Übungen zu "Einführung in die Analysis"
WS 2017/2018

33. Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ für $n \geq 0$. Ist die Folge konvergent? Beweisen Sie Ihre Behauptung direkt durch Rückgriff auf die Definition der Konvergenz.

34. Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ $(n \geq 1)$ gegen 1 konvergiert. Finden Sie zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ explizit ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$ stets $|a_n - 1| < \varepsilon$ gilt.

    Hinweis. Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung.

35. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

36. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen, so dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

37. Entscheiden Sie jeweils welche der Eigenschaften *beschränkt, konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegen. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

    (a) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ (b) $a_n = \sqrt{n} + \sin\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ (c) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{n^2 + k}$ $(n \geq 1)$.

38. (a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

    (b) Für $p \geq 1$, sei $a_n = \sqrt[n]{1^p + 2^p + ... + n^p}$ $(n \geq 2)$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

    Hinweis zu (a). Bezeichnen Sie $b_n := \sqrt[n]{n} - 1$ $\forall n \geq 1$. Somit gilt $n = (1 + b_n)^n$. Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz um zu zeigen, dass $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

39. (a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so dass $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

    (b) Sei $x > 1$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$.

40. Bestimmen Sie

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 5^n}{4^n - 5^{n+1}}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (7^n - 7^{n+2})$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, wobei $a > 0, b > 0$.

41. Bestimmen Sie

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 + 3}{1^2 + 2^2 + ... + n^2}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 4}{2n^2 + n + 1}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^k - n^k}{n^{k-1}}$, wobei $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.

42. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle bestimmt divergente Folge gegen $+\infty$. Zeigen Sie, dass $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist. Gilt die Aussage auch im Fall $a = 0$?

43. Geben Sie jeweils ein Beispiel für reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ und

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent

    gilt.

44. (a) (Grenzwertsatz von Stolz-Cesáro) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen mit den Eigenschaften

    (i) $0 < b_0$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und unbeschränkt;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existiert und ist gleich q.

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

45. (a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a.$$

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a.$$

Hinweis. Verwenden Sie Übung 44 (a).

46. (a) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge, so dass $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2}\sqrt[3]{3} ... \sqrt[n]{n}}$.

Hinweis zu (a). Verwenden Sie Übung 45 (b).

47. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent;

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt.

48. Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und für $n = 2, 3, ...$ sei a_n durch die Rekursion

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, indem Sie zum Beispiel zunächst induktiv die Formel $a_{n+1} - a_n = (-1)^n/2^n$ $(n \in \mathbb{N})$ nachweisen. Letzteres erlaubt auch die explizite Bestimmung des Grenzwertes. Was ist sein Wert?

49. Sei $q \in (0, 1)$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, mit der Eigenschaft

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}| \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Konvergenzprinzipes von Cauchy, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Lässt sich die Konvergenz auch beweisen, wenn $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}| \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt?

50. Untersuchen Sie die Monotonie und die Beschränktheit der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ für $n \geq 1$. Im Falle von Konvergenz berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

51. Sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $a_1 = x$ und $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$, wobei $x \in [1, 2]$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

52. Bestimmen Sie jeweils alle Berührpunkte und Häufungspunkte der angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) $A := \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$;

(b) $B := \left([1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)\right) \cap \mathbb{Q}$;

(c) C ist eine beliebige endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$.

53. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: a ist Häufungspunkt von A genau dann, wenn a Berührpunkt von $A \setminus \{a\}$ ist.

54. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergent sind und bestimmen Sie ihre Summen:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{7^n}.$$

55. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$ konvergent ist und dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$ divergent ist.

56. Untersuchen Sie die Konvergenz und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)(n+2)}$.

57. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

alternierend ist und dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden. Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe. Setzen Sie Ihr Ergebnis in Beziehung zum Leibniz-Kriterium.

58. Untersuchen Sie ob die folgenden Reihen absolut konvergent sind:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

59. Untersuchen Sie ob die folgenden Reihen absolut konvergent sind:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}.$$

60. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$?

61. Gegeben Sie die Folge $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(e_n)_{n\geq 1}$ streng monoton wachsend ist und dass $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = e$.

Hinweis. Zeigen Sie, dass $e_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$.

62. Sei $f : [0,3] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Finden Sie ein $\delta > 0$, so dass für jedes x mit $|x-1| < \delta$ gilt $|f(x)-1| < \frac{1}{10}$.

63. An welchen Stellen sind die gegebenen Funktionen stetig?

$$\text{(a) } f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{(b) } \operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

64. Finden Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{falls } x \leq 3, \\ ax, & \text{falls } x > 3 \end{cases}$$

stetig ist.

65. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $|f(x) - x^2| \leq 2|x|\ \forall x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f(0) = 0$ und dass f stetig an der Stelle 0 ist.

66. Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren und, wenn ja, berechnen Sie diese:

$$\text{(a) } \lim_{x \searrow 1} \frac{x+1}{x-1} \qquad \text{(b) } \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) \qquad \text{(c) } \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{x^2-4x+3}{(x+5)(x-1)}\right).$$

67. Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D \cap (a, +\infty)$ und von $D \cap (-\infty, a)$ und $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = l = \lim_{x \nearrow a} \Leftrightarrow l = \lim_{x \to a} f(x).$$

68. Gegeben seien die stetigen Funktionen

(a) $f : [-1, 1]\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } -1 \leq x < 0, \\ x + 2, & \text{falls } 0 < x \leq 1. \end{cases}$ (b) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x}.$

Begründen Sie in beiden Fällen warum f nicht *als stetige Funktion in dem Punkt* $x = 0$ *fortgesetzt* werden kann.

69. Sei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existiert und endlich ist. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist.

70. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass mindestens ein $u \in \mathbb{R}$ mit $f(u) = u$ existiert.

71. Seien $a < b$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(x^2 + 1)(x - b) + (x^4 + 1)(x - a) = 0$$

mindestens eine Lösung im Intervall (a, b) besitzt.

72. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|} \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass:

(a) f stetig ist;

(b) eine reelle Zahl $a > 0$ exstiert, so dass für alle $|x| \leq a$ gilt $|f(x)| < a$;

(c) eine Zahl $u \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(u) = u$.

73. Untersuchen Sie ob die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$, gleichmäßig stetig ist. Ist die Einschränkung von f auf $[1, +\infty)$ gleichmäßig stetig?

74. Es sei $D = [-2, -1] \cup (1, 2]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{falls } -2 \leq x \leq -1, \\ x - 1, & \text{falls } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $f(D)$ und zeigen Sie, dass f als Abbildung $D \to f(D)$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $g : f(D) \to D$ explizit und begründen Sie, warum g an der Stelle 0 nicht stetig ist.

75. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + \frac{x}{2}$, bijektiv ist und dass ihre Umkehrfunktion stetig ist.

76. Lösen Sie die Ungleichungen

(a) $\exp(x) + x - 1 > 0 \ (x \in \mathbb{R})$ (b) $\log(x)^2 - \log(x^3) + 2 \leq 0 \ (x > 0).$

77. Zeigen Sie, dass

$$\log(1 + x) = x + o(|x|) \ (x \to 0).$$

78. Zeigen Sie, dass

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \ \forall r \in \mathbb{R}.$$

79. Lösen Sie in der Menge der komplexen Zahlen die Gleichung $z^3 = \overline{z}$.

80. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

   (i) $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

   (ii) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

   (iii) $\sin(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)^2}, \quad \sin(2\alpha) = \frac{1-\tan(\alpha)^2}{1+\tan(\alpha)^2}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

   (iv) $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}\ \forall \alpha \in (-\pi, \pi)$;

   (v) $\alpha \mapsto t := \tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$ ist bijektiv als Abbildung von $(-\pi, \pi)$ nach $\mathbb{R}$. Somit erhalten wir $\{(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) : \alpha \in (-\pi, \pi)\} = \left\{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$, was einer Parametrisierung des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2$ durch rationale Funktionen entspricht.

81. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, nicht als stetige Funktion in dem Punkt $x = 0$ fortgesetzt werden kann.

82. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass:

   (i) f stetig (auf $\mathbb{R}$) ist;

   (ii) keine Umgebung $U_\delta(0)$ von 0 existiert, so dass f auf $U_\delta(0)$ monoton ist.

83. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{4x} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0}\frac{2\tan(x) - \sin(x)}{x} \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x) - \cos(4x)}{x^2}.$$

84. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan(x))^{\frac{1}{4x-\pi}}.$$