Übungen zur Einführung in die Analysis

(Einführung in das mathematische Arbeiten)

WS 2017

1. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung von Summen- bzw. Produktzeichen:
$$\sum_{k=2}^{7} k^{2k+1}, \quad \sum_{j=-5}^{-2} a_k, \quad \prod_{i=1}^{3} 2^i, \quad \prod_{j=1}^{5} j^3$$

2. Verifizieren Sie die Gleichung indem Sie die Ausdrücke ohne Summenzeichen schreiben.
$$\sum_{k=0}^{3}\sum_{j=k}^{3} a_k^j = \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{j} a_k^j.$$
Wie kann man direkt zu diesem Resultat kommen? (Hinweis: Über welche Paare (k, j) wird summiert?)

3. Berechnen Sie
$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1+(-1)^j}{2}$$
zunächst für $n = 6$ und dann für beliebige natürliche Zahlen n.

4. Berechnen Sie
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j} \qquad (\delta_{i,j} \text{ ist das Kronecker-Delta}).$$

5. Schreiben Sie folgende Ausdrücke unter Verwendung des Summen- bzw. Produktzeichens oder beider:

   (a) $6 + 12 + 18 + 24$

   (b) $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8$

   (c) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 27$

   (d) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 10x^9$

   (e) $a_1 + (1 + 2)(a_1a_2) + (1 + 2 + 3)(a_1a_2a_3) + \ldots + (1 + 2 + \ldots + n)(a_1a_2 \cdots a_n)$

6. Richtig oder falsch? Begründen Sie!

   (a) $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$

   (b) $\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(a_i + b_j)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$

(c) $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$

(d) $\prod_{i=1}^{n} a_i/a_{i+1} = a_1/a_{n+1}$

(e) $\sum_{i=0}^{n}(i^2+2i)a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1}(i^2-1)a_i$

7. Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k.$$

8. Berechnen Sie $p(-2)$ für das Polynom

$$p(x) = \sum_{i=2}^{25}\binom{25}{i}x^i.$$

9. Finden Sie unter den folgenden Aussagen die Kontradiktionen und Tautologien heraus:

   (a) $p \vee (q \wedge \neg p)$

   (b) $(r \vee q) \Leftrightarrow (\neg r \Rightarrow q)$

   (c) $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

   (d) $(p \vee (\neg p \vee q)) \vee \neg(q \wedge r)$

10. Formulieren Sie gemäß der Regel $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ äquivalente Aussagen zu:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > n \Rightarrow n > 1$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N} : 3|n \Rightarrow 4|n$

   (c) $\forall n \in \mathbb{N} : n^3$ ungerade $\Rightarrow n$ ungerade

11. Finden Sie eine Darstellung der Äquivalenz, in der nur die Grundverknüpfungen $\wedge, \vee, \neg$ verwendet werden.

12. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Implikation und mit den Rechenregeln für $\wedge, \vee, \neg$, dass für beliebige Aussagen a, b folgendes gilt:

$$((a \Rightarrow b) \wedge \neg b) \Rightarrow \neg a$$

13. Bilden Sie die Verneinungen der folgenden Aussagen. Achten Sie darauf, dass das “nicht” in den Verneinungen möglichst die “innerste” Aussage verneint.

(a) Alle Schwammerl sind giftig oder schwer zu finden.

(b) Alle Schwammerl sind entweder giftig oder schwer zu finden.

(c) Alle giftigen Schwammerl sind leicht zu finden.

(d) Alle Schwammerl sind giftig, daher sind sie leicht zu finden.

(e) Wenn zwei Geraden keinen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie parallel.

(f) Es gibt ein Dreieck, das zwei rechte Winkel hat.

(g) Es gibt ein Dreieck, das zwei stumpfe Winkel hat.

(h) In allen Körben von Schwammerlsuchern gibt es einen giftigen Pilz.

(i) Es gibt ein Haus in Wien, in dem alle Fenster mit Alarmanlagen gesichert sind.

(j) Es gibt ein Haus in Budapest, in dem ein Fenster eine zerbrochene Fensterscheibe besitzt.

14. Bestimmen Sie $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \times B, AB := \{ab | a \in A, b \in B\}$ und $\mathcal{P}(A)$ für $A = \{1, 4, 7\}$ und $B = \{1, 3, 5, 8\}$.

15. Es seien A, B, C drei beliebige Mengen. Zeigen Sie

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ und } (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

16. Geben Sie in Beispiel für eine Relation an, die antisymmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv ist, und eines einer Relation, die symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv ist.

17. Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{Z}$ durch die Relation

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \text{ ist gerade}$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird, dass aber durch

$$x \approx y :\Leftrightarrow |x - y| \leq 2$$

keine solche definiert wird.

18. Man beschreibe die Ordnungsrelation, die zur Anordnung der Namen im Telefonbuch führt.

19. Zeigen Sie

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} (1/n, 1] = \bigcup_{n=3}^{\infty} [1/n, 1]$$

und dass diese Menge als Teilmenge der reellen Zahlen mit der natürlichen Ordnungsrelation beschränkt ist. Bestimmen Sie weiters Supremum und Infimum. Sind diese auch Maximum bzw. Minimum?

20. Ermitteln Sie für folgende Mengen Supremum, Infimum, Maximum und Minimum sofern diese existieren.

    (a) $(-3, 1] \cup (2, 7]$
    (b) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$
    (c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (1 + \frac{1}{1+n}, n + 2)$
    (d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}, 2 - \frac{1}{n}]$

21. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimme man $f(A)$ und $f^{-1}(B)$:

    (a) $f(x) = x + 3, A = \{1, 2, 5\}, B = (-1, 3)$
    (b) $f(x) = x^2 - 1, A = (-1, 1), B = \{-1, 0\}$
    (c) $f(x) = 5, A = \{0\} \cup (1, 2), B = \{5\}$

22. Untersuchen Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

    auf Injektivität und Surjektivität.

23. Es seien A, B Teilmengen der Definitionsmenge von f. Man zeige

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

    und konstruiere ein Beispiel, bei dem nicht Gleichheit gilt. Man gebe eine in der Vorlesung definierte Eigenschaft von f an, die die Gleichheit garantiert.

24. Dieselbe Aufgabenstellung wie im vorigen Beispiel für

$$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B).$$

25. (a) Zeigen Sie

$$f \text{ und } g \text{ bijektiv} \Rightarrow f \circ g \text{ bijektiv}$$

    und dass die Äquivalenz nicht stimmt (durch Angabe eines Gegenbeispiels).

    (b) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht injektiv sind, sodass die Verknüpfung $f \circ g$ injektiv ist?

26. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \{1, 2, 3\}^2 \to \{0, 1, \dots, 8\}, \quad f((m, n)) = 3(m - 1) + n - 1$$

    bijektiv ist, und bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

27. Wählen Sie jeweils Teilmengen von $\mathbb{R}$ so als Definitionsbereich und Zielbereich aus, dass durch die Zuordnung $x \to x^2 + x - 6$ eine weder injektive noch surjektive Funktion, eine injektive aber nicht surjektive Funktion, eine surjektive aber nicht injektive Funktion, eine bijektive Funktion bestimmt wird.

28. Es seien A und B Mengen mit m bzw. n Elementen. Wieviele Abbildungen von A nach B gibt es? Unter welchen Bedingungen an m und n gibt es injektive bzw. surjektive bzw. bijektive Abbildungen und wieviele?

29. In welchen Intervallen sind die folgenden Abbildungen monoton wachsend/fallend?

    (a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 4$

    (b) $\cos(x)$

    (c) $\sin(x)$

    (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ falls $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 1$ falls $x \notin \mathbb{Q}$.

30. Es sei $f : A \to B$ injektiv (resp. surjektiv) und $A, B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass ein $g : B \to A$ existiert, das surjektiv (resp. injektiv) ist.

31. Es sei $f : A \to B$ eine Funktion und $A_1 \subseteq A$. Zeigen Sie, dass die Mengen $f(A_1^c)$ und $f(A_1)^c$ (wobei c das Komplement bezeichnet) bezüglich $\subseteq$ im Allgemeinen nicht vergleichbar sind. Was kann man für injektive bzw. surjektive Funktionen aussagen?

32. Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}^3$ und $\mathbb{N}$.