Übungsblatt für Grundbegriffe der Topologie, WS2022

Aufgabe 1 *Zeigen Sie für die diskrete Metrik auf einem Raum X:*

- *Jede Teilmenge von X ist offen;*
- *Jede Teilmenge von X ist abgeschlossen;*
- *Jede Teilmenge von X hat einen leeren Rand;*
- *Jede Abbildung $f : X \to X$ ist stetig.*

Aufgabe 2 *Sei X der Raum der abgeschossenen Teilmengen des Euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$. Sei $B_\varepsilon(A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$ eine ε-Umbegung der Menge A.*

- *Zeigen Sie dass die sogenannt Hausdorff-Metrik*

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon(B) \text{ und } B \subset B_\varepsilon(A)\}$$

  tatsächlich eine Metrik auf X ist.

- *Ist d_H auch eine Metrik auf dem Raum* **aller** *Teilmengen von $\mathbb{R}^n$? Begründen Sie Ihre Antwort.*

Aufgabe 3 *Die Metrik d_p für $p \in (0, \infty)$ ist definiert auf $\mathbb{R}^n$ wie*

$$d_p(x, y) = \left(\sum_i |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

- *Skizzieren Sie die Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ für $p = \frac{1}{2}, 1, 2$ und 100.*
- *Überprüfen Sie dass d_p tatsächlich eine Metrik ist ist für $p \geq 1$. (Hinweis: Minkovski-Ungleichung.)*
- *Die Metrik d_p lässt sich auch verwenden auf dem Folgenraum $\ell_p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_n |x_n|^p < \infty\}$. Zeigen Sie dass $\ell_p \subset \ell_q$ für $1 \leq p < q$. Erzeugen d_p und d_q die gleiche Topologie auf ℓ_p?*

Aufgabe 4 *Sei $\ell_\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C},\ \sup_n |x_n| < \infty\}$ der Raum der beschränkten Folgen, ausgestattet mit der Metrik $d_\infty(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$. Für $p \in [1, \infty)$, sei (ℓ_p, d_p) der metrische Raum aus Übung 3. In (ℓ_∞, d_∞) und in (ℓ_2, d_2), finden Sie das Innere, den Abschluss und den Rand der folgenden Mengen:*

- *$Y = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} : |y_n| < \frac{1}{n}\}$;*
- *$Z = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists\ n \in \mathbb{N}\ x_n = 0\} \cap \ell_2$;*

Aufgabe 5 *Sei X der Raum der 0-1-Folgen $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, und für jede ganze Zahl $a \geq 2$, sei*

$$\rho_a(x, y) = \begin{cases} a^{-m(x,y)} & m = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \text{ falls } x \neq y; \\ 0 & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

- *Zeigen Sie dass* ρ_a *eine Metrik ist.*
- *Sind* ρ_2 *und* ρ_3 *äquivalent im Sinne dass es eine Konstante* $C \geq 1$ *gibt so dass*

$$\forall\, x, y \in X \quad \frac{1}{C}\,\rho_2(x,y) \leq \rho_3(x,y) \leq C\rho_2(x,y)?$$

- *Sind* ρ_2 *und* ρ_3 *äquivalent im Sinne dass die Identitätsabbildung* $I : (X, \rho_2) \to (X, \rho_3)$ *ein Homöomorphismus ist? (Ein Homöomorphismus ist eine stetige Abbildung mit einer wohl-definierten stetigen inversen Abbildung.)*
- *Erzeugen* ρ_2 *und* ρ_3 *die gleiche Topologie?*

Aufgabe 6 *Sei* X *ein topologischer Raum mit Teilmengen* A, B. *Beweisen Sie die folgenden Aussagen, oder finden Sie Gegenbeispiele.*

1. $\partial\partial A = \partial A$ *und* $A^\circ = (A^\circ)^\circ$.
2. $\overline{A^\circ} = (\overline{A})^\circ$ *und* $\overline{\partial A} = \partial(\overline{A})$.
3. $\partial(A^\circ) = \partial A$ *(gilt vielleicht* $\partial(A^\circ) \subset \partial A$ *oder* $\partial(A^\circ) \supset \partial A$*?)*
4. $\partial A \cup \partial B = \partial(A \cup B)$.
5. $\partial(A \cap B) = \partial A \cap \partial B$.
6. $(\partial A)^\circ = \emptyset$.

Aufgabe 7 *In der ko-endlichen Topologie auf einem Raum* X *sind die offenen Mengen* U *entweder* $U = \emptyset$ *oder die Kardinalität* $\#(X \setminus U) < \infty$.

1. *Zeigen Sie dass die ko-endliche Topologie tatsächlig die Axiome einer Topologie erfüllt.*
2. *Zeigen Sie dass in endlichen Räumen, die ko-endliche Topologie mit der diskreten Topologie übereinstimmt.*
3. *Hat die ko-endliche Topologie die Hausdorff eigenschaft? (Also, gibt es für jede* $x \neq y \in X$ *disjunkte Umbebungen* $U \ni x$ *und* $V \ni y$*.) Ist die ko-endliche Topologie metrisierbar?*

Aufgabe 8 *Ordnen Sie die folgenden Topologien auf* $X = [0, 1]$ *im Sinne von feiner/gröber.*

1. *triviale Topologie;*
2. *diskrete Topologie;*
3. *Euklidische Topologie;*
4. *ko-endliche Topologie;*
5. *ko-abzählbare Topologie:* U *is offen falls* $U = \emptyset$ *oder* $X \setminus U$ *is abzählbar;*
6. *die Topologie definiert durch* $U = X$ *oder* $0 \notin U$*;*

Welche dieser Topologien sind metrisierbar (oder nur Hausdorff)?

Aufgabe 9 *Finden Sie unendlich abzählbare metrische Räume (X, d) so dass*

1. (X, d) *genau* $N \in \mathbb{N}$ *isolierte Punkte hat;*

2. (X, d) *eben vollständig ist, oder eben nicht vollständig.*

Aufgabe 10 *Finden Sie eine abzälbare Basis und Subbasis für die folgenden topologischen Räume, oder zeigen Sie dass solche nicht existieren:*

1. $\mathbb{R}^2$ *mit Euklidischer Topologie;*

2. *Die Sorgenfrey Gerade;*

3. $\mathbb{Z}$ *mit der ko-endlichen Topologie.*

Aufgabe 11 *Sei* $X = \mathbb{R}^n$. *In der Zariski-Topologie auf* X, *die abgeschlossenen Mengen sind die Mengen der Nullstellen von Polynome in* $x = (x_1, \ldots, x_n)$. *Dass heißt,* $G \subset X$ *is abgeschlossen falls es ein Polynom* $p : X \to \mathbb{R}$ *gibt so dass* $p(x) = 0$ *dann und genau dann wenn* $x \in G$.

1. *Zeigen Sie dass die Zariski-Topologie tatsächlig die Axiome (für abgeschlossene Mengen) einer Topologie erfüllt.*

2. *Zeigen Sie dass einzelne Punkte abgeschlossene Mengen in der Zariski-Topologie sind.*

3. *Hat die Zariski-Topologie die Hausdorff eigenschaft?*

4. *Gibts es abgeschossene Mengen mit nicht-leeren Inneren?*

5. *Zeigen Sie dass wenn die Dimension* $n = 1$, *dass die Zariski-Topologie mit der ko-endliche Topologie übereinstimmt.*

Aufgabe 12 *Eine arithmetrische Folge auf* $\mathbb{Z}$ *ist eine Menge der Form* $S(a, b) := \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$ *wobei* $a, b \in \mathbb{N}$, $a > 0$. *Definieren Sie auf* $X = \mathbb{Z}$ *die Topologie* τ *in der die nicht-leeren offenen Mengen genau die Vereinigungen von arithmetischen Folgen sind. Zeigen Sie dass*

1. τ *tatsächlich eine Topologie ist;*

2. *jede nicht-leere offene Menge unendlich ist;*

3. *die arithmetischen Folgen* $S(a, b)$ *sowohl offen als abgeschlossen sind;*

4. $\bigcup_{p \text{ ist Prim}} S(p, 0) = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.

5. *Schließen Sie dass es unendlich viele Primzahlen geben muß.*

Aufgabe 13 *Der Niemytzki Raum (oder Moore-Ebene) ist die Halb-Ebene* $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ *so dass die Punkte* p *die folgenden Umgebungsbases haben:*

$$\begin{cases} \{B_\varepsilon(p) : \varepsilon > 0\} & \text{falls } p = (x, y), y > 0, \\ \{B_\varepsilon(p) : \varepsilon > 0\} \cup \{B_\varepsilon(x, \varepsilon) \cup \{p\} : \varepsilon > 0\} & \text{falls } p = (x, 0). \end{cases}$$

1. *Zeigen Sie dass dieses System tatsächlich eine Umgebungsbasis darstellt.*

2. *Bestimmen Sie die Abschlüße der Teilmengen $A := \mathbb{Q} \times \{0\}$ und $B := \mathbb{Q} \times \{1\}$.*

3. *Beschreiben Sie die Spurtopologie der Niemytzki Topologie für die oberen Teilmengen A und B sowie $C := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.*

Aufgabe 14 *Sei (X, τ) ein* **separabeler** *topologischer Raum, das heißt X hat eine abzählbare dichte Teilmenge A.*

1. *Zeigen Sie dass $\mathcal{B} := \{B_{1/n}(a) : 1 \leq n \in \mathbb{N}, a \in A\}$ eine Basis ist.*

2. *Ist eine Teilmenge $E \subset X$ mit Spurtopologie wieder separabel?*
   Hinweis: Übung 13.

Aufgabe 15 *Nach dem Satz von Heine-Borel wird in $\mathbb{R}^n$ mit Euklischer Topologie, kompakt durch abgeschlossen und beschränkt gekennzeichnet. Wie kann man kompakt in $\mathbb{R}^n$ beschreiben in*

1. *diskrete Topologie;*

2. *ko-endliche Topologie;*

3. *ko-abzählbare Topologie?*

Aufgabe 16 *Sei $X = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit Zariski Topologie.*

- *Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie von Mengen die nicht ko-endlich sind.*
- *Zeigen Sie dass $\overline{G} = X$ für jede nicht-leere offene Menge G.*
- *Was ist der Abschluss von $\{(\frac{1}{n}, 0) : 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$? Und von $\{(\frac{1}{n}, \sin(\frac{1}{n})) : 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$?*
- *Karakterisieren Sie die kompakten Mengen in Zariski Topologie.*

Aufgabe 17 *Sei $X = \mathbb{R}^2$ die Ebene mit Sorgenfrey Produkt-Topologie.*

- *Sind die folgenden Mengen offen?*

$$(i) \quad [0,1) \times (0,1] \qquad (ii) \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

- *Beschreiben Sie die Spur-Topologie für die Teilräume:*

$$(i) \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} \qquad (ii) \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$$

$$(iii) \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Aufgabe 18 *Sei $H = [0,1]^{\mathbb{N}}$ der Hilbert Würfel, mit Produkt-Topologie. Also, die Mengen der Form*

$$B = \{(x_n) \in H : \exists N \in \mathbb{N} \text{ und offene Intervalle } I_j \subset [0,1], j \leq N \text{ so dass } x_j \in I_j\}$$

formen eine Basis dieser Topologie.

1. *Zeigen Sie dass* $d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|x_n - y_n|$ *eine Metrik auf* H *ist.*

2. *Zeigen Sie dass diese Metrik die Produkt Topologie erzeugt.*
Hinweis: Die Kugeln bzl. dieser Metrik sind Elemente von $\mathcal{B}$ *und umgekehrt kann jedes Basiselement als Vereinigung von Kugeln dargestellt werden.*

3. *Erzeugen* d_{prod} *und* d_∞ *(definiert durch* $d_\infty(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$*) die gleiche Topologie?*

Aufgabe 19 1. *Zeigen Sie, dass für eine Teilmenge* A *eines topologischen Raumes* X *gilt*

$$\overline{A} = A \cup \{x \in X : x \textit{ ist Häufungspunkt von } A\}.$$

2. *Sei* A' *die Menge der Häufungspunkte von* A*. Finden Sie eine Menge* $A \subset \mathbb{R}$ *(Euklidisch) so dass* $A' \neq A''$*? Gilt* $A'' = A'''$*?*

Aufgabe 20 *Seien* τ_1 *und* τ_2 *Topologien auf der Menge* X *und für jedes* $x \in X$ *seien* $\mathcal{B}^1(x)$ *bzw.* $\mathcal{B}^2(x)$ *Umgebungsbasen bei* x *bzgl.* τ_1 *bzw.* τ_2*.*

1. *Zeigen Sie dass:*

$$\tau_1 \textit{ ist gröber als } \tau_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X\ \forall B^1 \in \mathcal{B}^1(x)\ \exists B^2 \in \mathcal{B}^2(x) : B^2 \subseteq B^1.$$

2. *Geben Sie ein Beispiel wo die obere Inklusion mal strikt ist.*

Aufgabe 21 *Sei* $X = \mathbb{R}$*. Finden Sie Topologien auf* X *mit Basis* $\mathcal{B}$ *so dass*

1. *B abzählbar ist und jede offene Menge als die* **abzählbare** *Vereinigung von Basiselementen dargestellt werden kann;*

2. *B überabzählbar ist und jede offene Menge als die* **abzählbare** *Vereinigung von Basiselementen dargestellt werden kann (aber es gibt keine Basis für die 1. zutrifft);*

3. *B überabzählbar ist Basis und es gibt offene Mengen gibt die nur als* **überabzählbare** *Vereinigung von Basiselementen dargestellt werden können.*

Aufgabe 22 *Betrachten Sie das Quadrat* $Q := [0,1]^2$ *mit lexikographischer Ordnung:* $(x,y) \leq (x',y')$ *falls* $x < x'$ *oder* $x = x'$ *und* $y \leq y'$*. Sei* τ *die Ordnungstopologie bzl. dieser Ordnung.*

1. *Beschreiben Sie Umbegungsbases für* $(x,y) \in Q$*, insbesondere für die Punkte* $(0,0)$*,* $(x,0)$*,* $(x,1)$ *und* $(1,1)$*. Hat jeder Punkt eine abzählbar Umgebungsbasis?*

2. *Hat* (Q,τ) *eine abzählbare Basis und/oder eine abzählbare dichte Teilmenge?*

Aufgabe 23 *Sei* (X,τ) *ein topologischer Hausdorff Raum. Die ko-kompakte Topologie wird definiert durch*

$$\tau_{kk} = \{U \subset X : X \setminus U \textit{ ist kompakt}\} \cup \emptyset.$$

1. *Zeigen Sie dass* τ_{kk} *tatsächlich eine Topologie ist.*

2. *Wann gilt* $\tau_{kk} = \tau$*? Im allgemeinen, ist* τ_{kk} *gröber oder feiner als* τ*?*

3. *Falls $A \subset X$ kompakt in τ ist, ist dann auch der Rand ∂A kompakt in τ?*

Aufgabe 24 *Seien $(X, \leq_X)$ und $(X, \leq_Y)$ wohlgeordnete Mengen. Zeigen Sie dass die Identitätsabbildung die einzige ordnungsbewarende Bijektion von X auf sich selbst ist.*

Aufgabe 25 *Zwei Mengen $A \subset X$ und $B \subset Y$ in topologischen Räumen X und Y heissen homöomorph falls es einen Homöomorphismus $\psi : A \to B$ gibt (bzl. Spurtopologie auf A und B). Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ Euklidisch sind homöomorph und welche nicht (mit Begründung).*

$$\mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R} \times \{0\} \qquad [0,1] \times \{0\} \qquad \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\} \qquad \{(x,y) : \max\{|x|,|y|\} < 1\}$$

Aufgabe 26 *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.*

1. *Falls $A \subset X$ kompakt ist, zeigen Sie dass $f(A)$ kompakt in Y ist.*

2. *Falls zusätzlich Y Hausdorff und $f : A \to f(A)$ injektiv ist, zeigen Sie dass $f : A \to f(A)$ ein Homöomorphismus ist.*

3. *Zeigen Sie mittels eines Beispiels dass die Annahme dass A kompakt ist essentiell ist.*

Aufgabe 27 1. *Zeigen Sie dass in einem Hausdorff Raum, jede Folge nur einen Grenzwert haben kann.*

2. *Geben Sie ein Beispiel einer Folge mit zwei Grenzwerte (also in einem nicht-Hausdoff Raum).*

Aufgabe 28 *Sei $X = Y = \mathbb{R}$ mit Euklidischer oder Sorgenfrey Topologie, und $f : X \to Y$ wie unten. Ist f stetig für diese vier möglichen Wahlen für Topologie auf X, Y?*

$$(i) \quad f(x) = -x \qquad (ii) \quad f(x) = \lfloor x \rfloor \qquad (iii) \quad f(x) = x - \lceil x \rceil$$

Aufgabe 29 *Sei X ein topologischer Raum mit Subbasis $\mathcal{S}$, und $f : X \to X$ eine surjektive Abbildung.*

1. *Zeigen Sie dass: $f^{-1}(S) \in \mathcal{S}$ für alle $S \in \mathcal{S}$ impliziert dass f stetig ist.*

2. *Gilt die Rückrichtung? Beweis oder Gegenbeispiel.*

Aufgabe 30 *Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir bezeichnen den Quotientraum $X/\sim$ mit Quotiententopologie als Y. Zeigen Sie*

1. *falls die Äquivalenzklasse $[x]$ nicht abgeschlossen ist, dass Y nicht Hausdorff ist.*

2. *falls $X = [-1,1]$ mit Euklidischer Topologie und $x \sim x'$ falls $x = x'$ oder $x = 1 - \frac{1}{n}$ und $x' = -1 + \frac{1}{n}$ für irgendein $2 \leq n \in \mathbb{N}$, so sind alle Äquivalenzklassen abgeschlossen, aber Y ist trotzdem nicht Hausdorff.*

Aufgabe 31 *Wir haben in Beispiel 5.6,2 des Skriptums gesehen, dass es in $\Omega_0 = [0, \omega_1[$ keine Folge gibt, die in $\Omega = [0, \omega_1]$ gegen ω_1 konvergiert. Allerdings $\omega_1 \in \overline{\Omega_0}$ ist, daher muss es ein Netz in Ω_0 geben, das gegen ω_1 konvergiert. Geben Sie so ein Netz an.*

Aufgabe 32 *Wir haben in Beispiel 5.6,1 des Skriptums gesehen, dass in* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *mit der Topologie der punktweisen Konvergenz die konstante Funktion* $g(x) \equiv 1$ *zwar zum Abschluss der Menge* $E = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid g(x) \neq 0$ *für nur endliche viele* $x\}$ *liegt, aber nicht als Grenzwert einer Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* E *auftreten kann. Geben Sie ein Netz in* E *das gegen* g *konvergiert an.*

Aufgabe 33 *Geben Sie von bei den folgenden topologischen Räumen an ob sie AA1, AA2 und/oder separabel sind.*

1. *Der Niemytzki Raum (siehe Aufgabe 13).*
2. $\mathbb{R}$ *mit ko-endlicher Topologie.*
3. *Das Ordungsintervall* $\Omega = [0, \omega_1]$ *wobei* ω_1 *die erste überabzählbare Ordinalzahl ist.*

Aufgabe 34 *Sei* $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *ein Produktraum mit Produkttopologie. Gilt die Aussage*

X is separabel dann und nur dann wenn jeder Faktor X_λ separabel ist

falls Λ *(i) endlich, (ii) abzählbar, (iii) beliebig ist?*

Aufgabe 35 *Sei* $\mathbb{R}_S$ *die Menge der reellen Zahlen mit Sorgenfrey Topologie (also* $\{[a; b) : a < b \in \mathbb{R}\}$ *ist eine Basis der Topologie).*

1. *Sind die Folgen* $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ *und* $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ *konvergent? Falls ja, was sind die Grenzwerte?*
2. *Bestimmen Sie ob die folgenden Mengen offen/abgeschlossen/kompakt sind. (Kompakt heißt dass jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat):*

$$\begin{array}{ll} (a, b) & [a, b] \\ [a, b) & \{0\} \cup \{\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\} \\ (a, b] & \{0\} \cup \{-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \end{array}$$

3. *Zeigen Sie das der Sorgenfrey Ebene, also* $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ *mit Produkttopologie, ein nichtnormaler Raum ist.*

Aufgabe 36 *Sei* $\mathcal{U}(x)$ *das Umgebungssystem von einem Punkt* x *in einem topologischen Raum* (X, τ)*. Wir versehen* $\mathcal{U}(x)$ *mit der gerichteten Ordnung* $U \leq_{\mathcal{U}(x)} V$ *falls* $V \subseteq U$*, und wählen für jedes* $U \in \mathcal{U}(x)$ *einen Punkt* $x_U \in U$*. Ist das Netz* $(x_U)_{U\in\mathcal{U}(x)}$ *ein Ultranetz? Begründen Sie Ihre Antwort.*

Aufgabe 37 *Sei* $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ *das Einheitsquadrat mit Euklidischer Topologie.*

1. *Durch gegenüberliegende Seiten von* Q *paarweise und Orientierungbewarend zu identifizieren erhält man einen Torus. Welche andere Oberflächen kann man durch Identifizierung von Seiten (Orientierungbewarend oder -umkehrend) erzeugen? Welche sind orientierbar?*

2. *Sei $Q/\sim$ für $x \sim x'$ falls $x = x'$ oder x und x' liegen beide auf dem Rand von Q. Finden Sie einen Homöomorphismus zwiscchen $Q/\sim$ und die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ (wobei $\|\ \|$ die Euklidische Norm ist).*
   Hinweis: Zeigen Sie dass sowohl $(0,1) \times (0,0)$ als $\mathbb{S}^2 \setminus (0,0,1)$ homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ sind (stereographische Projektion).

Aufgabe 38 *Zeigen Sie mittels ein Beispiel, dass ein Torus wenigstens ein "Siebenfarbensatz" erfühlen muss. Das heißt, finden Sie einen Graphen auf $\mathbb{T}^2$ die nur mit sieben Farben einzufärben ist.*

Aufgabe 39 *Sei $K = \{\frac{1}{n} : 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\mathbb{R}_K$ die Menge der reellen Zahlen deren Topologie die Basis $\{(a,b) : a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,b) \setminus K : a < b \in \mathbb{R}\}$ hat.*

1. *Zeigen Sie dass das Intervall $[0,1]$ nicht kompakt ist.*

2. *Zeigen Sie dass $\mathbb{R}_K$ zwar Hausdorff aber es gibt eine abgeschlossene Menge A und $x \notin A$, so dass A und $\{x\}$ keine disjunkte offene Obermengen haben.*

3. *Zeigen Sie dass $\mathbb{R}_K$ zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.*

Aufgabe 40 *Wir betrachten die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:*

$$\begin{aligned}
\text{das } \sin\frac{1}{x}\text{-Kontinuum:} \quad & A := \{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1/\pi]\} \cup (\{0\} \times [-1,1]); \\
& B := A \cup (\{0\} \times [-2,2]); \\
\text{der Warschau Kreis:} \quad & W := A \cup \{(x, 1 + \sin \pi^2 x) : 0 < x \leq 1/\pi]\} \cup (\{1/\pi\} \times [0,1]).
\end{aligned}$$

1. *Welche dieser Mengen sind zusammenhängend und/oder wegzusammenhaängend? Sind sie Kontinua (d.h. kompakte, zusammenhängende metrische Räume)?*

2. *Der Wegzusammenhangskomponent eines Punktes p ist die Vereinigung aller wegzusammenhängenden Teilmengen die p enthalten. Was sind die Wegzusammenhängskomponenten von A, B und W?*

3. *Der Komposant eines Punktes p ist die Vereinigung aller echten Teilkontinua die p enthalten. Was sind die Komposanten von A, B und W?*

Aufgabe 41 *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Funktion zwischen topologischen Räumen, und $A \subset X$. Zeigen Sie dass oder geben Sie ein Gegenbeispiel:*

1. *A ist wegzusammenhängend impliziert $f(A)$ ist wegzusammenhängend.*

2. *A ist lokal zusammenhängend impliziert $f(A)$ ist lokal zusammenhängend.*

Eine Menge A heißt **lokal zusammenhängend** *als für jedes $x \in A$ gilt: für jede Umgebung $V \ni x$ gibt es eine offene zusammenhängende Unmgebung $x \in U \subset V$.*

Aufgabe 42 *Das Knaster Kontinuum K ist (jede Menge homöomorph zur folgenden) Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.*

- *Wir fangen an mit $C \times \{0\}$ wobei $C \subset [0,1]$ die Mittel-Drittel Cantor Menge ist.*
- *Für jeden $x \in C$, verbinde $(x,0)$ mit $(1-x,0)$ mit einem nach oben gewölbten Halbkreis.*
- *Sei $J_i = [3^{-i} - 3^{-i+1)}, 3^{-i}]$ für $i \geq 0$. Für jeden $x \in J_i$, verbinde $(x,0)$ mit $(\frac{5}{3}3^{-i} - x, 0)$ mit einem nach unten gewölbten Halbkreis.*

1. *Zeigen Sie dass K zusammenhängend, aber nicht wegzusammenängend ist.*
2. *Zeigen Sie dass K überabzählbar viele Wegzusammenhängskomponenten hat die alle dicht in K liegen. Sind alle diese Wegzusammenhängskomponenten homöormorph zu einander?*
3. *Zeigen Sie dass die Komposanten von K gleich den Wegzusammenhängskomponenten sind.*

Aufgabe 43 *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine G_δ-Menge ist eine abzählbare Durchschnitt von offenen Mengen. Zeigen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel:*

1. *Der Rand einer offenen Menge ist nirgends dicht.*
2. *Der Rand einer G_δ-Menge ist nirgends dicht.*
3. *Der Rand einer G_δ-Menge ist mager.*

Aufgabe 44 *Zeigen Sie dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationellen Zahlen mit Euklidischer Topologie kein Bairescher Raum ist.*

Aufgabe 45 *Unser metrischer Raum ist $X = [0,1]$ mit Euklidischer Metrik, und alle Brüche werden teilerfremde Zähler und Nenner haben (also nicht $4/6$ sondern $2/3$). Eine Zahl $x \in X$ heißt* **Diophantisch von Grad** ν *falls*

$$\liminf_{p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} |x - \frac{p}{q}| q^{2+\nu} < \infty$$

und x ist **Diophantisch** *falls Diophantisch von Grad ν für irgendeinem reellen Grad $\nu > 0$. Wir bezeichnen die Mengen der Diophantischen Zahlen und Diophantischen Zahlen von Grad ν als $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}_\nu$. Also $\mathcal{D} = \cup_{\nu > 0} \mathcal{D}_\nu$.*

Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen dass $\mathcal{D}$ groß ist im topologischem Sinne, aber klein in Sinne des Lebesgue'schen Maßes λ. Um unsere Aufgabe etwas zu erleichtern, werden wir die Definition

$$\liminf_{p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} |x - \frac{p}{q}| q^{2+\nu} < 1 \text{ statt } < \infty.$$

verwenden. Diejenigen die es möchten, können die Aufgabe für die offizielle Definition machen; das Argument ist weitgehend gleich, nur etwas länger.

1. *Zeigen Sie dass für jedes $r \in \mathbb{N}$ und $\nu > 0$ die Menge $U_r := \cup_{0 \leq p \leq q, q > r} B_{q^{-(2+\nu)}}(\frac{p}{q})$ offen und dicht ist.*
2. *Zeigen Sie dass $\mathcal{D}_\nu = \cap_{r \in \mathbb{N}} U_r$.*
3. *Schließen Sie dass die Komplementen von sowohl $\mathcal{D}_\nu$ als $\mathcal{D}$ mager sind.*

4. *Für den Rest dieser Aufgabe sind Einzelkeiten des Lebesgue'schen Maßes nicht so wichtig; es reicht das folgende Lemma zu verwenden:*

   Borel-Cantelli Lemma: *Sei $(Y_r)_{r\in\mathbb{N}}$ eine Folge Teilmengen von X so dass $\sum_{r\in\mathbb{N}} \lambda(Y_r) < \infty$. Dann hat die Menge der Punkte $x \in X$ so dass $x \in U_r$ für unendlich viele $r \in \mathbb{N}$ Lebesgue Mass null.*

   Zeigen Sie dass $\lambda(\mathcal{D}_\nu) = 0$ und $\lambda(\mathcal{D}) = 0$. (Sie dürfen verwenden dass die abzählbare Vereinigung von Menge von Mass null wieder Mass null hat.)

Aufgabe 46 *Überprüfen Sie die Euler Charakteristik der projektiven Ebene, sowie die Tori mit zwei (Brezel) und drei Löchern, mit Hilfe der Triangulierung.*

Aufgabe 47 *Berechnen Sie die Euler Charakteristik sowie das Geschlecht der Oberfläche die aus einem Hexagon mittels orientierung-bewarender Identifikation gegenüberliegender Seiten entsteht.*

Aufgabe 48 *Zeigen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel:*

1. *X_i sind zusammenhängend für alle $i \in I \Rightarrow$ der Produktraum $\prod_{i\in I} X_i$ sind zusammenhängend.*

2. *X ist zusammenhängend und $A \subset X \Rightarrow A$ mit Spurtopologie ist zusammenhängend.*

3. *X ist zusammenhängend und $\sim$ eine Äquivalenzrelation $\Rightarrow$ der Quotientenraum $X/\sim$ ist zusammenhängend.*

Aufgabe 49 *Sind die folgenden topologischen Räume zusammenhängend und/oder wegzusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort.*

1. *$\mathbb{R}$ mit ko-endlicher Topologie.*

2. *$[0,1]^2$ mit Ordnungstopologie bzl. der lexicographischen Ordnung: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ falls (i) $x_1 < x_2$ oder (ii) $x_1 = x_2$ und $y_1 < y_2$.*

Aufgabe 50 *Sind die folgenden topologischen Räume auch Baire'sche Räume?*

1. *$\mathbb{R}$ mit ko-endlicher Topologie.*

2. *$(\mathbb{Q} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times (0, 1]$ mit Euklidischer Spurtopologie.*

3. *$[0,1]^2$ mit Topologie $\tau = \{[0, x) : x \in (0, 1]\} \cup \{\emptyset\}$.*

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 51 *Sei $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationellen Zahlen, und $U_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n - k^{-n}, q_n + k^{-n})$ für $k = 1, 2, 3, \dots$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder nicht?*

- *U_k ist G_δ-dicht;*

- *$\bigcap_{k\geq 1} U_k \supset \mathbb{Q}$;*

- $\left(\bigcap_{k\geq 1} U_k\right) \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 52 *Sei (X, τ) ein kompakter Hausdorff Raum.*
(a) Zeigen Sie dass jeder Punkt abgeschlossen ist.
(b) Zeigen Sie dass für jeden Punkt $x \in X$ und nicht-leere abgeschlossene Menga $A \not\ni x$, es disjunkte offene Mengen U_x und U_A gibt so dass $x \in U_x$ und $A \subset U_A$.
(c) Zeigen Sie dass jede nicht-leere offene Menge $U \subset X$ eine nicht-leere offene Menge V mit Abschluss $\bar{V} \subset U$ hat