UE zu WTheorie und Statistik, SS 2015, Blatt 6

1. Ein fairer Würfel wird 600 mal geworfen. Man verwende den zentralen Grenzwertsatz um angenähert die Wahrscheinlichkeiten dafür auszudrücken, dass **a)** zwischen 90 und 110 Sechsen bzw **b)** mehr als 120 Sechsen auftreten.

2. Bei einer Wahlumfrage unter 4000 Wählern geben 527 an, die Partei A wählen zu wollen. Man bestimme ein asymptotisches 95%-Konfidenzintervall für den Wähleranteil der Partei A.

3. **(a)** Für $0 \leq k \leq n$ sei $\Psi_{n,p}(k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$, das heißt $\Psi_{n,p}(k) = \mathbb{P}(X \leq k)$ für eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable X. Man zeige: Für festes n und k gilt $\Psi_{n,p}(k) \leq \Psi_{n,q}(k)$ wenn $p \leq q$ ist.
   (b) Sei p der unbekannte Anteil der Personen in der Grundgesamtheit, die Eigenschaft A haben. Sei $0 < p_0 < 1$. Wir testen die Hypothese $H_0 : p \geq p_0$. Wir ziehen eine Stichprobe vom Umfang n. Sei N die Anzahl der Personen in der Stichprobe mit Eigenschaft A. Dann hat N die $B(n,p)$-Verteilung. Sei $0 < \alpha < 1$ und $V = \{0, 1, 2, ..., r\}$, wobei r maximal gewählt wird mit $\Psi_{n,p_0}(r) \leq \alpha$. Mit (a) zeige man, dass V der Verwerfungsbereich zu obigem Test mit Teststatistik N zur Irrtumswahrscheinlichkeit α ist. Weiters gilt $k \in V \Leftrightarrow \Psi_{n,p_0}(k) \leq \alpha$.
   (c) Unter den selben Voraussetzungen wie in (b) testen wir die Hypothese $H_0 : p \leq p_0$ für ein vorgegebenes p_0. Wir ziehen eine Stichprobe vom Umfang n. Sei N die Anzahl der Elemente in der Stichprobe, die Eigenschaft A haben. Sei $0 < \alpha < 1$ und $V = \{s+1, s+2, ..., n\}$ wobei s minimal gewahlt wird mit $\Psi_{n,p_0}(k)(s) \geq 1-\alpha$. Man zeige, dass V der Verwerfungsbereich zu obigem Test mit Teststatistik N zur Irrtumswahrscheinlichkeit α ist. Weiters gilt $k \in V \Leftrightarrow \Psi_{n,p_0}(k-1) \geq 1-\alpha$.

4. Sei p die Wahrscheinlichkeit dass eine Reißzwecke mit der flachen Seite auf den Boden fällt. Wie viele Zwecken muß man auf den Boden fallen lassen so dass mit Wahrscheinlichket ≤ 0.05 die durchschnittliche Anzahl der Zwecken mit flacher Seite am Boden höchstens $p/10$ von p abweicht?

5. In einer Urne befindet sich eine unbekannte Anzahl N durchnumerierter Kugeln. Um N schätzen zu können zieht man n Kugeln mit Zurücklegen, und protokolliert deren Nummern $X_1, \ldots, X_n$.
   a) Ist $\hat{N} = \max(X_1, \ldots, X_n)$ ein Maximum-Likelihood Schätzer für N?
   b) Ist dieser Schätzer erwartungstreu?
   c) Wie verhält sich $\mathbb{E}[\widehat{N}]/N$ für $N \to \infty$.

6. Es sei (X, Y) uniform verteilt in der Kreisscheibe $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r\}$, wobei $r > 0$ nicht bekannt ist. Man bestimme **a)** einen Maximum-Likelihood Schätzer für $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$ und **b)** einen erwartungstreuen Schätzer für R.

7. Es seien X, Y, Z unabhängige ZV, jeweils uniform verteilt auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Man bestimme und skizziere die Dichten von $X+Y$ und $X+Y+Z$. Vergleiche mit dem zentralen Grenzwertsatz.

8. Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig identisch verteilte ZV mit Verteilungsfunktion $F(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan t$. Dann konvergiert $Y_n := n^{-1}\max(X_1, \ldots, X_n)$ in Verteilung gegen eine ZV Y mit Verteilungsfunktion $G(t) = 1_{(0,\infty)}(t)e^{-\frac{1}{\pi t}}$. (Hinweis: Logarithmieren und de l'Hôpital.)

9. Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ. Man beweise das schwache Gesetz der grossen Zahl mithilfe der Fouriertransformierten von $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

10. Der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte $f(x,y) := 1_{(0,4)\times(1,5)}(x,y)\,\frac{xy}{96}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Man bestimme $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[2X+3Y]$.

11. Man bestimme Erwartungswert und Varianz einer ZV X mit Dichte $f(x) := 1_{(0,1)}(x)\,12x^2(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$.