Ein Winkel W werde zufällig in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gewählt (uniforme Verteilung). In der Ebene wird damit vom Ursprung $(0,0)$ ausgehend ein Strahl nach rechts definiert, mit Winkel W gegenüber der x-Achse. Dieser Strahl trifft die senkrechte Gerade $x = 1$ in einem zufälligen Punkt $(1, Y)$. Man bestimme die Dichte von Y.

2. Zwei Freunde verabreden sich zwischen 9 und 10 Uhr, und treffen jeweils zufällig (und voneinander unabhängig) irgendwann während dieses Zeitraumes ein. Dann warten sie ggfs bis zu 15 Minuten auf den anderen, bevor sie wieder gehen. **a)** Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie einander wirklich treffen. **b)** Wieviel Zeit vergeht im Mittel zwischen dem jeweiligen Eintreffen der beiden?

3. Man bestimme den Erwartungswert und Varianz der Poissonverteilung $\mathrm{P}(\lambda)$.

4. Man bestimme Erwartungswert und Varianz einer ZV X mit Dichte $f(x) := \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Aus einer Urne mit n Kugeln wird k mal mit Zurücklegen gezogen. Es sei X die Anzahl jener Kugeln, die mindestens einmal gezogen werden. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

6. Aus einer Urne mit n Kugeln wird mit Zurücklegen gezogen bis jede Kugel wenigstens einmal gezogen wurde. Es sei X die Anzahl der benötigten Züge. Man bestimme Erwartungswert und Varianz von X.

7. Der diskrete Zufallsvektor (X, Y) nimmt die Werte $(-1, -1)$, $(0, 0)$ und $(1, 1)$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$ und die Werte $(-1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, -1)$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$ an. Bestimmen Sie $Cov[X, Y]$. Sind X, Y unabhängig?

8. Der Winkel W sei in $(0, 2\pi)$ uniform verteilt, und (X, Y) der zugehörige Punkt am Einheitskreis $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Bestimme die Dichte von X und den Erwartungswert von $|X|$.

9. Der Punkt (X, Y) sei in der Einheitskreisscheibe $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ uniform verteilt. Bestimme die Dichte von X und den Erwartungswert von $|X|$.

10. Der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte $f(x, y) := 1_{\{(u.v):0 \leq v < u < 1\}}(x, y)\, 8xy$. Man bestimme den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X \mid Y > \frac{1}{2}]$ von X, gegeben dass $Y > \frac{1}{2}$.

11. Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ sei ZN(M)-verteilt mit $M = \begin{pmatrix} v_1 & w \\ w & v_2 \end{pmatrix}$. Man berechne die Dichte von X_1.

12. Die ZVn X, Y seien unabhängig und jeweils $N(0,1)$-verteilt. Dann sind auch $X - Y, X + Y$ unabhängig.

13. **a)** Die Komponenten X_1, X_2 eines ZN(M)-verteilten Vektors X sind genau dann unabhängig wenn sie unkorreliert sind. **b)** Man konstruiere einen Vektor $X = (X_1, X_2)$ derart, dass X_j jeweils $N(0,1)$-verteilt sind mit $\mathbb{E}[X_1 X_2] = 0$, wobei X_1, X_2 aber nicht unabhängig sind.

14. Die ZV X sei geometrisch verteilt. Man bestimme die erzeugende Funktion $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$, sowie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{V}[X]$.

15. Die ZV X hat erzeugende Funktion $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$. **a)** Wie berechnet man die erzeugende Funktion der zentrierten ZV von X? **b)** Wir wissen dass $G_X(s) = e^{s^2/2}$ falls $X \simeq N(0,1)$. Was ist die erzuegnende Funktion falls $X \simeq N(\mu, \sigma)$?

16. Sei X eine ZV mit Werten in $\mathbb{N}_0$, und erzeugender Funktion $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$. Dann existiert $\mathbb{E}[X]$ genau wenn der Grenzwert $\lim_{s \nearrow 1} G'_X(s)$ existiert, und in diesem Fall stimmen die beiden Werte überein. Man beweise dies, und eine entsprechende Aussage für $\mathbb{E}[X^2]$ bzw $\mathrm{Var}[X]$.

17. Es sei X eine ZV mit $\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[X = -1] = \frac{1}{2}$. Man bestimme die Momenterzeugende Funktion, die Charakteristische Funktion, und sämtliche Momente von X.

18. Sei $a \in (0, \infty)$. Man bestimme die Fouriertransformierte einer ZV **a)** X die auf $[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$ uniform verteilt ist **b)** Y mit Dichte $f(x) = ce^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ und c die passende Konstante.