UE zu WTheorie und Statistik, SS 2022, Blatt 5

1. Die folgende Tabelle bezeichnet $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$.

t	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
$\Phi(t)$	0.50	0.58	0.66	0.73	0.79	0.84	0.88	0.92	0.95	0.96	0.98	0.99

Professionelle Schachspieler haben eine Zahl, die so-genannte “Elo-Rating”, die ihre Spielstarke angibt. Die Begründung aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ist dass diese Zahl die Erwartungswert einer normalverteiler ZV, mit Standardabweichung immer 10. Wenn zwei Spieler ZV X und Y haben, also mit Ratings $\mu = \mathbb{E}(X)$ und $\nu = \mathbb{E}(Y)$, dann ist die Wahrscheinlichkeit dass der erste Spieler den zweiten besiegt gleich $\mathbb{P}(X > Y)$. Einfachheitshalber ignorieren wir unentschiedene Schachpartieen.

a) Peter und Stephan, obwohl nicht professionell, haben Elo-Ratings 1400 und 1600. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass Peter gewinnt?

b) In einem Tournier hat Theo 7 Siege aus 10 Partieen. Die durchschnittliche Rating der Gegner war 1800. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass Theo’s Rating größer als 2000 ist?

2. Die Lebenserwartung eines Fisches sei exponentialverteilt und beträgt im Durchschnitt 120 Tage. Die Lebenserwartungen der einzelnen Fische seien unabhängig. Was ist die Wahrscheinlichkeit dass bis zur nächsten Paarungszeit (in einem Jahr sind 365 Tage) von 500 mindestens 50 Fische überleben.

3. Eine Maschine produziert Bolzen mit einem mittleren Durchmesser von 9.9mm und Standardabweichung 0.1mm und eine weitere Maschine bohrt LLöcher mit einem mittleren Durchmesser von 10.0mm und Standardabweichung 0.2mm. Beide Werte seien normalverteilt und unabhängig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zzufällig gewählter Bolzen in ein zufällig gewähltes Loch passt.

4. Betrachten Sie eine einseitige Testhypothese $H_0 : \mu \geq \mu_0$ für den Schätzer $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ von unabhängigen normal-verteilten Zufallsvariablen mittels bekannter Varianz σ^2. Sei $U = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\hat{\mu} - \mu_0)$ eine teststatistik.

a) Was ist das γ-Konfidenzintervall von $\hat{\mu}$?
b) Was is das α-Verwerfungsbereich von U?
c) Berechnen Sie die minimale Stichprobengröße damit die Wahrscheinlichkeit H_0 bei einer Diskrepanz von mehr als d ungerecht zu akzeptieren kleiner als α ist.

5. Die Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_5$ seien unabhängig und identisch verteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2. Betrachte die folgenden Schätzer für den Mittelwert:

$$
\begin{aligned}
T_1 &:= \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5); \\
T_2 &:= \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + X_3); \\
T_3 &:= \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \frac{1}{2}X_5; \\
T_4 &:= X_4 + X_5; \\
T_5 &:= X_1.
\end{aligned}
$$

a) Welche Schätzer sind erwartungstreu?
b) Welcher Schätzer hat die kleinste quadratische Abweichung?

6. Die Zufallsvariable X sei exponentiell verteilt, also $X \simeq E(\lambda)$ mit Dichte $f(x) = \lambda 1_{[0,\infty)} e^{-\lambda x}$. Zeigen Sie dass es auf Grund dieser einen Stichprobe X keinen **erwartungstreuen** Schätzer $\hat{\lambda}$ geben kann.
Hinweiss: Wäre $\hat{\lambda}$ so einer Schätzer, dann muss $\int \hat{\lambda} f(x)\, dx$ gleich λ sein für jedes $\lambda > 0$.

7. Seien $X_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots, n$, unabhängige Bernoulli Experimenten, mit $\mathbb{P}(X_j = 1) = p$.
a) Mittels der Momentenmethode, finden Sie einen Schätzer $\hat{p}$ für die Erfolgswahrscheinlichkeit p.
b) Sei $Y \in \{1, \ldots, n\}$ die kleinste Zahl j so dass $X_j = 1$, und $Y = 0$ falls alle $X_j = 0$. Mittels der Momentenmethode, finden Sie einen Schätzer $\hat{p}$ auf Grund von nur Y und n.

8. Seien X_j, $j = 1, \ldots, n$, unabhängige Poisson-verteilte Stichproben.
a) Finden Sie den Maximum Likelihood Schätzer $\hat{\lambda}$ für den Parameter λ der Poissonverteilung.
b) Zeigen Sie dass $\hat{\lambda}$ erwartungstrue ist.
c) Zeigen Sie dass $\hat{\lambda}$ konsistent ist.

9. In einer Urne befindet sich eine unbekannte Anzahl N durchnumerierter Kugeln. Um N schätzen zu können zieht man n Kugeln mit Zurücklegen, und protokolliert deren Nummern $X_1, \ldots, X_n$.
a) Ist $\hat{N} = \max(X_1, \ldots, X_n)$ ein Maximum-Likelihood Schätzer für N?
b) Ist dieser Schätzer erwartungstreu?
c) Wie verhält sich $\mathbb{E}[\widehat{N}]/N$ für $N \to \infty$.

10. Es sei (X, Y) uniform verteilt in der Kreisscheibe $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r\}$, wobei $r > 0$ nicht bekannt ist. Man bestimme:
a) einen Maximum-Likelihood Schätzer für $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$ und
b) einen erwartungstreuen Schätzer für R.