Übungen zu "Grundbegriffe der Topologie"

A. Čap

Wintersemester 2018

(1) Wiederholen Sie die Definition des Durchschnittes $\cap_{i\in I}A_i$ einer beliebigen Familie $\{A_i : i \in I\}$ von Mengen und zeigen Sie, dass für eine weitere Menge A folgendes gilt:

$$A \cap (\cap_{i\in I}A_i) = \cap_{i\in I}(A \cap A_i)$$
$$A \cup (\cap_{i\in I}A_i) = \cap_{i\in I}(A \cup A_i)$$

(2) Wiederholen Sie die Definition der Vereinigung $\cup_{i\in I}A_i$ einer beliebigen Familie $\{A_i : i \in I\}$ von Mengen und zeigen Sie, dass für eine weiter Familie $\{B_j : j \in J\}$ die folgende Gleichung gilt

$$(\cup_{i\in I}A_i) \cap (\cup_{j\in J}B_j) = \cup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$$

(3) Sei X eine Menge und $\{A_i : i \in I\}$ eine beliebige Familie von Teilmengen von X. Beweisen Sie die de–Morgan'schen Regeln

$$X \setminus (\cap_{i\in I}A_i) = \cup_{i\in I}(X \setminus A_i)$$
$$X \setminus (\cup_{i\in I}A_i) = \cap_{i\in I}(X \setminus A_i)$$

(4) Betrachten Sie die Normen $\| \ \|_2$ und $\| \ \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$, die definiert sind durch

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_2 := \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$$
$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzungen $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ gelten.

(5) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion zwischen zwei Mengen. Wiederholen Sie die Definition des Bildes $f(A) \subseteq Y$ einer Teilmenge $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass für eine Familie $\{A_i : i \in I\}$ von Teilmengen von X gilt

$$f(\cup_{i\in I}A_i) = \cup_{i\in I}f(A_i)$$
$$f(\cap_{i\in I}A_i) \subseteq \cap_{i\in I}f(A_i).$$

Finden Sie ein explizites Beispiel, in dem in der zweiten Zeile keine Gleichheit gilt.

(6) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion zwischen zwei Mengen. Wiederholen Sie die Definition des Urbildes $f^{-1}(B) \subseteq X$ einer Teilmenge $B \subseteq Y$. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ gilt. Gilt ein analoges Resultat für die Bilder von Teilmengen von X?

(7) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und sei $\{B_i : i \in I\}$ eine Familie von Teilmengen von Y. Zeigen Sie

$$f^{-1}(\cup_{i\in I}B_i) = \cup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$$
$$f^{-1}(\cap_{i\in I}B_i) = \cap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$$

(8) Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bestimmen Sie die formale Version der Aussage "f ist nicht gleichmäßig stetig".

(9) Für eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ bestimmen Sie die formale Version der Aussage "Die Folge (x_k) konvergiert nicht".

(10) Sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von X, die die Bedingungen (A1)–(A3) aus Punkt 2.1 der Vorlesung erfüllt. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X gibt, für die die abgeschlossenen Mengen genau die Elemente von $\mathcal{F}$ sind.

(11) Die Niemytzki–Topologie: Sei $H := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}$ die obere Halbebene und $H^+ := \{x \in H : x_2 > 0\}$. Für $x \in H$ sei $\tilde{\mathcal{V}}_x := \{U \cap H\}$, wobei U über alle Umgebungen von x in $\mathbb{R}^2$ läuft. Für $x \in H^+$ sei $\mathcal{V}_x := \tilde{\mathcal{V}}_x$. Für $x = (x_1, 0) \in H \setminus H^+$ und $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ sei $W_{x,\epsilon} := \{x\} \cup \{y \in \mathbb{R}^2 : d(y, (x_1, \epsilon)) < \epsilon\}$ (Zeichnung!). Dann definiert man $\mathcal{V}_x$ als die Vereinigung von $\tilde{\mathcal{V}}_x$ und der Familie all jener Mengen, die eine der Menge $W_{x,\epsilon}$ enthalten. Zeigen Sie, dass es eine Topologie auf H gibt, die genau die Mengen $\mathcal{V}_x$ als Umgebungssysteme liefert.

Anleitung: Verifizieren Sie die Eigenschaften (U1)–(U4) aus Punkt 2.1 der Vorlesung.

(12) Sei (M, d) ein metrischer Raum $\mathcal{T}$ die metrische Topologie auf M. Sei $A \subseteq M$ eine Teilmenge und $d_A := d|_{A\times A} : A \times A \to \mathbb{R}$ die Einschränkung der Distanzfunktion auf A. Zeigen Sie, dass die metrische Topologie des Raumes (A, d_A) mit der von $\mathcal{T}$ induzierten Spurtopologie $\mathcal{T}_A$ auf A übereinstimmt.

(13) Sei (M, d) ein metrischer Raum und X eine Menge. Nennen wir eine Funktion $f : X \to M$ *beschränkt*, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $d(f(x), f(y)) \leq K$ für alle $x, y \in X$ gilt und sei $\mathcal{B}(X, M)$ die Menge aller beschränkten Funktionen $X \to M$. Zeigen Sie, dass $\tilde{d}(f, g) := \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$ eine Distanzfunktion auf $\mathcal{B}(X, M)$ definiert.

(14) Betrachten Sie die Menge $\ell^\infty := \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller beschränkten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d((x_n), (y_n)) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$. Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von ℓ^∞ abgeschlossen in der metrischen Topologie sind:
  (a) Für fixes $k \in \mathbb{N}$, die Menge $A_k := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_k = 0\}$.
  (b) Für fixes $k \in \mathbb{N}$, die Menge $B_k := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall \ell > k : x_\ell = 0\}$.
  (c) Die Menge $c_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ aller Nullfolgen.

(15) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und betrachten Sie die Menge $C([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $d(f, g) := \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$ eine Distanzfunktion auf $C([a, b], \mathbb{R})$ definiert.

(16) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $A, B \subseteq X$ beliebige Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ gilt. Finden Sie ein explizites Beispiel bei dem für die Durchschnitte keine Gleichheit gilt.

(17) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge und $U \subseteq X$ offen. Zeigen Sie, dass $U \subseteq \overline{A}$ genau dann gilt, wenn für jede nichtleere offene Teilmenge V von X, die in U enthalten ist, $V \cap A \neq \emptyset$ gilt.

(18) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *nirgends dicht*, falls $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ gilt.
Beweisen Sie, dass eine Vereinigung von endlich vielen nirgends dichten Teilmengen von X selbst nirgends dicht ist.
Anleitung: Es genügt den Fall von zwei solchen Teilmengen zu betrachten. Benutzen Sie das vorige Beispiel um zu zeigen, dass $A \subseteq X$ genau dann nirgends dicht ist, wenn es für jede nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ eine nichtleere offene Teilmenge $V \subseteq X$ gibt, sodass $V \subseteq U$ und $V \cap A = \emptyset$ gilt. Dann verwenden Sie diese Bedingung.

(19) Sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Konstruieren Sie eine bijektive Funktion $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Beschreiben Sie grob, wie man eine bijektive Funktion $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ konstruieren kann ("Dezimalentwicklung zur Basis 2").

(20) Beweisen Sie, dass es keine surjektive Funktion $\mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ gibt.

Anleitung: Für eine Funktion $\Phi : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ konstruiert man eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, die nicht im Bild von Φ liegen kann. ("Diagonalargument")

(21) Sei $\mathcal{T}$ die Niemytzki–Topologie auf der oberen Halbebene H aus Beispiel (11). Zeigen Sie, dass der topologische Raum $(H, \mathcal{T})$ ein AA1–Raum ist. Zeigen Sie weiters, dass die Menge aller Punkte in H mit rationalen Koordinaten dicht in $(H, \mathcal{T})$, und damit $(H, \mathcal{T})$ separabel ist.

(22) Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass A genau dann abgeschlossen ist, wenn jeder Häufungspunkt von A schon in A liegt.

Anleitung: Man folgert direkt aus den Definitionen, dass jeder Berührungspunkt von A, der kein Häufungspunkt ist, schon in A liegen muss.

(23) Für die Teilmenge $A := \{(x, y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ bestimmen Sie das Innere A°, den Abschluss $\overline{A}$ und den Rand ∂A.

(24) Betrachten Sie den metrischen Raum (ℓ^∞, d) aus Beispiel (14) und die Teilmenge $A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : x_n = 0\}$ aller endlichen Folgen. Beweisen Sie, dass der Abschluss $\overline{A}$ gerade die Teilmenge c_0 der Nullfolgen aus Beispiel (14) ist.

(25) Sei $\mathcal{T}$ die Niemytzki–Topologie auf der oberen Halbebene H aus Beispiel (11). Beweisen Sie, dass $(H, \mathcal{T})$ kein AA2–Raum ist, und schließen Sie daraus und aus Beispiel (21), dass $(H, \mathcal{T})$ nicht metrisierbar ist.

Anleitung: Für jeden Punkt der Teilmenge $A := \{x = (x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\} \subseteq H$ ist die Menge $W_{x,\epsilon}$ aus Beispiel (11) eine offene Teilmenge von H, die A nur im Punkt x schneidet. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{T}$, dann muss es zu jedem $x \in A$ ein Element von $\mathcal{B}$ mit dieser Eigenschaft geben, was für abzählbares $\mathcal{B}$ unmöglich ist.

(26) Seien X und Y topologische Räume. Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f : X \to Y$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind.
(a) f ist stetig.
(b) Für jedes $B \subseteq Y$ ist $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.
(c) Für jedes $B \subseteq Y$ ist $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(27) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph $G_f := \{(t, f(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ von f eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

Anleitung: Finden Sie eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die G_f als Nullstellenmenge hat.

(28) Sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{P}$ die Menge aller Partition von $[a, b]$, also aller Tupel $(x_0, \dots, x_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Beweisen Sie, dass die Relation $(y_0, \dots, y_m) \leq (x_0, \dots, x_n)$ genau dann, wenn $m \leq n$ und für jedes $i = 1, \dots, m-1$ gibt es ein j, sodass $y_i = x_j$, (“Verfeinerung”) $\mathcal{P}$ zu einer gerichteten Menge macht.

(29) Zeigen Sie, dass die Inklusion die Menge $\mathcal{A}$ aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu einer gerichteten Menge macht. Für $A \in \mathcal{A}$ definiert man $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\chi_A(t) = 0$ für $t \in A$ und $\chi_A(t) = 1$ für $t \notin A$. Beweisen Sie, dass das Netz $(\chi_A)_{A \in \mathcal{A}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, also das Netz $(\chi_A(t))_{A \in \mathcal{A}}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ gegen Null konvergiert.

(30) Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Raum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Menge aller Funktionen χ_A aus dem letzten Beispiel. Zeigen Sie: Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die punktweise gegen Null konvergiert, dann gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$, sodass $f_k \notin E$ für all $k \geq N$ gilt.

Anleitung: Wäre die Folge f_k immer wieder in E, dann würde man einen Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$ finden, sodass $f_k(t_0)$ immer wieder gleich 1 wäre.

(31) Beweisen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) = \sin(1/x)$ für alle $x \neq 0$ gilt.

(32) Sei ℓ^1 die Menge aller reellen Folgen $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die absolut summierbar sind, also $\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k| < \infty$ erfüllen. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \ell^1$ auch die Folge $(a_k - b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ absolut summierbar ist und dass $d(a, b) := \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k - b_k|$ eine Metrik auf ℓ^1 definiert.

(33) Betrachten Sie den Raum ℓ^1 aus Beispiel (32) und eine Folge $a = (a_k) \in \ell_1$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $b^n \in \ell_1$ die Folge, die entsteht indem man (a_k) nach dem n–ten Glied “abschneidet” und durch 0 fortsetzt. Betrachten Sie nun $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Folge in ℓ^1 und zeigen Sie, dass diese Folge gegen a konvergiert.

(34) Zeigen Sie, dass die metrische Topologie auf dem Raum ℓ^1 aus Beispiel (32) separabel ist und daher das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Anleitung: Beweisen Sie, dass die endlichen Folgen mit rationalen Folgengliedern dicht in ℓ^1 liegen. Benutzen Sie dazu erst Bespiel (33) um eine beliebige absolut summierbare Folge durch eine endliche Folge zu approximieren, dann approximiere diese durch eine Folge mit rationalen Gliedern.

(35) Ein topologischer Raum X heißt ein *Hausdorffraum*, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in X$ Umgebungen $U \in \mathcal{U}_x$ und $V \in \mathcal{U}_y$ existieren, die $U \cap V = \emptyset$ erfüllen. Zeigen Sie, dass in einem Hausdorffraum jede endliche Teilmenge abgeschlossen ist. Umgekehrt zeigen Sie, dass es Räume gibt, in denen jede endliche Teilmenge abgeschlossen ist, die aber die Hausdorff–Eigenschaft nicht erfüllen.

Anleitung: Die kofinite Topologie auf einer unendlichen Menge liefert ein Gegenbeispiel.

(36) Beweisen Sie, dass Metrisierbarkeit eine topologische Eigenschaft ist, also für einen metrisierbaren topologischen Raum X und einen zu X homöomorphen Raum Y auch Y metrisierbar ist.

(37) Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $U \subseteq A$ genau dann Umgebung eines Punktes $x \in A$ bezüglich der Spurtopologie ist, wenn es eine Umgebung $\tilde{U}$ von x in X gibt, sodass $U = \tilde{U} \cap A$ gilt. Schließen Sie daraus direkt, dass Teilräume von AA1–Räumen wiederum AA1 erfüllen.

(38) Sei X ein AA2–Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Spurtopologie auf A ebenfalls AA2 erfüllt und schließen Sie daraus, das Teilräume von separablen metrisierbaren Räumen separabel sind.

Anleitung: Man zeigt, dass für eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie von X die Familie $\{U \cap A : U \in \mathcal{B}\}$ eine Basis für die Spurtopologie ist.

(39) Betrachten Sie die Niemytzki–Topologie auf der oberen Halbebene H aus Beispiel (11) und den Teilraum $A := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq H$. Zeigen Sie, dass die Spurtopologie auf A diskret ist und schließen Sie daraus, dass A nicht separabel ist.

(40) Sei $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ und $N := (0, 0, 1) \in S^2$ der Nordpol. Bewiesen Sie, dass der topologische Raum $S^2 \setminus \{N\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.

Anleitung: (“stereographische Projektion”): Bilden Sie einen Punkt $x \in S^2$, $x \neq N$ auf den Schnittpunkt des Strahls von N durch x mit der x—y–Ebene ab (Zeichnung!). Finden Sie eine explizite Formel für diese Funktion und für ihre Inverse und zeigen Sie damit, dass man einen Homöomorphismus erhält.

(41) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion zwischen topologischen Räumen und $U \subseteq X$ offen. Zeigen Sie: Ist $f|_U$ stetig, dann ist f als Funktion von X nach Y stetig in jedem Punkt $x \in U$. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass dies für allgemeine Teilmengen von X nicht stimmt.

(42) Beweisen Sie, dass es genau eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) = x \sin(1/x)$ für alle $x \neq 0$ gilt.

(43) Zeigen Sie, dass für einen topologischen Raum X und stetige Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ auch die Funktion $\max(f, g) : X \to \mathbb{R}$, $\max(f, g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ stetig ist.

Anleitung: Betrachten Sie die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(r, s) \mapsto \max\{r, s\}$.

(44) Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ das Produkt einer Familie von topologischen Räumen X_i und $\mathrm{pr}_j : X \to X_j$ die Projektion. Zeigen Sie, dass für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ das Bild $\mathrm{pr}_j(U) \subseteq X_j$ offen ist.

Anleitung: Man verifiziert das zunächst für die Elemente der Basis der Produkttopologie, die aus der definierenden Subbasis gewonnen wird.

(45) Betrachten Sie $\mathbb{N}$ als gerichtete Menge und den topologischen Raum $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ aus Punkt 3.9 der Vorlesung. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}_\infty$ kompakt ist und schließen Sie daraus, dass für eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum X, die gegen $x \in X$ konvergiert, die Teilmenge $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subseteq X$ kompakt ist.

(46) Sei X ein kompakter topologischer Raum, Y ein Hausdorff Raum und $f : X \to Y$ eine surjektive stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f eine Quotientenabbildung ist, also einen Homöomorphismus $\frac{X}{\sim} \to Y$ induziert, wobei $x_1 \sim x_2$ genau dann, wenn $f(x_1) = f(x_2)$.

Anleitung: Zeigen Sie, dass $\frac{X}{\sim}$ kompakt ist und benutzen Sie das.

(47) Beweisen Sie, dass für einen normalen Raum X jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen besitzt.

(48) Sei X ein normaler topologischer Raum $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $U \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$. Beweisen Sie, dass es eine stetige Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $g(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ und $g(x) = 0$ für alle $x \notin U$ gilt.

Anleitung: Wenden Sie das Lemma von Urysohn auf A und $X \setminus U$ an und multiplizieren Sie die resultierende Funktion mit f.

(49) Für topologische Räume X und Y sei $X \times Y$ der Produktraum. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ genau dann offen ist, wenn es für jeden Punkt $(x, y) \in W$ offene Umgebungen U von x in X und V von y in Y gibt, für die $U \times V \subseteq W$ gilt.

(50) Sei X ein kompakter und Y ein beiliebiger topologischer Raum und betrachte das Produkt $X \times Y$. Sei $y_0 \in Y$ ein fixer Punkt und $W \subseteq X \times Y$ eine offene Teilmenge, die $X \times \{y_0\}$ enthält. Zeigen Sie (unter Benutzung von Beispiel (49)), dass es eine offene Umgebung V von y_0 in Y gibt, sodass $X \times V \subseteq U$ gilt.

(51) Betrachtem Sie den Raum $\ell^1 = \{a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} : \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| < \infty\}$ aus Beispiel (32). Zeigen Sie, dass die Einheitskugel $\{a \in \ell^1 : \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \leq 1\}$ nicht kompakt ist.

Anleitung: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $e^k = (e^k_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ definiert durch $e^k_k = 1$ und $e^k_\ell = 0$ für $\ell \neq k$. Zeigen Sie, dass die Folge $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungswert haben kann.

(52) (“the topologist’s sine–curve”) Sei $A := \{(t, \sin(\frac{1}{t}) : t \in \mathbb{R}, t < 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $B = A \cup \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\}$ (Zeichnung!). Zeigen Sie, dass B zusammenhängend ist.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass A zusammenhängend ist, dann benutzen Sie das Resultat über den Zusammenhang von Abschlüssen.

(53) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, sodass für $x, y \in A$ mit $x < y$ immer $[x, y] \subseteq A$ gilt. Zeigen Sie, dass A selbst ein Intervall ist.

(54) Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *lokal konstant*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, sodass $f(y) = f(x)$ für alle $y \in U$ gilt. Zeigen Sie, dass jede lokal konstante Funktion $f : X \to Y$ stetig ist und dass f auf jeder Zusammenhangskomponente von X konstant ist.

(55) Vervollständigen Sie die Beweisteile über die Dichtheit von $i(M)$ und die Vollständigkeit von $\hat{M}$ aus dem Beweis für die Existenz der Vervollständigung eines metrischen Raumes aus der Vorlesung.