

Algebraische Topologie

Wintersemester 2004/05

Andreas Čap

INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT WIEN, NORDBERGSTRASSE 15, A-1090 WIEN

E-mail address: `Andreas.Cap@esi.ac.at`

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Kapitel 1. Motivation und Vorbereitungen	1
Kategorien und Funktoren	2
Quotientenräume	5
Funktionsräume	8
Kapitel 2. Elementare Homotopietheorie	11
Homotopie und Homotopieäquivalenz	11
Ein nichttriviales Beispiel	14
Natürliche Gruppenstrukturen auf Mengen von Homotopieklassen	17
Kapitel 3. Fundamentalgruppe und Überlagerungen	23
Exkurs: Der Satz von Seifert und van Kampen	26
Überlagerungen	30
Die universelle Überlagerung	36
Kapitel 4. Simplicialkomplexe und CW-Komplexe	41
Kofaserungen	41
Simplicialkomplexe	47
Simpliciale Approximation	50
CW-Komplexe	55
Kapitel 5. Exkurs: Höhere Homotopiegruppen	63
Die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung	64
Kapitel 6. Singuläre Homologietheorie	73
Algebraische Vorbereitungen	74
Der singuläre Komplex eines topologischen Raumes	78
Homotopieinvarianz der singulären Homologiegruppen	80
Die Mayer-Vietoris Sequenz	82
Kapitel 7. Relative Homologie	89
Lokale Homologie und Invarianzsätze	92
CW-Homologie	94
Kapitel 8. Exkurs: Vermischtes aus der Homologietheorie	103
Der Jordan'sche Kurvensatz	103
Homologie mit Koeffizienten	106
Singuläre Kohomologie	112
Zusammenhänge zwischen Homotopie und Homologie	118
Literaturverzeichnis	121
Index	123

Vorwort

Nach dem neuen Studienplan gibt es im Wahlfachtopf “Geometrie und Topologie” eine 4–stündige Pflichtvorlesung “Algebraische Topologie”. Dieses Skriptum ist eine Ergänzung zur meiner Vorlesung im Wintersemester 2004/05, die meine erste Vorlesung zu diesem Thema nach dem neuen Studienplan ist. Ziel der Vorlesung ist es einerseits einen ersten Einblick in die typischen Denkweisen und Methoden der algebraischen Topologie zu geben. Andererseits sollen jene Teile der algebraischen Topologie vorgestellt werden, die in anderen Teilgebieten der Mathematik, wie Differentialgeometrie und komplexe Analysis, Verwendung finden.

Die grundlegende algebraische Topologie gliedert sich in zwei große Teile, nämlich die Homotopietheorie sowie die Homologie– und Kohomologietheorie. Diese beiden Teile unterscheiden sich sowohl in den grundlegenden Konzepten, als auch in der Denkweise ziemlich stark. In der Homotopietheorie sind die Grundbegriffe ziemlich anschaulich und eher geometrischer Natur. Hier stellt sich die algebraische Topologie als “Gummiometrie” dar, in der deformieren und verbiegen von Räumen eine zentrale Rolle spielen. Viele der zentralen Beweise sind geometrisch anschaulich. Will man aber die aus der Homotopietheorie kommenden Invarianten tatsächlich ausrechnen, so wird das sehr schnell ausgesprochen schwierig, und man muss meist auf Methoden der Homologietheorie zurückgreifen.

In der Homologietheorie sind dagegen schon die grundlegenden Konzepte relativ abstrakt, und in den Beweisen treten die geometrischen Ideen zugunsten von formalen und algebraischen Argumenten in den Hintergrund. Dafür bilden aber die Homologie– und Kohomologiegruppen topologische Invarianten, die in konkreten Situationen auch wirklich berechnet werden können.

Das Skriptum ist aus meinem Skriptum zur 5–stündigen Vorlesung “Topologie II” aus dem Jahr 1997 hervorgegangen, wobei ich den Anteil der Homotopietheorie zugunsten der Homologietheorie verringert habe. Ich danke Herrn Michael Kunzinger, der mich auf eine Vielzahl von Druckfehlern in der früheren Version des Skriptums aufmerksam gemacht hat.

Zum Inhalt: Kapitel 1 enthält neben einigen motivierenden Fragen einiges an Hintergrundinformation. Wir besprechen die grundlegendsten Begriffe der Kategorientheorie sowie Hintergrund aus der Punktmengentopologie. In Kapitel 2 werden die Grundkonzepte der Homotopietheorie entwickelt. Als erstes nichttriviales Beispiel beschreiben wir die Homotopieklassen von Abbildungen des Kreises auf sich selbst, was sofort zu einigen überraschenden Anwendungen führt. Kapitel 3 entwickelt die Theorie der Fundamentalgruppe und ihrer “geometrischen” Interpretation mittels Überlagerungen. In Kapitel 4 wird zunächst der Begriff der Kofaserung entwickelt. Dann besprechen wir zwei fundamentale Klassen von topologischen Räumen, die den Methoden der algebraischen Topologie gut zugänglich sind, nämlich Simplicialkomplexe und CW Komplexe. In Kapitel 5 schließen wir unser Studium der Homotopietheorie mit einem Überblick über höhere Homotopiegruppen ab. Wir besprechen die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung und benutzen sie zur Berechnung einiger Homotopiegruppen.

In Kapitel 6 besprechen wir die Grundkonzepte der singulären Homologietheorie, wobei wir auch den nötigen Hintergrund aus der homologischen Algebra entwickeln. Nachdem wir die wichtigsten Eigenschaften der Homologiegruppen bewiesen haben, wenden wir uns der Mayer–Vietoris–Sequenz zu, mit deren Hilfe wir die Homologiegruppen der Sphären vollständig berechnen können, was sofort zu interessanten Anwendungen führt. Kapitel 7 ist den relativen Homologiegruppen gewidmet. Diese führen zunächst zum Begriff der lokalen Homologie, mit deren Hilfe wir klassische Invarianzsätze beweisen können. Im zweiten Teil des Kapitels benutzen wir die relativen Homologiegruppen um einen Weg zur Berechnung der Homologie von beliebigen CW Komplexen zu entwickeln. Kapitel 8 beschreibt einige Anwendungen sowie weiterführende Konzepte der Homologietheorie. Wir beweisen zunächst eine allgemeine Version des Jordan’schen Kurvensatzes. Dann besprechen wir kurz Homologie mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe und Kohomologie. Am Ende werden Verbindungen zwischen Homologie- und Homotopietheorie skizziert.

Im Verlauf des Skriptums gibt es einige Abschnitte, deren Titel mit dem Wort “Exkurs” beginnt. In diesen Abschnitten sind teilweise die Beweise nicht ganz vollständig, teilweise sind sie ganz ausgelassen. Die Resultate dieser Abschnitte sind für das weitere Verständnis der Vorlesung nicht nötig, oft haben sie eher den Charakter von Ausblicken auf tiefere Aspekte des vorherigen Stoffes. Ich werde diese Abschnitte (je nach vorhandener Zeit) auch in der Vorlesung nur unvollständig (oder gar nicht) behandeln. Ich würde den Hörern aber empfehlen, diese Kapitel zumindest grob durchzulesen. Insbesondere bezieht sich das auf die Kapitel 5 und 8, in denen einige tiefer liegende Aspekte der algebraischen Topologie beschrieben werden.

Zum Abschluss noch einige Worte zur Literatur: Es gibt, vor allem für den Bereich der Homologietheorie, einige klassische Lehrbücher, etwa die Bücher [D] von A. Dold und [S] von E.H. Spanier. Diese Bücher gehen (natürlich) im Bereich der Homologietheorie um einiges über den Inhalt dieses Skriptums hinaus.

Schwieriger ist es, gute Bücher über Homotopietheorie zu finden. Ein Standardwerk ist das Buch [W] von G.W. Whitehead. Dieses Buch setzt Kenntnisse über Homologietheorie voraus und ist in vielen Bereichen ziemlich technisch, es ist aber sehr vollständig und präzise. Ein interessantes Buch in ganz anderem Stil ist [F–F–G] von A.T. Fomenko, D.B. Fuchs und V.L. Gutenmacher. In diesem Buch werden vor allem “geometrisch” anschauliche Aspekte der Homotopietheorie betont, dafür sind die Beweise oft nur Skizzen und mit Vorsicht zu genießen. Zusätzlich bieten die in diesem Buch abgedruckten Zeichnungen von A. Fomenko eine Menge künstlerisches Anschauungsmaterial zur Homotopietheorie.

Ein Lehrbuch (sogar in deutscher Sprache), das sowohl zur Homotopietheorie als auch zur Homologietheorie relativ viel Informationen enthält und dem auch meine Vorlesung im Geist ziemlich nahe steht ist das Buch [S–Z] von R. Stöcker und H. Zieschang. Ein interessantes neues Lehrbuch, das breite Teile der algebraischen Topologie abdeckt, ist [H] von A. Hatcher.

Motivation und Vorbereitungen

In diesem Kapitel werden erst einige motivierende Beispiele besprechen und dann einige Resultate und Konstruktionen der allgemeinen Topologie beschreiben, die in der algebraischen Topologie häufig benötigt werden.

1.1. Einige Beispiele. Zunächst möchte ich an einigen Beispielen illustrieren, wie topologische Fragestellungen in verschiedenen Bereichen der Mathematik auftauchen. Ein wichtiger Punkt dabei ist, dass es nicht darum geht "seltsame" topologische Räume zu studieren, sondern topologische Eigenschaften von "einfachen" Räumen zu verstehen.

Betrachten wir die einfachste partielle Differentialgleichung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und seien $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen. Betrachten wir das System $\frac{\partial g}{\partial x_i} = f_i$ von partiellen Differentialgleichungen an eine glatte Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Die grundlegende Frage ist, ob dieses System für gegebene Funktionen f_i eine Lösung besitzt, und wie weit diese Lösung eindeutig ist.

Bei der Frage der Eindeutigkeit sieht man sofort, dass Topologie ins Spiel kommt: Sind nämlich g_1, g_2 Lösungen des Systems, dann erfüllt die Differenz $g_2 - g_1$ natürlich $\frac{\partial(g_2 - g_1)}{\partial x_i} = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Das bedeutet gerade, dass jeder Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung besitzt, auf der $g_2 - g_1$ konstant ist. Damit muss aber $g_2 - g_1$ konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von U sein. Ist umgekehrt h konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von U , dann gilt $\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0$ für alle i . Somit sehen wir, dass die Uneindeutigkeit in den Lösungen genau von der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von U abhängt. Im weiteren nehmen wir an, dass U zusammenhängend ist, sonst kann man die Zusammenhangskomponenten von U getrennt betrachten.

Für die Existenz einer Lösung ist die Situation etwas komplizierter. Es gibt eine offensichtliche notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung: Ist nämlich $f_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ für alle i , dann ist $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, wegen der Symmetrie der zweiten partiellen Ableitungen. Somit müssen wir voraussetzen, dass $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ für alle i, j gilt. Die Frage ist nun, ob diese Bedingung hinreichend für die Existenz einer Lösung ist, und das hängt von einer subtileren topologischen Eigenschaft von U ab. Ist g eine Lösung, und ist $c = (c_1, \dots, c_n) : [0, 1] \rightarrow U$ eine glatte Kurve, dann ist natürlich $g(c(1)) - g(c(0)) = \int_0^1 (g \circ c)'(t) dt$. Berechnet man die Ableitung nach der Kettenregel, dann erhält man

$$(g \circ c)'(t) = Dg(c(t))(c'(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(c(t))c'_i(t) = \sum_{i=1}^n f_i(c(t))c'_i(t).$$

Ist etwa U konvex, also für $x, y \in U$ und $t \in [0, 1]$ auch $(1-t)x + ty \in U$, dann kann man immer eine Lösung g finden, indem man einen fixen Punkt x wählt, und $g(y)$ durch das Integral über die Verbindungsstrecke definiert, also

$$g(y) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i((1-t)x + ty)(y_i - x_i) dt$$

definiert. Durch direkte Rechnung zeigt man, dass dies tatsächlich eine Lösung liefert (so ferne die Bedingung $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ erfüllt ist).

Betrachtet man andererseits $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und die Funktionen $f_1(u, v) = \frac{-v}{u^2+v^2}$ und $f_2(u, v) = \frac{u}{u^2+v^2}$, dann sind diese Funktionen glatt und erfüllen $\frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{\partial f_2}{\partial u}$. Aber es kann keine glatte Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ geben, sodass $\frac{\partial g}{\partial u} = f_1$ und $\frac{\partial g}{\partial v} = f_2$ gilt. Man rechnet nämlich leicht nach, dass man für die Kurve $c : [0, 1] \rightarrow U$, $c(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

$$\int_0^1 (f_1(c(t))c'_1(t) + f_2(c(t))c'_2(t)) dt = 2\pi$$

erhält. Gäbe es eine Lösung g , dann müsste dieses Integral aber $g(c(0)) - g(c(1)) = 0$ sein. Allgemein hängt die Frage der Existenz von Lösungen dieses Systems eng mit der ersten Kohomologiegruppe von U zusammen.

Nach diesem etwas ausführlicheren Beispiel möchte ich noch kurz einige typische Problemstellungen bzw. Resultate auflisten, die eng mit algebraischer Topologie zusammenhängen. Die meisten dieser Fragen werden wir im Lauf der Vorlesung beantworten können.

- Hängt das Konzept der Dimension mit Topologie zusammen? Anders gesagt sind \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m homöomorphe topologische Räume? Wie sieht es allgemeiner für offene Teilmengen von reellen Vektorräumen verschiedener Dimension aus? (“Invarianz der Dimension und der Domäne”)
- Der Euler’sche Polyedersatz: Ist A ein konvexer Polyeder in \mathbb{R}^3 , dann ist die Anzahl der Ecken plus die Anzahl der Flächen minus der Anzahl der Kanten gleich 2. Die “richtige” Interpretation dieses Satzes für unsere Zwecke ist die folgende: Man sieht leicht, dass die Oberfläche so eines Polyeders homöomorph zu $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ ist. Zerlegt man einen Raum in geeigneter Weise in “Zellen” und ist a_i die Anzahl der i -dimensionalen Zellen, dann ist $\sum (-1)^i a_i$ gleich einer topologischen Invariante (der “Euler Charakteristik”), die für S^2 gleich 2 ist. Zerlegt man analog einen Torus, dann erhält man immer 0.
- nichttriviale Bündel und Überlagerungen: Sei $p : E \rightarrow X$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, sodass es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ und einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ für einen fixen topologischen Raum F gibt, sodass $\text{pr}_1 \circ \phi = p$ gilt. Ist X etwa eine konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n , dann folgt daraus schon, dass es einen Homöomorphismus $\Phi : E \rightarrow X \times F$ gibt, sodass $\text{pr}_1 \circ \Phi = p$ gilt. Andererseits liefert ein Möbiusband E ein Beispiel mit $X = S^1$ und $F = [-1, 1]$, in dem so ein Φ nicht existieren kann. Noch einfacher kann man die Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ betrachten, die durch $p(t) = e^{2\pi i t}$ gegeben ist. Hier ist F der diskrete Raum \mathbb{Z} .
- Der Jordan’sche Kurvensatz. Betrachte das Bild einer stetigen, geschlossenen Kurve in \mathbb{R}^2 ohne Doppelpunkte. So eine Kurve kann man durch eine stetige injektive Abbildung $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisieren. Da S^1 kompakt ist, ist $f : S^1 \rightarrow f(S^1)$ ein Homöomorphismus. Der Jordan’sche Kurvensatz reduziert sich also auf die Fragen nach der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus A$, wobei $A \subset \mathbb{R}^2$ homöomorph zu S^1 ist. Man kann über die Topologie dieses Komplements sogar noch viel detailliertere Aussagen machen.

Kategorien und Funktoren

Da in der algebraischen Topologie verschiedene Zweige der Mathematik verknüpft werden (zB. Zuordnung von Gruppen zu topologischen Räumen), ist es sehr günstig,

Begriffe aus der Kategorientheorie zu benutzen, um die Zusammenhänge zu beschreiben. Wir werden kaum Resultate, sondern hauptsächlich die Denk- und Sprechweise der Kategorientheorie benötigen.

1.2. Kategorien.

DEFINITION. Eine *Kategorie* \mathcal{C} besteht aus

- Einer Klasse $|\mathcal{C}| = \text{Ob}(\mathcal{C})$ von *Objekten*,
- Zu jedem Paar (X, Y) von Objekten einer Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ von *Morphismen* von X nach Y ,
- Zu jedem Tripel (X, Y, Z) von Objekten einer *Kompositionsabbildung*
 $\circ : \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$,

sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Die Komposition ist assoziativ, d.h. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ wenn f , g und h komponiert werden können.
- (ii) Zu jedem $X \in |\mathcal{C}|$ existiert ein Morphismus $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$, sodass $1_X \circ f = f$ für alle Y und $f \in \mathcal{C}(Y, X)$ und $g \circ 1_X = g$ für alle Y und $g \in \mathcal{C}(X, Y)$.

BEMERKUNG. Die Notation suggeriert, dass die Objekte einer Kategorie Mengen und die Morphismen Funktionen zwischen diesen Mengen sind. Das ist zwar meist der Fall, wird aber in der Definition nicht vorausgesetzt.

In jeder Kategorie hat man einen Begriff von Isomorphie. Für ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ heißt ein *Isomorphismus* in der Kategorie \mathcal{C} , falls es einen Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt, sodass $g \circ f = 1_Y$ und $f \circ g = 1_X$ gilt. Die Objekte X und Y heißen *isomorph* falls es einen Isomorphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ gibt.

BEISPIEL. (1) Mengen und Funktionen. Isomorphismen sind genau die bijektiven Funktionen.

(2) Top: Topologische Räume und stetige Funktionen. Isomorphismen sind genau die Homöomorphismen.

(3) Verschiedene spezielle topologische Räume, z.B. Hausdorffräume, kompakte Räume etc. und stetige Funktionen.

(4) Top₂: Topologische Paare: Objekte sind Paare (X, A) , wo X ein topologischer Raum und A ein Teilraum von X ist. Morphismen von (X, A) nach (Y, B) sind stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Ein Isomorphismus in Top₂ heißt ein *Homöomorphismus von Paaren*. Nach Definition ist $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $f : X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus ist, sodass auch $f|_A : A \rightarrow B$ ein Homöomorphismus ist.

(5) Top₀: Punktierte topologische Räume: Objekte sind Paare (X, x_0) , wo X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt von X ist. Morphismen von (X, x_0) nach (Y, y_0) sind stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Isomorphismen sind genau die Homöomorphismen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$.

(6) Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Isomorphismen sind genau die üblichen Gruppenisomorphismen.

(7) Mod_R: Moduln über einem fixen kommutativen Ring R mit 1 und Modulhomomorphismen. Insbesondere Ab = Mod_Z: abelsche Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Isomorphismen sind wieder genau die üblichen Isomorphismen.

1.3. Funktoren.

DEFINITION. Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien.

- (1) Ein *kovarianter Funktor* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung $F : |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{D}|$ und einer Familie von Abbildungen $F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$, sodass $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ und $F(1_X) = 1_{F(X)}$.
- (2) Ein *kontravarianter Funktor* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung $F : |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{D}|$ und einer Familie von Abbildungen $F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(Y), F(X))$, sodass $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ und $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Ein Funktor ordnet also jedem Objekt von \mathcal{C} ein Objekt von \mathcal{D} zu, und jedem Morphismus in \mathcal{C} einen Morphismus in \mathcal{D} zwischen den entsprechenden Bildobjekten, wobei für kovariante Funktoren die Morphismen in die gleiche Richtung gehen und für kontravariante Funktoren in die entgegengesetzte Richtung. Ein Vorteil der Arbeit mit Funktoren ist, dass sie automatisch isomorphe Objekte in isomorphe Objekte abbilden:

LEMMA. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Sind X und Y isomorphe Objekte von \mathcal{C} , dann sind $F(X)$ und $F(Y)$ isomorph in \mathcal{D} .

BEWEIS. Sei $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ein Isomorphismus und $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ so, dass $g \circ f = 1_X$ und $f \circ g = 1_Y$ gilt. Ist F kovariant, dann haben wir $F(f) \in \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ und $F(g) \in \mathcal{D}(F(Y), F(X))$ mit $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$ und analog $F(f) \circ F(g) = 1_{F(Y)}$. Damit sind $F(X)$ und $F(Y)$ isomorph. Für kontravariante Funktoren ist der Beweis analog. \square

1.4. Einige Teilräume des \mathbb{R}^n . Für $n \geq 1$ betrachte auf \mathbb{R}^n das euklidische innere Produkt $\langle x, y \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ und die entsprechende Norm $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Nun definiere

$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, der abgeschlossene n -dimensionale Einheitsball
 $D^n := (B^n)^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, der offene n -dimensionale Einheitsball
 $S^{n-1} := \partial B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, die $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre
 $I^n := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n\}$, der n -dimensionale Einheitswürfel

BEMERKUNG. (1) S^0 ist ein zweipunktiger diskreter Raum.

(2) I^n ist das n -fache topologische Produkt des *Einheitsintervalles* $I = [0, 1]$ mit sich selbst.

(3) D^n wird oft auch als die n -dimensionale Einheitszelle bezeichnet.

(4) über affine Abbildungen ist jeder offene (abgeschlossene) Ball im \mathbb{R}^n homöomorph zu D^n (B^n).

(5) \mathbb{R}^n ist homöomorph zu D^n via $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

Sei nun $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, konvexe (d.h. für $x, y \in X$ und $t \in [0, 1]$ liegt $x + t(y - x)$ wieder in X) Teilmenge mit nicht leerem Inneren. Wähle einen beliebigen Punkt $x_0 \in X^\circ$. Für einen Randpunkt $x \in \partial X$ betrachte die Verbindungsstrecke $x_t := x_0 + t(x - x_0)$, $t \in I$. Für $t < 1$ ist jedes x_t ein innerer Punkt von X , denn für eine offene Umgebung V von x_0 , die in X liegt und $s \in [0, 1]$ ist $\{y + s(x - y) : y \in V\}$ eine offene Umgebung von x_s , die in X enthalten ist.

Daher ist die Funktion $f : \partial X \rightarrow S^{n-1}$, die gegeben ist durch $f(x) := \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$, eine stetige Bijektion. Weiters kann jeder Punkt $y \in X$ eindeutig als $x_0 + s(x - x_0)$ für ein $x \in \partial X$ und $s \in [0, 1]$ geschrieben werden. Setzt man nun $f(y) = s \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$, so erhält man eine stetige Bijektion $f : X \rightarrow B^n$. Da X kompakt ist, ist f ein Homöomorphismus. Somit ist $f : (X, \partial X) \rightarrow (B^n, S^{n-1})$ ein Homöomorphismus von Paaren (siehe Beispiel (4) von 1.2). Wir haben also bewiesen:

PROPOSITION. *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit nicht leerem Inneren, dann ist das Paar $(X, \partial X)$ homöomorph zu (B^n, S^{n-1}) .*

Insbesondere ist $(I^n, \partial I^n)$ homöomorph zu (B^n, S^{n-1}) .

Quotientenräume

1.5. Sei X ein topologischer Raum, $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X . Sei X/R die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \rightarrow X/R$ die kanonische Abbildung, die jedem Punkt seine Äquivalenzklasse zuordnet. Auf X/R betrachte die finale Topologie bezüglich π , d.h. $U \subset X/R$ ist offen genau dann wenn $\pi^{-1}(U) \subset X$ offen ist. Für eine Funktion f von X/R in einen beliebigen topologischen Raum Y und eine Teilmenge $V \subset Y$ ist damit $f^{-1}(V) \subset X/R$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ \pi)^{-1}(V) \subset X$ offen ist. Also ist $f : X/R \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \rightarrow Y$ stetig ist. Anders gesagt: Die stetigen Abbildungen von X/R in einen beliebigen Raum Y entsprechen genau den stetigen Abbildungen von X nach Y , die auf jeder Äquivalenzklasse konstant sind.

Ein Problem ist, dass Quotienten (auch von sehr "schönen" Räumen) im allgemeinen nicht Hausdorff sind. Als Beispiel betrachte man die Relation $x \sim x' \iff x - x' \in \mathbb{Q}$ auf \mathbb{R} , bei der der Quotientenraum die Klumpentopologie trägt. Wir werden hier keine allgemeinen Resultate benötigen, die sicher stellen, dass Quotientenräume nicht pathologisch sind, sondern nur (später) zeigen, dass die beiden für unsere Zwecke wichtigsten Konstruktionen von Quotientenräumen nicht aus der Klasse der normalen topologischen Räume herausführen. In Beispielen kann man üblicherweise die benötigten topologischen Eigenschaften von Quotientenräumen leicht direkt beweisen.

Zusammenziehen von Teilräumen. Sei (X, A) ein topologisches Paar. Auf X betrachte die Äquivalenzrelation $x \sim x' \iff x = x'$ oder $x, x' \in A$. Der Quotientenraum nach dieser Relation wird mit X/A bezeichnet. Es ist der Raum der entsteht, wenn man A auf einen Punkt zusammenzieht. Sei $[A]$ der Punkt in X/A , der A entspricht. Die Abbildung $\pi : (X, A) \rightarrow (X/A, [A])$ ist in diesem Fall ein *relativer Homöomorphismus* von Paaren, das heißt die Einschränkung $\pi|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow X/A \setminus [A]$ ist ein Homöomorphismus.

Nach Konstruktion der Topologie auf Quotientenräumen induziert eine stetige Abbildung $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung $(X/A, [A]) \rightarrow (Y/B, [B])$. Man sieht sofort, dass diese Konstruktion einen Funktor von topologischen Paaren in punktierte topologische Räume definiert.

1.6. Verkleben von Räumen. Sei (X, A) ein topologisches Paar, Y ein topologischer Raum und $f : A \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Betrachten wir die *disjunkte Vereinigung* $X \sqcup Y$ von X und Y , also die Vereinigung der Mengen X und Y mit der Topologie in der eine Teilmenge $U \subset X \cup Y$ genau dann offen ist, wenn $U \cap X$ und $U \cap Y$ offen in X bzw. Y ist. Darauf betrachte die Äquivalenzrelation, die durch $a \sim f(a)$ für $a \in A$ erzeugt wird. Der Raum der Äquivalenzklassen heißt der Raum, der entsteht, wenn man X längs f an Y klebt. Er wird mit $X \cup_f Y$ bezeichnet. Nach Konstruktion ist $X \cup_f Y$ als Menge die disjunkte Vereinigung von $X \setminus A$ und Y . Welche Punkte aus diesen beiden Teilmengen nahe zueinander sind, hängt gerade von der Klebeabbildung f ab.

Sei $i : A \rightarrow X$ die Inklusion. Die Einbettungen von X und Y in $X \sqcup Y$ induzieren stetige Abbildungen $i_* f : X \rightarrow X \cup_f Y$ und $f_* i : Y \rightarrow X \cup_f Y$, sodass $i_* f \circ i = f_* i \circ f$,

das heißt das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow f_*i \\ X & \xrightarrow{i_*f} & X \cup_f Y \end{array}$$

ist kommutativ. Man beachte, dass nach Konstruktion die Abbildung f_*i immer injektiv ist.

Sei nun Z ein beliebiger topologischer Raum, und seien $\phi : X \rightarrow Z$ und $\psi : Y \rightarrow Z$ stetige Funktionen mit $\psi \circ f = \phi|_A = \phi \circ i$, also so, dass ϕ eine Fortsetzung der stetigen Funktion $\psi \circ f : A \rightarrow Z$ auf ganz X ist. Offensichtlich induzieren ϕ und ψ eine stetige Funktion $X \sqcup Y \rightarrow Z$, und nach Konstruktion ist diese mit der Äquivalenzrelation verträglich, also erhalten wir eine induzierte Abbildung $(\phi, \psi) : X \cup_f Y \rightarrow Z$. Diese erfüllt $(\phi, \psi) \circ i_*f = \phi$ und $(\phi, \psi) \circ f_*i = \psi$ und ist klarerweise durch diese beiden Bedingungen eindeutig bestimmt. Man nennt diese Eigenschaft die *universelle Eigenschaft* des verklebten Raumes und schreibt sie diagrammatisch als

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow f_*i \\ X & \xrightarrow{i_*f} & X \cup_f Y \end{array} \begin{array}{c} \searrow \psi \\ \downarrow \phi \\ \exists!(\phi, \psi) \end{array}$$

Das Tripel $(X \cup_f Y, i_*f, f_*i)$ ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt: Sei $(W, \alpha : X \rightarrow W, \beta : Y \rightarrow W)$ noch ein Tripel mit $\alpha \circ i = \beta \circ f$, sodass für jedes Z und $\phi : X \rightarrow Z, \psi : Y \rightarrow Z$ mit $\phi \circ i = \psi \circ f$ ein eindeutiges $(\phi, \psi) : W \rightarrow Z$ mit $(\phi, \psi) \circ \alpha = \phi$ und $(\phi, \psi) \circ \beta = \psi$ existiert. Durch Anwenden der universellen Eigenschaft von W auf die Abbildungen i_*f und f_*i erhält man eine eindeutige stetige Abbildung $(i_*f, f_*i) : W \rightarrow X \cup_f Y$. Die universelle Eigenschaft von $X \cup_f Y$ angewandt auf α und β liefert eine eindeutige stetige Abbildung $(\alpha, \beta) : X \cup_f Y \rightarrow W$. Die Komposition $(\alpha, \beta) \circ (i_*f, f_*i) : W \rightarrow W$ ist eine stetige Abbildung, die nach Konstruktion $(\alpha, \beta) \circ (i_*f, f_*i) \circ \alpha = \alpha$ und $(\alpha, \beta) \circ (i_*f, f_*i) \circ \beta = \beta$ erfüllt. Nach der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft muss diese Abbildung die Identität auf W sein. Analog ist die andere Komposition die Identität auf $X \cup_f Y$, also haben wir einen Homöomorphismus gefunden.

Das Zusammenziehen von Teilräumen aus 1.5 kann als Spezialfall des Verklebens betrachtet werden: Sei (X, A) ein topologisches Paar, pt der einpunktige topologische Raum. Dann gibt es nur eine Abbildung $p : A \rightarrow pt$ und diese ist stetig. Nun bilde den Raum $X \cup_p pt$. Nach der universellen Eigenschaft entsprechen stetige Funktionen $X \cup_p pt \rightarrow Z$ genau stetigen Funktionen $X \rightarrow Z$, die ganz A auf einen Punkt abbilden, und das ist genau die Eigenschaft von X/A . Von oben sehen wir also, dass X/A und $X \cup_p pt$ kanonisch homöomorph sind.

1.7. Normalität. Wir wollen nun beweisen, dass das Verkleben von Räumen (und damit auch das Zusammenziehen von Teilräumen) unter schwachen Einschränkungen nicht zu Pathologien führt. Diese Resultate werden im weiteren nicht besonders wichtig sein, sie illustrieren aber schön, wie man mit universellen Eigenschaften arbeiten kann.

Bekanntlich heißt ein topologischer Raum X ein T_4 -Raum, wenn es zu disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$ gibt. Ein topologischer Raum heißt *normal* wenn er T_4 erfüllt und Hausdorff ist. Offensichtlich genügt es dafür statt der Hausdorff Eigenschaft T_2 die schwächere Bedingung zu verlangen, dass einpunktige Teilmengen von x abgeschlossen sind. Kompakte Hausdorffräume sind automatisch normal.

Die fundamentalen Resultate über T_4 -Räume sind das Lemma von Urysohn und der Fortsetzungssatz von Tietze: Nach dem Lemma von Urysohn erfüllt X genau dann T_4 , wenn es zu disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ eine *Urysohn Funktion* gibt, also eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$, sodass $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$ gilt. Der Fortsetzungssatz von Tietze besagt, dass X genau dann T_4 erfüllt, wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jeder stetigen Funktion $f : A \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Fortsetzung $F : X \rightarrow [0, 1]$ von f gibt.

PROPOSITION. *Seien X und Y normale Räume, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

- (1) *Der Raum $X \cup_f Y$ ist normal. Insbesondere ist auch X/A normal.*
- (2) *Sind X und Y kompakte Hausdorffräume, dann ist auch $X \cup_f Y$ ein kompakter Hausdorffraum. Insbesondere ist für einen kompakten Hausdorffraum X und eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ auch X/A ein kompakter Hausdorffraum.*

BEWEIS. Die Aussagen über X/A folgen sofort aus den allgemeinen Resultaten wegen $X/A \cong X \cup_p pt$.

(1) Wir zeigen zunächst, dass einpunktige Teilmengen von $X \cup_f Y$ abgeschlossen sind. Als Menge ist $X \cup_f Y$ die disjunkte Vereinigung von $Y \setminus f(A)$, $X \setminus A$ und $f(A)$. Für Punkte in einer der ersten beiden Teilmengen ist das Urbild in $X \sqcup Y$ nur der entsprechende Punkt, also abgeschlossen. Für Punkte $y \in f(A) \subset Y$ ist das Urbild in $X \sqcup Y$ genau $f^{-1}(y) \cup \{y\}$ und das ist ebenfalls abgeschlossen, weil f stetig ist. Nach Definition der Quotiententopologie bedeutet das aber genau, dass jede einpunktige Teilmenge von $X \cup_f Y$ abgeschlossen ist.

Seien nun $F_1, F_2 \subset X \cup_f Y$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Dann sind $(f_*i)^{-1}(F_1)$ und $(f_*i)^{-1}(F_2)$ natürlich disjunkte abgeschlossene Teilmengen von Y , also finden wir eine Urysohn Funktion $\psi : Y \rightarrow [0, 1]$ für diese beiden Teilmengen. Andererseits sind $(i_*f)^{-1}(F_1)$ und $(i_*f)^{-1}(F_2)$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X , also ist auch $B := A \cup (i_*f)^{-1}(F_1) \cup (i_*f)^{-1}(F_2)$ abgeschlossen in X . Nach Konstruktion ist die stetige Funktion $\psi \circ f : A \rightarrow [0, 1]$ auf $A \cap (i_*f)^{-1}(F_1)$ identisch Null und auf $A \cap (i_*f)^{-1}(F_2)$ identisch Eins. Damit können wir eine stetige Funktion $\tilde{\phi} : B \rightarrow [0, 1]$ durch $\tilde{\phi}|_A = \psi \circ f$, $\tilde{\phi}|_{(i_*f)^{-1}(F_1)} = 0$ und $\tilde{\phi}|_{(i_*f)^{-1}(F_2)} = 1$ definieren. Nach dem Fortsetzungssatz von Tietze finden wir eine stetige Funktion $\phi : X \rightarrow [0, 1]$ mit $\phi|_B = \tilde{\phi}$. Insbesondere impliziert das $\phi|_A = \psi \circ f$, also erhalten wir nach der universellen Eigenschaft des verklebten Raumes eine eindeutige stetige Funktion $(\phi, \psi) : X \cup_f Y \rightarrow [0, 1]$ und nach Konstruktion ist das eine Urysohn Funktion für F_1 und F_2 .

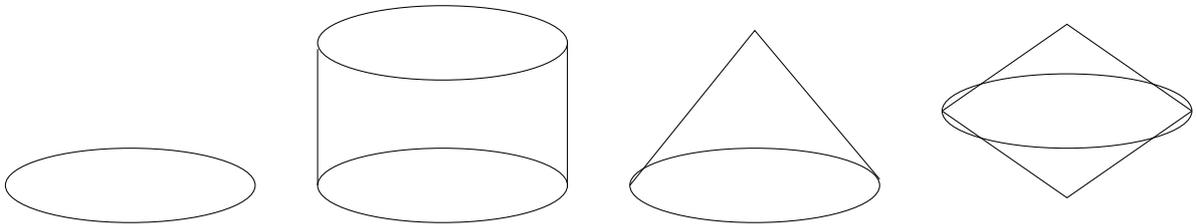
(2) Da X und Y normal sind, folgt aus Teil (1), dass $X \cup_f Y$ ein Hausdorffraum ist. Mit X und Y ist natürlich auch $X \sqcup Y$ kompakt, also ist $X \cup_f Y$ kompakt als stetiges Bild dieses kompakten Raumes. \square

1.8. Beispiele von Quotientenräumen. (1) Sei X ein topologischer Raum. Dann definieren wir den (*unreduzierten*) Kegel CX über X als $(X \times I)/(X \times \{1\})$. Ist X normal (kompakt) dann ist nach Proposition 1.7 CX normal (kompakt). Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ induziert via $f \times \text{id}_I$ eine stetige Abbildung $Cf : CX \rightarrow CY$, und das macht C zu einem Funktor. Die Identifikation $X \simeq X \times \{0\}$ liefert eine Einbettung $X \rightarrow CX$.

Insbesondere betrachten wir das Beispiel $X = S^n$. Die Abbildung $S^n \times I \rightarrow B^{n+1}$ die durch $(x, t) \mapsto (1 - t)x$ gegeben ist, induziert eine stetige Bijektion $CS^n \rightarrow B^{n+1}$. Da CS^n kompakt ist, ist das ein Homöomorphismus. Betrachtet man S^n wie oben als Teilraum von CS^n , dann erhält man sogar einen Homöomorphismus von Paaren $(CS^n, S^n) \simeq (B^{n+1}, S^n)$.

(2) Betrachte das Paar (CX, X) von oben. Nun definiere die (*unreduzierte*) *Suspension* ΣX von X als den Quotienten CX/X . Wie oben erhalten wir einen Funktor $X \mapsto \Sigma X, f \mapsto \Sigma f$. Via $x \mapsto (x, 1/2)$ sitzt X als Teilraum in ΣX .

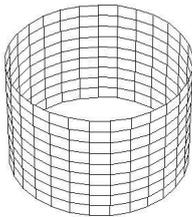
Sei nun wieder $X = S^n$. Betrachte S^n als Teilmenge von \mathbb{R}^{n+1} und identifiziere \mathbb{R}^{n+2} mit $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$. Die Abbildung $S^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$, die durch $(x, t) \mapsto (2\sqrt{t(1-t)} \cdot x, 2t-1)$ gegeben ist, faktorisiert zunächst über CS^n und dann über ΣS^n und induziert eine stetige Bijektion von ΣS^n nach S^{n+1} , und da ΣS^n kompakt ist, ist dies wieder ein Homöomorphismus. Im Fall der S^1 erhält man die folgenden Bilder für $S^1, S^1 \times I, CS^1$ und ΣS^1 :



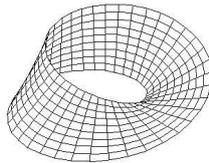
Nach der Beschreibung von CS^n in (1) haben wir damit auch $B^{n+1}/S^n \simeq S^{n+1}$ gezeigt.

(3) Quotienten des Einheitsquadrates I^2 bezüglich der folgenden Äquivalenzrelationen (hier sind nur die nichttrivialen Relationen angegeben):

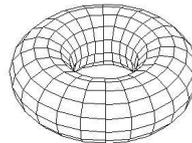
$$(0, y) \sim (1, y) \qquad (0, y) \sim (1, 1 - y) \qquad \begin{matrix} (0, y) \sim (1, y) \\ (x, 0) \sim (x, 1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (0, y) \sim (1, 1 - y) \\ (x, 0) \sim (x, 1) \end{matrix}$$



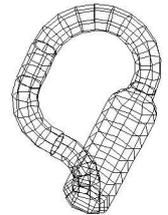
Zylinder



Möbiusband



Torus



Kleinsche
Flasche

Funktionsräume

1.9. Wir wollen für topologische Räume X und Y den Raum $C(X, Y)$ der stetigen Funktionen topologisieren. Sei $K \subset X$ kompakt und $U \subset Y$ offen. Definiere $\mathcal{U}_{K,U} \subset C(X, Y)$ als die Menge aller f , für die $f(K) \subset U$ ist. Die Topologie, die durch diese Subbasis von offenen Mengen erzeugt wird, heißt die *kompakt-offene* Topologie auf $C(X, Y)$. Ist Y metrisierbar, so entspricht die kompakt-offene Topologie auf $C(X, Y)$ genau der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta.

Man sieht sofort, dass für Hausdorffräume X und Y der Raum $C(X, Y)$ ebenfalls Hausdorff ist: Ist $f \neq g$ und $x \in X$ ein Punkt mit $f(x) \neq g(x)$, dann seien U und V disjunkte offene Umgebungen von $f(x)$ und $g(x)$ in Y . Dann sind $\mathcal{U}_{\{x\},U}$ und $\mathcal{U}_{\{x\},V}$ disjunkte offene Umgebungen von f und g .

Weiters ist offensichtlich, dass für jedes $x \in X$ die *Evaluation in x* , $\text{ev}_x(f) := f(x)$ eine stetige Abbildung $C(X, Y) \rightarrow Y$ definiert.

Ist $f : Y \rightarrow Z$ stetig, so ist für jedes $g : X \rightarrow Y$ die Abbildung $f_*(g) := f \circ g : X \rightarrow Z$ stetig. f induziert also eine Abbildung $f_* : C(X, Y) \rightarrow C(X, Z)$. Diese Abbildung ist wieder stetig, denn für $K \subset X$ kompakt und $U \subset Z$ offen ist $f_*^{-1}(\mathcal{U}_{K,U}) = \mathcal{U}_{K, f^{-1}(U)}$, und $f^{-1}(U)$ ist offen in Y .

Andererseits induziert eine stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ für jeden Raum Z eine Abbildung $f^* : C(Y, Z) \rightarrow C(X, Z)$, $f^*(g) := g \circ f$. Auch diese Abbildung ist stetig, denn für $K \subset X$ kompakt und $U \subset Z$ offen ist $f^{*-1}(\mathcal{U}_{K,U}) = \mathcal{U}_{f(K), U}$, und $f(K)$ ist kompakt in Y .

Als nächstes wollen wir Zusammenhänge zwischen Funktionenräumen und Produkträumen studieren. Sei zunächst $f : X \times Y \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung. Zu $x \in X$ betrachte die Abbildung $\check{f}(x) : Y \rightarrow Z$, die gegeben ist durch $\check{f}(x)(y) := f(x, y)$. Da die Funktion $y \mapsto (x, y)$ für fixes x stetig ist, ist $\check{f}(x) \in C(Y, Z)$. Sei nun $K \subset Y$ kompakt und $U \subset Z$ offen und $\mathcal{U}_{K,U}$ die entsprechende offene Teilmenge von $C(Y, Z)$. Ihr Urbild unter \check{f} besteht genau aus allen $x \in X$, für die $f(\{x\} \times K) \subset U$ gilt. Ist dies für ein $x \in X$ erfüllt, dann enthält die offene Menge $f^{-1}(U) \subset X \times Y$ die Menge $\{x\} \times K$, also gibt es eine offene Umgebung V von x , sodass $V \times K \subset f^{-1}(U)$. Das bedeutet aber gerade $V \subset \check{f}^{-1}(\mathcal{U}_{K,U})$, also ist $\check{f} : X \rightarrow C(Y, Z)$ stetig. Somit haben wir eine Abbildung $\check{\cdot} : C(X \times Y, Z) \rightarrow C(X, C(Y, Z))$ definiert. Diese Abbildung ist offensichtlich injektiv, und sie ist stetig, da das Urbild von $\mathcal{U}_{K, \mathcal{U}_{L,U}}$ gerade die offene Menge $\mathcal{U}_{K \times L, U}$ ist.

Es stellt sich nun die Frage, ob diese Abbildung bijektiv ist. Um dies zu entscheiden, müssen wir für $f \in C(X, C(Y, Z))$ die Abbildung $\hat{f} : X \times Y \rightarrow Z$ studieren, die durch $\hat{f}(x, y) := f(x)(y)$ definiert ist. Im allgemeinen ist \hat{f} leider nicht stetig, aber es gilt:

PROPOSITION. *Seien X, Y, Z Hausdorffräume, Y lokalkompakt. Dann ist für $f \in C(X, C(Y, Z))$ die Abbildung $\hat{f} : X \times Y \rightarrow Z$ stetig. Daher sind $\check{\cdot}$ und $\hat{\cdot}$ inverse Bijektionen zwischen den Räumen $C(X \times Y, Z)$ und $C(X, C(Y, Z))$.*

BEWEIS. Sei $U \subset Z$ offen und sei $(x, y) \in X \times Y$ ein Punkt mit $\hat{f}(x, y) \in U$. Da $f(x) : Y \rightarrow Z$ stetig und Y lokalkompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von y mit $f(x)(K) \subset U$. Da f stetig ist, findet man eine Umgebung V von x mit $f(V) \subset \mathcal{U}_{K,U}$, also $\hat{f}(V \times K) \subset U$, und $V \times K$ ist eine Umgebung von (x, y) . Daher ist \hat{f} wiederum stetig. \square

BEMERKUNG. (1) Schreibt man den Funktionenraum $C(X, Y)$ als Y^X , so sagt die Proposition gerade, dass es für lokalkompaktes Y eine Bijektion zwischen $(Z^Y)^X$ und $Z^{X \times Y}$ gibt. Deshalb bezeichnet man dieses Resultat oft als Exponentialgesetz.

(2) Die Proposition ist weder von den Voraussetzungen (Y lokalkompakt) noch von den Resultaten (es existiert eine Bijektion) sehr natürlich. Eine wesentlich allgemeinere (aber weniger gebräuchliche) Bedingung an Y , unter der das Exponentialgesetz noch immer gilt, ist, dass Y ein *kompakt erzeugter* Raum (Kelly-Raum) ist. Diese Bedingung besagt, dass eine Teilmenge $U \subset Y$, für die für jedes kompakte $K \subset Y$ die Menge $U \cap K$ offen in K ist, schon offen in Y sein muss.

Ist nicht nur Y sondern auch $X \times Y$ kompakt erzeugt, so zeigt man analog zum Beweis von Proposition 1.9, dass die Abbildung $\hat{\cdot} : C(X, C(Y, Z)) \rightarrow C(X \times Y, Z)$ stetig ist, und daher $\check{\cdot}$ und $\hat{\cdot}$ sogar inverse Homöomorphismen sind.

Eine typische Anwendung des Exponentialgesetzes ist folgendes Resultat:

KOROLLAR. *Sei R eine Äquivalenzrelation auf X und sei Y lokalkompakt. Sei $\pi : X \rightarrow X/R$ die kanonische Abbildung und sei Z ein beliebiger Raum. Dann gilt: eine*

Funktion $f : (X/R) \times Y \rightarrow Z$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ (\pi \times \text{id}_Y) : X \times Y \rightarrow Z$ stetig ist.

BEWEIS. Nach dem Exponentialgesetz ist f genau dann stetig, wenn $\check{f} : X/R \rightarrow C(Y, Z)$ stetig ist. Nach Definition der Topologie auf X/R gilt dies genau dann, wenn $\check{f} \circ \pi : X \rightarrow C(Y, Z)$ stetig ist. Nachdem $\widehat{\check{f} \circ \pi} = f \circ (\pi \times \text{id}_Y)$ folgt das Resultat durch nochmalige Anwendung des Exponentialgesetzes. \square

1.10. Beispiele zu Funktionenräumen. (1) Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Der Pfadraum $\mathcal{P}X$ über X ist der Raum aller stetigen Pfade in X , die in x_0 beginnen, d.h. $\mathcal{P}X = \{c \in C(I, X) : c(0) = x_0\}$. Ist X Hausdorff, dann ist $\mathcal{P}X$ offensichtlich ein abgeschlossener Teilraum von $C(I, X)$. $\mathcal{P}X$ hat wieder einen natürlichen Basispunkt \tilde{x}_0 , den konstanten Pfad. Sind (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume und ist $f : X \rightarrow Y$ eine basispunkterhaltende stetige Abbildung, so induziert $f_* : C(I, X) \rightarrow C(I, Y)$ eine basispunkterhaltende stetige Funktion $\mathcal{P}f : \mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}Y$, und \mathcal{P} definiert einen kovarianten Funktor von $\underline{\text{Top}}_0$ auf sich selbst.

Ordnet man jedem Pfad seinen Endpunkt zu $p_X(c) := c(1)$, so definiert das eine basispunkterhaltende stetige Abbildung $p_X : \mathcal{P}X \rightarrow X$.

(2) Sei $p_X : \mathcal{P}X \rightarrow X$ die stetige Abbildung von oben. Der abgeschlossene Teilraum $\Omega X := p_X^{-1}(x_0) \subset \mathcal{P}X$ heißt der *Schleifenraum* von X . Er besteht genau aus den stetigen Pfaden $c : I \rightarrow X$ für die $c(0) = c(1) = x_0$ gilt. Betrachtet man nun S^1 als $I/\{0, 1\}$ wie in Beispiel (2) von 1.8 mit $\{[0, 1]\}$ als Basispunkt, dann sieht man, dass ΩX genau die Menge der basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen $S^1 \rightarrow X$ ist. Analog wie für \mathcal{P} zeigt man, dass Ω einen Funktor von $\underline{\text{Top}}_0$ auf sich selbst definiert.

Elementare Homotopietheorie

In diesem Kapitel werden wir die grundlegenden Begriffe der Homotopietheorie definieren und untersuchen. Die zentrale Idee dabei ist, dass man stetige Deformationen von stetigen Abbildungen betrachtet und Abbildungen identifiziert, die durch stetige Deformationen ineinander übergeführt werden können. Motivation dafür ist einerseits, dass sich diskrete Invarianten (z.B. ganze Zahlen) von Funktionen bei stetigen Deformationen nicht ändern sollten. Andererseits kann man so etwas über die Topologie von Räumen erfahren, wie das folgende Beispiel zeigt:

2.1. Beispiel. Wir wollen eine Idee entwickeln, wie man beweisen könnte, dass für $m \neq n$ die Räume \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n nicht homöomorph sein können. Im Fall $m = 1$ ist das sehr einfach: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, dann schränken wir f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein und erhalten einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$. Nun ist aber für $n \geq 2$ der Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ offensichtlich bogenzusammenhängend, während $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei Bogenkomponenten hat, also muss $n = 1$ sein.

Sucht man ein analoges Argument für $m = 2$, so könnte man zunächst versuchen, einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf den Teilraum $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$ einzuschränken, der wieder zwei Bogenkomponenten hat. Dann müsste man aber beweisen, dass $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R})$ bogenzusammenhängend ist, und dazu müsste man zunächst verstehen, wie homöomorphe Bilder von \mathbb{R} in \mathbb{R}^n aussehen, was (vorsichtig ausgedrückt) ziemlich schwierig ist.

Schränken wir also wieder f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein. Dann erhalten wir einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$. Diese Räume sind nun aber beide bogenzusammenhängend, und wir müssen einen anderen Weg finden, wie wir sie unterscheiden könnten.

Nun kann man aber das Argument für $m = 1$ etwas uminterpretieren. Eine stetige Kurve $c : [0, 1] \rightarrow X$ in einem topologischen Raum X kann man als stetige Deformation von der Funktion $c(0)$ in die Funktion $c(1)$ vom einpunktigen Raum pt nach X betrachten. Wir argumentieren also so, dass es zwei Funktionen $pt \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, die nicht stetig ineinander deformiert werden können, während in $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ je zwei solch Abbildungen ineinander deformiert werden können.

Um nun $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ zu unterscheiden, bietet es sich an, ein analoges Argument mit S^1 statt pt zu versuchen, da man das "Loch" in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gut mit einer S^1 "einfangen" kann. Man müsste dazu also zeigen, dass zwei stetige Funktionen $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, von denen eine um den Nullpunkt herum geht und die andere nicht, nicht ineinander deformiert werden können, während für $n > 2$ je zwei Funktionen von S^1 nach $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ ineinander deformiert werden können, und wir werden sehen, dass dies relativ einfach möglich ist.

Für $m = 3$ kann man dann ein analoges Argument mit S^2 benutzen und so weiter.

Homotopie und Homotopieäquivalenz

2.2. Homotopie. Die anschauliche Idee der Deformation von stetigen Abbildungen fasst man exakt im Begriff der Homotopie:

DEFINITION. (1) Seien X und Y topologische Räume, $f, g : X \rightarrow Y$ stetige Funktionen. Man sagt f ist *homotop* zu g und schreibt $f \sim g$, falls es eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow Y$ gibt, sodass $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ ist. Die Funktion H heißt dann eine *Homotopie* zwischen f und g .

(2) Seien (X, A) und (Y, B) topologische Paare und $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ stetige Abbildungen. Dann heißen f und g *homotop als Abbildungen von Paaren*, falls es eine Homotopie H zwischen f und g gibt, sodass $H(a, t) \in B$ für alle $a \in A$ und $t \in I$ gilt.

(3) Sind (X, A) und (Y, B) topologische Paare und $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ stetig mit $f|_A = g|_A$, dann heißen f und g *homotop relativ zu A* , $f \sim g \text{ rel } A$, falls es eine Homotopie H zwischen f und g gibt, sodass $H(a, t) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$ und $t \in I$ gilt.

(4) Sind (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume, $f, g : X \rightarrow Y$ basispunkterhaltende Abbildungen, dann schreibt man $f \sim_0 g$ für $f \sim g \text{ rel } \{x_0\}$, und sagt f und g sind *punkterhaltend homotop*.

Jeder dieser Homotopiebegriffe ist eine Äquivalenzrelation: Für jedes f erhält man eine Homotopie von f nach f durch $H(x, t) = f(x)$. Ist H eine Homotopie von f nach g , dann ist $(x, t) \mapsto H(x, 1 - t)$ eine Homotopie von g nach f , und ist zusätzlich H_1 eine Homotopie von g nach h , dann erhält man eine Homotopie von f nach h durch

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ H_1(x, 2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Die Äquivalenzklasse einer Funktion f heißt die *Homotopieklasse von f* und wird mit $[f]$ bezeichnet. Für Räume X und Y wird die Menge der Homotopieklassen von stetigen Funktionen von X nach Y mit $[X, Y]$ bezeichnet, für Paare (X, A) und (Y, B) mit $[(X, A), (Y, B)]$ und für punktierte Räume (X, x_0) und (Y, y_0) bezeichnet $[X, Y]_0$ die punkterhaltenden Homotopieklassen von punkterhaltenden Abbildungen.

Eine stetige Funktion heißt *nullhomotop*, wenn sie homotop zu einer konstanten Abbildung (die ganz X auf einen fixen Punkt von Y abbildet) ist. Ist Y bogenzusammenhängend (was wir meist voraussetzen werden), so sind je zwei nullhomotope Funktionen nach Y homotop (ein Pfad zwischen den entsprechenden Punkten ist gerade eine Homotopie zwischen den konstanten Abbildungen). Die Homotopieklasse der nullhomotopen Abbildungen wird dann mit $0 \in [X, Y]$ bezeichnet. Im Falle der punkterhaltenden Homotopieklassen hat man immer den kanonischen Punkt $0 \in [X, Y]_0$.

PROPOSITION. *Homotopie ist verträglich mit Kompositionen, d.h. sind $f, \tilde{f} : X \rightarrow Y$ und $g, \tilde{g} : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen, sodass f homotop zu \tilde{f} und g homotop zu \tilde{g} ist, dann ist $g \circ f$ homotop zu $\tilde{g} \circ \tilde{f}$.*

BEWEIS. Ist $H_1 : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach \tilde{f} und $H_2 : Y \times I \rightarrow Z$ eine Homotopie von g nach \tilde{g} , dann ist $(x, t) \mapsto H_2(H_1(x, t), t)$ eine Homotopie zwischen $g \circ f$ und $\tilde{g} \circ \tilde{f}$. \square

Dieses einfache Resultat hat eine Reihe bedeutender Konsequenzen: Setzt man zunächst $\tilde{g} = g$, so sieht man, dass für eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow Z$ die Funktion $g_* : [X, Y] \rightarrow [X, Z]$, die gegeben ist als $[f] \mapsto [g \circ f]$, wohldefiniert ist. Man sieht sofort, dass $Y \mapsto [X, Y]$, $g \mapsto g_*$ ein kovarianter Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Mengen ist. Dieser Funktor wird mit $[X, _]$ bezeichnet. Analog erhält man kovariante Funktoren $[X, _]_0$ von punktierten topologischen Räumen in punktierte Mengen (also Mengen mit einem ausgezeichneten Element) und $[(X, A), _]$ von topologischen Paaren in Mengen.

Betrachtet man nun wieder das allgemeine Resultat (mit $\tilde{g} \neq g$), dann sagt es gerade, dass für homotope Abbildungen $g, \tilde{g} : Y \rightarrow Z$ und fixes $f : X \rightarrow Y$ $[g \circ f] = [\tilde{g} \circ f]$, also dass $g_* = \tilde{g}_* : [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ gilt. Der Funktor $[X, _]$ ist also mit Homotopien verträglich.

Ganz analog sieht man, dass eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ via $[g] \mapsto [g \circ f]$ eine Funktion $f^* : [Y, Z] \rightarrow [X, Z]$ induziert, und man erhält einen kontravarianten Funktor $[_, Z]$, der wiederum mit Homotopien verträglich ist. Analog geht dies wieder für punktierte Räume und Paare.

Für Freunde des Abstrakten kann man schließlich noch folgende Konsequenz aus der Proposition ziehen: Man kann eine Komposition $\circ : [Y, Z] \times [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ durch $[g] \circ [f] := [g \circ f]$ definieren. Diese ist klarerweise assoziativ, und man erhält die *Homotopiekategorie*, die als Objekte topologische Räume und als Morphismen Homotopieklassen von stetigen Funktionen hat. Die Verträglichkeit der Funktoren $[X, _]$ und $[_, Z]$ von oben mit Homotopien sagt, dass diese Funktoren wohldefiniert sind als Funktoren von der Homotopiekategorie in die Kategorie der Mengen. Im weitesten Sinne kann man algebraische Topologie als das Studium von Funktoren betrachten, die auf der Homotopiekategorie definiert sind.

BEISPIEL. (1) Sei pt der einpunktige Raum. Dann ist für jeden Raum X die Menge $[pt, X]$ gerade die Menge der Bogenkomponenten von X .

(2) Ist X ein beliebiger topologischer Raum, so ist jede Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ nullhomotop via $H(x, t) := (1 - t)f(x)$. Analog ist jede Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ nullhomotop via $H(x, t) := f((1 - t)x)$.

(3) Sei wiederum X ein beliebiger Raum und sei $f : X \rightarrow S^n$ stetig aber nicht surjektiv. Sei $y_0 \in S^n$ ein Punkt, der nicht im Bild von f liegt. Für jedes $x \in X$ geht die Verbindungsstrecke zwischen $f(x)$ und $-y_0$ nicht durch 0, sonst wäre $f(x) = y_0$. Daher definiert $H(x, t) := \frac{1}{|(1-t)f(x)-ty_0|}((1-t)f(x) - ty_0)$ eine stetige Homotopie zwischen f und der konstanten Abbildung nach $-y_0$. Also ist jede nicht surjektive Abbildung nach S^n nullhomotop.

(4) Sei X wieder beliebig und seien $f, g : X \rightarrow S^n$ so, dass $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$. Dann sind f und g homotop via $H(x, t) = \frac{1}{|(1-t)f(x)+tg(x)|}((1-t)f(x) + tg(x))$.

2.3. Homotopieäquivalenz. Im Beispiel (2) von 2.2 haben wir auf “universelle Weise” gezeigt, dass jede Funktion von oder nach \mathbb{R}^n nullhomotop ist. Was wir dafür benutzt haben war gerade, dass $H(x, t) := (1 - t)x$ eine Homotopie zwischen der Identität und der konstanten Abbildung auf $0 \in \mathbb{R}^n$ definiert, d.h. dass die Identität auf \mathbb{R}^n nullhomotop ist.

Allgemein nennt man einen Raum, dessen Identitätsabbildung nullhomotop ist, *kontrahierbar*.

Nun sieht man sofort, dass jede Funktion in einen kontrahierbaren Raum nullhomotop ist: Ist X kontrahierbar und $f : Y \rightarrow X$ beliebig dann ist $f = \text{id}_X \circ f$ homotop zu $x_0 \circ f$ wo x_0 eine geeignete konstante Abbildung ist, also ist f nullhomotop. Ganz analog ist für beliebiges Y jede Funktion $f : X \rightarrow Y$ homotop zur konstanten Funktion $f(x_0)$. Kontrahierbare Räume sind also homotopietheoretisch nicht vom einpunktigen Raum zu unterscheiden.

Wir wollen nun die Definition der Kontrahierbarkeit etwas uminterpretieren: Sei X ein Raum, sodass die Identität homotop zur konstanten Abbildung x_0 ist, und sei pt der einpunktige Raum. Sei $x_0 : pt \rightarrow X$ die Einbettung des Punktes x_0 und $p : X \rightarrow pt$ die kanonische Abbildung. Dann ist natürlich $p \circ x_0 = \text{id}_{pt}$, und nach Voraussetzung ist die

Abbildung $x_0 \circ p$ homotop zur Identität auf X . Das heißt also, wir haben Funktionen gefunden, die bis auf Homotopie zueinander invers sind. Das motiviert folgende

DEFINITION. Seien X und Y topologische Räume. Eine stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt eine *Homotopieäquivalenz*, falls es eine stetige Funktion $g : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $g \circ f \sim \text{id}_X$ und $f \circ g \sim \text{id}_Y$ ist. g heißt dann eine *Homotopie-Inverse* zu f .

Die Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, falls es eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen gibt. In diesem Fall sagt man auch: X und Y haben den selben *Homotopietyp*.

BEISPIEL. (1) Homöomorphe Räume sind homotopieäquivalent.

(2) Für jedes $n > 0$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ homotopieäquivalent zu S^{n-1} durch die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{|x|}$.

(3) Für jeden Raum X ist der Kegel CX über X aus Beispiel (1) von 1.8 kontrahierbar. Ebenso ist für jeden punktierten Raum (X, x_0) der Pfadraum $\mathcal{P}X$ aus 1.10 (1) kontrahierbar (siehe Proseminar).

Das folgende Resultat zeigt nicht nur, dass homotopieäquivalente Räume für die Homotopietheorie ununterscheidbar sind, sondern auch, dass dies genau der richtige Äquivalenzbegriff ist:

SATZ. Für eine stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ sind äquivalent

- (1) f ist eine Homotopieäquivalenz
- (2) für jeden Raum Z ist $f_* : [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$ bijektiv
- (3) für jeden Raum Z ist $f^* : [Y, Z] \rightarrow [X, Z]$ bijektiv

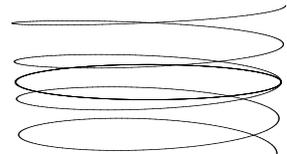
BEWEIS. Wir zeigen die Äquivalenz von (1) und (2), die Äquivalenz von (1) und (3) zeigt man analog. Sei also zunächst f eine Homotopieäquivalenz, dann gibt es nach Definition eine Homotopieinverse $g : Y \rightarrow X$, und wir betrachten $g_* : [Z, Y] \rightarrow [Z, X]$. Nach Definition ist $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$, und wegen $g \circ f \sim \text{id}_X$ wissen wir von oben, dass dies gleich $(\text{id}_X)_* = \text{id}$ ist. Analog ist $f_* \circ g_*$ die Identität.

Sei andererseits $f_* : [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$ für jedes Z bijektiv. Dann gibt es insbesondere (für $Z = Y$) eine Homotopieklasse $[g] \in [Y, X]$, mit $f_*([g]) = [\text{id}_Y]$. Sei $g : Y \rightarrow X$ eine Funktion in dieser Homotopieklasse. Dann ist $f_*[g] = [f \circ g] = [\text{id}_Y]$, also $f \circ g \sim \text{id}_Y$. Betrachte nun $g \circ f : X \rightarrow X$. Von oben sehen wir, dass $f \circ g \circ f \sim \text{id}_Y \circ f = f \circ \text{id}_X$ gilt. Das bedeutet gerade, dass für $f_* : [X, X] \rightarrow [X, Y]$ die Gleichung $f_*[g \circ f] = f_*[\text{id}_X]$ gilt. Da f_* injektiv ist folgt $[g \circ f] = [\text{id}_X]$, also $g \circ f \sim \text{id}_X$. \square

Ein nichttriviales Beispiel

2.4. Wir wollen $[S^1, S^1]$ und $[S^1, S^1]_0$ berechnen. Zunächst können wir nach 1.8(2) S^1 als $I/\{0, 1\}$ betrachten, und somit stetige Funktionen $S^1 \rightarrow S^1$ mit stetigen Funktionen $f : I \rightarrow S^1$ identifizieren, für die $f(0) = f(1)$ gilt.

Weiters können wir S^1 als die Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1 betrachten und eine stetige Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ durch $p(t) = e^{2\pi it}$ definieren. Man beachte, dass p sogar ein Gruppenhomomorphismus ist, also $p(t + s) = p(t)p(s)$ (Multiplikation von komplexen Zahlen) gilt. Geometrisch sieht die Abbildung p wie folgt aus:



Der entscheidende Schritt zur Berechnung der Homotopieklassen ist nun das folgende

LEMMA (Liftungslemma). Sei $f : I \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung. Dann existiert eine eindeutige stetige Funktion $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi(0) = 0$, sodass $f(t) = f(0) \cdot p(\phi(t))$ gilt.

BEWEIS. Sei $\arg : S^1 \setminus \{-1\} \rightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ die Argumentabbildung, die eindeutig gegeben ist durch $e^{2\pi i \arg(x)} = x$ für $x \neq -1$. (Man mache sich diese Abbildung am obigen Bild der Abbildung p geometrisch klar.) Da $f : I \rightarrow S^1$ stetig und I kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig, also gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $|f(t) - f(t')| < 2$, also $f(t') \neq -f(t)$, für alle t, t' mit $|t - t'| < \epsilon$ gilt. Insbesondere ist dann $\arg(\frac{f(t)}{f(t')})$ wohldefiniert.

Nun wähle eine natürliche Zahl N mit $1/N < \epsilon$ und definiere für t zwischen k/N und $(k+1)/N$

$$\phi(t) := \arg\left(\frac{f(t)}{f(k/N)}\right) + \arg\left(\frac{f(k/N)}{f((k-1)/N)}\right) + \cdots + \arg\left(\frac{f(1/N)}{f(0)}\right).$$

Klarerweise ist ϕ wohldefiniert und stetig und $\phi(0) = \arg(1) = 0$. Außerdem gilt

$$p(\phi(t)) = \frac{f(t)}{f(k/N)} \cdot \frac{f(k/N)}{f((k-1)/N)} \cdots \frac{f(1/N)}{f(0)},$$

also $f(t) = f(0) \cdot p(\phi(t))$.

Die Eindeutigkeit folgt sofort aus $p(\phi(t) - \psi(t)) = 1$, also $\phi(t) - \psi(t) \in \mathbb{Z}$ und $\phi(0) = \psi(0) = 0$, da ϕ und ψ stetig sind und I zusammenhängend ist. \square

Sei nun $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Funktion, die wir als Funktion $f : I \rightarrow S^1$ mit $f(0) = f(1)$ betrachten. Ist ϕ die im Liftungslemma konstruierte stetige Funktion, dann ist somit $p(\phi(1)) = 1$, also $\phi(1) \in \mathbb{Z}$. Diese ganze Zahl heißt der *Abbildungsgrad* von f und wird mit $\deg(f)$ bezeichnet. Man bemerke, dass für $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $z \mapsto z^n$ als Abbildung $I \rightarrow S^1$ gerade durch $t \mapsto e^{2\pi i n t}$ gegeben ist, also Abbildungsgrad n hat. Daher gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine Abbildung mit Abbildungsgrad n .

SATZ. $f \mapsto \deg(f)$ induziert Bijektionen $[S^1, S^1] \cong \mathbb{Z}$ und $[S^1, S^1]_0 \cong \mathbb{Z}$.

BEWEIS. Seien zunächst $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ stetig mit $\deg(f) = \deg(g)$ und seien $\phi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ die entsprechenden Lifts. Dann gilt nach Voraussetzung $\phi(1) = \psi(1)$. Nun betrachte $H : I \times I \rightarrow S^1$, $H(s, t) := p((1-t)\phi(s) + t\psi(s))$. Nach Konstruktion ist $H(0, t) = H(1, t) = 1$ für alle t , also induziert H eine Funktion von $S^1 \times I$ nach S^1 , und nach Korollar 1.9 ist diese stetig.

Sind f und g basispunkterhaltend, also insbesondere $f(t) = p(\phi(t))$ und $g(t) = p(\psi(t))$, dann ist H eine basispunkterhaltende Homotopie zwischen f und g . Im allgemeinen Fall gibt H eine Homotopie zwischen $f(0)^{-1}f$ und $g(0)^{-1}g$, also ist f homotop zu $f(0)g(0)^{-1}g$, und diese Abbildung ist homotop zu g (zurückdrehen).

Es bleibt also zu zeigen, dass homotope Abbildungen den gleichen Abbildungsgrad haben. Sei also $H : S^1 \times I \rightarrow S^1$ stetig. Wir können H als stetige Funktion $I \times I \rightarrow S^1$ mit $H(0, t) = H(1, t)$ für alle $t \in I$ betrachten. Nach dem Liftungslemma erhalten wir für jedes $t \in I$ eine eindeutige stetige Funktion $\phi_t : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi_t(0) = 0$, sodass $H(s, t) = H(0, t)p(\phi_t(s))$. Wir wollen nun zeigen, dass die Abbildung $\Phi : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist als $\Phi(s, t) := \phi_t(s)$, stetig ist.

Dazu bemerken wir zunächst, dass $H : I \times I \rightarrow S^1$ gleichmäßig stetig ist, also gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $|H(s', t') - H(s, t)| < 2$ gilt und daher $\arg(\frac{H(s', t')}{H(s, t)})$ wohldefiniert ist, falls $|(s' - s, t' - t)| < \epsilon$. Nun fixiere ein $t_0 \in I$ und wähle ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $N\epsilon > 2$, und betrachte auf $I \times (t_0 - \epsilon/4, t_0 + \epsilon/4)$ die Abbildung, die für $k/N \leq s \leq (k+1)/N$ gegeben ist durch

$$(s, t) \mapsto \arg\left(\frac{H(s, t)}{H(k/N, t)}\right) + \arg\left(\frac{H(k/N, t)}{H((k-1)/N, t)}\right) + \cdots + \arg\left(\frac{H(1/N, t)}{H(0, t)}\right).$$

Diese Abbildung ist auf dem angegebenen Intervall offensichtlich wohldefiniert und stetig, und nach der Eindeutigkeit der Funktionen ϕ_t stimmt sie mit Φ überein, also ist Φ stetig.

Nun ist aber nach Konstruktion $\Phi(0, t) = 0$, und da $H(0, t) = H(1, t)$ für alle $t \in I$ gilt, ist $\Phi(1, t) \in \mathbb{Z}$ für alle $t \in I$. Somit muss $\Phi(1, 0) = \Phi(1, 1)$ gelten, was nach Definition gerade bedeutet, dass $s \mapsto H(s, 0)$ und $s \mapsto H(s, 1)$ den gleichen Abbildungsgrad haben. \square

KOROLLAR 2.5. (1) Die Identitätsabbildung id_{S^1} ist nicht nullhomotop.
 (2) S^1 ist kein Retrakt von B^2 , das heißt, es gibt keine stetige Funktion $r : B^2 \rightarrow S^1$, sodass $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$.
 (3) (Brouwer'scher Fixpunktsatz für B^2) Jede stetige Abbildung $f : B^2 \rightarrow B^2$ hat mindestens einen Fixpunkt.

BEWEIS. (1) Jede konstante Abbildung hat klarerweise Abbildungsgrad 0, während die Identität Abbildungsgrad 1 hat.

(2) Da B^2 offensichtlich kontrahierbar ist, ist jede stetige Funktion $S^1 \rightarrow B^2$ nullhomotop, insbesondere auch die Inklusion $i : S^1 \rightarrow B^2$. Daher ist für jedes stetige $r : B^2 \rightarrow S^1$ die Komposition $r \circ i : S^1 \rightarrow S^1$ nullhomotop, kann also nach (1) nicht die Identität sein.

(3) Ist $f : B^2 \rightarrow B^2$ eine stetige Abbildung mit $f(x) \neq x$ für alle $x \in B^2$, so konstruiert man eine stetige Funktion $r : B^2 \rightarrow S^1$, indem man den Halbstrahl von $f(x)$ durch x mit S^1 schneidet. Man verifiziert leicht direkt, dass dies eine stetige Funktion $r : B^2 \rightarrow S^1$ definiert (siehe Proseminar). Nach Konstruktion ist r eine Retraktion im Widerspruch zu (2). \square

KOROLLAR 2.6 (Satz von Borsuk–Ulam). Sei $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig. Dann existiert mindestens ein Punkt $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$. Insbesondere gibt es keine stetige injektive Funktion von S^2 nach \mathbb{R}^2 .

BEWEIS. Angenommen $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine stetige Funktion mit $f(-x) \neq f(x)$ für alle $x \in S^2$. Dann definiert $f_1(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$ eine stetige Funktion $S^2 \rightarrow S^1$ mit $f_1(-x) = -f_1(x)$. Identifiziert man die obere Hemisphäre von S^2 mit B^2 , so erhält man dadurch eine stetige Funktion $f_2 : B^2 \rightarrow S^1$. (Explizit ist $f_2(x_1, x_2) := f_1(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$.) Nun sei $g : S^1 \rightarrow S^1$ die Einschränkung von f_2 auf S^1 . Offensichtlich ist g nullhomotop via $H(x, t) = f_2((1 - t)x)$, also ist $\text{deg}(g) = 0$.

Andererseits folgt aus $f_1(-x) = -f_1(x)$ auch $g(-z) = -g(z)$ für alle $z \in S^1$. Betrachten wir nun g als Abbildung von $I \rightarrow S^1$, und sei $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutige Abbildung mit $g(t) = g(0)p(\phi(t))$. In diesem Bild übersetzt sich die Bedingung $g(-z) = -g(z)$ in $g(t + 1/2) = -g(t)$ für alle $t \leq 1/2$. Daher gilt $p(\phi(t + 1/2)) = -p(\phi(t)) = p(\phi(t) + 1/2)$ für alle $t \leq 1/2$, also $\phi(t + 1/2) = \phi(t) + 1/2 + k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Für $t = 0$ sagt diese Gleichung $\phi(1/2) = 1/2 + k$, und daher ist für $t = 1$ $\text{deg}(g) = \phi(1) = 1 + 2k \neq 0$, ein Widerspruch. \square

2.7. Die Berechnung von $[S^1, S^1]$ liefert interessanterweise auch einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra:

SATZ. Sei $f(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ ein komplexes Polynom vom Grad $n > 0$. Dann gibt es mindestens ein $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$.

BEWEIS. Angenommen f ist so ein Polynom ohne Nullstelle. Setze $s := |a_0| + \dots + |a_{n-1}| + 1 \in \mathbb{R}$ und betrachte die Abbildung $\phi : S^1 \rightarrow S^1$, die gegeben ist durch $\phi(z) := \frac{f(sz)}{|f(sz)|}$. Da f ganz \mathbb{C} auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abbildet, ist ϕ nullhomotop via $(z, t) \mapsto \frac{f(tsz)}{|f(tsz)|}$.

Andererseits gilt für $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} |f(sz) - s^n z^n| &\leq |a_0| + s|a_1| + \dots + s^{n-1}|a_{n-1}| \\ &\leq s^{n-1}(|a_0| + \dots + |a_{n-1}|) < s^n = |s^n z^n| \end{aligned}$$

Daher liegt $f(sz)$ im offenen Ball vom Radius $s^n = |s^n z^n|$ um $s^n z^n$. Also ist für $H(z, t) := (1-t)f(sz) + ts^n z^n$ immer $H(z, t) \neq 0$, und damit gibt $(z, t) \mapsto \frac{H(z, t)}{|H(z, t)|}$ eine Homotopie zwischen ϕ und $z \mapsto z^n$, ein Widerspruch zu ϕ nullhomotop. \square

2.8. Wir wollen nun noch zeigen, wie die algebraischen Operationen auf \mathbb{Z} in Termen von Operationen mit Homotopieklassen stetiger Funktionen $S^1 \rightarrow S^1$ interpretiert werden können. Zunächst ist S^1 eine kommutative topologische Gruppe, also kann man für zwei Funktionen $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ das punktweise Produkt $fg : S^1 \rightarrow S^1$ betrachten.

Seien andererseits $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ punkterhaltend, also $f(1) = g(1) = 1$, dann kann man f und g als Abbildungen $I \rightarrow S^1$ betrachten, die 0 und 1 auf 1 abbilden. Nun definiere $f * g : S^1 \rightarrow S^1$ als Abbildung auf I durch

$$(f * g)(t) := \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

PROPOSITION. Für stetige Abbildungen $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ gilt:

- (1) $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.
- (2) Sind f und g punkterhaltend, so ist $\deg(f * g) = \deg(f) + \deg(g)$.
- (3) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

BEWEIS. Sei $\deg(f) = n$ und $\deg(g) = m$, dann ist $f \sim z^n$ und $g \sim z^m$. Durch punktweises Multiplizieren der Homotopien erhält man eine Homotopie von fg nach $z^n z^m = z^{m+n}$ also gilt (1). Andererseits ist $f \circ g \sim (z^m)^n = z^{mn}$, also folgt (3).

Für (2) benutzen wir direkt die Definition des Abbildungsgrades: Wir betrachten f und g als Abbildungen von I nach S^1 , dann erhalten wir nach dem Liftungslemma $\phi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi(0) = \psi(0) = 0$, sodass $f(t) = p(\phi(t))$ und $g(t) = p(\psi(t))$, wobei $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die Abbildung $x \mapsto e^{2\pi i x}$ bezeichnet. Nun definiere $\phi * \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(\phi * \psi)(t) = \begin{cases} \phi(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \phi(1) + \psi(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Offensichtlich ist das eine stetige Funktion mit $(\phi * \psi)(0) = 0$ und $p((\phi * \psi)(t)) = (f * g)(t)$, also ist $\deg(f * g) = (\phi * \psi)(1) = \phi(1) + \psi(1) = \deg(f) + \deg(g)$. \square

Wir sehen also, dass das punktweise Produkt eine Gruppenstruktur auf $[S^1, S^1]$ (und auf $[S^1, S^1]_0$) induziert. Teil (3) kann man so interpretieren, dass für jedes stetige $g : S^1 \rightarrow S^1$ die Abbildung g^* ein Gruppenhomomorphismus ist.

Andererseits induziert die Operation $*$ eine Gruppenstruktur auf $[S^1, S^1]_0$, und nach (3) ist für jedes stetige $f : S^1 \rightarrow S^1$ die Funktion $f_* : [S^1, S^1]_0 \rightarrow [S^1, S^1]_0$ ein Gruppenhomomorphismus.

Natürliche Gruppenstrukturen auf Mengen von Homotopieklassen

Kann man $[X, Y]$ in natürlicher Weise zu einer Gruppe machen, so liefert das eine Menge zusätzlicher Information. "In natürlicher Weise" bedeutet hier, dass stetige Funktionen auch Gruppenhomomorphismen induzieren. Wir wollen dies nun allgemein studieren, wobei wir uns auf den Fall von punkterhaltenden Homotopieklassen einschränken.

Im Beispiel von S^1 haben wir zwei Mechanismen gesehen, wie man so eine Gruppenstruktur erhalten kann, wobei die Methode des punktweisen Produkts verwendet hat, dass der Zielraum eine Gruppenstruktur trägt, während die Methode mit der Operation $*$ benutzt hat, dass die Funktionen auf $S^1 = I/\{0, 1\}$ definiert waren.

2.9. Die Methode des punktweisen Produkts verallgemeinert sich leicht: Sei (G, μ, ν) eine topologische Gruppe, also ein topologischer Raum mit einer assoziativen Multiplikation μ und einer Inversion ν die stetig als Funktionen $G \times G \rightarrow G$ bzw. $G \rightarrow G$ sind. Als Basispunkt für G verwenden wir das neutrale Element e . Für einen beliebigen punktierten Raum (X, x_0) kann man stetige Funktionen $f, g : (X, x_0) \rightarrow (G, e)$ punktweise multiplizieren und erhält eine stetige Funktion $fg : (X, x_0) \rightarrow (G, e)$. Nachdem man auch Homotopien punktweise multiplizieren kann, erhalten wir eine wohldefinierte, assoziative Multiplikation auf der Menge $[X, G]_0$. Analog kann man zu einer stetigen Funktion $f : X \rightarrow G$ punktweise die inversen Elemente in G bilden, und $\tilde{f}(x) := f(x)^{-1}$ ist wieder stetig und punkterhaltend. Nachdem man auch zu Homotopien punktweise die inversen Elemente bilden kann, ist diese Operation auf Homotopieklassen wohldefiniert. Offensichtlich macht das $[X, G]_0$ zu einer Gruppe.

Für einen weiteren punktierten Raum (Y, y_0) und stetige Funktion $\phi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ und $f, g : Y \rightarrow G$ ist $(fg) \circ \phi$ natürlich das punktweise Produkt von $f \circ \phi$ und $g \circ \phi$ und $\tilde{f} \circ \phi$ ist die punktweise Inverse von $f \circ \phi$. Das bedeutet aber gerade, dass $\phi^* : [Y, G]_0 \rightarrow [X, G]_0$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Betrachtet man das etwas formaler, dann sieht man, dass es sich noch weit verallgemeinern lässt: Zu $f, g : (X, x_0) \rightarrow (G, e)$ erhalten wir die Funktion $(f, g) : X \rightarrow G \times G$ und $fg = \mu \circ (f, g)$. Die Funktion \tilde{f} kann man natürlich als $\nu \circ f$ schreiben. Somit ist $\tilde{f}f = \mu \circ (\nu \circ f, f) = \mu \circ (\nu, \text{id}) \circ f$ und analog ist $f\tilde{f} = \mu \circ (\text{id}, \nu) \circ f$. Die Tatsache, dass ν eine Inversion in der Gruppe G ist, kann man gerade dadurch ausdrücken, dass $\mu \circ (\nu, \text{id})$ und $\mu \circ (\text{id}, \nu)$ die konstante Funktion e sind. Ähnlich können wir für eine dritte Funktion $h : (X, x_0) \rightarrow (G, e)$ das Produkt $(fg)h$ als $\mu \circ (\mu \times \text{id}) \circ (f, g, h)$ und das Produkt $f(gh)$ als $\mu \circ (\text{id} \times \mu) \circ (f, g, h)$ schreiben. Die Tatsache, dass die Multiplikation auf G assoziativ ist, besagt aber gerade, dass $\mu \circ (\mu \times \text{id}) = \mu \circ (\text{id} \times \mu) : G \times G \times G \rightarrow G$.

Wenn wir nur eine Gruppenstruktur auf der Menge der Homotopieklassen benötigen, dann müssen diese Gleichungen nicht exakt, sondern nur bis auf Homotopie gelten. Das motiviert die folgende Definition:

DEFINITION. Ein *H-Raum* (Hopf-Raum) ist ein punktierter topologischer Raum (G, e) zusammen mit stetigen Abbildungen $\mu : (G \times G, (e, e)) \rightarrow (G, e)$ und $\nu : (G, e) \rightarrow (G, e)$, sodass

- (1) $\mu \circ (\mu \times \text{id}_G) \sim_0 \mu \circ (\text{id}_G \times \mu)$. (Homotopie-Assoziativität)
- (2) $\mu \circ (\text{id}_G, \nu) \sim_0 e$ und $\mu \circ (\nu, \text{id}_G) \sim_0 e$.
- (3) $\mu \circ (\text{id}_G, e) \sim_0 \text{id}_G$ und $\mu \circ (e, \text{id}_G) \sim_0 \text{id}_G$.

Klarerweise ist jede topologische Gruppe ein H-Raum. Das Konzept ist aber viel allgemeiner:

BEISPIEL. Sei (X, x_0) ein beliebiger punktierter Raum, $\Omega X = \Omega(X, x_0)$ der Schleifenraum zu X aus 1.10. Der natürliche Basispunkt e für diesen Raum ist die konstante Schleife \tilde{x}_0 . Definiere $\mu : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$ durch

$$\mu(f, g)(t) := \begin{cases} f(2t) & t \leq 1/2 \\ g(2t - 1) & t \geq 1/2 \end{cases}$$

Da $g(0) = f(1) = x_0$ gilt, definiert obige Formel offensichtlich eine stetige Funktion $\Omega X \times \Omega X \times I \rightarrow X$, also ist nach Proposition 1.9 μ stetig als Funktion nach $C(I, X)$. Klarerweise hat μ Werte im Teilraum ΩX und ist daher stetig als Abbildung dorthin. Weiters definiert man $\nu : \Omega X \rightarrow \Omega X$ durch $\nu(f)(t) := f(1 - t)$. Wie oben sieht man leicht, dass ν stetig ist.

Man verifiziert nun leicht direkt, dass $(\Omega X, \mu, \nu)$ ein H-Raum ist. Zeigen wir zum Beispiel, dass $\mu \circ (\text{id}, \nu)$ homotop zur Identität ist: Nach Definition ist $\mu(f, \nu(f))$ für $t \leq 1/2$ gegeben durch $f(2t)$ und für $t \geq 1/2$ durch $f(1 - (2t - 1)) = f(2(1 - t))$. Man läuft also den Pfad f zunächst hin und dann wieder zurück. Nun definiert man $H : \Omega X \times I \rightarrow \Omega X$ durch

$$H(f, s)(t) := \begin{cases} f(2t) & t \leq s/2 \\ f(s) & s/2 \leq t \leq 1 - s/2 \\ f(2(1 - t)) & t \geq 1 - s/2 \end{cases}$$

Wie oben sieht man, dass H tatsächlich eine stetige Funktion definiert. Für $s = 0$ ist $H(f, 0)$ der konstante Pfad $x_0 = f(0)$, und für $s = 1$ ist $H(f, 1) = \mu(f, \nu(f))$. Da $H(f, s)(0) = f(0)$ und $H(f, s)(1) = f(1)$ gilt, gibt H die gesuchte Homotopie.

In den anderen Identitäten unterscheiden sich die beiden Seiten jeweils nur durch eine Reparametrisierung, das heißt, es wird jeweils der gleiche Pfad mit verschiedenen ‘‘Geschwindigkeiten’’ durchlaufen, und dies kann jeweils leicht durch eine Homotopie ausgedrückt werden.

PROPOSITION. *Ist (G, μ, ν, e) ein H-Raum dann ist $[X, G]_0$ für jeden punktierten Raum (X, x_0) eine Gruppe und für jede stetige Funktion $\phi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist $\phi^* : [Y, G]_0 \rightarrow [X, G]_0$ ein Gruppenhomomorphismus. Insbesondere sind für homotopieäquivalente Räume die entsprechenden Gruppen isomorph.*

BEWEIS. Für einen punktierten Raum (X, x_0) definieren wir eine Multiplikation auf $[X, G]$ durch $[f] \cdot [g] := [\mu \circ (f, g)]$, ein neutrales Element als die Homotopieklasse der konstanten Abbildung e und eine Inversion durch $[f]^{-1} := [\nu \circ f]$. Dies ist offensichtlich wohldefiniert, und aus der Definition eines H-Raumes sieht man direkt, dass dies eine Gruppenstruktur definiert. Zum Beispiel ist $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [\mu \circ (\mu \times \text{id}_G) \circ (f, g, h)]$ und $[f] \cdot ([g] \cdot [h]) = [\mu \circ (\text{id}_G \times \mu) \circ (f, g, h)]$.

Nach Definition ist $\phi^*[f] = [f \circ \phi]$. Damit erhalten wir $\phi^*[f] \cdot \phi^*[g] = [f \circ \phi] \cdot [g \circ \phi] = [\mu \circ (f \circ \phi, g \circ \phi)] = [\mu \circ (f, g) \circ \phi] = \phi^*([f] \cdot [g])$ also ist ϕ^* ein Gruppenhomomorphismus. Für eine Homotopieäquivalenz ϕ ist nach Satz 2.3 die Abbildung ϕ^* bijektiv, also ein Gruppenisomorphismus. \square

BEMERKUNG. Man kann zeigen, dass jede natürliche Gruppenstruktur auf $[, G]_0$ auf diese Weise entsteht. Man erhält die Abbildung ν als einen beliebigen Repräsentanten der inversen Elements von $[\text{id}_G]$ in der Gruppe $[G, G]_0$. Für die Abbildung μ betrachtet man die beiden Projektionen $p_1, p_2 : G \times G \rightarrow G$ und definiert μ als einen Repräsentanten von $[p_1][p_2] \in [G \times G, G]_0$. Dann rechnet man die H-Raum Axiome direkt nach. Wegen der Natürlichkeit der Gruppenstruktur stimmt sie dann für beliebiges (X, x_0) mit der in der Proposition konstruierten überein.

2.10. Wir kommen nun zu der zweiten Klasse von natürlichen Gruppenstrukturen, nämlich natürlichen Gruppenstrukturen auf $[X,]_0$, wobei wir nur den wichtigsten Spezialfall betrachten. Zunächst benötigen wir eine Konstruktion mit punktierten Räumen:

DEFINITION. Für punktierte Räume (X, x_0) und (Y, y_0) definieren wir das *Wedge* oder die *Einpunktvereinigung* $X \vee Y$ als den Raum der entsteht, indem man in der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ die Punkte x_0 und y_0 identifiziert.

Offensichtlich hat $X \vee Y$ einen natürlichen Basispunkt. Sei (Z, z_0) ein punktierter Raum und seien $f : (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$ und $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ stetig. Dann definieren f und g eine stetige Funktion $X \sqcup Y \rightarrow Z$ und diese induziert eine stetige basispunkterhaltende Funktion $(f, g) : X \vee Y \rightarrow Z$. Die Inklusionen von X und Y nach $X \sqcup Y$ liefern punkterhaltende stetige Funktionen $i_X : X \rightarrow X \vee Y$ und $i_Y : Y \rightarrow X \vee Y$.

Sei nun (X, x_0) ein beliebiger punktierter Raum. Dann definieren wir den *reduzierten Kegel* $C'X$ über X als $X \times I / (X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I)$. Wir ziehen also im Vergleich zum unreduzierten Kegel aus 1.8 auch noch die "Faser" über dem Basispunkt zusammen. Dadurch wird die kanonische Abbildung $i : X \rightarrow C'X$, die durch die Inklusion $X \times \{0\} \rightarrow X \times I$ induziert wird, basispunkterhaltend. Nun definieren wir die *reduzierte Suspension* $\Sigma'X$ über X als $C'X/i(X)$. Dieser Raum hat wieder einen kanonischen Basispunkt.

BEISPIEL. Betrachten wir insbesondere den Fall $(X, x_0) = (S^{n-1}, x_0)$, wobei $x_0 \in S^{n-1}$ ein beliebiger, fest gewählter Basispunkt ist. Wir definieren $f : S^{n-1} \times I \rightarrow B^n$ durch $f(x, t) := tx_0 + (1-t)x$. Dann ist offensichtlich $f(x, 1) = f(x_0, t) = x_0$, für alle $x \in S^{n-1}$ und $t \in I$, also faktorisiert f zu einer stetigen Abbildung $C'S^{n-1} \rightarrow B^n$ und man verifiziert sofort, dass diese Abbildung bijektiv ist. Schließlich ist $f(x, 0) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$, und damit erhalten wir einen Homöomorphismus von Paaren $(C'S^{n-1}, S^{n-1}) \cong (B^n, S^{n-1})$. Daraus folgt nun direkt, dass $\Sigma'S^{n-1} \cong B^n/S^{n-1} \cong S^n$ ist. Unter dieser Identifikation entspricht die Einbettung $S^{n-1} \hookrightarrow \Sigma'S^{n-1}$ gerade der Einbettung des "Äquators" in S^n .

Kehren wir nun zur reduzierten Suspension $\Sigma'X$ eines beliebigen punktierten Raumes (X, x_0) zurück. Nach Konstruktion können wir $\Sigma'X$ auch als $X \times I / (X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I \cup X \times \{1\})$ betrachten. Damit erhalten wir eine kanonische surjektive Abbildung $p : X \times I \rightarrow \Sigma'X$. Betrachten wir die stetige Funktion $X \times I \rightarrow X \times I$, die gegeben ist durch $(x, t) \mapsto (x, 1-t)$. Offensichtlich faktorisiert das zu einer stetigen Funktion $\nu : \Sigma'X \rightarrow \Sigma'X$.

Seien weiters $i_1, i_2 : \Sigma'X \rightarrow \Sigma'X \vee \Sigma'X$ die kanonischen Inklusionen. Betrachte die stetige Funktion $X \times I \rightarrow \Sigma'X \vee \Sigma'X$, die gegeben ist durch

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} i_1(p(x, 2t)) & t \leq 1/2 \\ i_2(p(x, 2t-1)) & t \geq 1/2. \end{cases}$$

Man verifiziert sofort, dass dies zu einer stetigen Funktion $\Delta : \Sigma'X \rightarrow \Sigma'X \vee \Sigma'X$ faktorisiert. Geometrisch kann man sich die Abbildungen Δ und ν so vorstellen:



Δ ist also durch Zusammenziehen der "Mittellinie" gegeben, ν durch "Umdrehen" des Doppelkegels.

PROPOSITION. Sei $\Sigma'X$ die reduzierte Suspension über einem beliebigen punktierten Raum (X, x_0) . Dann ist $[\Sigma'X, Y]_0$ für jeden punktierten Raum (Y, y_0) eine Gruppe und

für jede stetige Funktion $\phi : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ ist $\phi_* : [\Sigma'X, Y]_0 \rightarrow [\Sigma'X, Z]_0$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Gruppe $[\Sigma'X, Y]_0$ ist isomorph zu $[X, \Omega Y]_0$ mit der Struktur aus Proposition 2.9.

BEWEIS. Für $[f], [g] \in [\Sigma'X, Y]_0$ definieren wir $[f][g] := [(f, g) \circ \Delta]$ und $[f]^{-1} := [f \circ \nu]$. Nach Definition ist $\phi_*[f] = [\phi \circ f]$ und mittels $\phi \circ (f, g) = (\phi \circ f, \phi \circ g)$ folgt wie im Beweis von Proposition 2.9, dass ϕ_* mit diesen Operationen verträglich ist.

Nach dem Exponentialgesetz (Proposition 1.9) definieren $f \mapsto \check{f}$ und $g \mapsto \hat{g}$ inverse Bijektionen zwischen der Menge der stetigen Funktionen $X \times I \rightarrow Y$ und stetigen Funktionen $X \rightarrow C(I, Y)$. Nun faktorisiert $f : X \times I \rightarrow Y$ genau dann zu einer punkterhaltenden Abbildung $\Sigma'X \rightarrow Y$, wenn $f(x, 0) = f(x, 1) = f(x_0, t) = y_0$, für alle $x \in X$ und $t \in I$ gilt. Die ersten beiden Bedingungen bedeuten genau, dass $\check{f} : X \rightarrow C(I, Y)$ Werte im Schleifenraum $\Omega Y \subset C(I, Y)$ hat und die dritte Bedingung sagt, dass \check{f} punkterhaltend ist. Damit sehen wir, dass $f \mapsto \check{f}$ und $g \mapsto \hat{g}$ inverse Bijektionen zwischen punkterhaltenden stetigen Funktionen $\Sigma'X \rightarrow Y$ und $X \rightarrow \Omega Y$ definieren. Ganz analog zeigt man, dass man auch Homotopien auf die selbe Art hin- und herschieben kann, also erhalten wir eine Bijektion zwischen $[\Sigma'X, Y]_0$ und $[X, \Omega Y]_0$.

Für punkterhaltendes $f : \Sigma'X \rightarrow Y$ ist nun nach Definition $f \circ \nu$ induziert durch $(x, t) \mapsto f(x, 1 - t)$. Bildet man das mit $(\check{\cdot})$ nach $C(X, \Omega Y)$ ab, dann erhält man gerade die Komposition der Abbildung ν aus Beispiel 2.9 mit \check{f} . Analog entspricht $(f, g) \circ \Delta$ genau $\mu \circ (\check{f}, \check{g})$. Damit sehen wir aber, dass die oben definierten Operationen auf $[\Sigma'X, Y]_0$ genau den Operationen auf $[X, \Omega Y]_0$ entsprechen. Damit folgt einerseits, dass wir tatsächlich eine Gruppenstruktur auf $[\Sigma'X, Y]_0$ definiert haben und andererseits, dass diese Gruppe isomorph zu $[X, \Omega Y]_0$ ist. \square

BEMERKUNG. Man kann auch direkt nachrechnen, dass die Abbildungen Δ und ν analoge (genauer gesagt duale) Eigenschaften zu den Bedingungen (1)–(3) von Definition 2.9 haben. Das abstrahiert man dann zur Definition eines H' -Raumes. Analog zu Proposition 2.9 zeigt man, dass für jeden H' -Raum X auf $[X,]_0$ eine natürliche Gruppenstruktur existiert. Analog zu Bemerkung 2.9 sieht man auch, dass alle natürlichen Gruppenstrukturen auf $[X,]_0$ auf diese Art entstehen.

2.11. Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch untersuchen, was passiert, wenn gleichzeitig zwei “Gründe” für eine Gruppenstruktur vorliegen. Zunächst benötigen wir ein etwas seltsames, rein algebraisches Resultat:

LEMMA. Seien \cdot und $*$ zwei Gruppenstrukturen auf einer Menge G , sodass für alle $a, b, c, d \in G$ die Gleichung $(a \cdot b) * (c \cdot d) = (a * c) \cdot (b * d)$ gilt. Dann sind die beiden Strukturen gleich und abelsch.

BEWEIS. Sei 1 das neutrale Element der Multiplikation \cdot , dann gilt $(1 * 1) \cdot (1 * 1) = 1 * 1$, also $1 * 1 = 1$. Damit ist aber 1 auch das neutrale Element für die Multiplikation $*$. Nun rechnen wir $a * b = (a \cdot 1) * (1 \cdot b) = (a * 1) \cdot (1 * b) = a \cdot b$. Umgekehrt ist aber auch $a * b = (1 \cdot a) * (b \cdot 1) = (1 * b) \cdot (a * 1) = b \cdot a$. \square

PROPOSITION. (1) Ist (X, x_0) ein punktierter Raum und (G, e) ein H -Raum, dann ist $[\Sigma'X, G]_0$ eine abelsche Gruppe, und die beiden natürlichen Gruppenstrukturen stimmen überein.

(2) Für punktierte Räume (X, x_0) und (Y, y_0) sind $[\Sigma'\Sigma'X, Y]_0$, $[\Sigma'X, \Omega Y]_0$ und $[X, \Omega\Omega Y]_0$ isomorphe abelsche Gruppen.

BEWEIS. (1) Wir verifizieren die Bedingung des Lemmas. Sei \cdot die Multiplikation auf $[X, G]_0$, die von $\Delta : \Sigma'X \rightarrow \Sigma'X \vee \Sigma'X$ induziert wird. Sei $*$ die Multiplikation auf $[X, G]_0$, die von $\mu : G \times G \rightarrow G$ induziert wird. Seien $f, g, \phi, \psi : \Sigma'X \rightarrow Y$

punkterhaltende stetige Abbildungen. Ein Repräsentant für $[f] \cdot [g]$ ist gegeben durch $(f, g) \circ \Delta$, wo $(f, g) : \Sigma'X \vee \Sigma'X \rightarrow Y$ die von f und g induzierte Abbildung ist. Um einen Repräsentanten für $([f] \cdot [g]) * ([\phi] \cdot [\psi])$ zu konstruieren, geht man wie folgt vor: Man nimmt die beiden Abbildungen $(f, g) \circ \Delta$ und $(\phi, \psi) \circ \Delta : \Sigma'X \rightarrow Y$, nimmt die induzierte Abbildung $((f, g) \circ \Delta, (\phi, \psi) \circ \Delta) : \Sigma'X \rightarrow Y \times Y$ und komponiert diese mit μ . Die beiden Abbildungen (f, g) und $(\phi, \psi) : \Sigma'X \vee \Sigma'X \rightarrow Y$ induzieren eine Abbildung $\Phi := ((f, g), (\phi, \psi)) : \Sigma'X \vee \Sigma'X \rightarrow Y \times Y$, die eindeutig charakterisiert ist durch $p_1 \circ \Phi \circ i_1 = f$, $p_1 \circ \Phi \circ i_2 = g$, $p_2 \circ \Phi \circ i_1 = \phi$ und $p_2 \circ \Phi \circ i_2 = \psi$, wobei die $p_k : Y \times Y \rightarrow Y$ die Projektionen und die $i_j : \Sigma'X \rightarrow \Sigma'X \vee \Sigma'X$ die Inklusionen sind. Nach Konstruktion ist $\mu \circ ((f, g) \circ \Delta, (\phi, \psi) \circ \Delta) = \mu \circ \Phi \circ \Delta$.

Betrachten wir nun andererseits $[f] * [\phi]$. Ein Repräsentant dafür ist gegeben durch $\mu \circ (f, \phi)$, wobei $(f, \phi) : \Sigma'X \rightarrow Y \times Y$ die von f und ϕ induzierte Abbildung ist. Daher konstruiert man einen Repräsentanten für $([f] * [\phi]) \cdot ([g] * [\psi])$ wie folgt: Man betrachtet $\mu \circ (f, \phi)$ und $\mu \circ (g, \psi) : \Sigma'X \rightarrow Y$, nimmt die induzierte Abbildung $(\mu \circ (f, \phi), \mu \circ (g, \psi)) : \Sigma'X \vee \Sigma'X \rightarrow Y$ und komponiert diese mit Δ . Wieder kann man dies als $\mu \circ \Psi \circ \Delta$ schreiben, wo $\Psi : \Sigma'X \vee \Sigma'X \rightarrow Y \times Y$ gegeben ist durch $p_1 \circ \Psi \circ i_1 = f$, $p_2 \circ \Psi \circ i_1 = \phi$, $p_1 \circ \Psi \circ i_2 = g$ und $p_2 \circ \Psi \circ i_2 = \psi$. Daher stimmt die Abbildung Ψ mit der Abbildung Φ von oben überein, und das Resultat folgt aus dem Lemma.

(2) Nach (1) ist $[\Sigma'X, \Omega Y]_0$ eine abelsche Gruppe, und nach Proposition 2.10 ist diese Gruppe isomorph zu $[\Sigma'\Sigma'X, Y]_0$ und $[X, \Omega\Omega Y]_0$. \square

Fundamentalgruppe und Überlagerungen

In diesem Kapitel beginnen wir mit dem Studium der sogenannten Homotopiegruppen eines punktierten Raumes. Die einfachste dieser Homotopiegruppen ist die erste Homotopiegruppe oder Fundamentalgruppe. Die Fundamentalgruppe nimmt im Rahmen der Homotopiegruppen eine Sonderstellung ein: Einerseits gibt es starke allgemeine Resultate zu ihrer Berechnung, andererseits gibt der Zusammenhang mit der Theorie der Überlagerungen eine schöne geometrische Interpretation, die wir im zweiten Teil dieses Kapitels besprechen werden.

3.1. Die Fundamentalgruppe.

DEFINITION. (1) Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Dann definieren wir die *Fundamentalgruppe* oder *erste Homotopiegruppe* $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0)$ als die Menge $[S^1, X]_0$ der punkterhaltenden Homotopieklassen.

(2) Sind (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume und ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und basispunkterhaltend, so bezeichnen wir mit $\pi_1(f) : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ die induzierte Abbildung $f_* : [S^1, X]_0 \rightarrow [S^1, Y]_0$.

(3) Ein bogenzusammenhängender Raum mit trivialer Fundamentalgruppe heißt *einfach zusammenhängend* (Englisch “one-connected” oder “simply connected”).

PROPOSITION. Für jeden Raum X ist $\pi_1(X)$ eine Gruppe und für jede stetige basispunkterhaltende Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist $\pi_1(f)$ ein Gruppenhomomorphismus, der nur von $[f] \in [X, Y]_0$ abhängt. Ist $g : Y \rightarrow Z$ eine weitere basispunkterhaltende stetige Funktion, dann ist $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$. Schließlich ist $\pi_1(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_1(X)}$. Also ist $\pi_1(\)$ ein kovarianter Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Ist G ein H -Raum, dann ist $\pi_1(G)$ kommutativ.

BEWEIS. Sei S^0 der zweipunktige diskrete Raum $\{-1, 1\}$ mit Basispunkt 1. Dann ist offensichtlich $\Sigma' S^0 \cong S^1$, siehe auch Beispiel 2.10. Nach Proposition 2.10 ist $[S^1, X]_0$ für jeden punktierten Raum X eine Gruppe und für jedes stetige $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist $f_* = \pi_1(f)$ ein Homomorphismus. Die Aussage über H -Räume folgt direkt aus Proposition 2.11. Die restlichen Eigenschaften sind Spezialfälle der allgemeinen Resultate aus 2.2. \square

BEMERKUNG. (1) Aus der Proposition folgt sofort dass eine Homotopieäquivalenz $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ von punktierten Räumen einen Isomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ induziert. Die Fundamentalgruppe ist also eine Invariante des Homotopietyps. (2) Da der Einheitskreis S^1 bogenweise zusammenhängend ist, liegt das Bild jeder punkterhaltenden stetigen Funktion $f : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ und jeder punkterhaltenden Homotopie $S^1 \times I \rightarrow X$ ganz in der Bogenkomponente des Basispunktes x_0 . Die Fundamentalgruppe hängt also nur von dieser Komponente ab. Im weiteren werden wir uns daher beim Studium der Fundamentalgruppe auf bogenzusammenhängende Räume beschränken.

(3) Wir werden in Kürze sehen, dass die Fundamentalgruppe unter für bogenzusammenhängende Räume (bis auf Isomorphie) unabhängig von der Wahl des Basispunktes $x_0 \in X$ ist.

BEISPIEL. (1) Für jeden kontrahierbaren Raum X mit Basispunkt x_0 ist $\pi_1(X, x_0) = 0$ nach Satz 2.3. Insbesondere ist $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$ für jedes $n \geq 0$.
 (2) Nach Satz 2.4 ist $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

3.2. Beschreibung durch Wege. Man kann die Fundamentalgruppe auch anders beschreiben als in der Definition: Wegen des Isomorphismus $S^1 \cong I/\{0, 1\}$ kann man stetige Funktionen $S^1 \rightarrow X$ in einen beliebigen Raum X einfach mit geschlossenen Wegen identifizieren, d.h. mit stetigen Abbildungen $c : I \rightarrow X$ mit $c(0) = c(1)$. Basispunkterhaltende stetige Abbildungen $(S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ entsprechen dann einfach stetigen Wegen $c : I \rightarrow X$ mit $c(0) = c(1) = x_0$. Wegen Proposition 1.9 kann man auch Homotopien zwischen solchen Wegen leicht beschreiben: Zwei Wege $c_0, c_1 : I \rightarrow X$ mit $c_i(0) = c_i(1) = x_0$ für $i = 0, 1$ repräsentieren die selbe Klasse in $\pi_1(X)$ genau dann wenn sie homotop relativ zu $\{0, 1\}$ sind, d.h. wenn es eine stetige Funktion $H : I \times I \rightarrow X$ gibt mit $H(t, 0) = c_0(t)$, $H(t, 1) = c_1(t)$ und $H(0, s) = H(1, s) = x_0$, für alle $t, s \in I$.

In diesem Bild lassen sich auch die Gruppenoperationen leicht ausdrücken: Das inverse Element zur Homotopieklasse eines Weges $c : I \rightarrow X$ wird repräsentiert durch den Weg $c^{-1} : I \rightarrow X$, wo $c^{-1}(t) := c(1-t)$, und die Komposition zweier Wege $c_0, c_1 : I \rightarrow X$ ist gegeben durch den Weg

$$(c_0 * c_1)(t) := \begin{cases} c_0(2t) & t \leq 1/2 \\ c_1(2t - 1) & t \geq 1/2. \end{cases}$$

Man kann sich also die Fundamentalgruppe als Menge von Homotopieklassen von "Schleifen" in X vorstellen, die am Punkt x_0 beginnen und enden, wobei die Komposition von Schleifen einfach durch hintereinander Durchlaufen und die Inversion durch Durchlaufen in umgekehrter Richtung gegeben ist.

Natürlich macht die Inversion für beliebige Wege Sinn und die Komposition $c_0 * c_1$ für Wege c_0, c_1 mit $c_0(1) = c_1(0)$. Die Komposition von komponierbaren Wegen ist assoziativ bis auf Homotopie relativ $\{0, 1\}$ und $c * c^{-1}$ ist nullhomotop relativ zu $\{0, 1\}$.

LEMMA. Sei $f : \{0, 1\} \times I \cup I \times \{0, 1\} \rightarrow X$ eine stetige Funktion auf dem Rand des Einheitsquadrats I^2 . Seien die Wege $u, o, l, r : I \rightarrow X$ gegeben durch $u(t) = f(t, 0)$, $o(t) = f(t, 1)$, $l(s) = f(0, s)$ und $r(s) = f(1, s)$. Dann sind äquivalent:

- (1) f ist nullhomotop.
- (2) Es gibt eine stetige Fortsetzung $F : I^2 \rightarrow X$ von f .
- (3) Die Wege $l * o$ und $u * r$ sind homotop relativ zu $\{0, 1\}$.
- (4) Die Klasse der Schleife $l * o * r^{-1} * u^{-1}$ in $\pi_1(X, f(0, 0))$ ist trivial

BEWEIS. (1) \Leftrightarrow (2): Nach Proposition 1.4 ist $(I^2, \partial I^2)$ homöomorph zu (B^2, S^1) und nach 1.8(1) ist dieses Paar homöomorph zu (CS^1, S^1) , wo $CS^1 = (S^1 \times I)/(S^1 \times \{1\})$ der unreduzierte Kegel über S^1 ist. Daher müssen wir zeigen, dass $f : S^1 \rightarrow X$ genau dann nullhomotop ist, wenn es eine stetige Fortsetzung F von f auf CS^1 gibt. Das ist aber offensichtlich.

(2) \implies (3): Definiere $H : I \times I \rightarrow X$ durch

$$H(t, s) := \begin{cases} F(2t(1-s), 2ts) & t \leq 1/2 \\ F(1-2(1-t)s, s+(2t-1)(1-s)) & t \geq 1/2. \end{cases}$$

Dann geben für $t = 1/2$ beide Zeilen $F(1 - s, s)$ also ist H stetig. Für $s = 0$ gibt die erste Zeile $F(2t, 0)$ und die zweite $F(1, 2t - 1)$, also erhalten wir gerade den Weg $u * r$. Für $s = 1$ ist die erste Zeile $F(0, 2t)$ und die zweite $F(2t - 1, 1)$ also ist das der Weg $l * o$. Schließlich ist noch $H(0, s) = F(0, 0)$ und $H(1, s) = F(1, 1)$ für alle s also haben wir eine Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$.

(3) \implies (4): Dies folgt sofort, da nach Definition $(u * r)^{-1} = r^{-1} * u^{-1}$ gilt und die Komposition verträglich mit Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ ist.

(4) \implies (1) ist trivial. \square

Insbesondere sagt dieses Resultat natürlich, dass zwei Wegen $c_0, c_1 : I \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 genau dann homotop relativ $\{0, 1\}$ sind, wenn $0 = [c_0 * (c_1)^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt. Damit können wir nun auch zeigen, dass die Fundamentalgruppe (bis auf Isomorphie) unabhängig vom Basispunkt ist. Insbesondere ist damit die Definition eines einfach zusammenhängenden Raumes unabhängig vom Basispunkt.

PROPOSITION. *Sei $c : I \rightarrow X$ ein stetiger Weg von $x_0 = c(0)$ nach $x_1 = c(1)$ in einem topologischen Raum X . Dann induziert c einen Isomorphismus $c^\# : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, der nur von der Homotopieklasse relativ zu $\{0, 1\}$ von c abhängt.*

BEWEIS. Ist $\sigma : I \rightarrow X$ eine Schleife bei x_1 , dann ist $c * \sigma * c^{-1}$ eine Schleife bei x_0 . Ersetzt man σ durch eine homotope Schleife, dann erhält man offensichtlich eine homotope Schleife, also definiert $c^\#([\sigma]) := [c * \sigma * c^{-1}]$ eine Funktion $c^\# : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Ersetzt man c durch eine Kurve \tilde{c} mit $\tilde{c} \sim c$ rel $\{0, 1\}$, dann ist klarerweise für jedes σ auch $c * \sigma * c^{-1} \sim \tilde{c} * \sigma * \tilde{c}^{-1}$ rel $\{0, 1\}$, also hängt $c^\#$ nur von der Homotopieklasse von c ab.

Da $c^{-1} * c \sim x_1$ rel $\{0, 1\}$ gilt, erhält man $c^\#([\sigma][\tau]) = c^\#([\sigma])c^\#([\tau])$, also ist $c^\#$ ein Gruppenhomomorphismus und aus dem selben Grund ist $(c^{-1})^\#$ invers zu $c^\#$. \square

Man beachte aber, dass es keinen natürlichen Weg gibt, die Fundamentalgruppen mit verschiedenen Basispunkten zu identifizieren.

3.3. Mit Hilfe der Beschreibung der Fundamentalgruppe durch Wege können wir nun die ersten Schritte in Richtung auf den Satz von Seifert und van Kampen machen. Dieser Satz berechnet die Fundamentalgruppe eines in zwei geeignete Teile zerlegten Raumes aus den Fundamentalgruppen der Teile und ihres Durchschnitts.

Sei also (X, x_0) ein punktierter Raum und seien $U, V \subset X$ offene Teilmengen, sodass $X = U \cup V$ gilt. Um ein sinnvolles Resultat erwarten zu können, müssen wir wohl annehmen, dass X, U, V und $U \cap V$ bogenzusammenhängend sind, und dass $x_0 \in U \cap V$ gilt. Dann können wir x_0 als Basispunkt für jeden der vier Räume verwenden. Seien $i_U : U \hookrightarrow X$ und $i_V : V \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildungen. Dann erhalten wir induzierte Homomorphismen $\pi_1(i_U) : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(i_V) : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Um unser erstes Resultat formulieren zu können, benötigen wir noch ein wenig Hintergrund aus der Algebra: Sei G eine Gruppe. Dann ist der Durchschnitt über eine beliebige Familie von Untergruppen von G selbst eine Untergruppe von G . Damit gibt es für jede Teilmenge A von G eine minimale Untergruppe $\langle A \rangle$ von G , die A enthält, nämlich den Durchschnitt aller solcher Untergruppen. Man nennt $\langle A \rangle$ die *von A erzeugte Untergruppe* von G . Man kann $\langle A \rangle$ leicht explizit beschreiben: Ein Element g liegt genau dann in $\langle A \rangle$ wenn es als Produkt von endlich vielen Elementen von A und Inversen von Elementen von A geschrieben werden kann.

Eine Teilmenge E einer Gruppe G heißt ein *Erzeugendensystem* für G , falls $\langle E \rangle = G$ gilt. äquivalent bedeutet das, dass jedes $g \in G$ als Produkt von endlich vielen Elementen

$h \in G$ geschrieben werden kann, für die entweder $h \in E$ oder $h^{-1} \in E$ gilt. Man sagt auch, die Teilmenge E erzeugt die Gruppe G .

PROPOSITION. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum, $U, V \subset X$ offene Teilmengen mit $X = U \cup V$, sodass X, U, V und $U \cap V$ bogenzusammenhängend sind und $x_0 \in U \cap V$ gilt. Seien $\pi_1(i_U) : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(i_V) : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ die von den Inklusionen induzierten Homomorphismen. Dann ist die Teilmenge

$$\pi_1(i_U)(\pi_1(U, x_0)) \cup \pi_1(i_V)(\pi_1(V, x_0))$$

ein Erzeugendensystem für $\pi_1(X, x_0)$.

BEWEIS. Sei $\sigma : I \rightarrow X$ stetig mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$. Dann gibt es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$ von I , sodass $\sigma([t_i, t_{i+1}])$ entweder ganz in U oder ganz in V liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass für jeden der Teilungspunkte t_i das Bild $\sigma(t_i)$ in $U \cap V$ liegt. (Teilungspunkte für die das nicht gilt kann man einfach weglassen.)

Für jedes $i = 1, \dots, k-1$ wählen wir einen Weg $c_i : I \rightarrow U \cap V$ von $\sigma(t_i)$ nach x_0 und setzt für c_0 und c_k den konstanten Weg x_0 . Nun betrachten wir für jedes $i = 0, \dots, k-1$ die Komposition von Wegen $c_i^{-1} * \sigma|_{[t_i, t_{i+1}]} * c_{i+1}$. Dies ist jeweils eine Schleife, die entweder ganz in U oder ganz in V liegt. Ihre Klasse in $\pi_1(X)$ liegt daher entweder im Bild von $\pi_1(i_U)$ oder im Bild von $\pi_1(i_V)$. Betrachtet man die Komposition aller dieser Schleifen, so folgt diese zunächst σ bis zum Punkt $\sigma(t_1)$, läuft dann längs c_1 nach x_0 und wiederum längs c_1 zurück zu $\sigma(t_1)$, dann wieder längs σ bis zum Punkt $\sigma(t_2)$, längs c_2 zu x_0 und so weiter. Offensichtlich repräsentiert diese Komposition die selbe Klasse in $\pi_1(X)$ wie die ursprüngliche Schleife σ , und daher liegt $[\sigma]$ in der von den Bildern von $\pi_1(i_U)$ und $\pi_1(i_V)$ erzeugten Untergruppe. \square

KOROLLAR. Sei (X, x_0) ein bogenzusammenhängender punktierter Raum. Dann ist die unreduzierte Suspension ΣX von X aus 1.8 (2) einfach zusammenhängend, also $\pi_1(\Sigma X, x_0) = 0$. Insbesondere ist für $n > 1$ die Sphäre S^n einfach zusammenhängend.

BEWEIS. Offensichtlich ist ΣX bogenzusammenhängend. Sei $p : X \times I \rightarrow \Sigma X$ die kanonische Abbildung. Dann sind $U = p(X \times [0, 1))$ und $V = p(X \times (0, 1])$ offene Teilmengen von ΣX und $U \cap V$ ist homöomorph zu $X \times (0, 1)$, also insbesondere bogenzusammenhängend. Außerdem sind U und V offensichtlich kontrahierbar also sind die Gruppen $\pi_1(U, x_0)$ und $\pi_1(V, x_0)$ beide trivial. Nach der Proposition ist $\pi_1(\Sigma X, x_0)$ ebenfalls trivial. Aus 1.8 (2) wissen wir, dass $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ gilt, also folgt die letzte Behauptung. \square

Exkurs: Der Satz von Seifert und van Kampen

Um den vollständigen Satz von Seifert und van Kampen formulieren zu können, benötigen wir noch einiges an algebraischen Hintergrund.

3.4. Erzeuger und Relationen. Man kann einer beliebigen Menge X eine Gruppe $\mathcal{F}(X)$ zuordnen, die sogenannte *freie Gruppe*, die von X erzeugt wird. Man definiert $\mathcal{F}(E)$ als die Menge aller Worte der Form $x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$ mit $x_j \in X$, $x_j \neq x_{j+1}$ für alle $j = 1, \dots, k$ und $i_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Die Gruppenmultiplikation ist definiert durch Aneinanderhängen der Worte, wobei man aber $x^i x^j$ durch x^{i+j} ersetzt und x^0 weglässt. Damit erhält man eine Gruppe, wobei das neutrale Element das leere Wort und das inverse Element zu $x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$ gerade $x_k^{-i_k} \dots x_1^{-i_1}$ ist. Ordnet man jedem Element $x \in X$ das Wort x^1 zu, so erhält man eine Funktion $i : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$.

Die freie Gruppe $\mathcal{F}(X)$ hat eine universelle Eigenschaft: Ist G eine beliebige Gruppe und $\phi : X \rightarrow G$ eine beliebige Funktion, so existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\tilde{\phi} : \mathcal{F}(X) \rightarrow G$, sodass $\tilde{\phi} \circ i = \phi$ ist. Man definiert einfach $\tilde{\phi}(x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}) := \phi(x_1)^{i_1} \dots \phi(x_k)^{i_k}$. Man zeigt leicht, dass die freie Gruppe über X durch diese universelle Eigenschaft bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Ist nun G eine Gruppe und $A \subset G$ eine Teilmenge, dann können wir $\mathcal{F}(A)$ bilden und die Inklusion $i : A \hookrightarrow G$ induzierte einen Homomorphismus $\tilde{i} : \mathcal{F}(A) \rightarrow G$. Das Bild dieses Homomorphismus ist natürlich eine Untergruppe von G , die A enthält. Andererseits kann man nach Konstruktion jedes Element in diesem Bild als Produkt von Elementen von A und ihren Inversen schreiben. Damit ist $\tilde{i}(\mathcal{F}(A)) = \langle A \rangle$.

Insbesondere erhalten wir für eine Erzeugendensystem $E \subset G$ einen surjektiven Homomorphismus $\mathcal{F}(E) \rightarrow G$. Der Kern dieses Homomorphismus ist ein Normalteiler $N \subset \mathcal{F}(E)$ und $\mathcal{F}(E)/N \cong G$. Analog wie für Untergruppen gibt es zu jeder Teilmenge A einer Gruppe auch den von A erzeugten Normalteiler $\mathcal{N}(A)$.

DEFINITION. Sei G eine Gruppe. Eine *Präsentation* von G ist ein Erzeugendensystem $E \subset G$ zusammen mit einer Teilmenge R von $\mathcal{F}(E)$, sodass der erzeugte Normalteiler $\mathcal{N}(R) \subset \mathcal{F}(E)$ genau der Kern des natürlichen Homomorphismus $\mathcal{F}(E) \rightarrow G$ ist. Die Elemente von R heißen *Relationen*.

BEMERKUNG. (1) Offensichtlich besitzt jede Gruppe eine Präsentation. Man wählt einfach ganz G als Erzeugendensystem und den ganzen Kern der Quotientenabbildung $\mathcal{F}(G) \rightarrow G$ als Relationen.

(2) Umgekehrt kann man nun Gruppen einfach durch Angabe einer Menge E von Erzeugern und einer Teilmenge $R \subset \mathcal{F}(E)$ von Relationen definieren. In diesem Fall ist dann G einfach $\mathcal{F}(E)/\mathcal{N}(R)$. Das liefert eine wohldefinierte Gruppe, in der man auch explizit rechnen kann, es hat aber gewisse Tücken:

Im Allgemeinen ist es äußerst schwierig zu entscheiden, ob zwei in dieser Weise beschriebene Gruppen isomorph sind (Isomorphieproblem). Für eine fixe Beschreibung dieser Art ist es sehr schwierig zu entscheiden ob zwei Elemente von $\mathcal{F}(E)$ das selbe Element von G repräsentieren (Wortproblem). Man kann beweisen dass sowohl das Wort- als auch das Isomorphieproblem im Allgemeinen algorithmisch nicht lösbar sind.

3.5. Freie Produkte. Mit Hilfe von Beschreibungen durch Erzeuger und Relationen können wir nun eine allgemeine Konstruktion für Gruppen beschreiben, die analog zur direkten Summe von Vektorräumen ist. Zu zwei Gruppen G_1 und G_2 suchen wir eine Gruppe $G = G_1 * G_2$ zusammen mit Homomorphismen $i_1 : G_1 \rightarrow G$ und $i_2 : G_2 \rightarrow G$, die eine universelle Eigenschaft besitzt. Wir hätten gerne, dass es für eine beliebige Gruppe H und Homomorphismen $\phi_j : G_j \rightarrow H$ für $j = 1, 2$ einen eindeutigen Homomorphismus $\phi : G_1 * G_2 \rightarrow H$ gibt, sodass $\phi \circ i_j = \phi_j$ für $j = 1, 2$ gilt. Man sieht leicht, dass das Tripel $(G_1 * G_2, i_1, i_2)$ (falls es existiert) durch diese Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. In der Kategorie der abelschen Gruppen kann man das kartesische Produkt verwenden, hier ist es aber nicht geeignet, weil in $G_1 \times G_2$ jedes Element von G_1 mit jedem Element von G_2 kommutiert.

Um $G_1 * G_2$ zu konstruieren, wählen wir eine Präsentation $G_j := \mathcal{F}(E_j)/\mathcal{N}(R_j)$ für jede der beiden Gruppen. Nun betrachten wir $E := E_1 \cup E_2$ und die freie Gruppe $\mathcal{F}(E)$. Für $j = 1, 2$ liefert die $E_j \hookrightarrow E$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{F}(E_j) \rightarrow \mathcal{F}(E)$. Daher können wir die Mengen R_1 und R_2 von Relationen in natürlicher Weise als Teilmengen von $\mathcal{F}(E)$ auffassen und wir definieren $G_1 * G_2 := \mathcal{F}(E)/\mathcal{N}(R_1 \cup R_2)$. Nach Konstruktion liegt jede Relation in R_1 im Kern der Komposition $\mathcal{F}(E_1) \rightarrow \mathcal{F}(E) \rightarrow G_1 * G_2$. Damit

erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $i_1 : G_1 = \mathcal{F}(E_1)/\mathcal{N}(R_1) \rightarrow G_1 * G_2$ und analog $i_2 : G_2 \rightarrow G_1 * G_2$.

Wir behaupten nun, dass $G_1 * G_2$ mit den Homomorphismen i_1 und i_2 die gesuchte universelle Eigenschaft hat. Sei also H eine Gruppe und $\phi_i : G_i \rightarrow H$ ein Homomorphismus für $i = 1, 2$. Damit erhalten wir eine Funktion $E_1 \cup E_2 \rightarrow H$, indem man auf Elemente von E_1 mit ϕ_1 und auf Elemente von E_2 mit ϕ_2 wirkt und somit einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{F}(E) \rightarrow H$. Auf dem Bild von $\mathcal{F}(E_1) \rightarrow \mathcal{F}(E)$ ist dieser Homomorphismus durch ϕ_1 gegeben, also bildet er jedes Element von R_1 auf $1 \in H$ ab. Analog liegt auch jedes Element von R_2 und damit der erzeugte Normalteiler $\mathcal{N}(R_1 \cup R_2)$ im Kern. Daher erhalten wir einen induzierten Homomorphismus $\phi : G_1 * G_2 \rightarrow H$ und nach Konstruktion ist offensichtlich $\phi \circ i_j = \phi_j$ für $j = 1, 2$. Die Eindeutigkeit ist klar, da $G_1 * G_2$ von $E_1 \cup E_2$ erzeugt wird, und auf dieser Teilmenge der Homomorphismus durch die verlangte Eigenschaft festgelegt ist.

DEFINITION. Die Gruppe $G_1 * G_2$ heißt das *freie Produkt* von G_1 und G_2 .

Das freie Produkt ist eine eher “wilde” Konstruktion, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL. Betrachten wir den Fall $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}_2$ von zwei Kopien der zweielementigen Gruppe. Eine Präsentation von \mathbb{Z}_2 ist natürlich $\mathcal{F}(\{a\})/\mathcal{N}(\{a^2\})$. Damit erhalten wir eine Präsentation für $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ als $\mathcal{F}(\{a, b\})/\mathcal{N}(\{a^2, b^2\})$. Man bemerke, dass diese Gruppe nicht abelsch ist, da $ab \neq ba$ ist und Elemente unendlicher Ordnung enthält, zum Beispiel das Element ab .

3.6. Kehren wir nun zur topologischen Situation von 3.3 zurück. Die Homomorphismen $\pi_1(i_U)$ und $\pi_1(i_V)$ induzieren einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(U) * \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$. Das Bild dieses Homomorphismus enthält natürlich die Bilder von $\pi_1(i_U)$ und $\pi_1(i_V)$, also sagt Proposition 3.3 gerade, dass dieser Homomorphismus surjektiv ist. Um $\pi_1(X)$ zu verstehen, müssen wir also noch den Kern dieses Homomorphismus beschreiben.

Betrachten wir die Inklusionen $j_U : U \cap V \rightarrow U$ und $j_V : U \cap V \rightarrow V$. Dann ist offensichtlich $i_U \circ j_U = i_V \circ j_V$ die Inklusion $U \cap V \hookrightarrow X$. Sei $\sigma : I \rightarrow U \cap V$ stetig mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$. Nach Konstruktion des freien Produktes haben wir Homomorphismen $i_1 : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(U) * \pi_1(V)$ und $i_2 : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(U) * \pi_1(V)$, also können wir der Klasse $[\sigma] \in \pi_1(U \cap V)$ die Elemente $i_1(\pi_1(j_U)([\sigma]))$ und $i_2(\pi_1(j_V)([\sigma]))$ von $\pi_1(U) * \pi_1(V)$ zuordnen. Bildet man diese beiden Elemente nach $\pi_1(X)$ ab so geht nach Konstruktion das erste auf $\pi_1(i_U) \circ \pi_1(j_U)([\sigma])$ und das zweite auf $\pi_1(i_V) \circ \pi_1(j_V)([\sigma])$, also erhält man die gleichen Bilder. Insbesondere liegt also das Element $\phi([\sigma]) := i_1(\pi_1(j_U)([\sigma]))(i_2(\pi_1(j_V)([\sigma])))^{-1}$ im Kern des Homomorphismus $\pi_1(U) * \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$. Der Satz von Seifert und van Kampen sagt nun, dass diese Elemente den Kern als Normalteiler erzeugen:

SATZ (H. Seifert, E. van Kampen, 1932). *Sei X ein topologischer Raum, $U, V \subset X$ offene Teilmengen mit $X = U \cup V$, sodass X, U, V und $U \cap V$ bogenzusammenhängend sind. Dann ist für jeden Punkt $x_0 \in U \cap V$*

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)) / \mathcal{N}(\{\phi([\sigma]) : [\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_0)\})$$

BEWEIS. Sei $H : I \times I \rightarrow X$ eine stetige Homotopie mit $H(t, 1) = H(0, s) = H(1, s) = x_0$, d.h. H zeigt, dass die Schleife $t \mapsto H(t, 0)$ nullhomotop ist. Zunächst finden wir Zerlegungen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ und $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_\ell = 1$ von I , sodass für jedes $i = 0, \dots, k-1$ und $j = 0, \dots, \ell-1$ das Bild $H([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}])$ entweder ganz in U oder ganz in V liegt. Für jede Ecke $e = (t_i, s_j)$ wählen wir nun einen Weg c_e von $H(t_i, s_j)$ nach x_0 und zwar so, dass er ganz in U, V bzw. $U \cap V$ liegt, falls $H(t_i, s_j)$ in U, V bzw. $U \cap V$ liegt und konstant ist, falls $H(t_i, s_j) = x_0$ gilt.

Sei nun u eine Kante des entstehenden Gitters, d.h. $u = [t_i, t_{i+1}] \times \{s_j\}$ oder $u = \{t_i\} \times [s_j, s_{j+1}]$. Dann haben wir den entsprechenden Weg $H(u)$ in X . Setzt man diesen noch mit dem inversen des oben zum Anfangspunkt der Kante konstruierten Weges und mit dem oben zum Endpunkt konstruierten Weg zusammen, so erhält man eine Schleife \hat{u} an x_0 , die nach Konstruktion entweder ganz in U oder ganz in V liegt. Insbesondere bezeichnen wir mit c_i die Kante $[t_i, t_{i+1}] \times \{0\}$. Dann ist jedes \hat{c}_i eine Schleife in U oder V .

Sei nun $G = \pi_1(U) * \pi_1(V)$ und N der erzeugte Normalteiler, der in der Formulierung des Satzes auftritt. Mittels der Homomorphismen $\pi_1(U) \rightarrow G$ und $\pi_1(V) \rightarrow G$, die wir in der Notation unterdrücken, kann man jeder Schleife in U oder in V eine Klasse in G und in G/N zuordnen. Nach Konstruktion ist für eine Schleife in $U \cap V$ die Klasse in G/N unabhängig davon, ob man sie als Schleife in U oder in V betrachtet.

Wir behaupten nun, dass in G/N die Gleichung $[\hat{c}_0][\hat{c}_1] \dots [\hat{c}_{k-1}] = 1$ gilt: Betrachten wir ein Teilrechteck $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ mit den Kanten u (unten), l (links), r (rechts) und o (oben) analog wie im Beweis von Lemma 3.2. Nach diesem Lemma ist $H(l) * H(o)$ homotop zu $H(u) * H(r)$ relativ zu $\{0, 1\}$. Nun ist aber $H(u) * H(r)$ homotop zu $H(u) * c_e * c_e^{-1} * H(r)$ relativ zu $\{0, 1\}$, wobei e die Ecke zwischen r und u bezeichnet und analog für $H(l) * H(o)$. Setzt man das noch mit den passenden Anfangs- und Endkurven zusammen, so sieht man, dass $[\hat{u}][\hat{r}] = [\hat{l}][\hat{o}]$ in $\pi_1(U)$ bzw. $\pi_1(V)$ und damit $[\hat{u}] = [\hat{l}][\hat{o}][\hat{r}]^{-1}$ in G/N gilt.

Bezeichnet man nun die Kanten des rechts daneben liegenden Teilquadrats mit l', o', r' und u' , so erhält man wegen $l' = r'$ die Gleichung $[\hat{u}][\hat{u}'] = [\hat{l}][\hat{o}][\hat{o}'][\hat{r}']^{-1}$ in G/N . Nimmt man nun die Unterkante einer ganzen Zeile in unserem Quadrat, so sind die verbleibenden Wege ganz links und ganz rechts nach Konstruktion konstant, also ist das Produkt über die Klassen der Klassen der Schleifen zu allen Unterkanten gleich dem Produkt der Klassen der Schleifen zu allen Oberkanten. Wendet man das nun der Reihe nach auf alle "Zeilen" an, so sieht man das $[\hat{c}_0][\hat{c}_1] \dots [\hat{c}_{k-1}]$ gleich ist dem Produkt der Klassen der Schleifen zu den obersten Oberkanten. Diese sind aber alle konstant, also ist $[\hat{c}_0][\hat{c}_1] \dots [\hat{c}_{k-1}] = 1$ in G/N .

Sei nun $\alpha \in \pi_1(U) * \pi_1(V)$ ein Element im Kern des Homomorphismus $\pi_1(U) * \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$. Dann kann man α als Produkt von Klassen $[\sigma_1], \dots, [\sigma_n]$ schreiben wobei jedes σ_i eine Schleife ist, die ganz in U bzw. V liegt, und die Komposition $\sigma_1 * \dots * \sigma_n$ ist nullhomotop relativ zu $\{0, 1\}$ in X . Nun teilen wir I in n gleiche Teile und bezeichnen mit $w : I \rightarrow X$ den Weg der auf dem i -ten Teil mit einer Reparametrisierung von σ_i übereinstimmt. Dann ist w nullhomotop relativ zu $\{0, 1\}$. Sei $H : I \times I \rightarrow X$ eine entsprechende Homotopie.

Nun zerlegen wir das Einheitsquadrat I^2 wie im letzten Beweisschritt, wobei wir noch annehmen, dass jeder Punkt k/n ein Teilungspunkt in der t -Koordinate ist. Betrachten wir nun die ersten Teilintervalle, auf denen w mit σ_1 übereinstimmt. Seien c_1, \dots, c_{i_1} die entsprechenden Unterkanten, dann ist $[\sigma_1] = [\hat{c}_1] \dots [\hat{c}_{i_1}]$ in $\pi_1(U)$ oder $\pi_1(V)$ (siehe den Beweis von Proposition 3.3). Jedenfalls gilt diese Gleichung in G/N . Damit ist in G/N aber $\alpha = [\sigma_1] \dots [\sigma_n]$ gleich dem Produkt über die Klassen der Schleifen zu allen Unterkanten und dieses ist gleich 1 nach dem letzten Beweisschritt, also ist $\alpha \in N$. \square

BEISPIEL. (1) Betrachten wir zunächst den Raum $S^1 \vee S^1$, die Einpunktvereinigung von zwei Kopien von S^1 . Wählt man in jedem der beiden Kreise einen Punkt ungleich dem Basispunkt, so erhält man durch Weglassen von jeweils einem dieser Punkte eine Zerlegung $X = U \cup V$, wobei U und V homotopieäquivalent zu S^1 sind und $U \cap V$ kontrahierbar ist. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Seifert und van

Kampen erfüllt, und man sieht, dass $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ das freie Produkt von zwei Kopien von \mathbb{Z} , also die freie Gruppe mit zwei Erzeugern ist.

Bildet man analog die Einpunktvereinigung von endlich vielen Kopien von S^1 so erhält man die freie Gruppe mit endlich vielen Erzeugern.

Offensichtlich ist der Raum, den man erhält indem man n verschiedene Punkte aus der Ebene \mathbb{R}^2 entfernt, homotopieäquivalent zur Einpunktvereinigung von n Kopien der S^1 , also ist auch seine Fundamentalgruppe die freie Gruppe mit n Erzeugern.

(2) Sei Y ein topologischer Raum $n \geq 2$ und $f : S^{n-1} \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Dann können wir den Raum $\tilde{Y} := B^n \cup_f Y$ bilden, indem wir B^n längs f an Y kleben. Man sagt, \tilde{Y} entsteht aus Y durch Ankleben einer n -Zelle. Aus 1.6 wissen wir, dass es eine natürlich Einbettung $f_*i : Y \rightarrow \tilde{Y}$ gibt. Andererseits gibt es auch eine natürliche Abbildung $i_*f : B^n \rightarrow \tilde{Y}$, deren Einschränkung auf $D^n = B^n \setminus S^{n-1}$ ein Homöomorphismus ist. Sei nun $U := \tilde{Y} \setminus i_*f(0)$ und $V := i_*f(D^n)$. Dann sind U und V offen in \tilde{Y} und $U \cap V$ ist homöomorph zu $D^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$. Natürlich ist V kontrahierbar, also ist $\pi_1(V) = 0$. Indem man $B^n \setminus \{0\}$ auf S^{n-1} “drückt” sieht man, dass $U \sim Y$ gilt. Genauer gesagt ist die Inklusion $Y \hookrightarrow U$ eine Homotopieäquivalenz, also insbesondere $\pi_1(f_*i) : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(U)$ ein Isomorphismus. Für $n \geq 3$ ist $\pi_1(S^{n-1}) = 0$ nach Korollar 3.3 also folgt $\pi_1(\tilde{Y}) \cong \pi_1(Y)$ nach dem Satz von Seifert und van Kampen. Ankleben von Zellen der Dimension ≥ 3 ändert also die Fundamentalgruppe nicht.

Im Fall $n = 2$ erhalten wir $\pi_1(U \cap V) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Da $\pi_1(V) = 0$ gilt sagt der Satz von Seifert und Van Kampen, dass $\pi_1(\tilde{Y})$ der Quotient von $\pi_1(U)$ nach dem Normalteiler ist, der von $\pi_1(j_U)(\pi_1(U \cap V))$ erzeugt wird. Sei $f : S^1 \rightarrow Y$ die Klebeabbildung und wähle einen Weg c vom Basispunkt $y_0 \in Y$ nach $f(1)$. Dann hat man die Klasse $[c * f * c^{-1}] \in \pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(U, y_0)$, und man überlegt leicht, dass diese Klasse ebenfalls den “richtigen” Normalteiler erzeugt. Somit ist $\pi_1(\tilde{Y}) \cong \pi_1(Y) / \mathcal{N}([c * f * c^{-1}])$. Klebt man mehrere 2-Zellen längs Funktionen f_1, \dots, f_k an, dann erhält man induktiv $\pi_1(\tilde{Y}, y_0) \cong \pi_1(Y, y_0) / \mathcal{N}([c_1 * f_1 * c_1^{-1}], \dots, [c_k * f_k * c_k^{-1}])$ für geeignete Wege c_i .

Zusammen mit dem letzten Beispiel können wir schließen, dass *jede* endlich präsentierte Gruppe G (die also eine Präsentation mit endlich vielen Erzeugern und endlich vielen Relationen besitzt) als Fundamentalgruppe auftritt. Ist E eine endliche Menge von Erzeugern, dann bilden wir ein Wedge von Kopien von S^1 das durch E indiziert ist. Nach Teil (1) ist die Fundamentalgruppe davon isomorph zu $\mathcal{F}(E)$. Somit entspricht jede Relation einer Homotopieklasse und wenn wir längs eines Repräsentanten für jede dieser Klassen eine 2-Zelle ankleben, dann erhalten wir einen Raum mit Fundamentalgruppe G .

Überlagerungen

Die Berechnung der Fundamentalgruppe von S^1 in 2.4 erfolgte im wesentlichen “geometrisch” unter Benutzung der Exponentialabbildung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$. Wir wollen diese Situation nun auf beliebige Räume verallgemeinern. In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass alle betrachteten Räume Hausdorff sind.

3.7. Grundlegendes.

DEFINITION. (1) Eine stetige Abbildung $p : E \rightarrow X$ heißt eine *Überlagerung*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, sodass $p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen V_α von E ist und für jedes α die Funktion $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

So eine Umgebung heißt *trivialisierend* für die Überlagerung E und die Mengen V_j heißen die *Zweige* oder die *Blätter* der Überlagerung über U . Für einen Punkt $x \in X$ heißt die Menge $p^{-1}(x)$ die *Faser* über x .

(2) Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung, Y ein beliebiger Raum und $f : Y \rightarrow X$ stetig. Ein *Lift* von f ist eine stetige Funktion $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

BEMERKUNG. (1) Ist X ein beliebiger Raum und D eine diskrete Menge, so ist klarerweise die erste Projektion $p_1 : X \times D \rightarrow X$ eine Überlagerung. Um diesen trivialen Fall auszuschließen, werden wir uns mit bogenzusammenhängenden Überlagerungen von bogenzusammenhängenden Räumen befassen. Außerdem werden wir meist annehmen, dass X und E punktierte Räume sind und $p(e_0) = x_0$ gilt.

(2) Nach Definition ist für jeden Punkt $x \in X$ die Faser $p^{-1}(x)$ eine diskrete Teilmenge von E . Außerdem ist klarerweise p eine surjektive Quotientenabbildung (d.h. eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ p : E \rightarrow Y$ stetig ist) und ein lokaler Homöomorphismus.

(3) Ist X zusammenhängend, so ist die Kardinalität der Faser $p^{-1}(x)$ unabhängig von x : Für einen fixen Punkt x ist klarerweise die Menge aller y , für die $p^{-1}(y)$ die selbe Kardinalität hat wie $p^{-1}(x)$, offen in X . Andererseits muss auch die Menge aller y , für die $p^{-1}(y)$ eine andere Kardinalität hat, offen in X sein, und da X zusammenhängend ist, folgt die Behauptung. Diese Kardinalität heißt die *Blätterzahl* der Überlagerung und man spricht für $n \in \mathbb{N}$ von n -blättrigen Überlagerungen.

BEISPIEL. (1) Die in 2.4 verwendete Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) := e^{2\pi it}$ ist eine Überlagerung mit unendlich vielen Blättern.

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$, die durch $z \mapsto z^n$ gegeben ist, eine n -blättrige Überlagerung.

(3) Der reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist definiert als der Quotient S^n / \sim wobei $x \sim x'$ genau dann wenn $x = \pm x'$. Als Quotient des kompakten Raumes S^n ist $\mathbb{R}P^n$ natürlich kompakt und man überlegt sofort, dass $\mathbb{R}P^n$ Hausdorff ist. Nach Konstruktion kann $\mathbb{R}P^n$ als die Menge aller Geraden durch 0 in \mathbb{R}^{n+1} betrachtet werden.

Für einen Punkt $x \in S^n$ ist $U = \{y \in S^n : \langle y, x \rangle > 0\}$ klarerweise eine offene Umgebung von x . Für $y \in U$ liegt offensichtlich $-y$ nicht in U . Schränkt man nun die Quotientenabbildung $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ auf U ein, dann ist nach Definition der Quotiententopologie $\pi : U \rightarrow \pi(U)$ ein Homöomorphismus. Außerdem ist $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \sqcup -U$, also ist $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ eine zweiblättrige Überlagerung.

LEMMA (Eindeutigkeit von Lifts). *Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung und Y ein zusammenhängender und lokal zusammenhängender Raum. Sei $f : Y \rightarrow X$ eine stetige Funktion und seien $f_1, f_2 : Y \rightarrow E$ Lifts von f . Falls f_1 und f_2 in einem Punkt von Y übereinstimmen, dann ist $f_1 = f_2$.*

BEWEIS. Sei $y \in Y$ ein beliebiger Punkt, und U eine offene Umgebung von $f(y)$, die trivialisierend für p ist. Dann finden wir eine zusammenhängende Umgebung W von y in Y mit $f(W) \subset U$. Für jeden Lift \tilde{f} von f muß $\tilde{f}(W)$ ganz in einem der Zweige V von p über U liegen. Damit ist aber $\tilde{f}|_W = (p|_V)^{-1} \circ f|_W$ und \tilde{f} ist durch den Wert $\tilde{f}(y)$ schon lokal um y eindeutig bestimmt.

Betrachte nun die Menge $\{y \in Y : f_1(y) = f_2(y)\}$. Nach der obigen Überlegung ist diese Menge offen und da E Hausdorff ist, ist sie auch abgeschlossen. Stimmen f_1 und f_2 in einem Punkt überein, dann ist sie nicht leer, muss also mit Y übereinstimmen. \square

3.8. Liften von Homotopien. Die entscheidende Eigenschaft von Überlagerungen ist die sogenannte eindeutige Homotopie-Liftungseigenschaft:

SATZ (Eindeutige Homotopie–Liftung). Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung und Y ein lokal zusammenhängender Raum. Sei $H : Y \times I \rightarrow X$ eine stetige Homotopie und $f : Y \rightarrow E$ ein stetiger Lift des Anfangswertes von H , also $p(f(y)) = H(y, 0)$ für alle $y \in Y$. Dann existiert eine eindeutige stetige Homotopie $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow E$, die H liftet und Anfangswert f hat, also $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}(y, 0) = f(y)$ erfüllt.

BEWEIS. Sei \mathcal{U} eine Überdeckung von X mit offenen Mengen, die trivialisierend für p sind. Für einen Punkt $y \in Y$ ist die Teilmenge $\{y\} \times I$ von $Y \times I$ kompakt, also gibt es eine zusammenhängende Umgebung N_y von y und eine Unterteilung $0 = t_0^y < t_1^y < \dots < t_{k(y)}^y = 1$, sodass es für jedes $i = 0, \dots, k(y) - 1$ eine offene Menge $U_i^y \in \mathcal{U}$ gibt, sodass $H(N_y \times [t_i^y, t_{i+1}^y]) \subset U_i^y$.

Nun sei V_0^y der Zweig der Überlagerung über U_0^y , in dem $f(y)$ liegt. Wir definieren $\tilde{H}_0^y : N_y \times [t_0^y, t_1^y] \rightarrow E$ als $(p|_{V_0^y})^{-1} \circ H$. Da $\tilde{H}_0^y(y) = f(y)$ gilt, muss nach dem Eindeutigkeitslemma \tilde{H}_0^y auf $N_y \times \{0\}$ mit f übereinstimmen.

Nun sei V_1^y der Zweig der Überlagerung über U_1^y , in dem $\tilde{H}(y, t_1^y)$ liegt. Definiere $\tilde{H}_1^y : N_y \times [t_1^y, t_2^y] \rightarrow E$ als $(p|_{V_1^y})^{-1} \circ H$. Nach Konstruktion ist $\tilde{H}_1^y(y, t_1) = \tilde{H}_0^y(y, t_1)$, also stimmen nach dem Eindeutigkeitslemma \tilde{H}_0^y und \tilde{H}_1^y auf $N_y \times \{t_1\}$ überein. Damit definieren sie eine stetige Funktion $N_y \times [t_0^y, t_2^y] \rightarrow E$. In endlich vielen Schritten erreichen wir eine stetige Funktion $\tilde{H}^y : N_y \times I \rightarrow E$, die H liftet und auf $N_y \times \{0\}$ mit f übereinstimmt.

Sei $y' \in Y$ ein Punkt mit $N_{y'} \cap N_y \neq \emptyset$. Für $z \in N_y \cap N_{y'}$ ist $\tilde{H}^y(z, 0) = f(z) = \tilde{H}^{y'}(z, 0)$. Nach dem Eindeutigkeitslemma stimmen \tilde{H}^y und $\tilde{H}^{y'}$ auf $\{z\} \times I$ und somit auf $(N_y \cap N_{y'}) \times I$ überein. Damit definieren die \tilde{H}^y eine stetige Funktion $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow E$, die beide geforderten Eigenschaften hat. Nach dem Eindeutigkeitslemma ist jeder Lift von H durch die Einschränkung auf $Y \times \{0\}$ eindeutig festgelegt. \square

BEMERKUNG. Man kann die eindeutige Homotopie–Liftungseigenschaft schön diagrammatisch schreiben: Die gegebenen Abbildungen $H : Y \times I \rightarrow X$ und $f : Y \times \{0\} \rightarrow E$ passen in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & X, \end{array}$$

und die eindeutige Homotopie–Liftungseigenschaft sagt gerade, dass in jedem Diagramm dieser Form ein eindeutiger Pfeil wie in

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

existiert, der sowohl das Dreieck links oben als auch das Dreieck rechts unten kommutativ macht.

KOROLLAR. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Überlagerung.

(1) Für jeden stetigen Weg $c : I \rightarrow X$ und jeden Punkt $e \in p^{-1}(c(0))$ gibt es einen stetigen eindeutigen Weg $\tilde{c}^e : I \rightarrow E$ mit $p \circ \tilde{c}^e = c$ und $\tilde{c}^e(0) = e$.

(2) Sind c_0 und c_1 homotop relativ zu $\{0, 1\}$, dann auch \tilde{c}_0^e und \tilde{c}_1^e für jedes $e \in p^{-1}(c_0(0))$.

(3) Für Basispunkte $x_0 \in X$ und $e_0 \in E$ mit $p(e_0) = x_0$ ist der induzierte Homomorphismus $\pi_1(p) : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ injektiv. Sein Bild besteht genau aus den Klassen jener Wege $\sigma : I \rightarrow X$ mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$, für die $\tilde{\sigma}^{e_0}(1) = e_0$ ist.

BEWEIS. (1) Sei pt der einpunktige Raum. Betrachtet man $c : pt \times I \rightarrow X$ als stetige Homotopie und e als Abbildung $pt \rightarrow E$, die den Anfangswert von c liftet, dann folgt die Behauptung direkt aus dem Satz.

(2) Sei $H : I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie mit $H(t, 0) = c_0(t)$, $H(t, 1) = c_1(t)$, $H(0, s) = c_0(0)$ und $H(1, s) = c_0(1)$ für alle $t, s \in I$ und sei $e \in p^{-1}(c_0(0))$. Dann existiert nach (1) der Lift $\tilde{c}_0^e : I \rightarrow E$ und daher existiert nach Satz 3.8 eine Lift $\tilde{H} : I \times I \rightarrow E$ von H mit $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{c}_0^e(t)$.

Wie in (1) ist $s \mapsto \tilde{H}(0, s)$ ein Lift der konstanten Kurve $c_0(0)$, also $\tilde{H}(0, s) = e$ und analog ist $\tilde{H}(1, s) = \tilde{c}_0^e(1)$. Daher ist \tilde{H} eine Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$. Schließlich ist $t \mapsto \tilde{H}(t, 1)$ ein Lift der Kurve c_1 mit Anfangspunkt e , also gilt $\tilde{H}(t, 1) = \tilde{c}_1^e(t)$ nach der Eindeutigkeit in (1).

(3) Nach Definition ist für einen geschlossenen Weg σ die Klasse $\pi_1(p)([\sigma]) = [p \circ \sigma]$. Nun ist aber nach der Eindeutigkeit in (1) σ gerade der Lift zu $p \circ \sigma$ mit Anfangspunkt e_0 . Sind also σ und τ zwei solche Schleifen, sodass $p \circ \sigma$ und $p \circ \tau$ homotop relativ zu $\{0, 1\}$ sind, dann sind nach (2) auch σ und τ homotop relativ zu $\{0, 1\}$, also ist $\pi_1(p)$ injektiv. Die Beschreibung des Bildes ist offensichtlich. \square

3.9. Sei $p : E \rightarrow X$ eine bogenzusammenhängende Überlagerung eines bogenzusammenhängenden Raumes X , sei $e_0 \in E$ ein Basispunkt und setze $x_0 = p(e_0)$. Nach Teil (3) von Korollar 3.8 ist dann $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ injektiv, also können wir die Fundamentalgruppe von E als Untergruppe der Fundamentalgruppe von X betrachten. Wir können nun die Faser der Überlagerung in Termen der beiden Fundamentalgruppen beschreiben. Dazu benötigen wir noch eine algebraische Vorbereitung.

Sei M eine Menge und G eine Gruppe mit neutralem Element e . Eine *Rechtswirkung* von G auf M ist eine Funktion $M \times G \rightarrow M$, die man als $(m, g) \mapsto m \cdot g$ schreibt, sodass $m \cdot e = m$ und $m \cdot (gh) = (m \cdot g) \cdot h$ für alle $m \in M$ und alle $g, h \in G$ gilt. Für ein Element $m \in M$ definiert man den *Stabilisator* oder die *Isotropieuntergruppe* $G_m \subset G$ als $\{g \in G : m \cdot g = m\}$. Nach Definition ist das eine Untergruppe von G . Andererseits definiert man den *Orbit* $m \cdot G$ von m als $\{m \cdot g : g \in G\}$. Fixieren wir nun $m \in M$. Dann definiert $\pi(g) := m \cdot g$ eine surjektive Funktion $\pi : G \rightarrow m \cdot G$. Andererseits gilt $m \cdot g_1 = m \cdot g_2$ genau dann, wenn $m \cdot (g_2g_1^{-1}) = m$, also $g_2g_1^{-1} \in G_m$ gilt. Nun ist aber $g_2g_1^{-1} \in G_m$ genau dann, wenn g_2 in der Nebenklasse $G_m g_1$ liegt. Damit sehen wir aber, dass die Funktion π eine Bijektion zwischen $m \cdot G$ und der Menge der rechten Nebenklassen von G_m in G liefert.

PROPOSITION. Sei $p : E \rightarrow X$ eine bogenzusammenhängende Überlagerung eines bogenzusammenhängenden Raumes X , $e_0 \in E$ ein Basispunkt und $x_0 = p(e_0)$. Dann gibt es eine Bijektion von der Menge der rechten Nebenklassen von $p_*(\pi_1(E, e_0))$ in $\pi_1(X, x_0)$ auf die Faser $F := p^{-1}(x_0)$.

BEWEIS. Sei $\sigma : I \rightarrow X$ eine Schleife bei x_0 , $e \in F = p^{-1}(x_0)$ ein Punkt und $\tilde{\sigma}^e$ der eindeutige Lift von σ (als Weg). Nach Teil (2) von Korollar 3.8 hängt der Endpunkt $\tilde{\sigma}^e(1) \in F$ nur von e und von der Klasse $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ ab. Wir definieren eine Abbildung $F \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow F$ durch $(e, [\sigma]) \mapsto e \cdot [\sigma] := \tilde{\sigma}^e(1)$.

Ist τ eine zweite Schleife bei x_0 so ist, wiederum nach der Eindeutigkeit von Lifts von Wegen, $(\sigma * \tau)^e = \tilde{\sigma}^e * \tilde{\tau}^{\tilde{\sigma}^e(1)}$. Dies bedeutet aber gerade, dass $(e \cdot [\sigma]) \cdot [\tau] = e \cdot [\sigma * \tau] =$

$e \cdot ([\sigma][\tau])$ ist. Daher haben wir eine Rechtswirkung der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser F .

Da E bogenzusammenhängend ist, findet man für jeden Punkt $e \in F$ einen Weg $c : I \rightarrow E$ von e_0 nach e . Dann ist $\sigma := p \circ c$ eine Schleife bei x_0 , und nach Konstruktion ist $c = \tilde{\sigma}^{e_0}$. Damit ist aber $e_0 \cdot [\sigma] = e$, also ist der Orbit von e_0 die ganze Faser F . Schließlich liegt $[\sigma]$ genau dann in der Isotropieuntergruppe von e_0 , wenn der Lift $\tilde{\sigma}^{e_0}$ geschlossen ist. Nach Teil (3) von Korollar 3.8 ist also die Isotropieuntergruppe genau $p_*(\pi_1(E, e_0))$ und das Resultat folgt. \square

BEMERKUNG. Aus dieser Konstruktion sieht man auch sofort, wie die Untergruppe $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$ von der Wahl von $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ abhängt. Sie ist ja genau die Isotropieuntergruppe von e_0 bezüglich der Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser. Ist nun $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ so, dass $e = e_0 \cdot [\sigma]$ gilt, dann ist $e = e \cdot [\tau]$ äquivalent zu $e_0 = e_0 \cdot ([\sigma][\tau][\sigma]^{-1})$. Damit ist $p_*(\pi_1(E, e)) = [\sigma]p_*(\pi_1(E, e_0))[\sigma]^{-1}$, also sind die beiden Untergruppen konjugiert in $\pi_1(X, x_0)$.

3.10. Existenz von Lifts. Wir können nun (unter schwachen zusätzlichen Voraussetzungen) auch vollständig klären, welche stetigen Funktionen sich auf eine gegebene Überlagerung liften lassen.

SATZ. Sei $p : E \rightarrow X$ eine bogenzusammenhängende Überlagerung, $x_0 \in X$ ein Basispunkt, $e \in p^{-1}(x_0)$ ein Punkt, (Y, y_0) ein bogenzusammenhängender und lokal bogenzusammenhängender punktierter Raum und $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ stetig. Dann existiert ein stetiger Lift $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ mit $\tilde{f}(y_0) = e$ genau dann, wenn $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e))$.

BEWEIS. Falls ein Lift \tilde{f} existiert, so ist $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$ und damit muss das Bild von f_* im Bild von p_* liegen.

Sei umgekehrt diese Bedingung erfüllt und sei y ein Punkt von Y . Dann kann man einen Weg $c : I \rightarrow Y$ von y_0 nach y wählen. Sei $\tilde{f}(y) := \widetilde{(f \circ c)}^e(1)$, der Endpunkt des Lifts der Kurve $f \circ c : I \rightarrow X$. Ist $c' : I \rightarrow Y$ ein anderer Weg von y_0 nach y und sei $\sigma := (f \circ c') * (f \circ c)^{-1}$. Dann ist $[\sigma] \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e))$ also ist nach Teil (3) von Korollar 3.8 der Lift $\tilde{\sigma}^e$ eine geschlossene Kurve. Dies bedeutet aber, dass die Endpunkte von $\widetilde{(f \circ c)}^e$ und von $\widetilde{(f \circ c')}^e$ übereinstimmen, und damit ist \tilde{f} ein wohldefinierter Lift von f . Es bleibt zu zeigen, dass \tilde{f} stetig ist.

Sei dazu $y \in Y$ beliebig, U eine offene Umgebung von $f(y)$, die trivialisierend für p ist, und V der Zweig der Überlagerung über U , der $\tilde{f}(y)$ enthält. Da Y lokal bogenzusammenhängend ist, gibt es eine bogenzusammenhängende Umgebung W von y mit $f(W) \subset U$. Sei c_0 ein fixer Weg von y_0 nach y . Dann können wir für $z \in W$ in der Konstruktion von \tilde{f} einen Weg der Form $c_0 * c$ wählen, wobei c ein Weg von y nach z ist, der ganz in W liegt. Damit folgt aber, dass $\tilde{f}(z) = \widetilde{(f \circ c)}^{\tilde{f}(y)}(1)$. Da aber der Weg c ganz in U liegt und durch $\tilde{f}(y)$ geht, liegt sein Lift ganz in V . Das impliziert aber sofort, dass $\tilde{f}|_W = (p|_V)^{-1} \circ f|_W$ gilt, also ist \tilde{f} stetig auf W . \square

3.11. Überlagerungshomomorphismen. Wir sind nun schon ziemlich nahe an einer Klassifikation der bogenzusammenhängenden Überlagerungen eines bogenzusammenhängenden Raumes. Zunächst noch einige Definitionen:

DEFINITION. (1) Seien $p : E \rightarrow X$ und $p' : E' \rightarrow X$ Überlagerungen von X . Ein Überlagerungshomomorphismus von E nach E' ist eine stetige Funktion $f : E \rightarrow E'$ mit $p' \circ f = p$.

- (2) Die Überlagerungen p und p' aus (1) heißen *äquivalent*, falls es Überlagerungshomomorphismen $f : E \rightarrow E'$ und $g : E' \rightarrow E$ gibt, sodass $g \circ f = \text{id}_E$ und $f \circ g = \text{id}_{E'}$.
- (3) Eine *Decktransformation* einer Überlagerung $p : E \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus $f : E \rightarrow E$, der ein Überlagerungshomomorphismus ist. Dann ist auch f^{-1} eine Decktransformation, also bilden die Decktransformationen eine Gruppe $\text{Deck}(E)$.

SATZ. *Seien $p : E \rightarrow X$ und $p' : E' \rightarrow X$ bogenzusammenhängende Überlagerungen eines bogenzusammenhängenden und lokal bogenzusammenhängenden Raumes X , $x_0 \in X$, $e_0 \in E$ und $e'_0 \in E'$ Basispunkte mit $p(e_0) = p'(e'_0) = x_0$. Dann gilt:*

- (1) *Ist $f : E \rightarrow E'$ ein Überlagerungshomomorphismus, dann ist f selbst eine Überlagerung.*
- (2) *Ein Überlagerungshomomorphismus $f : E \rightarrow E'$ existiert genau dann, wenn die Untergruppe $p_*(\pi_1(E, e_0))$ in $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Untergruppe von $p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ konjugiert ist.*
- (3) *Die Überlagerungen p und p' sind genau dann äquivalent, wenn die Untergruppen $p_*(\pi_1(E, e_0))$ und $p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ konjugiert in $\pi_1(X, x_0)$ sind.*
- (4) *Sei $G := \pi_1(X, x_0)$, H die Untergruppe $p_*(\pi_1(E, e_0))$. Dann ist die Gruppe $\text{Deck}(E)$ der Decktransformationen isomorph zur Quotientengruppe $N_G(H)/H$, wo $N_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} \subset H\}$ der Normalisator von H in G ist.*

BEWEIS. (1) Sei $U \subset X$ eine zusammenhängende offene Teilmenge, die trivialisierend für beide Überlagerungen ist. Zu einem Punkt $e \in p^{-1}(U)$ sei V der Zweig von p über U , der e enthält und W der Zweig von p' über U , der $f(e)$ enthält. Da $p'(f(V))$ ganz in U liegt und f ein stetiger Lift von p ist, gilt $f = (p'|_W)^{-1} \circ p$ auf V . Somit ist $f|_V : V \rightarrow W$ ein Homöomorphismus.

Das zeigt auch, dass ein Zweig W von p' über U entweder ganz im Bild $f(E)$ liegt, oder zu diesem Bild disjunkt ist. Somit ist das Bild $f(E)$ offen und abgeschlossen in E' , also ist $f(E) = E'$. Nun ist aber für einen Punkt $e' \in E'$ das Urbild einer Umgebung W , die wie oben konstruiert ist, gerade die disjunkte Vereinigung über die entsprechenden Umgebungen V für jene $e \in p^{-1}(p'(e'))$, die $f(e) = e'$ erfüllen.

(2) Ein Überlagerungshomomorphismus $f : E \rightarrow E'$ ist nach Definition ein Lift von $p : E \rightarrow X$ auf die Überlagerung $p' : E' \rightarrow X$. Nach Satz 3.10 gibt es so einen Lift genau dann, wenn $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset p'_*(\pi_1(E', f(e_0)))$ gilt. Nach dem Beweis von Satz 3.9 ist jeder Punkt in $(p')^{-1}(x_0)$ von der Form $e'_0 \cdot [\sigma]$ für ein $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$. Nach Bemerkung 3.9 ist $p'_*(\pi_1(E', e'_0 \cdot [\sigma])) = [\sigma]p'_*(\pi_1(E', e'_0))[\sigma]^{-1}$. Wendet man das auf $f(e_0) \in (p')^{-1}(x_0)$ an, folgt die Behauptung sofort.

(3) Die Notwendigkeit der Konjugiertheitsbedingung ist offensichtlich nach (2). Ist andererseits die Bedingung erfüllt, so erhält man wie im Beweis von (2) einen Punkt $e'_1 \in (p')^{-1}(x_0)$, sodass $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_1))$. Daher gibt es aber nach Satz 3.10 Überlagerungshomomorphismen $f : E \rightarrow E'$ und $g : E' \rightarrow E$ mit $f(e_0) = e'_1$ und $g(e'_1) = e_0$. Nun ist aber $g \circ f : E \rightarrow E$ ein Überlagerungshomomorphismus, also ein Lift von $p : E \rightarrow X$, der e_0 auf sich selbst abbildet. Nach dem Eindeutigkeitslemma 3.7 ist $g \circ f = \text{id}_E$ und analog ist $f \circ g = \text{id}_{E'}$.

(4) Jede Decktransformation $f : E \rightarrow E$ ist ein Lift von $p : E \rightarrow X$ und daher durch $f(e_0) \in p^{-1}(x_0)$ eindeutig festgelegt. Nach dem Beweis von Satz 3.9 findet man $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, sodass $f(e_0) = e_0 \cdot [\sigma]$ gilt. Nach Bemerkung 3.9 ist $p_*(\pi_1(E, f(e_0))) = [\sigma]H[\sigma]^{-1}$ und nach Satz 3.10 muss das in H enthalten sein, weil f ein Lift von p ist. Damit gilt aber $[\sigma] \in N_G(H)$. Ist $e_0 \cdot [\sigma] = e_0 \cdot [\tau]$, dann ist $e_0 \cdot ([\sigma][\tau]^{-1}) = e_0$, also $[\sigma][\tau]^{-1} \in H$. Damit hängt aber die Klasse von $[\sigma]$ in $N_G(H)/H$ nur von f ab, und wir erhalten eine injektive Abbildung $\text{Deck}(E) \rightarrow N_G(H)/H$.

Ist $[\sigma] \in N_G(H)$ dann ist $H = [\sigma]H[\sigma]^{-1} = p_*(\pi_1(E, e_0 \cdot [\sigma]))$. Nach Satz 3.10 gibt einen Lift $f : E \rightarrow E$ mit $f(e_0) = e_0 \cdot [\sigma]$, also ist unsere Abbildung bijektiv und es bleibt nur noch zu zeigen, dass sie ein Homomorphismus ist.

Nach Definition ist $e \cdot [\sigma] = \tilde{\sigma}^e(1)$. Für eine Decktransformation $f : E \rightarrow E$ ist $f \circ \tilde{\sigma}^e$ ein Lift von σ , muss also gleich $\tilde{\sigma}^{f(e)}$ sein. Betrachtet man den Endpunkt dieser Kurven, dann folgt $f(e \cdot [\sigma]) = f(e) \cdot [\sigma]$. Sind also $f, g \in \text{Deck}(E)$ mit $f(e_0) = e_0 \cdot [\sigma]$ und $g(e_0) = e_0 \cdot [\tau]$, dann ist $g(f(e_0)) = g(e_0 \cdot [\sigma]) = g(e_0) \cdot [\sigma] = e_0 \cdot ([\tau][\sigma])$ und die Behauptung folgt. \square

Die universelle Überlagerung

Zur vollständigen Beschreibung der Überlagerungen eines gegebenen Raumes X fehlen uns nun noch Existenzresultate. Besonders schön wäre ein Beweis der Existenz einer einfach zusammenhängenden Überlagerung. Diese hätte nämlich nach Proposition 3.9 eine Faser, die als Menge mit der Fundamentalgruppe von X übereinstimmt, nach Teil (4) von Satz 3.11 wäre die Gruppe der Decktransformationen isomorph zur Fundamentalgruppe von X , und den ersten beiden Teilen dieses Satzes würde so eine Überlagerung auch jede andere (bogenzusammenhängende) Überlagerung von X überlagern. Schließlich gibt es nach Teil (3) von Satz 3.11 bis auf Äquivalenz höchstens eine solche Überlagerung. Diese heißt (falls sie existiert) die *universelle Überlagerung* \tilde{X} von X .

3.12.

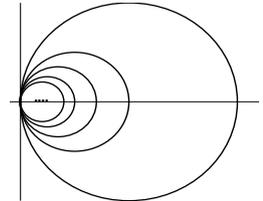
DEFINITION. (1) Ein topologischer Raum X heißt *semi-lokal einfach zusammenhängend*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, sodass jeder geschlossene Weg $\sigma : I \rightarrow U$ nullhomotop in X ist.

(2) X heißt *hinreichend zusammenhängend*, falls X bogenzusammenhängend, lokal bogenzusammenhängend und semi-lokal einfach zusammenhängend ist.

BEMERKUNG. Offensichtlich muss ein Raum X der eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ besitzt semi-lokal einfach zusammenhängend sein. Ist nämlich U eine Umgebung von x , die trivialisierend für p ist, V ein Zweig über U und σ ein geschlossener Weg der ganz in U liegt, dann ist $p|_V^{-1} \circ \sigma$ ein geschlossener Lift von σ . Dieser ist nullhomotop in \tilde{X} und das Bild der Homotopie zeigt, dass σ nullhomotop in X sein muss.

BEISPIEL. (1) Ein bogenzusammenhängender Raum, in dem jeder Punkt eine kontrahierbare Umgebung besitzt ist hinreichend zusammenhängend. Daher sind zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten hinreichend zusammenhängend.

(2) Betrachte in \mathbb{R}^2 die Menge aller Kreise, die durch den Nullpunkt gehen, ihren Mittelpunkt auf der positiven x -Achse haben und Radius $1/n$ für $n \in \mathbb{N}$ haben. Der entstehende Teilraum von \mathbb{R}^2 wird als der "Hawaiianische Ohrring" bezeichnet. Er ist offensichtlich bogenzusammenhängend, lokal bogenzusammenhängend aber nicht semi-lokal einfach zusammenhängend.



Bildet man das Produkt dieses Raumes mit I und klebt ein Ende mit einer Scheibe als "Deckel" zu, so erhält man einen Raum der semi-lokal einfach zusammenhängend aber nicht lokal einfach zusammenhängend ist.

Der grundlegende Existenzsatz ist nun:

SATZ. Jeder hinreichend zusammenhängende Raum X besitzt eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$.

BEWEISSKIZZE. Wir fixieren einen Basispunkt $x_0 \in X$ und nennen in diesem Beweis eine Teilmenge $W \subset X$ brav, wenn sie offen und bogenzusammenhängend ist und jeder geschlossenen Weg, der ganz in W liegt, nullhomotop in X ist. Die Zusammenhangsvoraussetzungen an X bedeuten genau, dass jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus braven Mengen besitzt.

Es gibt mehrere Beweismethoden, die alle einige (nicht sehr spannende) Verifikationen benötigen. Eine Möglichkeit ist, eine Überdeckung von X durch brave Mengen U_α zu betrachten, dann für jedes α die Menge $U_\alpha \times \pi_1(X, x_0)$ zu bilden, und diese Mengen geeignet zu verkleben. So ein Beweis findet sich in [S–Z].

Wir skizzieren hier einen anderen Weg. Sei \tilde{X} die Menge aller Homotopieklassen relativ zu $\{0, 1\}$ von Wegen $c : I \rightarrow X$ mit $c(0) = x_0$. Da der Endpunkt so eines Weges nur von der Homotopieklasse abhängt, liefert $p([c]) := c(1)$ eine wohldefinierte Funktion $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Für $[c] \in \tilde{X}$ und eine brave Menge $W \subset X$ mit $p([c]) \in W$ definieren wir eine Teilmenge $U_{[c], W} \subset \tilde{X}$, als die Menge jener Homotopieklassen, die in der Form $[c * \tilde{c}]$ für einen Weg $\tilde{c} : I \rightarrow W$ mit $\tilde{c}(0) = p([c])$ geschrieben werden können. Man sieht sofort, dass dies wohldefiniert ist.

Nehmen wir an, dass $[c] \in U_{[c_1], W_1} \cap U_{[c_2], W_2}$ gilt. Dann ist $p([c]) \in W_1 \cap W_2$ und wir finden eine brave Umgebung W von $p([c])$ mit $W \subset W_1 \cap W_2$. Dann ist aber sicher $U_{[c], W} \subset U_{[c_1], W_1} \cap U_{[c_2], W_2}$, also bilden die Mengen dieser Form eine Basis für eine Topologie auf \tilde{X} .

Seien nun $[c_1], [c_2] \in \tilde{X}$ mit $p([c_1]) = p([c_2]) =: x$ und so, dass $U_{[c_1], W} \cap U_{[c_2], W} \neq \emptyset$ für eine brave Umgebung W von x gilt. Dann finden wir Wege $c', c'' : I \rightarrow W$, sodass $c_1 * c'$ und $c_2 * c''$ homotop relativ zu $\{0, 1\}$ sind. Dann ist $c' * (c'')^{-1}$ ein geschlossener Weg, der ganz in W liegt, also nullhomotop in X und nach Lemma 3.2 folgt $c' \sim c'' \text{ rel } \{0, 1\}$. Damit ist aber $c_1 * c' \sim c_2 * c' \text{ rel } \{0, 1\}$ und daraus folgt sofort, dass c_1 und c_2 homotop sind, also $[c_1] = [c_2]$ gilt. Das bedeutet aber genau, dass $p^{-1}(W)$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $U_{[c], W}$ über alle $[c] \in p^{-1}(x)$ ist. Offensichtlich ist $p|_{U_{[c], W}} : U_{[c], W} \rightarrow W$ bijektiv und von oben schließt man leicht, dass das sogar ein Homöomorphismus ist.

Somit bleibt zu zeigen, dass \tilde{X} einfach zusammenhängend ist. Für $[c] \in \tilde{X}$ und $s \in [0, 1]$ betrachte die Kurve $c_s : I \rightarrow X$, die gegeben ist als $c_s(t) = c(st)$. Dann zeigt man leicht, dass $s \mapsto [c_s]$ ein stetiger Weg in \tilde{X} von der Homotopieklasse $[x_0]$ des konstanten Weges nach $[c]$ ist. Damit ist \tilde{X} bogenzusammenhängend. Sei andererseits $\sigma : I \rightarrow X$ eine Schleife bei x_0 und sei $\tilde{\sigma} : I \rightarrow \tilde{X}$ der Lift (als Weg) mit Anfangspunkt $[x_0]$. Dann finden wir eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ von I und brave Teilmengen W_1, \dots, W_n von X , sodass $\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset W_i$ gilt. Auf $[t_{i-1}, t_i]$ kann man $\tilde{\sigma}$ leicht explizit angeben, und man sieht daraus, dass $\tilde{\sigma}(t) = [\sigma_t]$ gilt. Damit ist aber $\tilde{\sigma}(1) = [\sigma]$ also ist $\tilde{\sigma}$ genau dann geschlossen, wenn $[\sigma] = [x_0]$ gilt. Nach Teil (3) von Korollar 3.8 ist \tilde{X} einfach zusammenhängend. \square

3.13. Klassifikation von Überlagerungen. Eine Rechtswirkung einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X heißt *strikt diskontinuierlich*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, sodass für jedes $g \in G$ mit $g \neq e$ die offene Menge $U \cdot g := \{u \cdot g : u \in U\}$ disjunkt zu U ist. In diesem Fall sind dann für $g_1 \neq g_2$ auch die Mengen $U \cdot g_1$ und $U \cdot g_2$ disjunkt.

Sei X/G der Raum der Orbits der Wirkung, also der Quotient von X nach der Äquivalenzrelation $x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow \exists g \in G : x_2 = x_1 \cdot g$ und $p : X \rightarrow X/G$ die Projektion. Ist $x \in X$ ein Punkt, U eine offene Umgebung von x wie oben, dann ist nach Definition $p^{-1}(p(U))$ die disjunkte Vereinigung der offenen Mengen $U \cdot g$ für $g \in G$ und

die Einschränkung von p auf jede dieser Mengen ist ein Homöomorphismus. Damit ist $p : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung.

Für jedes $g \in G$ ist $x \mapsto x \cdot g$ als Abbildung $X \rightarrow X$ offensichtlich eine Decktransformation von $p : X \rightarrow X/G$. Für $x \in X$ ist die Faser über $p(x)$ gerade die Menge aller $x \cdot g$, also genau der Orbit von x . Daher muss G mit der Gruppe der Decktransformationen übereinstimmen. Ist insbesondere X einfach zusammenhängend, dann ist $X \rightarrow X/G$ die universelle Überlagerung und $\pi_1(X/G) \cong G$.

Mit Hilfe dieser Überlagerungen können wir nun die Überlagerungen eines hinreichend zusammenhängenden Raumes vollständig klassifizieren:

SATZ. *Sei (X, x_0) ein hinreichend zusammenhängender punktierter Raum. Dann gibt es zu jeder Untergruppe $H \subset \pi_1(X, x_0)$ eine bogenzusammenhängende Überlagerung $p : E \rightarrow X$ und einen Punkt $e_0 \in E$ mit $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$.*

Insbesondere gibt es eine bijektive Korrespondenz zwischen Äquivalenzklassen von bogenzusammenhängenden Überlagerungen von X und Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

BEWEIS. Sei $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung. Nach Satz 3.11 erhält man durch Wahl eines Punktes $\tilde{x}_0 \in \tilde{p}^{-1}(x_0)$ eine Identifikation der Gruppe $\text{Deck}(\tilde{p})$ mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$. Dann kann man die Untergruppe H als Gruppe von Decktransformationen betrachten, und wir erhalten eine Wirkung von H auf \tilde{X} , die offensichtlich strikt diskontinuierlich ist.

Nun setzen wir $E := \tilde{X}/H$ und bezeichnen mit $q : \tilde{X} \rightarrow E$ die kanonische Abbildung, die nach unseren Überlegungen von oben eine Überlagerung ist. Da jedes Element von H als Decktransformation wirkt, induziert die Projektion \tilde{p} eine stetige Abbildung $p : E \rightarrow X$.

Sei $U \subset X$ offen und trivialisierend für \tilde{p} . Wir nennen zwei Zweige V_1 und V_2 von \tilde{p} über U äquivalent, falls es eine Decktransformation in H gibt, die V_1 auf V_2 abbildet. Wählen wir nun aus jeder der Äquivalenzklassen einen Zweig V_α , dann sind nach Konstruktion die Mengen $q(V_\alpha) \subset E$ disjunkte offene Mengen und die Einschränkung von p auf jedes $q(V_\alpha)$ ist ein Homöomorphismus auf U . Klarerweise ist aber $p^{-1}(U)$ die Vereinigung der $q(V_\alpha)$.

Nun setzen wir $e_0 := q(\tilde{x}_0)$ und betrachten das Bild $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$. Nach Teil (3) von Korollar 3.8 besteht dieses gerade aus den Klassen jener Schleifen σ deren Lift nach E durch e_0 geschlossen ist. Dieser Lift ist aber gerade das Bild unter q des Liftes auf \tilde{X} durch \tilde{x}_0 und dieses Bild ist genau dann eine geschlossene Kurve, wenn der Endpunkt des Liftes auf \tilde{X} von \tilde{x}_0 aus durch eine Decktransformation in H erreichbar ist. Damit folgt aber $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$. \square

BEISPIEL. (1) Für $X = S^1$ ist die universelle Überlagerung gerade die Exponentialabbildung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$. Die nichttrivialen Untergruppen der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ sind genau die Gruppen $n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist jede Überlagerung von S^1 entweder äquivalent zur universellen Überlagerung, oder zu einer der Überlagerung $S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$.

(2) Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend, also ist die Überlagerung $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ aus Beispiel (3) von 3.7 die universelle Überlagerung. Insbesondere ist $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ und da diese Gruppe keine nichttrivialen Untergruppen besitzt ist $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ die einzige nichttriviale Überlagerung von $\mathbb{R}P^n$.

(3) **Linsenräume:** Für $n \geq 2$ betrachte die Sphäre S^{2n-1} als Einheitssphäre in \mathbb{C}^n . Die zyklische Gruppe \mathbb{Z}_p kann in natürlicher Weise als Gruppe von komplexen Zahlen vom Betrag 1 betrachtet werden. Seien $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}$ alle teilerfremd zu p . Dann erhält

man eine Wirkung von \mathbb{Z}_p auf S^{2n-1} durch $(z_1, \dots, z_n) \cdot z := (z_1 z^{q_1}, \dots, z_n z^{q_n})$, und man verifiziert leicht, dass diese Wirkung strikt diskontinuierlich ist. Der Quotient S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p heißt der *Linsenraum* $L(p; q_1, \dots, q_n)$. Nach Konstruktion ist die kanonische Projektion von S^{2n-1} die universelle Überlagerung, und der Linsenraum hat Fundamentalgruppe \mathbb{Z}_p .

Die Linsenräume liefern interessante Beispiele und Gegenbeispiele in der algebraischen Topologie. So sind etwa $L(7; 1, 1)$ und $L(7; 1, 2)$ homotopieäquivalente 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die nicht homöomorph sind.

Simplizialkomplexe und CW–Komplexe

In diesem Kapitel wollen wir Beschreibungen von topologischen Räumen besprechen, die für die Zwecke der algebraischen Topologie besonders geeignet sind. Das Ziel des Kapitels sind die CW–Komplexe, die einen guten Kompromiss zwischen Einfachheit und Allgemeinheit bieten. Als einfachere Klasse von Räumen besprechen wir zunächst Simplizialkomplexe. Resultate über Simplizialkomplexe sind fundamental für die Theorie der CW–Komplexe. Bevor wir uns diesen Themen zuwenden können, müssen wir noch Kofaserungen besprechen, die einen Begriff für homotopietheoretisch “schöne” Teilräume liefern.

Kofaserungen

4.1. Grundlegendes.

DEFINITION. Sei (X, A) ein topologisches Paar. Man sagt (X, A) hat die *allgemeine Homotopieerweiterungseigenschaft (AHE)* oder (X, A) ist eine *Kofaserung*, wenn es für jeden topologischen Raum Z , jede Homotopie $H : A \times I \rightarrow Z$ und jede stetige Funktion $f : X \rightarrow Z$ mit $f|_A = H|_{A \times \{0\}}$ für alle $a \in A$ eine Homotopie $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Z$ gibt, sodass $\tilde{H}|_A = H$ und $\tilde{H}|_{X \times \{0\}} = f$ für alle $a \in A$ und alle $x \in X$ gilt.

Ist zusätzlich A abgeschlossen in X , dann spricht man von einer *abgeschlossenen Kofaserung*.

Die AHE besagt also gerade, dass sich jede Homotopie auf A , deren Anfangswert stetig auf X fortgesetzt werden kann, mit diesem Anfangswert stetig auf X fortsetzen lässt.

Der Name Kofaserung hat seinen Ursprung in der Tatsache, dass dieser Begriff (in einem gewissen Sinne) dual zum Begriff der Faserung ist, den wir in Kapitel 5 studieren werden. Der Begriff der Faserung ist eine Abschwächung des Überlagerungsbegriffs und durch eine Abschwächung der Homotopie–Liftungseigenschaft aus Satz 3.8 definiert.

Um diese Analogie zu verstehen, ist es günstiger die Kofaserungseigenschaft als eine Eigenschaft der Inklusionsabbildung $i : A \rightarrow X$ zu verstehen. Die AHE liest sich dann so, dass es zu $H : A \times I \rightarrow Z$ und $f : X \rightarrow Z$ mit $f \circ i = H|_{A \times \{0\}}$ ein $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Z$ mit $\tilde{H} \circ (i \times \text{id}_I) = H$ und $\tilde{H}|_{X \times \{0\}} = f$ gibt. Diese Eigenschaft können wir nun elegant diagrammatisch formulieren, was auch die Analogie zur Homotopie–Liftungseigenschaft liefert. Dazu müssen wir den Zusammenhang zwischen Funktionen auf Produkten und Funktionen mit Werten in Funktionenräumen benutzen. Nach dem Exponentialgesetz aus 1.9 entsprechen stetige Funktionen $F : A \times I \rightarrow Z$ genau stetigen Funktionen $\tilde{F} : A \rightarrow C(I, Z)$ und analog für X statt A . Die Evaluation $\text{ev}_0 : C(I, Z) \rightarrow Z$ ist stetig und $\text{ev}_0 \circ \tilde{F} = F|_{A \times \{0\}}$. Damit kann man aber die AHE so formulieren, dass in jedem Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\check{H}} & C(I, Z) \\ \downarrow i & & \downarrow \text{ev}_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

eine stetige Abbildung wie den strichlierten Pfeil in

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\check{H}} & C(I, Z) \\ \downarrow i & \check{H} \nearrow & \downarrow \text{ev}_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

gibt, der beide Dreiecke kommutativ macht.

4.2. Nach dieser Umformulierung können wir nun zwei grundlegende Resultate über Kofaserungen durch reine “Diagrammgymnastik” beweisen:

PROPOSITION. (1) Sind (X, A) und (Y, X) Kofaserungen, so ist auch (Y, A) eine Kofaserung.

(2) Sei (X, A) eine Kofaserung und $\phi : A \rightarrow Y$ stetig. Dann ist auch $(Y, X \cup_\phi Y)$ eine Kofaserung.

BEWEIS. (1) Ist eine leichte Übungsaufgabe (siehe Proseminar).

(2) Hier sieht die Ausgangssituation wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\phi} & Y & \xrightarrow{\check{H}} & C(I, Z) \\ \downarrow i & & \downarrow \phi_* i & & \downarrow \text{ev}_0 \\ X & \xrightarrow{i_* \phi} & X \cup_\phi Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Nach der AHE von (X, A) finden wir eine stetige Funktion $\check{H}_1 : X \rightarrow C(I, Z)$ sodass im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\check{H} \circ \phi} & C(I, Z) \\ \downarrow i & \check{H}_1 \nearrow & \downarrow \text{ev}_0 \\ X & \xrightarrow{f \circ i_* \phi} & Z \end{array}$$

beide Dreiecke kommutieren. Nach der universellen Eigenschaft des verklebten Raumes (siehe 1.6) induzieren \check{H}_1 und \check{H} eine stetige Funktion $\check{\check{H}} : X \cup_\phi Y \rightarrow C(I, Z)$, sodass $\check{\check{H}} \circ i_* \phi = \check{H}_1$ und $\check{\check{H}} \circ \phi_* i = \check{H}$. Die zweite Eigenschaft ist eine der beiden geforderten Eigenschaften für eine fortgesetzte Homotopie. Andererseits müssen wir noch $\text{ev}_0 \circ \check{\check{H}}$ betrachten. Nun ist aber $\text{ev}_0 \circ \check{\check{H}} \circ \phi_* i = \text{ev}_0 \circ \check{H} = f \circ \phi_* i$ und $\text{ev}_0 \circ \check{\check{H}} \circ i_* \phi = \text{ev}_0 \circ \check{H}_1 = f \circ i_* \phi$. Nach der universellen Eigenschaft des verklebten Raumes impliziert das $\text{ev}_0 \circ \check{\check{H}} = f$. \square

4.3. Eine Charakterisierung. Es ist im Allgemeinen eher schwierig, die definierende Eigenschaft einer Kofaserung direkt zu verifizieren. Für den Fall von abgeschlossenen Kofaserungen gibt es äquivalente Charakterisierungen, die in konkreten Situationen oft leicht verifizierbar sind. Um diese zu formulieren benötigen wir einige Begriffe:

DEFINITION. Sei (A, X) ein topologisches Paar.

- (1) A heißt ein *Retrakt* von X , wenn es eine stetige Funktion $r : X \rightarrow A$ gibt, sodass $r|_A = \text{id}_A$ ist. So eine Funktion r heißt dann eine *Retraktion*.
 (2) A heißt ein *Deformationsretrakt* von X , wenn es eine Retraktion r gibt, die als Funktion nach X homotop zur Identität id_X ist. Kann man r sogar so wählen, dass es relative zu A homotop zu id_X ist, dann heißt A ein *starker Deformationsretrakt* von X .

BEISPIEL. (1) In Korollar 2.5 haben wir bewiesen, dass S^1 kein Retrakt der Scheibe B^2 ist. Wir werden später allgemein zeigen, dass S^n kein Retrakt von B^{n+1} ist. Die Funktion $H(x, t) = x \left(\frac{|x|+t(1-|x|)}{|x|} \right)$ zeigt aber, dass S^n ein starker Deformationsretrakt von $B^{n+1} \setminus \{0\}$ und von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist.

(2) Entfernt man aus einem Torus einen Punkt, dann enthält der entstehende Raum $S^1 \vee S^1$ als starken Deformationsretrakt.

Damit können wir nun eine Charakterisierung von abgeschlossenen Kofaserungen beweisen.

SATZ. Sei (X, A) eine topologisches Paar, wobei $A \subset X$ abgeschlossen ist. Sei $W \subset X \times I$ der Teilraum $X \times \{0\} \cup A \times I$. Dann sind äquivalent:

- (1) (X, A) ist eine Kofaserung.
 (2) Der Teilraum $W \subset X \times I$ ist ein Retrakt.
 (3) Der Teilraum $W \subset X \times I$ ist ein starker Deformationsretrakt.

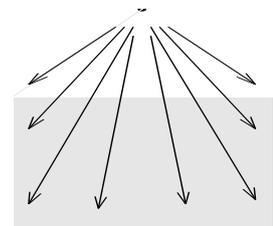
BEWEIS. (1) \Rightarrow (2) Betrachte die Inklusionen als Abbildungen $H : A \times I \rightarrow W$ und $f : X \rightarrow W$. Wendet man darauf die AHE an, dann erhält man eine stetige Funktion $\tilde{H} : X \times I \rightarrow W$, die nach Definition eine Retraktion ist

(2) \Rightarrow (3) Sei $r : X \times I \rightarrow W$ eine Retraktion, und seien $r_1 : X \times I \rightarrow X$ und $r_2 : X \times I \rightarrow I$ die Komponenten von r . Dann definiere $H : X \times I \times I \rightarrow X \times I$ durch $H(x, t, s) := (r_1(x, st), (1-s)t + sr_2(x, t))$. Offensichtlich ist das stetig, $H(x, t, 0) = (r_1(x, 0), t) = (x, t)$ und $H(x, t, 1) = (r_1(x, t), r_2(x, t)) = r(x, t)$, also haben wir eine Homotopie von $\text{id}_{X \times I}$ nach r konstruiert. Für $t = 0$ ist $r(x, 0) = (x, 0)$, also $H(x, 0, s) = (x, 0)$ und für $a \in A$ ist $r(a, t) = (a, t)$ also $H(a, t, s) = (a, t)$.

(3) \Rightarrow (2) ist offensichtlich.

(2) \Rightarrow (1) Sei Z ein beliebiger Raum und seien $H : A \times I \rightarrow Z$ und $f : X \rightarrow Z$ stetig mit $H|_{A \times \{0\}} = f|_A$. Dann definieren H und f eine Funktion $\phi : W \rightarrow Z$. Offensichtlich ist $X \times \{0\}$ abgeschlossen in $X \times I$ also auch in W , und da A abgeschlossen in X ist, ist auch $A \times I$ abgeschlossen in W . Damit ist aber $\phi : W \rightarrow Z$ stetig, und für eine Retraktion $r : X \times I \rightarrow W$ ist $\tilde{H} := \phi \circ r$ eine Funktion wie für die AHE verlangt. \square

Die Bedingung (2) aus dem Satz kann in konkreten Beispielen oft direkt verifiziert werden. Nehmen wir als Beispiel (B^n, S^{n-1}) . Betrachten wir $B^n \times I$ als eingebettet in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, so kann man eine Retraktion $B^n \times I \rightarrow B^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ konstruieren, indem man einfach vom Punkt $(0, 2)$ aus den Zylinder $B^n \times I$ auf seine Seitenfläche und seinen Boden projiziert. Für $n = 1$ sieht diese Funktion bildlich so aus:



Nach dem Satz ist also (B^n, S^{n-1}) eine Kofaserung. Zusammen mit Proposition 4.2 liefert das die wichtigste Folgerung für unsere Zwecke: Sei $f : S^{n-1} \rightarrow Y$ eine beliebige stetige Funktion in einen topologischen Raum Y und betrachte den Raum $B^n \cup_f Y$. Dann ist $(Y, B^n \cup_f Y)$ eine Kofaserung.

Ist (X, A) eine Kofaserung, dann erhalten wir eine Retraktion $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ mit Komponenten r_1 und r_2 . Betrachtet man nun $U := \{x \in X : r_2(x, 1) > 0\}$

dann ist das natürlich eine offene Umgebung von A . Schränkt man r_1 auf $U \times I$ so erhält man eine Homotopie relativ zu A von der Inklusion von U auf eine Retraktion von U nach A . Damit können wir sehen, dass die Kofaserungseigenschaft auch im Fall dass A nur aus einem Punkt besteht nicht immer erfüllt sein muss. Ist etwa X der Hawaiianische Ohrring aus 3.12 und A der Nullpunkt, dann enthält jede Umgebung von A einen vollständigen Kreis. Die entsprechende Schleife ist natürlich nicht nullhomotop in X , also kann (X, A) keine Kofaserung sein.

4.4. NDR–Paare. Eine weitere sehr nützliche Charakterisierung von abgeschlossenen Kofaserungen basiert auf folgendem Konzept:

DEFINITION. Ein topologischer Paar (X, A) heißt ein *NDR–Paar* falls es stetige Funktionen $u : X \rightarrow I$ und $h : X \times I \rightarrow X$ gibt, sodass $A = u^{-1}(0)$, $h(x, 0) = x$ für alle $x \in X$, $h(a, t) = a$ für alle $a \in A$ und $h(x, 1) \in A$ für alle $x \in X$ mit $u(x) < 1$ gilt.

BEMERKUNG. (1) Ist (X, A) ein NDR–Paar, dann ist A abgeschlossen in X .
 (2) NDR steht für neighborhood deformation retract, also Umgebungsdeformationsretrakt. Das kommt daher, dass $U = u^{-1}([0, 1))$ natürlich eine offene Umgebung von A ist und h eine Homotopie relativ zu A von der Identität zu einer Funktion definiert, die sich zu einer Retraktion von U auf A einschränkt. Die Bedingung, dass man A und U durch die stetige Funktion u definieren kann, vermeidet Einschränkungen an die Topologie des Raumes X .

BEISPIEL. (1) (B^n, S^{n-1}) ist ein NDR–Paar. Dazu definiert man $u : B^n \rightarrow I$ durch $u(x) = 1$ für $|x| \leq 1/2$ und $u(x) = 2(1 - |x|)$ für $|x| \geq 1/2$ und h durch

$$h(x, t) = \begin{cases} (1+t)x & t \leq \frac{1}{|x|} - 1 \\ \frac{x}{|x|} & t \geq \frac{1}{|x|} - 1 \end{cases}$$

(2) Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit, also ein separabler metrisierbarer Raum, in dem jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n ist. Dann ist für jeden Punkt $x \in M$ das Paar $(M, \{x\})$ ein NDR–Paar. Dazu nimmt man eine Umgebung von x die homöomorph zu D^n ist, definiert u analog wie in (1). Die Homotopie h schiebt einfach eine kleine Scheibe in den Nullpunkt und ist außerhalb von D^n konstant die Identität.

(3) Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit, dann ist (M, N) ein NDR–Paar. Man kann die Funktionen u und h mittels sogenannter tubulärer Umgebungen konstruieren.

PROPOSITION. *Jedes NDR–Paar ist eine abgeschlossene Kofaserung.*

BEWEIS. Sei (X, A) ein NDR–Paar mit entsprechenden Funktionen u und h . Nach Satz 4.3 genügt es, eine Retraktion von $X \times I$ auf den Teilraum $W = X \times \{0\} \cup A \times I$ zu konstruieren. Definiere $r : X \times I \rightarrow X \times I$ durch

$$r(x, t) := \begin{cases} (x, 0) & x \in A, t = 0 \\ (h(x, 1), t(1 - \frac{2u(x)}{t})) & u(x) \leq t/2 \text{ und } t > 0 \\ (h(x, \frac{t}{2u(x)}), 0) & t/2 \leq u(x) \text{ und } u(x) > 0 \end{cases}$$

Dann ist $r(x, 0) = (x, 0)$ und für $a \in A$ ist $u(a) = 0$, und damit $r(a, t) = (a, t)$. Die erste und letzte Zeile in der Definition von r haben offensichtlich Werte in $X \times \{0\}$. Die mittlere Zeile wird nur im Fall $u(x) \leq 1/2$ wirksam und das impliziert $h(x, 1) \in A$. Damit ist r eine Retraktion auf W und wir müssen nur noch zeigen, dass r stetig ist. Für $u(x) = t/2 > 0$ stimmen die letzten beiden Zeilen überein, also ist r stetig auf der

offenen Teilmenge $\{(x, t) : u(x) > 0 \text{ oder } t > 0\} \subset X \times I$. Somit bleibt nur noch die Stetigkeit in Punkten der Form $(a, 0)$ mit $a \in A$ zu überprüfen.

Sei U eine Umgebung von a in X und $\epsilon > 0$. Wegen $a \in A$ ist $h(a, t) = a$ für alle t , also gibt es eine offene Umgebung V von a in X mit $h(V \times I) \subset U$. Damit folgt aber sofort, dass $r(V \times [0, \epsilon)) \subset U \times [0, \epsilon)$ gilt, also ist r stetig in $(a, 0)$. \square

Man kann zeigen, dass umgekehrt jede abgeschlossene Kofaserung ein NDR-Paar ist. Weiters zeigt man, dass für NDR-Paare (X, A) und (Y, B) jedes der Paare, die man aus $A \times B \subset X \times B \subset X \times B \cup A \times Y \subset X \times Y$ bilden kann, wiederum ein NDR-Paar ist.

4.5. Anwendungen. Wir wollen nun einige typische Anwendungen der Kofaserungseigenschaft besprechen.

PROPOSITION. *Sei (X, A) eine Kofaserung, und sei A kontrahierbar. Dann ist der Quotientenraum X/A homotopieäquivalent zu X .*

BEWEIS. Sei $H : A \times I \rightarrow A$ eine Homotopie von id_A zu einer konstanten Abbildung a_0 . Betrachten wir H als Funktion nach X , dann ist id_X natürlich eine Fortsetzung des Anfangswertes von H . Nach der AHE finden wir eine Homotopie $\tilde{H} : X \times I \rightarrow X$ von id_X zu einer Abbildung $\tilde{\phi}$, die ganz A auf den Punkt $a_0 \in A$ abbildet. Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten gibt es eine eindeutige Abbildung $\phi : X/A \rightarrow X$ mit $\phi \circ \pi = \tilde{\phi}$ wobei $\pi : X \rightarrow X/A$ die natürliche Projektion ist (siehe 1.5).

Nach Definition ist \tilde{H} eine Homotopie von id_X nach $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi$. Andererseits ist $\tilde{H}(A \times I) \subset A$, also bildet $\pi \circ \tilde{H} : X \times I \rightarrow X/A$ den Teilraum $A \times I$ auf den Punkt $\langle A \rangle$ ab. Damit erhalten wir eine induzierte Abbildung $X/A \times I \rightarrow X/A$, die nach Korollar 1.9 stetig ist. Nach Konstruktion ist das eine Homotopie zwischen $\text{id}_{X/A}$ und $\pi \circ \phi$, also sind π und ϕ inverse Homotopieäquivalenzen. \square

Eine weitere typische Anwendung ist die Relation zwischen freien und punkterhaltenden Homotopieklassen. Um diese gut beschreiben zu können muss man für einen punktierten Raum (X, x_0) verlangen, dass er *wohlpunktiert* ist, was bedeutet, dass $(X, \{x_0\})$ ein Kofaserung ist. Aus 4.4 wissen wir, dass dies etwa für topologische Mannigfaltigkeiten immer erfüllt ist. Ist nun $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion in einen bogenzusammenhängenden punktierten Raum (Y, y_0) , dann kann man einen stetigen Weg $c : I \rightarrow Y$ von $f(x_0)$ nach y_0 wählen. Betrachtet man c als Homotopie $\{x_0\} \times I \rightarrow Y$, dann ist $f : X \rightarrow Y$ eine Fortsetzung des Anfangswertes. Nach der AHE findet man eine Homotopie $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$ von f zu einer Funktion g mit $g(x_0) = y_0$. Somit ist jede stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ homotop zu einer basispunkterhaltenden Funktion.

Das kann man so formulieren, dass die offensichtliche Abbildung $[X, Y]_0 \rightarrow [X, Y]$, die einfach die Basispunkte vergisst, surjektiv ist. Damit bleibt zu entscheiden, wie für punkterhaltende Funktionen freie Homotopie und punkterhaltende Homotopie zusammenhängen. Dazu betrachtet man eine Schleife $\sigma : I \rightarrow Y$ bei y_0 . Für eine punkterhaltende Funktion $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ findet man wie oben eine Homotopie $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$, die bei f beginnt und die $\tilde{H}(x_0, t) = \sigma(t)$ erfüllt. Man zeigt dass die Funktion $g = \tilde{H}|_{X \times \{1\}}$ bis auf punkterhaltende Homotopie nur von den Klassen $[f] \in [X, Y]_0$ und $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$ abhängt. Diese Konstruktion definiert eine Wirkung von $\pi_1(Y, y_0)$ auf $[X, Y]_0$, deren Orbits genau den Elementen von $[X, Y]$ entsprechen.

4.6. Abbildungszylinder und Abbildungskegel. Wir wollen nun zeigen, dass man jede Abbildung homotopietheoretisch zu einer Kofaserung regularisieren kann. Dies hat zunächst den Vorteil, dass man in diversen Beweisen annehmen kann, dass man

es ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit einer Kofaserung statt einer allgemeinen Abbildung zu tun hat. Weiters liefert das die Möglichkeit, homotopietheoretische Informationen über eine Funktion in einen topologischen Raum zu kodieren.

SATZ. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine beliebige stetige Abbildung. Dann gibt es eine Kofaserung $j : X \rightarrow M_f$ und eine Homotopieäquivalenz $p : M_f \rightarrow Y$, sodass $f = p \circ j$ gilt.

BEWEIS. Betrachte X als $X \times \{0\} \subset X \times I$ und f als Abbildung $X \times \{0\} \rightarrow Y$ und definiere $M_f := (X \times I) \cup_f Y$. Man klebt also einen Zylinder mit "Grundfläche" X längs f an Y .

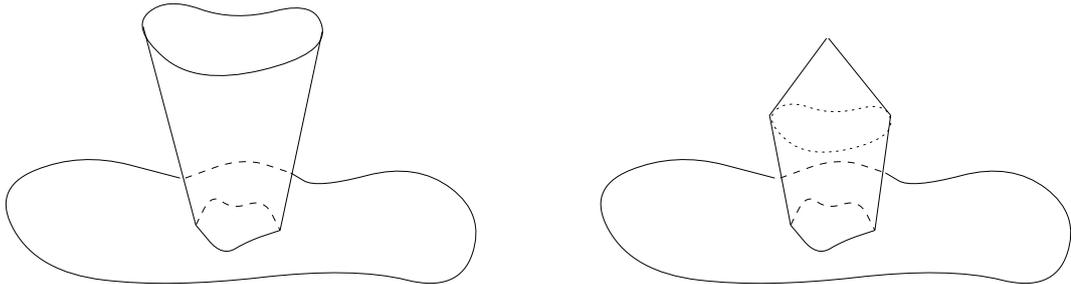
Die Abbildungen $f \circ pr_1 : X \times I \rightarrow Y$ und $\text{id}_Y : Y \rightarrow Y$ induzieren nach der universellen Eigenschaft des verklebten Raumes eine stetige Funktion $p : M_f \rightarrow Y$. Andererseits haben wir die kanonische Abbildung $f_*i : Y \rightarrow M_f$, und nach Konstruktion ist $p \circ f_*i = \text{id}_Y$. Wir behaupten, dass auch $f_*i \circ p$ homotop zur Identität ist. Für $s \in I$ betrachte die Abbildung $(x, t, s) \mapsto i_*f(x, ts)$, wobei $i_*f : X \times I \rightarrow M_f$ die kanonische Abbildung bezeichnet. Für jedes s induziert diese Abbildung gemeinsam mit $f_*i : Y \rightarrow M_f$ eine stetige Funktion $M_f \rightarrow M_f$, und nach Korollar 1.9 liefern diese Abbildungen eine stetige Homotopie $M_f \times I \rightarrow M_f$. Klarerweise ist dies eine Homotopie zwischen $f_*i \circ p$ und der Identität, und somit ist p eine Homotopieäquivalenz.

Weiters definieren wir $j : X \rightarrow M_f$ als die Komposition der natürlichen Abbildung $i_*f : X \times I \rightarrow M_f$ mit der Inklusion $X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I$. Offensichtlich ist $p \circ j = f$. Es bleibt also zu zeigen, dass j eine Kofaserung ist, und da j eine abgeschlossene Einbettung ist, genügt es nach Proposition 4.4 zu zeigen, dass (M_f, X) ein NDR-Paar ist. Dazu betrachte die Abbildung $(x, t) \mapsto \min(2-2t, 1)$. Gemeinsam mit der konstanten Funktion $1 : Y \rightarrow I$ induziert das eine stetige Abbildung $u : M_f \rightarrow I$ mit $u^{-1}(0) = j(X)$. Weiters betrachte für $s \in I$ die Abbildung $X \times I \rightarrow X \times I$, die gegeben ist durch $(x, t) \mapsto (x, \min(1, t(1+s)))$. Gemeinsam mit der Identität auf Y induziert dies eine stetige Homotopie $h : M_f \times I \rightarrow M_f$, und man sieht leicht, dass u und h das Paar (M_f, X) zu einem NDR-Paar machen. \square

DEFINITION. (1) Der im Beweis konstruierte Raum M_f heißt der *Abbildungszylinder* von f .

(2) Der Quotientenraum $C_f := M_f/X$ heißt der *Abbildungskegel* oder die *Homotopie-Kofaser* von f .

Natürlich kann man C_f auch als $CX \cup_f Y$ betrachten, wobei CX der Kegel über X aus 1.8 ist, und X auf offensichtliche Weise als Teilraum von CX betrachtet wird. Insbesondere ist die Suspension ΣX aus 1.8 genau der Abbildungskegel der einzigen stetigen Abbildung $f : X \rightarrow pt$ auf den einpunktigen Raum. Abbildungszylinder und -kegel kann man sich bildlich so vorstellen:



4.7. wir haben nun einer stetigen Funktion $f : X \rightarrow Y$ einen topologischen Raum C_f zugeordnet. Der wesentliche Nutzen dieser Konstruktion besteht darin, dass homotopietheoretische Eigenschaften von f sich in homotopietheoretischen Eigenschaften von C_f reflektieren. Wir wollen zumindest beweisen, dass der Homotopietyp von $C_f = CX \cup_f Y$ nur von der Homotopieklasse der Abbildung f abhängt. Dazu beweisen wir ein allgemeineres Resultat, das auch später noch nützlich sein wird.

SATZ. *Ist (X, A) eine abgeschlossene Kofaserung und sind $f, g : A \rightarrow Y$ homotope Abbildungen, dann sind die Räume $X \cup_f Y$ und $X \cup_g Y$ homotopieäquivalent.*

BEWEIS. Sei $H : A \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g . Betrachte den Raum $Z := (X \times I) \cup_H Y$. Betrachtet man nun die Teilmenge in Z , die von den Punkten $(x, 0)$ für $x \in X$ und von Y gebildet wird, so stimmt sie (als Menge) mit $X \cup_f Y$ überein. Da $X \times \{0\}$ abgeschlossen in $X \times I$ und somit auch in der disjunkten Vereinigung $(X \times I) \sqcup Y$ ist, sieht man direkt aus der Definition der Quotiententopologie (eine Teilmenge im Quotienten ist genau dann abgeschlossen wenn es ihr Urbild ist), dass auch die beiden Topologien übereinstimmen, und somit $X \cup_f Y$ in natürlicher Weise als Teilraum von Z betrachtet werden kann.

Da $i : A \rightarrow X$ eine abgeschlossene Kofaserung ist, gibt es nach Punkt (3) in Satz 4.3 eine Homotopie $h : X \times I \times I \rightarrow X \times I$ relativ zu $X \times \{0\} \cup A \times I$ zwischen der Identität und einer Retraktion $X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$. Gemeinsam mit der Identität auf Y definiert dies eine Homotopie $Z \times I \rightarrow Z$ zwischen der Identität und einer Retraktion auf den Teilraum $X \cup_f Y$. Daher ist $X \cup_f Y$ ein starker Deformationsretrakt von Z , also insbesondere homotopieäquivalent zu Z . Ganz analog sieht man, dass auch $X \cup_g Y$ homotopieäquivalent zu Z ist. \square

Man sieht sofort, dass (CX, X) ein NDR-Paar ist, also sehen wir insbesondere das für $f \sim g : X \rightarrow Y$ die Abbildungskegel C_f und C_g homotopieäquivalent sind.

Simplizialkomplexe

Wir kommen nun zur ersten Art von speziellen Beschreibungen von topologischen Räumen.

4.8. Simplizes.

DEFINITION. (1) Seien $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$. Man sagt, die Punkte x_0, \dots, x_q sind in *allgemeiner Lage*, falls der von ihnen aufgespannte affine Teilraum $\{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_1 \dots \lambda_q \in \mathbb{R} : x = x_0 + \sum_i \lambda_i (x_i - x_0)\}$ Dimension q hat. Offensichtlich ist dies genau dann der Fall, wenn die q Vektoren $x_1 - x_0, \dots, x_q - x_0$ linear unabhängig sind. Man kann den erzeugten affinen Teilraum auch symmetrischer schreiben als $\{\sum_{i=0}^q \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\}$.

(2) Seien $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage. Dann heißt die Teilmenge $\sigma := \{\sum_{i=0}^q \lambda_i x_i : \lambda_i > 0, \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\}$ der (offene) q -Simplex mit Ecken x_0, \dots, x_q . Die Zahl q heißt die *Dimension* von σ . Die Menge $\bar{\sigma} := \{\sum_{i=0}^q \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\}$ heißt der *abgeschlossene q -Simplex* mit den Ecken x_0, \dots, x_q . Die Menge $\dot{\sigma} := \bar{\sigma} \setminus \sigma$ heißt der *Rand* von σ bzw. $\bar{\sigma}$.

(3) Für $q \geq 0$ definieren wir den *Standard q -Simplex* als den Simplex mit Ecken e_1, \dots, e_{q+1} in \mathbb{R}^{q+1} , wobei die e_i die Elemente der Standardbasis von \mathbb{R}^{q+1} bezeichnen.

(4) Seien $\sigma, \tau \subset \mathbb{R}^n$ Simplizes. Dann sagt man τ ist eine *Seite* von σ und schreibt $\tau \leq \sigma$ falls jede Ecke von σ auch eine Ecke von τ ist. Ist $\tau \leq \sigma$ und $\tau \neq \sigma$ so schreibt man $\tau < \sigma$ und sagt τ ist eine *eigentliche Seite* von σ .

BEMERKUNG. (1) Sei $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener q -Simplex mit Ecken x_0, \dots, x_q . Dann folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $x_i - x_0$ direkt, dass für $x \in \bar{\sigma}$ die Darstellung $x = \sum \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \geq 0$ und $\sum \lambda_i = 1$ eindeutig ist. Daher definiert $x \mapsto \sum \lambda_i e_i$ eine Bijektion mit dem abgeschlossenen Standard q -Simplex. Diese induziert offensichtlich Homöomorphismen von σ mit dem Standard q -Simplex bzw. von $\bar{\sigma}$ mit dem abgeschlossenen Standard q -Simplex und von $\dot{\sigma}$ mit dem Rand des Standard q -Simplex.

(2) Die Punkte $0, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ sind in allgemeiner Lage. Der entsprechende abgeschlossene q -Simplex $\bar{\sigma}$ ist offensichtlich eine kompakte konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n mit Innerem σ und Rand $\dot{\sigma}$ also kann man Proposition 1.4 anwenden. Daher ist jeder q -Simplex σ homöomorph zu D^q und das Paar $(\bar{\sigma}, \dot{\sigma})$ ist homöomorph zu (B^q, S^{q-1}) .

(3) Jeder 0-Simplex ist ein Punkt, jeder 1-Simplex eine Strecke, jeder 2-Simplex ein Dreieck und jeder 3-Simplex ein Tetraeder.

(4) Ist $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ ein q -Simplex so ist jede Seite von σ ein r -Simplex für ein $r \leq q$. Sind x_0, \dots, x_q die Ecken von σ , so sind die r -dimensionalen Seiten von σ in bijektiver Korrespondenz mit den $r+1$ -elementigen Teilmengen von $\{x_0, \dots, x_q\}$. Insbesondere hat σ genau $\binom{q+1}{r+1}$ r -dimensionale Seiten. Der Rand $\dot{\sigma}$ von σ ist die (disjunkte) Vereinigung aller eigentlichen Seiten von σ .

4.9. Simplizialkomplexe. Die Idee zur Definition eines Simplizialkomplexes ist nun, eine endliche Menge von abgeschlossenen Simplizes in einem \mathbb{R}^n zu betrachten, die (möglicherweise) längs gemeinsamer Seiten aneinander gehängt sind. Dies kann man wiederum so ausdrücken, dass man eine disjunkte Vereinigung von offenen Simplizes betrachtet, die mit jedem Simplex alle seine Seiten enthält.

Nun ist aber relativ leicht einzusehen, dass man, um einen Simplizialkomplex im obigen Sinne bis auf Homöomorphie zu beschreiben, nur wissen muss, wie Simplizes welcher Dimension zusammen gehängt sind. Die konkrete Einbettung spielt dabei keine Rolle. Dies führt zum Begriff des abstrakten Simplizialkomplexes.

DEFINITION. (1) Ein *Simplizialkomplex* K ist eine endliche disjunkte Vereinigung von (offenen) Simplizes in einem fixen \mathbb{R}^n , sodass für jeden Simplex σ in K und jede Seite $\tau < \sigma$ auch τ in K ist. Auf K betrachten wir die von \mathbb{R}^n induzierte Topologie. Das Maximum der Dimensionen der Simplizes, die in K enthalten sind, heißt die Dimension $\dim(K)$ von K .

(2) Ein (endlicher) *abstrakter Simplizialkomplex* ist eine Familie Φ von Teilmengen einer endlichen Menge I , die alle einelementigen Teilmengen von I enthält und so, dass für $A \in \Phi$ und $B \subset A$ auch $B \in \Phi$ ist. Jedes Element $A \in \Phi$ heißt Simplex der Dimension $|A|$. Das Maximum dieser Dimensionen heißt die Dimension von Φ . Die Menge I heißt die *Eckenmenge* von Φ .

(3) Seien Φ und Ψ abstrakte Simplizialkomplexe mit Eckenmengen I und J . Ein Morphismus eine Funktion $f : I \rightarrow J$ sodass $f(A) \in \Psi$ für alle Teilmengen $A \subset I$ gilt, die in Φ liegen. Man kann dann f natürlich auch als Funktion $\Phi \rightarrow \Psi$ interpretieren. Falls wir diese Funktion von der ursprünglichen unterscheiden wollen, werden wir sie mit f_* bezeichnen.

Morphismen von abstrakten Simplizialkomplexen können offensichtlich komponiert werden und $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$. Damit erhält man auch einen offensichtlichen Begriff eines *Isomorphismus* von abstrakten Simplizialkomplexen.

BEMERKUNG. (1) Sei σ ein Simplex in einem Simplizialkomplex K . Dann liegt auch jede Seite von σ in K , also ist $\bar{\sigma} \subset K$. Nun ist aber ein abgeschlossener Simplex abgeschlossen in \mathbb{R}^n , also auch in K und K ist eine endliche Vereinigung (nicht disjunkt)

von abgeschlossenen Simplizes. Damit ist K eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^n , also ein kompakter metrisierbarer Raum. Weiters ist eine Funktion von K in irgendeinen topologischen Raum stetig, wenn ihre Einschränkung auf jedes $\bar{\sigma}$ stetig ist.

(2) Sind Φ und Ψ abstrakte Simplizialkomplexe mit Eckenmengen I und J und ist $f : I \rightarrow J$ eine bijektive Funktion, sodass auch $f_* : \Phi \rightarrow \Psi$ bijektiv ist, dann ist f ein Isomorphismus.

Betrachten wir nun einen Simplizialkomplex K und einen Punkt $x \in K$. Da K eine disjunkte Vereinigung von Simplizes ist, gibt es genau einen Simplex σ in K mit $x \in \sigma$, den sogenannten *Trägersimplex* von x . Seien x_0, \dots, x_q die Ecken von σ . Dann existieren eindeutige reelle Zahlen $\lambda_0, \dots, \lambda_q$ mit $\lambda_i > 0$ und $\sum \lambda_i = 1$ sodass $x = \sum \lambda_i x_i$. Die Zahlen $\lambda_0, \dots, \lambda_q$ heißen die *baryzentrischen Koordinaten* von x . Da die 0-Simplizes x_0, \dots, x_q Seiten von σ sind liegen auch sie in K .

Man kann nun dem Simplizialkomplex K einen abstrakten Simplizialkomplex Φ wie folgt zuordnen. Man definiert I als die Menge der 0-Simplizes von K und $\{x_0, \dots, x_q\} \in \Phi$ genau dann, wenn der Simplex mit den Ecken x_0, \dots, x_q in K liegt. Φ heißt dann der zu K assoziierte abstrakte Simplizialkomplex und K heißt eine *geometrische Realisierung* von Φ . Natürlich besitzt jeder abstrakte Simplizialkomplex Φ eine geometrische Realisierung $|\Phi|$. Man wählt einfach Punkte $\{x_i : i \in I\}$ in allgemeiner Lage in einem hochdimensionalen \mathbb{R}^n . Für $A \in \Phi$ definiert man σ_A als den Simplex mit den Ecken $\{x_i : i \in A\}$ und dann setzt man $|\Phi| = \cup_{A \in \Phi} \sigma_A$.

Seien nun K und L Simplizialkomplexe, Φ und Ψ die assoziierten abstrakten Simplizialkomplexe, und sei $f : \Phi \rightarrow \Psi$ ein Morphismus. Dann induziert f eine stetige Abbildung $\tilde{f} : K \rightarrow L$ indem man einfach f als die Abbildung auf den Ecken nimmt und es affin auf die Simplizes fortsetzt. Genauer kann man die Konstruktion wie folgt beschreiben: Sei $x \in K$ ein Punkt, x_0, \dots, x_q die Ecken des Trägersimplex von x . Von oben wissen wir, dass der Punkt eindeutig geschrieben werden kann als $\sum \lambda_i x_i$ für $\lambda_i \in (0, 1)$ mit $\sum \lambda_i = 1$. Die Punkte $f(x_0), \dots, f(x_q)$ sind Elemente der Eckenmenge von Ψ und daher 0-Simplizes von L , und da f ein Morphismus ist liegt der Simplex mit den Ecken $f(x_0), \dots, f(x_q)$ in L . Also ist $\tilde{f}(x) := \sum \lambda_i f(x_i)$ ein wohldefinierter Punkt von L .

Von oben wissen wir, dass der abgeschlossene Simplex $\bar{\sigma}$ zu σ in K liegt, und offensichtlich ist \tilde{f} nicht nur auf σ sondern auch auf $\bar{\sigma}$ durch die Formel $\tilde{f}(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i f(x_i)$ gegeben. Damit ist aber die Einschränkung von \tilde{f} auf $\bar{\sigma}$ klarerweise stetig, also ist \tilde{f} stetig. Funktionen dieser Form zwischen Simplizialkomplexen nennt man *simpliziale Abbildungen*.

Ist $f_* : \Phi \rightarrow \Psi$ ein Isomorphismus dann ist offensichtlich \tilde{f} ein Homöomorphismus. Insbesondere sind je zwei geometrische Realisierungen eines abstrakten Simplizialkomplexes kanonisch homöomorph.

4.10. Triangulierungen und Polyeder.

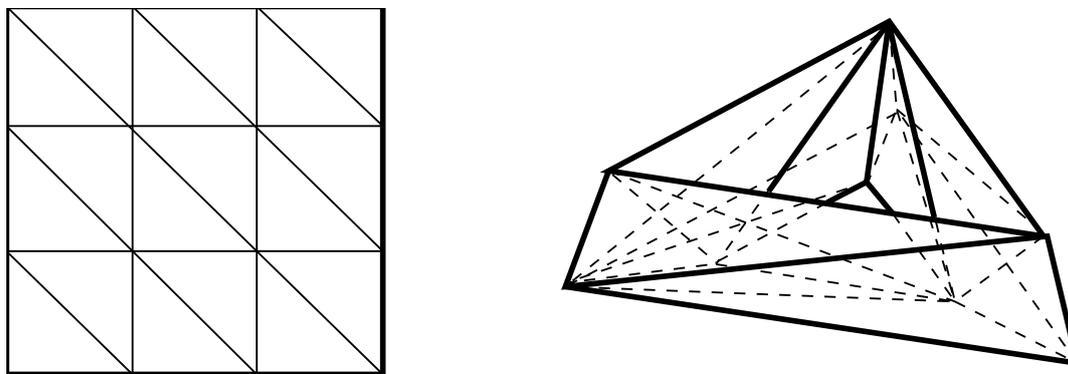
DEFINITION. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Triangulierung* von X ist ein Homöomorphismus von X auf einen Simplizialkomplex K . Falls eine Triangulierung von X existiert heißt X *triangulierbar* oder ein *Polyeder*.

Triangulierbare Räume sind kompakt und metrisierbar und können in einen \mathbb{R}^n eingebettet werden. Aus 4.8 wissen wir, dass B^n homöomorph zum abgeschlossenen Standard n -Simplex und S^n homöomorph zum Rand dieses Simplex ist. Somit sind Bälle und Sphären immer triangulierbar.

Für die Sphäre S^2 erhält man so eine Triangulierung als Rand eines Tetraeders. Natürlich liefert auch der Rand eines Oktaeders eine Triangulierung der S^2 . Also können die geometrischen Realisierungen von nicht isomorphen abstrakten Simplizialkomplexen durchaus homöomorph sein.

Es gibt einige allgemeine Resultate über Triangulierbarkeit. So ist zum Beispiel jede kompakte glatte Mannigfaltigkeit (Cairns, 1935) und jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension zwei (Rado, 1923) und drei (Moise, 1952) triangulierbar. Kompakte topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 4 sind im Allgemeinen nicht triangulierbar.

Eine Triangulierung eines gegebenen Raumes zu finden ist oft eher schwierig und aufwendig. So benötigt beispielsweise die einfachste Triangulierung des Torus T^2 insgesamt 54 Simplizes (9 der Dimension 0, 27 der Dimension 1 und 18 der Dimension 2). Diese Triangulierung sieht bildlich so aus:



Simpliziale Approximation

Zwischen zwei gegebenen Simplizialkomplexen K und L gibt es nur wenige simpliziale Abbildungen. Ist nämlich n die Zahl der Ecken von K und m die Zahl der Ecken von L , so kann es höchstens m^n simpliziale Abbildungen von K nach L geben, da eine solche durch die Bilder der Ecken eindeutig festgelegt ist.

Trotzdem werden wir in diesem Abschnitt zeigen, dass man jede stetige Funktion in einem geeigneten Sinne durch eine simpliziale Abbildung approximieren kann. Insbesondere ist eine solche simpliziale Approximation homotop zur ursprünglichen Funktion.

4.11. Die baryzentrische Unterteilung. Betrachten wir ein Beispiel zur Motivation. Sei K der Rand des Standard 2-Simplex, also ein Dreieck, und betrachten wir stetige Funktionen von K nach K . Da K homöomorph zum Einheitskreis S^1 ist, induziert nach Satz 2.4 der Abbildungsgrad eine Bijektion $[K, K] \cong \mathbb{Z}$. Nun sieht man aber leicht, dass die simplizialen Abbildungen von K nach K alle entweder Grad -1, 0 oder 1 haben. So erreicht man also sicher nicht alle Homotopieklassen.

Ersetzt man aber nun die Triangulierung der ersten Kopie von K durch ein Sechseck, indem man jeden 1-Simplex halbiert, so kann man mit simplizialen Abbildungen die Grade -2, -1, 0, 1 und 2 erreichen. Halbiert man im Sechseck wieder jede Seite, so erreicht man die Grade -4, ..., 4 und so weiter. Die unterliegende Menge (und damit der unterliegende topologische Raum) von K bleibt bei dieser Unterteilungsprozedur unverändert. Diesen Unterteilungsprozeß kann man allgemein durchführen:

DEFINITION. Sei Φ ein abstrakter Simplizialkomplex. Wir definieren die *baryzentrische Unterteilung* Φ' von Φ wie folgt: Die Eckenmenge von Φ' ist die Menge Φ und

die Elemente von Φ' sind genau die Mengen $\{A_0, \dots, A_q\}$ wobei $A_0, \dots, A_q \in \Phi$ mit $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_q$.

SATZ. *Sei K eine geometrische Realisierung des abstrakten Simplicialkomplexes Φ der Dimension m . Dann kann man aus K kanonisch eine geometrische Realisierung K' der baryzentrischen Unterteilung Φ' von Φ konstruieren, die den selben unterliegenden topologischen Raum wie K hat. Außerdem ist für jeden Simplex σ' von K' der Durchmesser $d(\sigma') \leq \frac{m}{m+1} \max\{d(\sigma) : \sigma \text{ ist Simplex von } K\}$.*

BEWEIS. Sei σ ein Simplex von K mit Ecken x_0, \dots, x_q . Wir definieren den Schwerpunkt x_σ von σ als den Punkt $x_\sigma := \frac{1}{q+1}x_0 + \dots + \frac{1}{q+1}x_q$.

Sei nun $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_k$ eine aufsteigende Kette in Φ . Jedem A_i entspricht ein Simplex σ_i von K . Man kann also Φ' gerade mit der Menge aller Ketten $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k$ von Simplizes von K identifizieren. Wir behaupten nun, dass für jede solche Kette die Schwerpunkte $x_{\sigma_0}, \dots, x_{\sigma_k}$ in allgemeiner Lage sind.

Nach Konstruktion liegt jeder der Punkte x_{σ_i} im abgeschlossenen Simplex $\bar{\sigma}_k$. Seien x_0, \dots, x_q die Ecken von σ_k . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nun annehmen, dass es Zahlen $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{k-1} < q$ gibt, sodass die Ecken von σ_j gerade x_0, \dots, x_{i_j} sind. Nun kann man jeden der Punkte x_{σ_j} eindeutig als $\sum \lambda_i x_i$ schreiben. Wir müssen zeigen, dass die Vektoren $x_{\sigma_1} - x_{\sigma_0}, \dots, x_{\sigma_k} - x_{\sigma_0}$ linear unabhängig sind. Schreibt man nun 0 als Linearkombination dieser Vektoren an und setzt die Darstellung als $\sum \lambda_i x_i$ ein, dann erhält man leicht das Resultat, da die Vektoren $x_1 - x_0, \dots, x_q - x_0$ linear unabhängig ist. Es bekommt nämlich der Vektor $x_q - x_0$ seinen Koeffizienten nur von $x_{\sigma_k} - x_{\sigma_0}$, also kann dieser nur den Koeffizienten 0 haben. Dann bekommt aber $x_{i_{k-1}} - x_0$ seinen Koeffizienten nur von $x_{\sigma_{k-1}} - x_{\sigma_0}$ und so weiter.

Damit spannen also für jede Kette $\sigma_0 < \dots < \sigma_k$ die Punkte $x_{\sigma_0}, \dots, x_{\sigma_k}$ einen k -Simplex auf, und wir definieren K' als die Vereinigung aller dieser Simplizes.

Wir behaupten nun, dass für jeden Simplex σ von K die Simplizes von K' zu Ketten der Form $\sigma_0 < \dots < \sigma$ eine disjunkte Zerlegung von σ bilden. Dies beweisen wir durch Induktion nach der Dimension von σ . Ist die Dimension 0 so ist die Behauptung trivial. Sei also $\dim(\sigma) = q > 0$ und die Aussage sei für alle $r < q$ bewiesen. Sei $x \neq x_\sigma$ ein Punkt in σ . Dann trifft die Strecke von x_σ durch x genau einen Punkt y im Rand von σ (Vergleiche den Beweis von Proposition 1.4). y liegt in genau einer Seite τ von σ . Nach Induktionsannahme gibt es eine eindeutige Kette $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau$ sodass y im entsprechenden Simplex von K' liegt. Dann liegt aber offensichtlich x genau in dem Simplex von K' der der Kette $\tau_0 < \dots < \tau < \sigma$ entspricht. Der Punkt x_σ entspricht der Kette σ der Länge 1.

Damit sehen wir aber, dass je zwei Simplizes von K' disjunkt sind, also K' ein Simplicialkomplex ist, und der unterliegende Raum von K' gleich dem unterliegenden Raum von K ist.

Es bleibt also nur noch die Aussage über die Durchmesser der Simplizes zu beweisen. Für jeden Simplex ist aber der Durchmesser $d(\sigma)$ gleich dem Maximum des Abstands zweier Ecken. Sei nun σ' ein Simplex von K' zu einer Kette, die bei einem Simplex σ von K endet. Seien x und y Ecken von σ' , dann gibt es Seiten $\tau_1 < \tau_2 \leq \sigma$, sodass $x = x_{\tau_1}$ und $y = x_{\tau_2}$ die Schwerpunkte der Seiten sind. Ordnet man die Ecken x_0, \dots, x_q von σ richtig, so gibt es ein $k < \ell$, sodass x_0, \dots, x_k die Ecken von τ_1 und x_0, \dots, x_ℓ die Ecken von τ_2 sind. Dann ist $x = \sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} x_i$ und $y = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{1}{\ell+1} x_i$. Damit ist

$$|x - y| = \frac{1}{k+1} |x_0 - y + \dots + x_k - y| \leq \max_{i \leq k} |x_i - y|.$$

Nun ist aber

$$|x_i - y| = \frac{1}{\ell+1} |x_i - x_0 + \cdots + x_i - x_\ell| \leq \frac{\ell}{\ell+1} \max_{j \leq \ell} |x_i - x_j|$$

Daraus folgt direkt die behauptete Ungleichung. \square

BEMERKUNG. Nach obigem Resultat macht es Sinn, von der baryzentrischen Unterteilung eines (nicht abstrakten) Simplizialkomplexes zu sprechen. Offensichtlich kann man die Konstruktion der baryzentrischen Unterteilung iterieren. Man bezeichnet dann mit $\Phi^{(i)}$ oder $K^{(i)}$ die i -fache baryzentrische Unterteilung eines abstrakten Simplizialkomplexes bzw. eines Simplizialkomplexes. Nach dem letzten Teil von Satz 4.11 kann man durch iterierte baryzentrische Unterteilungen erreichen, dass alle Simplizes des entstehenden Simplizialkomplexes beliebig klein sind.

4.12. Simpliziale Approximationen.

DEFINITION. Seien K und L Simplizialkomplexe und $f : K \rightarrow L$ eine stetige Funktion. Eine *simpliziale Approximation* von f ist eine simpliziale Abbildung $\phi : K \rightarrow L$, sodass für jedes $x \in K$ der Punkt $\phi(x)$ im abgeschlossenen Trägersimplex von $f(x)$ liegt.

PROPOSITION. Ist $\phi : K \rightarrow L$ eine simpliziale Approximation von $f : K \rightarrow L$, dann ist $\tilde{\phi}$ homotop zu f . Ist x_0 ein 0-Simplex von K , y_0 ein 0-Simplex von L und $f : (K, x_0) \rightarrow (L, y_0)$ punkterhaltend, so ist ϕ punkterhaltend homotop zu f .

BEWEIS. Nach Definition liegt für jedes $x \in K$ der Bildpunkt $\phi(x)$ im abgeschlossenen Trägersimplex von $f(x)$. Dieser abgeschlossene Simplex ist aber konvex, also liegt für jedes $t \in I$ auch der Punkt $H(x, t) := (1-t)f(x) + t\phi(x)$ in L . Klarerweise ist die damit definierte Abbildung $H : K \times I \rightarrow L$ eine stetige Homotopie zwischen f und ϕ .

Im punktierten Fall ist $f(x_0) = y_0$, und da y_0 ein 0-Simplex ist, besteht der abgeschlossene Trägersimplex von y_0 nur aus y_0 selbst, also ist auch ϕ basispunkterhaltend. Dann ist aber auch die Homotopie H von oben nach Konstruktion basispunkterhaltend. \square

4.13. Der simpliziale Approximationssatz. Bevor wir den simplizialen Approximationssatz beweisen können, benötigen wir noch den Begriff des sogenannten Eckensterns. Dies gibt die Möglichkeit auf natürliche Weise offene Überdeckungen von Simplizialkomplexen zu konstruieren.

DEFINITION. Sei K ein Simplizialkomplex und sei x_0 eine Ecke (also ein 0-Simplex) von K . Dann heißt die Menge $St_K(x_0)$ aller $x \in K$, sodass x_0 Ecke des Trägersimplex von x ist, der *Eckenstern* von x_0 in K .

LEMMA. (1) Sei K ein Simplizialkomplex mit Ecken x_0, \dots, x_k . Dann bilden die Eckensterne $St_K(x_i)$ eine offene Überdeckung von K .

(2) Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von K . Dann ist für jedes hinreichend große ℓ die Überdeckung durch die Eckensterne der ℓ -fachen baryzentrischen Unterteilung $K^{(\ell)}$ eine Verfeinerung von \mathcal{U} (d.h. jeder der Eckensterne ist ganz in einem Element von \mathcal{U} enthalten).

BEWEIS. (1) Das Komplement von $St_K(x_i)$ ist gerade die Vereinigung aller abgeschlossenen Simplizes, die x_i nicht als Ecke haben, also ist jeder Eckenstern offen in K . Da jeder Punkt einen Trägersimplex besitzt, liegt er auch in einem Eckenstern.

(2) Da K ein kompakter metrischer Raum ist, gibt es nach dem Lebesgueschen Überdeckungslemma (siehe zB. [C–R, Seite 73]) eine Zahl $\epsilon > 0$, sodass jede Teilmenge $A \subset K$ mit Durchmesser $d(A) < \epsilon$ ganz in einem Element von \mathcal{U} liegt.

Sei nun M der maximale Durchmesser eines Simplex von K und sei m die Dimension von K . Nach Satz 4.11 hat jeder Simplex in $K^{(\ell)}$ einen Durchmesser $\leq \left(\frac{m}{m+1}\right)^\ell M$. Da $\frac{m}{m+1} < 1$ ist, gibt es ein ℓ , sodass $\left(\frac{m}{m+1}\right)^\ell < \frac{\epsilon}{2M}$ und damit der Durchmesser jedes Eckensterns kleiner als ϵ ist. \square

SATZ (Simplizialer Approximationssatz). *Seien K und L Simplizialkomplexe und sei $f : K \rightarrow L$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es für jedes hinreichend große ℓ eine simpliziale Approximation $\tilde{\phi} : K^{(\ell)} \rightarrow L$ von f .*

BEWEIS. Sei \mathcal{U} die offene Überdeckung von K durch die Mengen $f^{-1}(St_L(y_i))$, wobei y_i die Ecken von L durchläuft. Für hinreichend großes ℓ ist nach Teil (2) des Lemmas die Überdeckung durch die Eckensterne von $K^{(\ell)}$ eine Verfeinerung von \mathcal{U} . Also gibt es dann zu jeder Ecke x_i von $K^{(\ell)}$ eine Ecke $y_{\phi(i)}$ sodass der Eckenstern von x_i ganz im Urbild des Eckensterns von $y_{\phi(i)}$ liegt.

Wir behaupten nun, dass die Abbildung ϕ auf den Eckenmengen eine simpliziale Abbildung definiert, die eine simpliziale Approximation von f ist. Sei also σ ein Simplex von $K^{(\ell)}$ mit Ecken x_0, \dots, x_q . Jeder Punkt $x \in \sigma$ liegt dann im Durchschnitt der Eckensterne zu x_0, \dots, x_q , und nach Konstruktion liegt daher $f(x)$ im Durchschnitt der Eckensterne zu $y_{\phi(0)}, \dots, y_{\phi(q)}$. Damit sind aber diese Punkte Ecken des Trägersimplex von $f(x)$, spannen also insbesondere einen Simplex von L auf. Damit induziert ϕ eine simpliziale Abbildung. Außerdem liegt nach Definition $\tilde{\phi}(x)$ im Simplex, der von den Punkten $y_{\phi(0)}, \dots, y_{\phi(q)}$ erzeugt wird, und dieser wiederum liegt im abgeschlossenen Trägersimplex von $f(x)$. \square

Eine direkte Anwendung des simplizialen Approximationssatzes ist folgendes Resultat

KOROLLAR. *Sei K ein Simplizialkomplex mit Dimension $\dim(K) < n$ mit einem 0–Simplex x_0 als Basispunkt. Dann ist $[K, S^n] = 0$ und $[K, S^n]_0 = 0$. Insbesondere ist $[S^k, S^n] = 0$ und $[S^k, S^n]_0 = 0$ für $k < n$.*

BEWEIS. Nach Beispiel (3) von 2.2 ist jede stetige nicht surjektive Abbildung mit Werten in S^n nullhomotop. Es genügt also zu zeigen, dass jede stetige Abbildung $f : K \rightarrow S^n$ homotop zu einer nicht surjektiven stetigen Abbildung ist.

Dazu fixieren wir einen Homöomorphismus g zwischen S^n und dem Rand des Standard $n + 1$ –Simplex. Sei ϕ eine simpliziale Approximation von $g \circ f$. Dann treten im Bild von ϕ höchstens Simplizes der Dimension $\dim(K) < n$ auf. Der Rand des Standard $n + 1$ –Simplex enthält aber Simplizes der Dimension n , die daher nicht im Bild liegen können. Somit ist ϕ nicht surjektiv und damit $g^{-1} \circ \phi$ eine zu f homotope, nicht surjektive Abbildung und $[K, S^n] = 0$ folgt.

Im basispunkterhaltenden Fall muss man nur die Triangulierung so wählen, dass der Basispunkt von S^n ein 0–Simplex wird, dann zeigt die gleiche Argumentation, dass $[K, S^n]_0 = 0$ gilt.

Im Falle von S^k fixiert man einfach einen (basispunkterhaltenden) Homöomorphismus zwischen S^k und dem Rand des Standard $k + 1$ –Simplex. Dieser induziert Bijektionen auf den Mengen der Homotopieklassen. \square

4.14. Wir beweisen nun noch ein Resultat, das eine wesentliche Rolle im Beweis des simplizialen Approximationsatzes spielen wird. Dazu benötigen wir den Begriff von Teilkomplexen eines Simplizialkomplexes:

DEFINITION. Sei K ein Simplizialkomplex. Eine Menge L von Simplizes von K heißt Teilkomplex, wenn für jeden Simplex σ , der in L liegt, auch jede Seite von σ in L liegt. L ist also genau dann ein Teilkomplex, wenn L selbst ein Simplizialkomplex ist.

PROPOSITION. Sei D^n der offene n -Ball, $z_0 \in D^n$ ein Punkt.

(1) Für $r < n$ ist jede stetige Abbildung $f : (B^r, S^{r-1}) \rightarrow (D^n, D^n \setminus z_0)$ homotop relativ zu S^{r-1} zu einer stetigen Abbildung $g : (B^r, S^{r-1}) \rightarrow (D^n, D^n \setminus z_0)$ mit $g(B^r) \subset D^n \setminus z_0$.

(2) Sei K ein Simplizialkomplex, $L \subset K$ ein Teilkomplex, sodass jeder Simplex σ von K , der nicht in L liegt, Dimension $< n$ hat. Dann ist jede stetige Abbildung $f : (K, L) \rightarrow (D^n, D^n \setminus z_0)$ homotop relativ zu L zu einer stetigen Abbildung $g : (K, L) \rightarrow (D^n, D^n \setminus z_0)$, die $g(K) \subset D^n \setminus z_0$ erfüllt.

(3) Sei A ein topologischer Raum, $\phi : S^{n-1} \rightarrow A$ stetig und $X := B^n \cup_\phi A$ der Raum der durch Ankleben entsteht. Dann ist für $r < n$ jede Abbildung $f : (B^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, A)$ homotop relativ zu S^{r-1} zu einer stetigen Abbildung $g : (B^r, S^{r-1}) \rightarrow (X, A)$ mit $g(B^r) \subset A$.

BEWEIS. (1) Der Raum $D^n \setminus z_0$ ist homotopieäquivalent zu S^{n-1} , also ist nach Korollar 4.13 die Einschränkung von f auf S^{r-1} nullhomotop. Wir erhalten also eine Homotopie $H : S^{r-1} \times I \rightarrow D^n \setminus z_0$ mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = z$ für einen fixen Punkt $z \in D^n \setminus z_0$. Da H ganz $S^{r-1} \times \{1\}$ auf z abbildet faktorisiert es zu einer Abbildung auf dem Kegel CS^{r-1} und dieser ist homöomorph zu B^r (siehe 1.8 (1)). Wir erhalten also eine stetige Funktion $g : B^r \rightarrow D^n \setminus z_0$, die auf $S^{r-1} \subset B^r$ mit f übereinstimmt. Wir behaupten, dass f und g homotop relativ zu S^{r-1} sind:

Die Teilmenge $B^r \times I \subset \mathbb{R}^{r+1}$ ist kompakt und konvex mit Rand $B^r \times \{0, 1\} \cup S^{r-1} \times I$, also ist nach Proposition 1.4 das Paar $(B^r \times I, B^r \times \{0, 1\} \cup S^{r-1} \times I)$ homöomorph zu (B^{r+1}, S^r) und damit insbesondere eine Kofaserung. Nun definieren f auf $B^r \times \{0\}$, g auf $B^r \times \{1\}$ und die $f|_{S^{r-1}} = g|_{S^{r-1}}$ auf $S^{r-1} \times I$ eine stetige Funktion, $B^r \times \{0, 1\} \cup S^{r-1} \times I \rightarrow D^n$. Da D^n kontrahierbar ist, finden wir eine Homotopie von einer konstanten Funktion zu dieser, und die konstante Funktion kann (konstant) auf $B^r \times I$ fortgesetzt werden. Nach der AHE findet man eine Fortsetzung der ganzen Homotopie auf $B^r \times I \times I$. Der Endwert dieser Fortsetzung ist eine Funktion $B^r \times I \rightarrow D^n$, die auf $B^r \times \{0\}$ mit f , auf $B^r \times \{1\}$ mit g und auf $S^r \times I$ mit $f|_{S^{r-1}} = g|_{S^{r-1}}$ übereinstimmt, also genau eine Homotopie relativ zu S^{r-1} von f nach g .

(2) Induktion nach der Zahl der Simplizes in K , die nicht in L liegen. Ist $K = L$ so ist die Aussage trivial. Sei also $K \neq L$ und sei σ ein Simplex maximaler Dimension, der nicht in L liegt. Dann ist $K \setminus \sigma$ ein Simplizialkomplex M mit $L \subset M$. Wendet man die Induktionsannahme auf $f|_M$ an, so erhält man eine Homotopie $H : M \times I \rightarrow D^n$ mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) \neq z_0$ für alle $x \in M$ und mit $H(x, t) = f(x)$ für alle $x \in L$. Nun enthält M nach Konstruktion den ganzen Rand ∂ von σ und $K = M \cup \sigma$. Da $(\bar{\sigma}, \partial) \cong (B^k, S^{k-1})$, wo $k = \dim \sigma$, ist $(\bar{\sigma}, \partial)$ eine Kofaserung. Betrachtet man nun die Einschränkung von H auf ∂ , so ist gibt f nach Konstruktion eine Fortsetzung des Anfangswertes, also lässt sich die Homotopie H auf ganz K fortsetzen. Wir bezeichnen die Fortsetzung wieder mit H .

Nach Konstruktion haben wir also eine stetige Homotopie relativ zu L zwischen f und einer Funktion f_1 die ganz M nach $D^n \setminus z_0$ abbildet. Betrachten wir nun $f_1|_{\bar{\sigma}} : (\bar{\sigma}, \partial) \rightarrow (D^n, D^n \setminus z_0)$. Nach (1) ist diese Abbildung homotop relativ zu ∂ zu einer Funktion g_1 , die ganz $\bar{\sigma}$ auf $D^n \setminus z_0$ abbildet. Definiert man nun g als f_1 auf M und als

g_1 auf $\bar{\sigma}$ so erhält man eine stetige Funktion $g : K \rightarrow D^n \setminus z_0$ die offensichtlich homotop zu f relativ zu L ist.

(3) $e^n := X \setminus A$ ist homöomorph zu D^n . Sei z_0 in e^n ein beliebiger Punkt. Die Mengen $X \setminus z_0$ und e^n bilden eine offene Überdeckung von X .

Wir ersetzen nun (D^r, S^{r-1}) durch den Standard r -Simplex und seinen Rand. Nun bilden die Mengen $f^{-1}(X \setminus z_0)$ und $f^{-1}(e^n)$ eine offene Überdeckung des Standardsimplex also kann man durch Übergang zu einer iterierten baryzentrischen Unterteilung K erreichen, dass jeder abgeschlossene Simplex von K ganz in einer der beiden Mengen liegt. Sei $L \subset K$ die entsprechende baryzentrische Unterteilung des Randes des Standardsimplex, dann ist klarerweise $(K, L) \cong (D^r, S^{r-1})$, also können wir im weiteren mit (K, L) arbeiten. Sei nun K_0 der Teilkomplex aller Simplizes deren Abschlüsse ganz in $f^{-1}(X \setminus z_0)$ liegen, K_1 der entsprechende Teilkomplex zu $f^{-1}(e^n)$. Dann gilt offensichtlich $K = K_0 \cup K_1$ und $L \subset K_0$.

Zu der durch f definierten Funktion $f_1 : (K_1, K_1 \cap K_0) \rightarrow (e^n, e^n \setminus z_0)$ gibt es nach (2) eine stetige Funktion $g_1 : K_1 \rightarrow e^n$ die homotop zu f_1 relativ zu $K_1 \cap K_0$ ist, und ganz K_1 nach $e^n \setminus z_0$ abbildet. Sei nun $g_2 : K \rightarrow X$ die Abbildung, die auf K_1 mit g_1 und auf K_0 mit f übereinstimmt. Nach Konstruktion ist dies eine stetige Funktion die homotop zu f relativ zu L ist und ganz K nach $X \setminus z_0$ abbildet. Nun ist aber A offensichtlich ein Deformationsretrakt von $X \setminus z_0$, also gibt es eine stetige Funktion $r : X \setminus z_0 \rightarrow X \setminus z_0$ die homotop zur Identität ist, auf A mit der Identität übereinstimmt und ganz $X \setminus z_0$ auf A abbildet. Die Funktion $r \circ g_2$ hat dann alle gewünschten Eigenschaften. \square

CW-Komplexe

Die bisher besprochenen Simplicialkomplexe haben einige Nachteile: Einerseits sind sie (bzw. die triangulierbaren Räume) nicht allgemein genug, andererseits sind Triangulierungen einfacher Räume oft recht kompliziert. Man betrachte hierzu das Beispiel des Torus in 4.10(5), wo man 54 Simplizes benötigt. Man kann beweisen, dass eine Triangulierung des Torus mindestens 42 Simplizes benötigt. Andererseits kann man eine CW-Zerlegung mit 4 Zellen angeben.

Bei Simplicialkomplexen haben wir Simplizes durch identifizieren gemeinsamer Seiten "verklebt". Bei CW-Komplexen verklebt man abgeschlossene Bälle mit beliebigen stetigen Abbildungen. Außerdem kann man bei CW-Komplexen im allgemeinen unendlich viele solche Zellen verkleben wobei aber dann zwei Eigenschaften (C und W) erfüllt sein müssen.

4.15. endliche CW-Komplexe. Sei X ein normaler Raum, $f : S^{n-1} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und sei $Y := B^n \cup_f X$ der Raum, der durch Ankleben entsteht. Nach Proposition 1.7 ist Y wiederum normal. Der Raum X sitzt in natürlicher Weise als Teilraum in Y und aus 4.3 wissen wir, dass (Y, X) eine Kofaserung ist.

Andererseits haben wir die kanonische Abbildung $B^n \rightarrow Y$. Diese bildet S^{n-1} in X ab, kann also als Abbildung $F : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, X)$ von Paaren betrachtet werden. Diese Abbildung ist nach Definition der Topologie auf Y ein *relativer Homöomorphismus*, das heißt $F : B^n \setminus S^{n-1} \rightarrow Y \setminus X$ ist ein Homöomorphismus.

Sei umgekehrt (Y, X) ein topologisches Paar, sodass X abgeschlossen in Y ist, und sei $F : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, X)$ ein relativer Homöomorphismus. Sei $f : S^{n-1} \rightarrow X$ die Einschränkung von F auf S^{n-1} . Klarerweise induziert die Funktion $F : B^n \rightarrow Y$ gemeinsam mit der Inklusion $X \hookrightarrow Y$ eine stetige Bijektion $B^n \cup_f X \rightarrow Y$. Nun ist die Umkehrung dieser Bijektion klarerweise stetig auf der abgeschlossenen Teilmenge $X \subset Y$. Andererseits ist sowohl das Bild von B^n in $B^n \cup_f X$ als auch $F(B^n) \subset Y$ kompakt, die Bijektion

bildet diese Mengen aufeinander ab und ist daher ein Homöomorphismus zwischen ihnen. Also ist die Umkehrung auch stetig auf $F(B^n)$. Nun überdecken aber X und $F(B^n)$ ganz Y , also haben wir tatsächlich einen Homöomorphismus $B^n \cup_f X \cong Y$.

Analog können wir eine disjunkte Vereinigung $B_1^n \sqcup \cdots \sqcup B_k^n$ von endlich vielen n -Bällen und stetige Funktionen in $f_i : S_i^{n-1} \rightarrow X$ für $i = 1, \dots, k$ in einen normalen Raum X betrachten. Setzt man wiederum $Y := (B_1^n \sqcup \cdots \sqcup B_k^n) \cup_{f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_k} X$, so geht alles wie oben. Y ist normal und (Y, X) eine Kofaserung und man erhält einen relativen Homöomorphismus $(B_1^n \sqcup \cdots \sqcup B_k^n, S_1^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup S_k^{n-1}) \rightarrow (Y, X)$. Umgekehrt liefert so ein relativer Homöomorphismus wiederum einen Homöomorphismus von Y mit dem durch Ankleben entstandenen Raum.

DEFINITION. Ein *endlicher CW-Raum* oder *endlicher CW-Komplex* ist ein kompakter Hausdorffraum X zusammen mit einer Folge $X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n = X$ von abgeschlossenen Teilräumen sodass gilt:

- (1) X^0 ist eine endliche diskrete Teilmenge.
- (2) für jedes k gibt es einen relativen Homöomorphismus

$$F^k : (B_1^k \sqcup \cdots \sqcup B_{r(k)}^k, S_1^{k-1} \sqcup \cdots \sqcup S_{r(k)}^{k-1}) \rightarrow (X^k, X^{k-1})$$

Für jedes k ist daher $X^k \setminus X^{k-1}$ eine disjunkte Vereinigung von offenen k -Zellen, d.h. homöomorphen Bildern von offenen k -Bällen. Diese heißen die k -Zellen von X . Ist e_i^k eine dieser k -Zellen so induziert F^k einen relativen Homöomorphismus $h_i^k : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (X^k \setminus X^{k-1} \cup e_i^k, X^{k-1})$. Dieser heißt die *charakteristische Abbildung* der Zelle e_i^k .

Ist $X^{n-1} \neq X$ und $X^n = X$, dann heißt n die *Dimension* von X . Der Teilraum X^k heißt das k -*Skelett* von X .

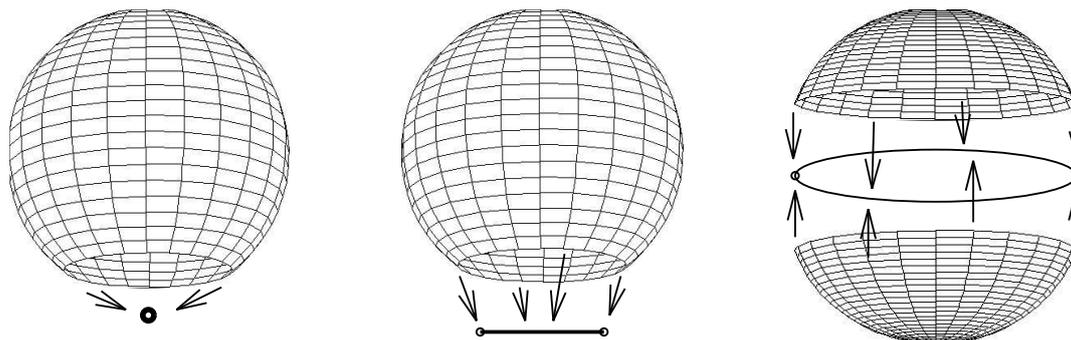
BEMERKUNG. (1) Nach den Überlegungen von oben entsteht ein endlicher CW-Komplex bis auf Homöomorphie dadurch, dass man an einen endlichen diskreten Raum endlich viele Intervalle klebt, an den entstehenden Raum endlich viele 2-Bälle, daran endlich viele 3-Bälle und so weiter bis zu einer maximalen Dimension n .

(2) Wir haben an dieser Stelle noch nicht bewiesen, dass euklidische Räume verschiedener Dimension nicht homöomorph sein können. Daher müssen wir im Moment noch eine charakteristische Abbildung festlegen, um von der Dimension einer Zelle sprechen zu können. Wir werden aber im Rahmen der Homologietheorie das oben erwähnte Resultat unabhängig von der Theorie der CW-Komplexe beweisen, können also auch ohne logische Schwierigkeiten jetzt schon annehmen.

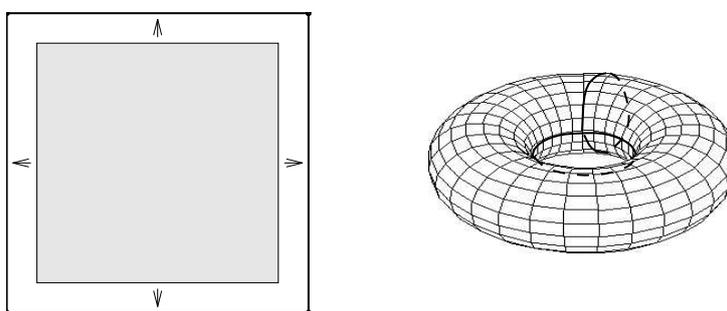
BEISPIEL. (1) Jeder Simplicialkomplex ist ein endlicher CW-Komplex mit seinen Simplexes als Zellen.

(2) Klebt man B^n längs der einzigen stetigen Abbildung $p : S^{n-1} \rightarrow pt$ an einen Punkt, so erhält man $B^n/S^{n-1} \cong S^n$. Dies macht die Sphäre S^n zu einem CW-Komplex mit einer 0-Zelle und einer n -Zelle.

(3) Neben den in (1) und (2) gegebenen Strukturen als CW-Raum besitzt die Sphäre S^2 noch andere CW Zerlegungen, zum Beispiel eine mit zwei 0-Zellen, einer 1-Zelle und einer 2-Zelle oder eine mit zwei 0-Zellen, zwei 1-Zellen und zwei 2-Zellen. Bildlich sehen diese CW-Zerlegungen wie folgt aus:



(4) der Torus T^2 hat eine CW-Zerlegung mit einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle:



(5) Betrachte den reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ aus Beispiel (3) von 3.7, also den Quotienten von S^n nach der Relation $x \sim \pm x$.

Die Einbettung $S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ als Äquator induziert eine Einbettung $\mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$. Betrachten wir nun B^n als die abgeschlossene obere Hemisphäre von S^n und die Einschränkung der kanonischen Abbildung $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ darauf. Offensichtlich bildet dies S^{n-1} nach $\mathbb{R}P^{n-1}$ ab, gibt also eine Abbildung von Paaren $(B^n, S^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$. Klarerweise bildet diese Abbildung die offene obere Hemisphäre bijektiv auf $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1}$ ab. Nach Definition der Quotiententopologie ist sie daher ein relativer Homöomorphismus. Damit haben wir eine CW-Zerlegung von $\mathbb{R}P^n$ mit je einer Zelle in Dimension 0 bis n gefunden.

(6) Der komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$: Betrachten wir die Sphäre S^{2n+1} als Einheits-sphäre in \mathbb{C}^{n+1} und definieren wir $x \sim x'$ falls ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ existiert, sodass $x = \lambda x'$ gilt. Der Quotient S^{2n+1} / \sim heißt der komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$. Man sieht sofort, dass $\mathbb{C}P^n$ Hausdorff ist und als stetige Bild von S^{2n+1} ist $\mathbb{C}P^n$ kompakt. Man kann $\mathbb{C}P^n$ als den Raum aller komplexen Geraden durch 0 in \mathbb{C}^{n+1} betrachten.

Betrachten wir zunächst den Fall $n = 1$ und daher S^3 als Einheits-sphäre in \mathbb{C}^2 . Betten wir darin S^1 als jene Punkte ein, deren zweite Koordinate Null ist, so geht diese S^1 unter der Projektion $p : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ auf den Punkt $p(1, 0)$. Nun betrachten wir B^2 als die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$. Betrachte nun die Abbildung $\phi : B^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ die gegeben ist durch $\phi(z) := p(z, \sqrt{1 - |z|^2})$. Diese Abbildung ist offensichtlich stetig und bildet S^1 auf einen Punkt ab. Außerhalb von S^1 ist sie injektiv, denn aus $\phi(z) = \phi(w)$ folgt, dass $z = \lambda w$ und $\sqrt{1 - |z|^2} = \lambda \sqrt{1 - |w|^2}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Betrag 1. Da aber $\sqrt{1 - |z|^2}$ und $\sqrt{1 - |w|^2}$ beide reell und positiv sind, muss $\lambda = 1$ sein.

Schließlich ist ϕ auch surjektiv, denn der Punkt $p(z, 0)$ liegt im Bild und für $w \neq 0$ ist $(z, w) \sim (e^{-i \arg(w)} z, |w|)$ und weil $|w| = \sqrt{1 - |z|^2}$ gilt, ist $p(z, w) = \phi(e^{-i \arg(w)} z)$. Damit induziert ϕ aber einen Homöomorphismus zwischen $B^2/S^1 \cong S^2$ und $\mathbb{C}P^1$. Die

Quotientenabbildung $p : S^3 \rightarrow S^2$ heißt die *Hopf-Faserung* und wird später noch eine interessante Rolle spielen.

Für allgemeines n induziert nun die Inklusion $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ eine Inklusion $S^{2n-1} \hookrightarrow S^{2n+1}$ und diese wiederum eine Einbettung $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$. Man kann B^{2n} als Einheitsball in \mathbb{C}^n betrachten. Sei $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ die Quotientenabbildung und man definiert $\phi : B^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ durch $\phi(z) = p(z, \sqrt{1-|z|^2})$ wobei man immer \mathbb{C}^{n+1} als $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ betrachtet. Genau wie oben sieht man, dass ϕ ein relativer Homöomorphismus $(B^{2n}, S^{2n-1}) \rightarrow (\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$ ist. Damit haben wir eine CW-Zerlegung von $\mathbb{C}P^n$ mit je einer Zelle in den Dimensionen $0, 2, \dots, 2n$.

4.16. CW-Komplexe.

DEFINITION. (1) Sei X ein Hausdorffraum. Eine *CW-Zerlegung* von X ist eine Menge \mathcal{E} von Teilräumen von X sodass: (i) X ist die disjunkte Vereinigung aller $e \in \mathcal{E}$. (ii) Für jedes $e \in \mathcal{E}$ existiert ein $|e| \in \mathbb{N}$ sodass $e \cong D^{|e|}$. Ist $|e| = n$ so heißt e eine n -Zelle. Der Teilraum $X^n := \cup_{|e| \leq n} e$ heißt das n -Skelett von X .

(iii) Für jede n -Zelle e existiert ein relativer Homöomorphismus $F_e : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^{n-1} \cup e, X^{n-1})$, die *charakteristische Abbildung* der Zelle e .

(iv) Für jede Zelle e ist der Abschluss \bar{e} in einer endlichen Vereinigung von Zellen enthalten. (Axiom C, closure finiteness)

(v) X trägt die finale Topologie bezüglich aller abgeschlossenen Zellen, d.h. $A \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist für jede Zelle e und eine Funktion von X in einen beliebigen Raum ist genau dann stetig, wenn ihre Einschränkung auf jede abgeschlossene Zelle stetig ist. (Axiom W, weak topology)

(2) Ein *CW-Komplex* ist ein Hausdorffraum X zusammen mit einer CW-Zerlegung.

(3) Sind X und Y CW-Komplexe dann heißt eine stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ *zellulär* falls $f(X^k) \subset Y^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.

BEMERKUNG. (1) Ein allgemeiner CW-Komplex kann sowohl Zellen beliebig hoher Dimension besitzen als auch unendlich viele Zellen einer Dimension. Damit können auch nicht kompakte Räume eine CW-Zerlegung besitzen. Gibt es eine maximale Dimension der Zellen, so heißt diese die Dimension des CW-Komplexes. Ein Beispiel einer unendlichen CW-Zerlegung ist die reelle Gerade \mathbb{R} mit den ganzen Zahlen als 0-Zellen und den Intervallen $(i, i+1)$ als 1-Zellen.

(2) Nach Axiom W ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Z$ von einem CW-Komplex X in einen beliebigen Raum Z genau dann stetig, wenn ihre Einschränkung auf jede abgeschlossene Zelle stetig ist. Das gilt analog auch für Homotopien: Eine Funktion $H : X \times I \rightarrow Z$ ist nach 1.9 genau dann stetig wenn die assoziierte Abbildung $\check{H} : X \rightarrow C(I, Z)$ stetig ist. Nach Axiom W gilt dies genau dann wenn jede Einschränkung auf eine abgeschlossene Zelle \bar{e} stetig ist. Die assoziierte Abbildung zu dieser Einschränkung ist aber gerade die Einschränkung von H auf $\bar{e} \times I$.

4.17. CW-Paare.

DEFINITION. Sei X ein CW-Komplex $A \subset X$ heißt *CW-Teilraum* von X falls für jede Zelle e von X mit $e \cap A \neq \emptyset$ schon $\bar{e} \subset A$ gilt. Dies bedeutet gerade, dass A Vereinigung von Zellen ist, und mit der induzierten Struktur selbst ein CW-Komplex ist. Man bemerke, dass nach Axiom W der Teilraum A automatisch abgeschlossen in X ist.

Ist A ein CW-Teilraum von X so heißt (X, A) ein *CW-Paar*.

Offensichtlich ist jedes n -Skelett X^n ein CW-Teilraum von X . Somit ist jedes der Skelette selbst ein CW-Komplex.

PROPOSITION. Für jeden CW-Komplex X gilt:

- (1) Eine Teilmenge $P \subset X$ die jede Zelle in höchstens einem Punkt trifft ist diskret.
- (2) Jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ ist in einem endlichen CW-Teilraum von X enthalten. Insbesondere ist ein CW-Komplex genau dann kompakt wenn er endlich ist.
- (3) Ein CW-Komplex ist genau dann lokalkompakt wenn er lokal endlich ist, d.h. jeder Punkt eine Umgebung hat, die nur endlich viele Zellen trifft.

BEWEIS. (1) Ist $Q \subset P$ beliebig so trifft Q jede Zelle e in höchstens einem Punkt, also ist $Q \cap \bar{e}$ endlich nach Axiom C, also abgeschlossen in \bar{e} . Nach Axiom W ist Q daher abgeschlossen in X . Also ist jede Teilmenge von P abgeschlossen und damit P diskret.
 (2) Für jede Zelle e mit $e \cap A \neq \emptyset$ wähle einen Punkt von $e \cap A$. Die Menge dieser Punkte ist nach (1) diskret, also endlich, da A kompakt ist. Daher trifft A nur endlich viele Zellen und daraus folgt leicht (mit Induktion nach der maximalen Dimension dieser Zellen) das Resultat.
 (3) folgt direkt aus (2). □

BEMERKUNG. (1) Der erste Teil der Proposition zeigt, dass sich die Zellen in einem CW-Komplex nicht häufen können. Somit ist zum Beispiel der Hawaiianische Ohrring aus Beispiel (2) von 3.12 mit den nahe liegenden Zellen (eine 0-Zelle, abzählbar viele 1-Zellen) kein CW-Komplex.

(2) Nach Teil (3) der Proposition sind CW-Komplexe im allgemeinen nicht lokalkompakt. Der zweite Teil der Proposition und Axiom W zeigen aber direkt, dass jeder CW-Komplex ein kompakt erzeugter Raum ist (siehe 1.9). Somit gelten Analoga von Proposition und Korollar 1.9 für allgemeine CW-Komplexe.

4.18. Sei X ein CW-Komplex, X^{n-1} sein $n - 1$ -Skelett, e_α^n die n -Zellen und $F_\alpha : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^{n-1} \cup e_\alpha^n, X^{n-1})$ die charakteristischen Abbildungen. Wie in 4.15 betrachten wir nun die Einschränkungen $f_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ und erhalten eine stetige Bijektion $(\sqcup_\alpha B^n) \cup_{\sqcup f_\alpha} X^{n-1} \rightarrow X^n$. Genau wie in 4.15 folgt, dass die Einschränkung der Umkehrung dieser Bijektion auf jeden Abschluss einer Zelle stetig ist, und nach Axiom W erhalten wir damit einen Homöomorphismus. Damit entsteht das n -Skelett auch im allgemeinen Fall durch Ankleben von n -Zellen. Daraus und der universellen Eigenschaft des verklebten Raumes sieht man auch, dass eine Funktion $f : X \rightarrow Z$ in einen beliebigen Raum Z genau dann stetig ist, wenn ihre Komposition mit jeder charakteristischen Abbildung stetig ist.

Beginnt man andererseits mit einer diskreten Menge X^0 und bildet für jedes k den Raum X^k aus X^{k-1} durch Ankleben beliebig vieler k -Zellen, so erhält man wie in 4.15 einen normalen Raum und nach Teil (2) von Proposition 4.17 ist Axiom C automatisch erfüllt. Versieht man nun $X := \cup_n X^n$ mit der finalen Topologie bezüglich der abgeschlossenen Zellen so erhält man einen CW-Komplex.

Die Darstellung von CW-Komplexen als verklebte Räume zeigt auch (wiederum wie in 4.15) dass (X^k, X^{k-1}) immer eine Kofaserung ist. Betrachten wir nun eine Homotopie $H : X^k \times I \rightarrow Z$ in einen beliebigen Raum Z und eine Fortsetzung des Anfangswertes $f : X \rightarrow Z$. Dann kann man H Schritt für Schritt zu $H_\ell : X^{k+\ell} \times I \rightarrow Z$ fortsetzen und definiert $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Z$ durch $\tilde{H}|_{X^{k+\ell}} = H_\ell$. Somit ist auch (X, X^k) eine Kofaserung.

Ist allgemein $A \subset X$ ein CW-Teilraum so entsteht $A \cup X^n$ aus $A \cup X^{n-1}$ durch Ankleben von n -Zellen. Analoge Argumente wie zuvor zeigen, dass (X, A) wieder eine Kofaserung ist. Wir haben also bewiesen:

PROPOSITION. Jedes CW-Paar ist eine Kofaserung.

4.19. Bevor wir uns dem zellulären Approximationssatz zuwenden, notieren wir noch ohne Beweis ein Resultat über die Verträglichkeit von CW-Zerlegungen mit gewissen Konstruktionen.

PROPOSITION. (1) Sei X ein CW-Komplex und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann ist \tilde{X} in natürlicher Weise ein CW-Komplex mit $\dim(\tilde{X}) = \dim(X)$. Die Zellen von \tilde{X} sind genau die Bogenkomponenten der Urbilder von Zellen von X .

(2) Sei (X, A) ein CW-Paar, Y ein CW-Komplex und $f : A \rightarrow Y$ eine zelluläre Abbildung. Dann ist $X \cup_f Y$ in natürlicher Weise ein CW-Komplex. Insbesondere ist X/A in natürlicher Weise ein CW-Komplex.

(3) Sei X ein beliebiger, Y ein lokalkompakter CW-Komplex. Dann ist $X \times Y$ in natürlicher Weise ein CW-Komplex, dessen Zellen gerade die Produkte der Zellen von X mit den Zellen von Y sind.

4.20. Der zelluläre Approximationssatz. Wir können nun eines der fundamentalen Resultate über CW-Komplexe beweisen:

SATZ (zellulärer Approximationssatz). Seien X und Y zwei CW-Komplexe, $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Dann ist f homotop zu einer zellulären Abbildung $g : X \rightarrow Y$. Ist f bereits zellulär auf einem CW-Teilraum $A \subset X$ so kann man $g|_A = f|_A$ und Homotopie relativ zu A erreichen.

BEWEIS. Wir konstruieren induktiv für jedes $n \geq -1$ eine Homotopie

$$H^n : (A \cup X^n) \times I \rightarrow Y$$

relativ zu A mit $H(x, 0) = f(x)$ konstruieren, die auf $(A \cup X^{n-1}) \times I$ mit H^{n-1} übereinstimmt und alle q -Zellen e^q in $X^n \setminus A$ in das q -Skelett Y^q abbildet. Nach Bemerkung (2) von 4.16 erhält man eine stetige Homotopie $H : X \times I \rightarrow Y$ (relativ zu A) indem man H auf $A \cup X^n$ als H^n definiert und offensichtlich ist der Anfangswert dieser Homotopie f und der Endwert eine zelluläre Abbildung, die auf A mit f übereinstimmt.

Der Induktionsanfang ist trivial: $H^{-1} : A \times I \rightarrow Y$ ist einfach konstant gleich f . Nehmen wir also an dass für ein $n \geq 0$ H^{n-1} bereits konstruiert ist. Sei $e \subset X \setminus A$ eine fixe n -Zelle. Wir werden eine Homotopie $H^e : \bar{e} \times I \rightarrow Y$ mit Anfangswert $f|_{\bar{e}}$ konstruieren die auf dem Rand $\dot{e} \times I$ mit H^{n-1} übereinstimmt und deren Endwert im n -Skelett Y^n liegt. Haben wir diese Homotopien für jede Zelle, so definieren wir einfach H^n als H^{n-1} auf $A \cup X^{n-1}$ und als H^e auf \bar{e} , für jede Zelle e . Klarerweise ist das stetig und erfüllt alle geforderten Eigenschaften.

Es bleibt also nur noch die Homotopie H^e zu konstruieren. Dazu sei

$$G : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$$

die charakteristische Abbildung der Zelle e . Betrachten wir nun $h : S^{n-1} \times I \rightarrow Y$ gegeben als $h(x, t) := H^{n-1}(G(x), t)$ und $\phi := f \circ G : B^n \rightarrow Y$, dann ist $\phi(x) = h(x, 0)$ für alle $x \in S^{n-1}$. Daher existiert eine Fortsetzung $\tilde{h} : B^n \times I \rightarrow Y$ von h mit Anfangswert ϕ . Sei $\tilde{\phi}$ der Endwert von \tilde{h} .

Nach Teil (2) von Proposition 4.17 ist die kompakte Menge $\tilde{\phi}(B^n)$ in einem endlichen CW-Teilraum Y_0 von Y enthalten. Seien e^{n_1}, \dots, e^{n_r} mit $n < n_1 \leq \dots \leq n_r$ die Zellen von Y_0 , die nicht in Y^n liegen. Nach Konstruktion ist $\tilde{\phi}$ eine stetige Funktion $(B^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y^n \cup e^{n_1} \cup \dots \cup e^{n_r}, Y^n)$. Nun wenden wir r mal Proposition 4.14(3) an: Zunächst kann man (da $n < n_r$) $\tilde{\phi}$ homotop relativ zu S^{n-1} zu einer Abbildung deformieren die e^{n_r} nicht trifft, das Resultat deformiert man so, dass es $e^{n_{r-1}}$ nicht trifft usw. Damit ist also $\tilde{\phi}$ homotop relativ zu S^{n-1} zu einer Abbildung ϕ_1 die ganz B^n in das n -Skelett Y^n abbildet.

Nun betrachten wir die stetige Funktion $\psi : B^n \times \{0, 1\} \cup S^{n-1} \times I \rightarrow Y$, die auf $B^n \times \{1\}$ mit ϕ_1 und sonst mit \tilde{h} übereinstimmt. Aus dem Beweis von Proposition 4.14 wissen wir, dass $(B^n \times I, B^n \times \{0, 1\} \cup S^{n-1} \times I)$ eine Kofaserung ist. Damit kann man ψ zu einer stetigen Funktion auf ganz $B^n \times I$ fortsetzen. Diese Fortsetzung erfüllt nun $\psi(x, 0) = f(G(x))$, $\psi(z, t) = H^{n-1}(G(z), t)$ und $\psi(x, 1) \in Y^n$ für alle $x \in B^n$ und $z \in S^{n-1}$. Nun definiert man $H^e : \bar{e} \times I \rightarrow Y$ als H^{n-1} auf $\dot{e} \times I$ und durch $H^e(x, t) := \psi(G^{-1}(x), t)$ für $x \in e$. Dann ist $H^n \circ (G \times \text{id}_I)$ und damit auch H^e stetig (siehe Bemerkung (2) von 4.16), und offensichtlich hat H^e die verlangten Eigenschaften. \square

4.21. Die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes. Wir betrachten einen CW-Komplex X mit einer 0-Zelle x_0 als Basispunkt. Hat X nur diese eine 0-Zelle und keine 1-Zellen, dann folgt aus dem zellulären Approximationssatz sofort, dass X einfach zusammenhängend ist: Betrachten wir die offensichtliche CW-Zerlegung von S^1 mit einer 0-Zelle und einer 1-Zelle. Ist nun $f : S^1 \rightarrow X$ stetig und punkterhaltend, dann sagt der zelluläre Approximationssatz direkt, dass f punkterhaltend homotop zu einer Abbildung ist, die die ganze S^1 in das 1-Skelett von X , also auf den Basispunkt abbildet. Insbesondere sehen wir (nochmals), dass für $n \geq 2$ die Sphäre S^n einfach zusammenhängend ist. Analog ist für $n \geq 1$ auch der komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ aus Beispiel (6) von 4.15 einfach zusammenhängend.

Weitere Informationen über die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes liefert uns Beispiel (2) aus 3.6, eine Anwendung des Satzes von Seifert und van Kampen. Dort haben wir gesehen, dass Ankleben von Zellen der Dimension ≥ 3 die Fundamentalgruppe nicht ändert. Somit induziert die Inklusion $X^2 \hookrightarrow X$ des 2-Skelettes einen Isomorphismus $\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$. Im selben Beispiel haben wir auch geklärt, wie sich die Fundamentalgruppe durch ankleben von 2-Zellen verändert. Wir schließen, dass die Inklusion $X^1 \hookrightarrow X$ des 1-Skelettes eine Surjektion $\pi_1(X^1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ induziert. Der Kern dieser Abbildung wird als Normalteiler von den Klebeabbildungen der 2-Zellen erzeugt, wobei man noch die Basispunkte in Betracht ziehen muss. Insbesondere erhalten wir:

KOROLLAR. *Sei X ein CW-Komplex mit nur einer 0-Zelle x_0 , endlich vielen 1-Zellen e_α^1 und endlich vielen 2-Zellen e_β^2 mit Klebeabbildungen $f_\beta : S^1 \rightarrow X^1$ mit $f_\beta(1) = x_0$. Dann ist die Fundamentalgruppe des 1-Skelettes X^1 die freie Gruppe über den e_α^1 . Zu jedem f_β haben wir $[f_\beta] \in \pi_1(X^1, x_0)$, und es gilt $\pi_1(X) = \mathcal{F}(\{e_\alpha\})/\mathcal{N}(\{[f_\beta]\})$.*

BEMERKUNG. (1) Beispiel (2) von 3.6 zeigt, dass jede endlich präsentierte Gruppe als Fundamentalgruppe eines endlichen 2-dimensionalen CW-Komplexes auftritt.

(2) Man kann zeigen, dass jeder bogenzusammenhängende CW-Komplex X homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex mit nur einer 0-Zelle ist. Somit gibt das Korollar eine vollständige Beschreibung der Fundamentalgruppe von endlichen CW-Komplexen. Ein Beweis dieser Aussage geht wie folgt: Man wählt zunächst eine fixe 0-Zelle e^0 . Für jede weitere 0-Zelle e_α wählt man einen stetigen Weg c_α von e^0 nach e_α der ganz im 1-Skelett X^1 liegt. Nun klebt man für jedes α eine weitere 1-Zelle e_α^1 mit einem Ende an e^0 und mit dem anderen an e_α und eine 2-Zelle e_α^2 längs der Kurve, die zunächst längs c_α von e^0 nach e_α und dann längs e_α^1 zurück nach e^0 läuft. Das Ergebnis ist ein CW-Komplex \tilde{X} , der offensichtlich homotopieäquivalent zu X ist. Außerdem ist $Y := \cup_\alpha (c_\alpha \cup e_\alpha^1 \cup e_\alpha^2)$ ein kontrahierbarer CW-Teilraum von \tilde{X} . Daher ist nach Proposition 4.18 und Proposition 4.5 \tilde{X} homotopieäquivalent zu \tilde{X}/Y , und dies ist ein CW-Komplex mit nur einer 0-Zelle.

Exkurs: Höhere Homotopiegruppen

In diesem Kapitel beenden wir das Studium der Homotopietheorie mit einer kurzen Besprechung der höheren Homotopiegruppen. Während die Definition dieser Gruppen noch ziemlich anschaulich und einfach ist, ist ihre Berechnung äußerst schwierig. Tatsächlich sind nicht einmal alle höheren Homotopiegruppen der Sphäre S^2 bekannt.

5.1. Grundlegendes.

DEFINITION. (1) Sei (X, x_0) ein punktierter Raum, $n \geq 2$. Die n -te Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_0)$ ist definiert als die Menge $[S^n, X]_0$ von punkterhaltenden Homotopieklassen. Wiederum bezeichnen wir die von einer punkterhaltenden stetigen Abbildung $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induzierte Abbildung $f_* : [S^n, X]_0 \rightarrow [S^n, Y]_0$ auch mit $\pi_n(f)$.

(2) Ein Raum X heißt n -fach zusammenhängend, falls er bogenzusammenhängend ist, und $\pi_k(X, x_0) = 0$ für alle $k \leq n$ gilt.

Nach Beispiel 2.10 ist $S^n \cong \Sigma' S^{n-1}$ also ist nach Proposition 2.10 $\pi_n(X, x_0)$ für jeden punktierten Raum (X, x_0) eine Gruppe, und die induzierten Abbildungen $\pi_n(f)$ sind Gruppenhomomorphismen. Da aber S^{n-1} für $n \geq 2$ wiederum selbst als $\Sigma' S^{n-2}$ geschrieben werden kann, ist $\pi_n(X, x_0)$ für $n \geq 2$ eine abelsche Gruppe nach Proposition 2.11. Damit definiert $\pi_n(\)$ einen kovarianten Funktor von der Kategorie der punktierten Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Eine direkte Beschreibung der Gruppenoperationen auf $\pi_n(X, x_0)$ sieht wie folgt aus: Betrachten wir S^{n-1} als Äquator in S^n und nehmen wir als Basispunkt einen Punkt auf dem Äquator, zum Beispiel den "Ostpol". Dann kann man offensichtlich S^n/S^{n-1} mit einem Wedge von zwei Kopien von S^n identifizieren, und man erhält einen Repräsentanten des Produktes der Klassen zu $f, g : S^n \rightarrow X$, indem man die Funktion, die auf einer Kopie durch f und auf der anderen durch g gegeben ist, mit der Projektion $S^n \rightarrow S^n/S^{n-1}$ zusammensetzt.

Proposition 2.10 liefert auch eine Identifikation $\pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$, und natürlich kann man das iterieren. Weiters kann man die Sphäre S^n mit dem Quotientenraum B^n/S^{n-1} identifizieren. Dies liefert eine Interpretation von $\pi_n(X, x_0)$ als Homotopieklassen relativ zu S^{n-1} von stetigen Abbildungen $(B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, \{x_0\})$. Schließlich ist nach 1.4 $(B^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n)$ und damit ist $\pi_n(X, x_0)$ gerade die Menge der Homotopieklassen relativ zu ∂I^n von stetigen Abbildungen $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, \{x_0\})$. In jedem dieser Bilder kann man die Gruppenoperationen relativ leicht beschreiben.

Die höheren Homotopiegruppen sind bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl des Basispunktes. Da die Sphäre S^n eine Mannigfaltigkeit ist, ist sie mit jedem Basispunkt $*$ ein wohlpunktierter Raum. Sind $x_0, x_1 \in X$ Punkte, dann wählt man einen Weg $c : I \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 und betrachtet ihn als Homotopie $* \times I \rightarrow X$. Eine stetige Funktion $f : (S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ ist eine Fortsetzung des Anfangswertes, und setzt man die ganze Homotopie fort, dann ist der Endwert eine punkterhaltende stetige Abbildung $g : (S^n, *) \rightarrow (X, x_1)$. Man zeigt, dass $[g] \in \pi_n(X, x_1)$ nur von $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ abhängt und dass dies einen Homomorphismus definiert. Eine Inverse zu diesem Homomorphismus erhält man, indem man c in umgekehrter Richtung durchläuft.

5.2. Überlagerungen und höhere Homotopiegruppen. Bevor wir einige Beispiele betrachten, wollen wir noch studieren, wie sich Überlagerungen bezüglich der höheren Homotopiegruppen verhalten.

PROPOSITION. Sei $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist für jedes $n \geq 2$ der Homomorphismus $\pi_n(p) : \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ ein Isomorphismus.

BEWEIS. Da S^n für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend ist, besitzt nach Satz 3.10 jede stetige Funktion $f : (S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ einen eindeutigen stetigen Lift $\tilde{f} : (S^n, *) \rightarrow (E, e_0)$. Damit ist $\pi_n(p)$ surjektiv.

Sei nun $f : (S^n, *) \rightarrow (E, e_0)$ so, dass $p \circ f : S^n \rightarrow X$ punkterhaltend nullhomotop ist. Dann gibt es eine Homotopie $H : S^n \times I \rightarrow X$ mit $H(x, 0) = p(f(x))$ und $H(x, 1) = H(*, t) = x_0$. Dann ist f ein Lift des Anfangswertes von H , also gibt es nach Satz 3.8 einen eindeutigen Lift \tilde{H} von H mit Anfangswert f . Dann liegen alle Punkt $\tilde{H}(*, t)$ und $\tilde{H}(x, 1)$ in der Faser über x_0 und nach Voraussetzung ist $H(*, 0) = f(*) = e_0$. Da $S^n \times I$ zusammenhängend ist, ist $\tilde{H}(*, t) = \tilde{H}(x, 1) = e_0$, und somit ist f punkterhaltend nullhomotop. Daher ist $\pi_n(p)$ auch injektiv. \square

BEISPIEL. (1) Für S^1 ist die universelle Überlagerung der kontrahierbare Raum \mathbb{R} . Daher sind die Homotopiegruppen von S^1 gegeben durch

$$\pi_k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 1 \\ 0 & k > 1. \end{cases}$$

(2) Nach dem zellulären Approximationssatz 4.20 ist jeder CW-Komplex, der nur eine 0-Zelle und keine Zellen in den Dimensionen $1, \dots, n$ besitzt, n -zusammenhängend. Insbesondere ist $\pi_k(S^n) = 0$ für $k < n$.

(3) Für den reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ ist S^n die universelle Überlagerung, also ist $\pi_k(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_k(S^n)$ für alle $k \geq 2$. Analog ist für die Linsenräume aus 3.13 $\pi_k(L(p, q_1, \dots, q_n)) \cong \pi_k(S^{2n-1})$ für $k \geq 2$.

Die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung

Faserungen und die assoziierten langen exakten Sequenzen von Homotopiegruppen bilden die einzige einfache Möglichkeit zur Berechnung von höheren Homotopiegruppen.

5.3. Faserungen. Faserungen sind die dualen Objekte zu den Kofaserungen, die wir in Kapitel 4 besprochen haben. Viele der Konstruktionen in diesem Abschnitt sind einfach duale Versionen der dortigen Resultate.

DEFINITION. (1) Seien E und X topologische Räume. Eine stetige Funktion $p : E \rightarrow X$ heißt eine *Faserung* (genauer eine Hurewicz-Faserung), falls sie die folgende allgemeine Homotopie-Liftungseigenschaft hat: Für jeden topologischen Raum Z , jede stetige Homotopie $H : Z \times I \rightarrow X$ und jede stetige Funktion $f : Z \rightarrow E$ mit $f(z) = H(z, 0)$ existiert eine Homotopie $\tilde{H} : Z \times I \rightarrow E$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}(z, 0) = f(z)$.

(2) Ist $p : E \rightarrow X$ eine Faserung und $x \in X$ ein Punkt, dann heißt der abgeschlossene Teilraum $F := p^{-1}(x) \subset E$ die *Faser* der Faserung p über x .

BEMERKUNG. (1) Wie bei den Überlagerungen in Bemerkung 3.8 kann man die allgemeine Homotopie-Liftungseigenschaft diagrammatisch formulieren: $p : E \rightarrow X$ ist

eine Faserung, genau dann, wenn in jedem Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

eine Pfeil, wie der strichlierte in

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

existiert, der beide Dreiecke kommutativ macht.

(2) Im Gegensatz zum Begriff der Hurewitz-Faserung, wie wir sie hier definiert haben, gibt es auch noch den Begriff der Serre-Faserung, bei dem man die Homotopie-Liftungseigenschaft nur für endliche CW-Komplexe Z fordert.

(3) Man kann zeigen, dass für einen bogenzusammenhängenden Raum X und eine Faserung $p : E \rightarrow X$ je zwei Fasern homotopieäquivalent sind. Für $x, y \in X$ betrachte die Fasern $F_x := p^{-1}(x)$ und F_y und wähle einen stetigen Weg $c : I \rightarrow X$ von x nach y . Die Inklusion $F_x \hookrightarrow E$ ist ein Lift des Anfangswertes der Homotopie $H : F_x \times I \rightarrow X$, $H(e, t) = c(t)$. Nach der Faserungseigenschaft gibt es einen Lift \tilde{H} der Homotopie, und der Endwert dieses Lifts ist eine stetige Funktion $F_x \rightarrow F_y$. Durchläuft man c in umgekehrter Richtung dann erhält man analog eine Funktion $F_y \rightarrow F_x$, und man zeigt, dass dies inverse Homotopieäquivalenzen sind.

BEISPIEL. (1) Nach Satz 3.8 ist jede Überlagerung eine Faserung mit diskreter Faser. (2) Für beliebige topologische Räume X und F ist die erste Projektion $pr_1 : X \times F \rightarrow X$ eine Faserung. Hat man nämlich $H : Z \times I \rightarrow X$ und $f : Z \rightarrow X \times F$ gegeben, so kann man $f(z)$ als $(f_1(z), f_2(z))$ schreiben und setzt einfach $\tilde{H}(z, t) := (H(z, t), f_2(z))$.

5.4. Exakte Sequenzen. Exakte Sequenzen sind ein algebraisches Hilfsmittel, das im weiteren noch eine wichtige Rolle spielen wird. Man verwendet es hauptsächlich für abelsche Gruppen und Moduln, das Konzept macht aber für punktierte Mengen Sinn.

Seien (A, a_0) und (B, b_0) punktierte Mengen, also Mengen mit einem ausgezeichneten Element, $f : A \rightarrow B$ eine punkterhaltende Funktion. Dann definiert man den *Kern* $\text{Ker}(f)$ von f als die Menge aller $a \in A$ mit $f(a) = b_0$. Das Bild $\text{Im}(f)$ von f ist wie üblich die Menge aller $f(a)$ für $a \in A$.

Ist (C, c_0) eine weitere punktierte Menge und $g : (B, b_0) \rightarrow (C, c_0)$ punkterhaltend, dann heißt die Folge $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ eine *exakte Sequenz*, falls $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ gilt. Eine Folge der Form $\dots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$ heißt exakt genau dann wenn für jedes i die Gleichung $\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$ gilt.

Bezeichnen wir mit 0 die einpunktige punktierte Menge, dann heißt eine exakte Sequenz der Form $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine *kurze exakte Sequenz*. Natürlich sagt für eine Folge von punktierten Mengen die Exaktheit nicht viel aus. Wesentlich interessanter wird der Begriff, wenn alle Mengen in der Folge Gruppen oder abelsche Gruppen oder (allgemeiner) Moduln über einem kommutativen Ring mit 1 und alle Abbildungen Homomorphismen für die entsprechende Struktur sind. In diesem Fall gilt zum Beispiel:

(1) $0 \rightarrow A \rightarrow 0$ ist nur für $A = 0$ exakt (dies gilt sogar für punktierte Mengen)

(2) $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ ist genau dann exakt, wenn f injektiv ist.

(3) $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ ist genau dann exakt, wenn f surjektiv ist.

(4) $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ ist genau dann exakt, wenn f ein Isomorphismus ist.

Selbst im einfachsten Fall der abelschen Gruppen reicht die Kenntnis der beiden äußeren Terme einer kurzen exakten Sequenz im allgemeinen nicht zur Bestimmung des mittleren Terms aus. Ein einfaches Beispiel dafür liefern die beiden exakten Sequenzen $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ und $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$, wobei die Abbildung $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ durch $\bar{1} \mapsto \bar{2}$ gegeben ist. Die Beschreibung der möglichen Mitteltermine einer kurzen exakten Sequenz bei gegebenen Endtermen ist ein wichtiger Teil der homologischen Algebra. Oft können aber aus der Exaktheit einer Sequenz direkt Informationen gewonnen werden.

5.5. Die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Faserung, $e_0 \in E$ ein Basispunkt, $x_0 = p(e_0)$, $F = p^{-1}(x_0)$ die Faser über x_0 und $i : F \hookrightarrow E$ die Inklusion. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir Homomorphismen $i_* = \pi_k(i) : \pi_k(F, e_0) \rightarrow \pi_k(E, e_0)$ und $p_* = \pi_k(p) : \pi_k(E, e_0) \rightarrow \pi_k(X, x_0)$.

Der erste Schritt zur Konstruktion der langen exakten Homotopiesequenz ist eine Funktion $\partial : \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}(F, e_0)$ zu konstruieren. Dazu betrachtet man S^k als B^k/S^{k-1} , also kann man eine punkterhaltende Funktion $f : S^k \rightarrow X$ als Funktion $f : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (X, x_0)$ betrachten. Da B^k kontrahierbar ist, ist f nullhomotop als Funktion $B^k \rightarrow X$, also finden wir eine Homotopie $H : B^k \times I \rightarrow X$ mit $H(z, 0) = x_0$, $H(*, t) = x_0$ und $H(z, 1) = f(z)$. Die konstante Funktion e_0 ist ein Lift des Anfangswertes dieser Homotopie, also finden wir einen Lift $\tilde{H} : B^k \times I \rightarrow E$ der ganzen Homotopie. Der Endwert g dieses Lifts liefert eine Funktion $g : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (E, F)$ mit $p \circ g = f$, und man zeigt, dass g basispunkterhaltend gewählt werden kann. Dann beweist man, dass für einen beliebigen Lift dieser Art, die Klasse $[g] \in \pi_{k-1}(F, e_0)$ nur von $[f] \in \pi_k(X, x_0)$ abhängt, also $\partial([f]) = [g]$ wohldefiniert ist. Hat man das gezeigt, dann ist leicht zu sehen, dass $\partial : \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}(F, e_0)$ ein Homomorphismus ist. Dieser Homomorphismus heißt der *Einhängungshomomorphismus*.

SATZ. Sei $p : E \rightarrow X$ eine Faserung, $x_0 \in X$, $e_0 \in F := p^{-1}(x_0)$ Basispunkte und sei $i : F \rightarrow E$ die Inklusion. Dann ist die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \longrightarrow \cdots$$

exakt. Der Einhängungshomomorphismus ∂ in dieser Sequenz ist wie folgt gegeben: Sei $f : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ stetig und punkterhaltend, dann gibt es ein stetiges, punkterhaltendes $\tilde{f} : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, F)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\partial([f]) = [\tilde{f}|_{S^{n-1}}]$.

BEWEISSKIZZE. Der Beweis ist vollständig "geometrisch". Man zeigt zunächst, dass die Komposition von zwei aufeinander folgenden Homomorphismen Null ist, also das Bild jedes der Homomorphismen im Kern des nächsten enthalten ist. So ist $p \circ i$ die konstante Abbildung x_0 , also $p_* \circ i_* = 0$. Realisieren wir $[f] \in \pi_n(E, e_0)$ durch eine Abbildung $f : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, e_0)$, dann ist das ein Lift für $p \circ f : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ der ganz S^{n-1} auf e_0 abbildet, also folgt $\partial \circ p_* = 0$. Ein Element $f : S^{n-1} \rightarrow F$ im Bild von ∂ besitzt nach Definition, als Funktion nach E betrachtet, eine stetige Fortsetzung auf B^n , ist also nullhomotop als Funktion nach E , also ist $i_* \circ \partial = 0$.

Damit bleibt zu zeigen, dass der Kern jedes der Homomorphismen im Bild des vorherigen enthalten ist. Sei etwa $f : S^n \rightarrow E$ so, dass $p_*[f] = 0$ gilt, also $p \circ f$ nullhomotop ist. Ist $H : S^n \times I \rightarrow X$ eine entsprechende Homotopie, dann ist f ein Lift des Anfangswerts, also existiert ein Lift der Homotopie. Der Endwert dieses Lifts hat nach Konstruktion Werte in F , und man schließt leicht, dass $[f] \in \text{Im}(i_*)$ folgt.

Ist $f : S^{n-1} \rightarrow F$ nullhomotop als Abbildung nach E , dann kann man $f : S^{n-1} \rightarrow E$ stetig auf B^n fortsetzen. Dann ist $p \circ f : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$, definiert also eine Klasse in $\pi_n(X, x_0)$ und nach Definition bildet ∂ diese Klasse auf $[f] \in \pi_{n-1}(F, e_0)$ ab. Sei schließlich $f : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ so, dass $\partial([f]) = 0$ gilt. Dann gibt es einen Lift $\tilde{f} : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, F)$, sodass $\tilde{f}|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow F$ nullhomotop ist. Da (B^n, S^{n-1}) eine Kofaserung ist, setzt sich eine entsprechende Homotopie auf $B^n \times I$ fort. Der Endwert der Fortsetzung ist eine stetige Funktion $(B^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, e_0)$, definiert also eine Klasse in $\pi_n(E, e_0)$ und man sieht sofort, dass diese Klasse unter p_* auf $[f]$ abgebildet wird. \square

Für die beiden Beispiele von Faserungen, die wir bisher kennen gelernt haben, liefert diese exakte Sequenz leider nichts neues. Im Fall von Überlagerungen ist F diskret, also $\pi_k(F, e_0) = 0$ für all $k > 0$ und wir erhalten nur einen neuen Beweis für Proposition 5.2. Für Produkte $X \times F$ liefern die Projektionen $p_X : X \times F \rightarrow X$ und $p_F : X \times F \rightarrow F$ Homomorphismen $\pi_k(X \times F, (x_0, f_0)) \rightarrow \pi_k(X, x_0) \times \pi_k(F, f_0)$ und man zeigt leicht direkt, dass das Isomorphismen sind. Die lange exakte Sequenz liefert keine zusätzliche Information.

Wir müssen also andere Beispiele von Faserungen finden, um aus der exakten Sequenz neue Erkenntnisse zu ziehen. Der Schlüssel dazu ist ein Satz, der besagt, dass auch Abbildungen, die lokal wie Produkte aussehen, Faserungen sind (so fern die Basis ein hinreichend schöner Raum ist). Wir werden diesen Satz nicht beweisen, da uns das zu weit von unserem eigentlichen Thema abbringen würde.

5.6. Faserbündel.

DEFINITION. Seien E , X und F topologische Räume. Eine stetige Abbildung $p : E \rightarrow X$ heißt ein *topologisches Faserbündel*, falls zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U von x und ein Homöomorphismus $\psi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ existieren, sodass $pr_1 \circ \psi = p|_{p^{-1}(U)}$. Die Funktion p muss also lokal um jeden Punkt wie die erste Projektion in einem Produkt aussehen. Man sagt auch E ist ein *lokal triviales Bündel* mit *Basis* X und *Faser* F .

Die glatte Version des Begriffs eines Faserbündels spielt eine zentrale Rolle in weiten Teilen der modernen Differentialgeometrie.

BEISPIEL. (1) Nach Definition ist jede Überlagerung ein lokal triviales Faserbündel mit diskreter Faser.

(2) Hopf Faserungen: Betrachten wir S^{2n+1} als Einheitssphäre in \mathbb{C}^{n+1} und sei $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ die kanonische Projektion auf den komplexen projektiven Raum (siehe 4.15, Beispiel (6)). Nach Definition ist $\mathbb{C}P^n$ der Quotientenraum von S^{2n+1} nach der Relation $(z_0, \dots, z_n) \sim (z'_0, \dots, z'_n)$ falls es ein $z \in S^1$ gibt, sodass $z'_i = z z_i$ für alle i . Sei nun $p(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}P^n$ ein Punkt. Dann gibt es ein i , sodass $z_i \neq 0$ und diese Eigenschaft ist unabhängig von der Wahl des Urbildes in S^{2n+1} . Die Menge U_i aller Punkte, die diese Eigenschaft haben, ist offensichtlich offen in $\mathbb{C}P^n$, denn $p^{-1}(U_i)$ ist gerade die Menge aller Punkte in S^{2n+1} , deren i -te Koordinate ungleich Null ist. Nun definieren wir $\psi : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S^1$ durch $\psi(z_0, \dots, z_n) := (p(z_0, \dots, z_n), \frac{z_i}{|z_i|})$. Dies ist offensichtlich stetig und $pr_1 \circ \psi = p|_{U_i}$. Ist umgekehrt $p(z_0, \dots, z_i) \in U_i$ und $\lambda \in S^1$, dann ist $(\frac{\lambda z_0}{z_i}, \dots, \frac{\lambda z_n}{z_i})$ ein Punkt in $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, der nur von $p(z_0, \dots, z_n)$ abhängt. Multipliziert man nun diesen Punkt noch mit dem Reziprokwert seiner Norm, so erhält man einen Punkt in S^{2n+1} , der unter p auf $p(z_0, \dots, z_n)$ abgebildet wird, und man überprüft direkt, dass diese Konstruktion eine stetige Inverse zu ψ definiert.

Damit ist $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ ein lokal triviales Bündel mit Faser S^1 . Insbesondere ist $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ und wir erhalten ein lokal triviales Faserbündel $p : S^3 \rightarrow S^2$ mit Faser S^1 .

(3) Eine weitere, sehr wichtige Klasse von Beispielen bilden die homogenen Räume. Sei dazu G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e , $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, G/H der Raum der Nebenklassen mit der Quotiententopologie und $p : G \rightarrow G/H$ die kanonische Abbildung. Nehmen wir an, es gibt eine Umgebung U von $p(e)$ und eine stetige Funktion $s : U \rightarrow G$ mit $p \circ s = \text{id}_U$. Für eine Lie Gruppe G und eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ ist diese Bedingung immer erfüllt.

Ist $g \in p^{-1}(U)$, dann ist nach Konstruktion $gH = s(p(g))H$, also ist $s(p(g))^{-1}g \in H$. Betrachte nun die stetige Funktion $\psi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times H$, die gegeben ist als $\psi(g) := (p(g), s(p(g))^{-1}g)$. Offensichtlich ist $pr_1 \circ \psi = p$ auf $p^{-1}(U)$ und $(x, h) \mapsto s(x)h$ ist eine stetige Inverse zu ψ .

Ist nun $x = p(g) \in G/H$ beliebig, dann ist $gU = \{gg'H : g'H \in U\}$ eine offene Umgebung von x , $y \mapsto gs(g^{-1}y)$ definiert eine stetige Funktion $\tilde{s} : gU \rightarrow p^{-1}(gU)$ mit $p \circ \tilde{s} = \text{id}$, und damit konstruiert man ein ψ wie oben. Also ist $p : G \rightarrow G/H$ ein lokal triviales Faserbündel mit Faser H .

Der oben angesprochene Satz lautet nun:

SATZ. *Ist $p : E \rightarrow X$ ein Faserbündel mit parakompakter Basis, dann ist p eine Faserung.*

Da kompakte Hausdorffräume und metrische Räume automatisch parakompakt sind, deckt dieses Resultat eine Fülle von Beispielen ab.

5.7. Die Hopf-Faserungen. Nach Beispiel (2) von 5.6 gibt es für jedes $n \geq 1$ eine Faserung $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ mit Faser S^1 . Nach dem zellulären Approximationssatz wissen wir, dass $\pi_k(S^{2n+1}) = 0$ für $k \leq 2n$ und $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$. Weiters wissen wir aus 5.2, dass $\pi_k(S^1) = 0$ für $k \neq 1$ und $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. In der langen exakten Homotopiesequenz der Hopf-Faserung hat man zunächst den Abschnitt

$$\pi_2(S^{2n+1}) \rightarrow \pi_2(\mathbb{C}P^n) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^{2n+1}),$$

und da $\pi_2(S^{2n+1}) = \pi_1(S^{2n+1}) = 0$ ist $\pi_2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ für alle $n \geq 1$. Insbesondere erhalten wir $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$, da $S^2 = \mathbb{C}P^1$.

Betrachten wir nun $p : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ und definieren wir $f : B^2 \rightarrow S^3$ durch $f(z) = (z, \sqrt{1-|z|^2})$, wobei wir B^2 als Einheitsball in \mathbb{C} und S^3 als Einheitssphäre in \mathbb{C}^2 betrachten. Dann ist $p \circ f$ nach 4.15, Beispiel (6), gerade der Homöomorphismus $B^2/S^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ der $\mathbb{C}P^1$ mit S^2 identifiziert. Betrachtet man nun $(1, 0)$ als Basispunkt in S^3 und damit $p(1, 0)$ als Basispunkt von S^2 , dann ist die Faser $p^{-1}(p(1, 0))$ gerade die Menge aller $(z, 0)$ für $z \in S^1$. Das zeigt aber, dass der Einhängungshomomorphismus $\partial : \pi_2(\mathbb{C}P^1) \rightarrow \pi_1(S^1)$ die Klasse von $p \circ f$ gerade auf die Klasse von id_{S^1} abbildet. Somit erzeugt $[p \circ f]$ die Gruppe $\pi_2(\mathbb{C}P^1)$ und damit erzeugt id_{S^2} die Gruppe $\pi_2(S^2)$. Analog zeigt man, dass die Inklusion $S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ die Gruppe $\pi_2(\mathbb{C}P^n)$ erzeugt.

Nun könnte man vermuten, dass für die Sphären S^n die Homotopiegruppen durch $\pi_k(S^n) = 0$ für $k \neq n$ und $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ gegeben sind. Leider benehmen sich diese Homotopiegruppen viel komplizierter: Wir können nämlich in der Homotopiesequenz der Hopf-Faserungen die folgenden Teile betrachten:

$$\rightarrow \pi_k(S^1) \rightarrow \pi_k(S^{2n+1}) \rightarrow \pi_k(\mathbb{C}P^n) \rightarrow \pi_{k-1}(S^1).$$

Für $k \geq 3$ sind $\pi_k(S^1)$ und $\pi_{k-1}(S^1)$ trivial, und damit ist $\pi_k(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k(S^{2n+1})$ für $k \geq 3$. Insbesondere ist $\pi_k(\mathbb{C}P^n) = 0$ für $3 \leq k \leq 2n$.

Wendet man dies nun im Fall $n = 1$ an, so sieht man, dass $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3)$ für alle $k \geq 3$. In der Tat kann man zeigen, dass $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ für alle $n \geq 1$ ist und dass diese Gruppe immer von der Klasse der Identitätsabbildung erzeugt wird. Damit ist aber

$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ wobei die Homotopieklasse der Hopf-Faserung ein Erzeuger ist. Dies ist der erste Punkt an dem wir sehen, dass sich Homotopiegruppen nicht so benehmen, wie man es sich intuitiv vorstellen würde. Die Tatsache, dass man die S^3 so um die S^2 "wickeln" kann, dass das Ergebnis nicht nullhomotop ist war eine der großen Sensationen in der Mathematik der 30er Jahre. Die höheren Homotopiegruppen der Sphären benehmen sich tatsächlich sehr seltsam: Beispielsweise ist $\pi_k(S^n)$ immer endlich, außer für $k = n$ und bei geradem n für $k = 2n - 1$. Diese endlichen Gruppen sind aber teilweise recht groß. Zum Beispiel ist $\pi_{n+23}(S^n) \cong \mathbb{Z}_{65520} \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$ für $n \geq 24$, während $\pi_{n+12}(S^n) = 0$ für $n \geq 13$ ist.

5.8. Zur Topologie einiger Matrizen­gruppen. Eine wichtige Anwendung der langen exakten Homotopie­sequenz betrifft die Topologie der grundlegenden Matrizen­gruppen $GL(n, \mathbb{K})$ und $SL(n, \mathbb{K})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , sowie $SO(n)$, $SU(n)$ und $U(n)$. Diese Gruppen sind auch in der theoretischen Physik wichtig (Eichtheorien).

Betrachte zunächst eine Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Wende das Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren auf die Spaltenvektoren von A an und sei $K(A)$ die Matrix mit den resultierenden Vektoren als Spalten. Dann ist $K(A) \in O(n)$ und $K(A) = A\tilde{N}(A)$ für eine Matrix $\tilde{N}(A)$, die in der Untergruppe $B^+(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ der oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Eintragungen auf der Hauptdiagonale liegt. Dann ist auch $N(A) = \tilde{N}(A)^{-1} \in B^+(n)$ und die Koeffizienten von $K(A)$ und $N(A)$ hängen stetig von den Koeffizienten von A ab (siehe Proseminar). Bezeichnet $\mathbb{I}_n \in B^+(n)$ die $n \times n$ -Einheitsmatrix, dann ist für $t \in [0, 1]$ auch $(1-t)N(A) + t\mathbb{I}_n \in B^+(n)$. Somit erhalten wir eine stetige Abbildung $H : GL(n, \mathbb{R}) \times I \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ durch $H(A, t) = K(A)((1-t)N(A) + t\mathbb{I}_n)$. Natürlich ist $H(A, 0) = A$ und $H(A, 1) = K(A) \in O(n)$. Für $A \in O(n)$ ist $K(A) = A$ und $N(A) = \mathbb{I}_n$, also $H(A, t) = A$ für alle t . Somit zeigt H , dass $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ ein starker Deformationsretrakt ist, also ist insbesondere $GL(n, \mathbb{R}) \sim O(n)$. Analog sieht man, dass $SO(n)$ in $SL(n, \mathbb{R})$ und in der Gruppe $GL^+(n, \mathbb{R})$ aller Matrizen mit positiver Determinante ein starker Deformationsretrakt ist. Im komplexen Fall sieht man analog, dass $U(n)$ starker Deformationsretrakt von $GL(n, \mathbb{C})$ und $SU(n)$ starker Deformationsretrakt von $SL(n, \mathbb{C})$ ist.

Da die Gruppe $O(n)$ einfach eine disjunkte Vereinigung von zwei Zusammenhangskomponenten ist, die jeweils homöomorph zu $SO(n)$ sind, genügt es für die topologischen Überlegungen die Gruppen $SU(n)$, $U(n)$ und $SO(n)$ zu betrachten.

Beginnen wir mit $SU(2)$. Dies sind gerade jene komplexen 2×2 -Matrizen, deren Spalten eine komplexe Orthonormalbasis von \mathbb{C}^2 bilden. Das ist genau dann der Fall, wenn die Matrix die Form $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ hat. Damit sieht man direkt, dass $SU(2)$ homöomorph zur Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ ist. Insbesondere erhalten wir $\pi_k(SU(2)) = \pi_k(S^3)$ für alle k , also ist $SU(2)$ 2-fach zusammenhängend. Um zu den Gruppen $SU(n)$ zu kommen betrachtet man die Wirkung von $SU(n)$ auf \mathbb{C}^n . Diese ist normerhaltend, also wirkt $SU(n)$ auf die Einheitssphäre S^{2n-1} . Die Isotropiegruppe des ersten Vektors e_1 in der Standardbasis von \mathbb{C}^n besteht aus allen Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ und man sieht leicht, dass so eine Matrix genau dann in $SU(n)$ liegt, wenn $B \in SU(n-1)$ gilt. Damit ist der homogene Raum $SU(n)/SU(n-1)$ isomorph zum Orbit von e_1 (siehe 3.9), und man sieht sofort, dass dieser Orbit die ganze Sphäre S^{2n-1} ist. Nach Beispiel (3) von 5.6 erhält man somit eine Faserung $p : SU(n) \rightarrow S^{2n-1}$ mit Faser $SU(n-1)$. In der langen exakten Homotopie­sequenz dieser Faserung erhält man

die Abschnitte

$$\cdots \rightarrow \pi_{k+1}(S^{2n-1}) \rightarrow \pi_k(SU(n-1)) \rightarrow \pi_k(SU(n)) \rightarrow \pi_k(S^{2n-1}) \rightarrow \dots$$

Für $n \geq 3$ ist $2n-1 \geq 5$, also gilt $\pi_k(S^{2n-1}) = \pi_{k+1}(S^{2n-1}) = 0$ für alle $k \leq 3$. Induktiv erhalten wir $\pi_k(SU(n)) = \pi_k(SU(2))$ für $n \geq 3$ und $k \leq 3$.

Um die Gruppe $U(n)$ zu behandeln betrachten wir die Abbildung $\mathbb{R} \times SU(n) \rightarrow U(n)$, die durch $(t, A) \mapsto e^{2\pi it} A$ gegeben ist. Man verifiziert leicht, dass $e^{2\pi it} A$ tatsächlich unitär und diese Funktion surjektiv ist. Weiters zeigt man (siehe Proseminar) dass dies einen Isomorphismus $U(n) \cong (\mathbb{R} \times SU(n))/H$ für eine geeignete Untergruppe H definiert, die isomorph zu \mathbb{Z} ist. Da $\mathbb{R} \times SU(n) \sim SU(n)$ einfach zusammenhängend ist, muss die obige Abbildung die universelle Überlagerung sein und wir erhalten $\pi_1(U(n)) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_k(U(n)) \cong \pi_k(SU(n))$ für $k \geq 2$ aus Proposition 5.2.

Für die Gruppen $SO(n)$ ist die Situation etwas komplizierter. Mit Hilfe der Hamilton'schen Quaternionen konstruiert man 2-blättrige Überlagerungen $S^3 \rightarrow SO(3)$ und $S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$, also haben diese Gruppen Fundamentalgruppe \mathbb{Z}_2 und triviale π_2 . Für $n \geq 5$ konstruiert man analog wie im komplexen Fall eine Faserung $SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ mit Faser $SO(n-1)$. Aus der langen exakten Homotopiesequenz folgt dann $\pi_k(SO(n)) = \pi_k(SO(4))$ für $k \leq 2$, und wir erhalten:

PROPOSITION. (1) Die Gruppen $SU(n)$ und $SL(n, \mathbb{C})$ sind für $n \geq 2$ zweifach zusammenhängend.

(2) Für $G = GL(n, \mathbb{C})$ oder $U(n)$ mit $n \geq 1$ ist $\pi_1(G) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_2(G) = 0$.

(3) Für $G = GL^+(n, \mathbb{R})$ oder $SL(n, \mathbb{R})$ oder $SO(n)$ mit $n \geq 3$ ist $\pi_1(G) = \mathbb{Z}_2$ und $\pi_2(G) = 0$.

5.9. Homotopiegruppen von CW-Komplexen. Wir notieren noch ohne Beweis einige weiterführende Tatsachen zu diesem Thema.

Erstens kann man noch mehr über die Homotopiegruppen von CW-Komplexen sagen. Ist X ein endlicher CW-Komplex mit nur einer 0-Zelle x_0 und ohne Zellen der Dimensionen $1, \dots, n-1$. Dann ist X nach dem zellulären Approximationssatz $(n-1)$ -fach zusammenhängend. Das n -Skelett X^n ist ein Wedge von endlich vielen Kopien von S^n und mit zellulärer Approximation zeigt man, dass $\pi_n(X^n, x_0)$ isomorph zur direkten Summen von Kopien von $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ist. Die Klebeabbildungen der $n+1$ -Zellen liefern Klassen in diesen Homotopiegruppen, und man zeigt, dass $\pi_n(X, x_0)$ gerade der Quotient der direkten Summe nach der von diesen Klassen erzeugten Untergruppe ist. Grob gesagt bilden also für so eine CW-Zerlegung (wie im Fall der Fundamentalgruppe, siehe 4.21) die n -Zellen die Erzeuger und die $n+1$ -Zellen die Relationen für $\pi_n(X, x_0)$.

Analog wie in 4.21 kann man auch zeigen, dass jeder $n-1$ -fach zusammenhängende CW-Komplex X homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex mit nur einer 0-Zelle und ohne Zellen der Dimensionen $1, \dots, n-1$ ist. Damit kann man allgemein die erste nichttriviale Homotopiegruppe von CW-Komplexen berechnen. Diese Überlegungen führen aber auch leicht weiter zu dem Resultat, dass ein bogenzusammenhängender CW-Komplex X , für den alle Homotopiegruppen trivial sind, schon kontrahierbar sein muss.

Das letzte Resultat kann man so interpretieren, dass ein CW-Komplex, für den die Einbettung des Basispunktes Isomorphismen in allen Homotopien induziert, schon homotopieäquivalent zu diesem Punkt ist. Allgemein nennt man eine stetige Funktion $f: X \rightarrow Y$ eine *schwache Äquivalenz*, wenn sie Isomorphismen in allen Homotopiegruppen induziert. Ein Satz von J.H.C. Whitehead (dem Erfinder der CW-Komplexe) aus dem Jahr 1939 besagt, dass eine schwache Äquivalenz zwischen zwei CW-Komplexen

eine Homotopieäquivalenz sein muss. Das besagt fast, dass der Homotopietyp eines CW-Komplexes durch seine Homotopiegruppen bestimmt ist. Das stimmt aber nicht ganz, weil man tatsächlich eine Funktion finden muss, die in allen Homotopiegruppen Isomorphismen induziert um auf Homotopieäquivalenz schließen zu können. Dieser Kreis von Ideen führt schließlich auch zur Idee der CW-Approximation: Zu jedem topologischen Raum Y gibt es einen, bis auf Homotopieäquivalenz eindeutigen, CW-Komplex X mit einer schwachen Äquivalenz $f : X \rightarrow Y$.

5.10. Mehr über Faserungen. Analog wie im Fall von Kofaserungen aus 4.6 kann man beliebige stetige Funktionen auch zu Faserungen “regularisieren”. Dazu benötigt man zunächst ein duales Konzept zu den verklebten Räumen.

Für stetige Funktionen $f : X \rightarrow Z$ und $g : Y \rightarrow Z$ definiert man den *Pullback* oder das *gefaserte Produkt* $X \times_Z Y$ als den Teilraum $\{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$ von $X \times Y$. Die Projektionen $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ und $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ induzieren stetige Funktionen $f^*g : X \times_Z Y \rightarrow X$ und $g^*f : X \times_Z Y \rightarrow Y$, und man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{g^*f} & Y \\ \downarrow f^*g & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Das gefaserte Produkt hat eine universelle Eigenschaft: Ist W ein beliebiger Raum, und sind $\phi : W \rightarrow X$ und $\psi : W \rightarrow Y$ stetige Funktionen mit $f \circ \phi = g \circ \psi$, dann gibt es eine eindeutige stetige Funktion $(\phi, \psi) : W \rightarrow X \times_Z Y$ mit $f^*g \circ (\phi, \psi) = \phi$ und $g^*f \circ (\phi, \psi) = \psi$. Dies ist gerade die Funktion $W \rightarrow X \times Y$ mit Koordinaten ϕ und ψ , die nach Voraussetzung Werte in $X \times_Z Y$ hat. Diese Eigenschaft ist dual zur universellen Eigenschaft des verklebten Raumes aus 1.6 und bestimmt das gefaserte Produkt bis auf Homöomorphie eindeutig.

Mit dieser Eigenschaft zeigt man leicht, dass für eine Faserung $p : Y \rightarrow Z$ und eine beliebige stetige Funktion $f : X \rightarrow Z$ auch $f^*p : X \times_Z Y \rightarrow X$ eine Faserung ist. Ist $p : Y \rightarrow Z$ sogar ein lokal triviales Faserbündel, dann gilt dies auch für $f^*p : X \times_Z Y \rightarrow X$.

Für eine beliebige stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ definiert man nun einen Raum $M^f := \{(x, c) \in X \times C(I, Y) : c(0) = f(x)\}$. Nach Definition ist $M^f = X \times_Y C(I, Y)$ für die Funktionen $f : X \rightarrow Y$ und $\text{ev}_0 : C(I, Y) \rightarrow Y$. Definiert man $p : M^f \rightarrow Y$ durch $p(x, c) := c(1)$. Andererseits hat man eine offensichtliche Inklusion $j : X \rightarrow M^f$, indem man zu jedem Punkt die konstante Kurve $f(x)$ dazu gibt. Natürlich ist dann $p \circ j = f$ und man zeigt leicht, dass j eine Homotopieäquivalenz ist. Mit Hilfe des Exponentialgesetzes zeigt man weiters, dass $p : M^f \rightarrow Y$ eine Faserung ist, also kann man jede stetige Funktion als Komposition einer Faserung und einer Homotopieäquivalenz schreiben.

Sind X und Y punktiert und ist f punkterhaltend, dann nennt man die Faser $p^{-1}(y_0)$ die *Homotopie-Faser* von f . Dies liefert eine weitere Möglichkeit, homotopietheoretische Eigenschaften von f in einen topologischen Raum zu “verpacken”. Wendet man diese Konstruktion auf die Inklusion $i : \{x_0\} \rightarrow X$ des Basispunktes an, dann ist M^f gerade der Pfadraum $\mathcal{P}X$ aus 1.10 und die Homotopie-Faser ist der Schleifenraum ΩX .

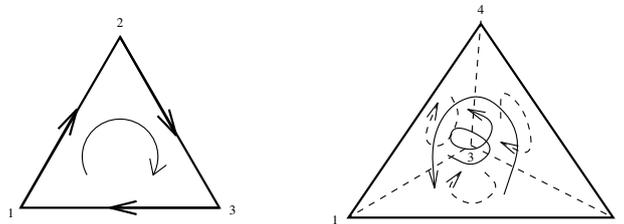
Singuläre Homologietheorie

In diesem Kapitel werden wir die singulären Homologiegruppen eines topologischen Raumes definieren und ihre grundlegenden Eigenschaften beweisen. Die Beweise dieser grundlegenden Eigenschaften, zum Beispiel der Homotopieinvarianz, werden wesentlich schwieriger sein als bei den Homotopiegruppen. Andererseits werden wir schnell sehen, dass diese Gruppen wesentlich leichter zu berechnen sind als Homotopiegruppen, indem wir zum Beispiel die Homologiegruppen aller Sphären berechnen.

Die Definition der singulären Homologiegruppen ist auch intuitiv wesentlich weniger leicht verständlich als die Definition der Homotopiegruppen und benötigt wesentlich mehr algebraischen Apparat, den wir erst entwickeln müssen. Der Ursprung der Homologietheorie, nämlich die Homologie von Simplicialkomplexen ist aber geometrisch relativ anschaulich. Daher wollen wir diese Theorie als Motivation kurz besprechen.

6.1. Motivation: Simpliciale Homologie. Der erste Schritt in Richtung Homologie ist die Beobachtung, dass man Simplexe orientieren kann. Sind $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ Punkte in allgemeiner Lage, so bedeutet eine Orientierung des Simplex σ mit den Ecken x_0, \dots, x_q einfach, dass man nicht nur die Eckpunkte, sondern auch ihre Reihenfolge beachtet. Man sagt, dass für eine Permutation τ der Elemente $0, \dots, q$ die Ecken $x_{\tau_0}, \dots, x_{\tau_q}$ genau dann die selbe Orientierung ergeben, wenn τ eine gerade Permutation ist. Daher gibt es auf jedem 0-Simplex nur eine Orientierung, aber auf jedem q -Simplex für $q > 0$ genau zwei Orientierungen.

Sei nun σ_q ein q -Simplex in \mathbb{R}^n , und sei σ_{q-1} eine $q - 1$ -dimensionale Seite von σ . Legen wir nun eine Orientierung von σ_q fest, so kann diese durch eine Reihenfolge der Ecken von σ_q beschrieben werden, in der als erste Ecke die eine Ecke von σ_{q-1} steht, die keine Ecke von σ_{q-1} ist. Dann gibt die Reihenfolge der verbleibenden Ecken eine wohldefinierte Orientierung von σ_{q-1} , die man die *induzierte Orientierung* nennt. Geometrisch sieht das für $q = 2$ und $q = 3$ so aus:



Man beachte, dass es keine induzierte Orientierung auf den $q - 2$ -dimensionalen Seiten gibt. Das ist aus dem Bild für $q = 3$ offensichtlich.

Sei nun K ein Simplicialkomplex. Sei $C_q(K)$ die freie abelsche Gruppe, die von den q -Simplex von K erzeugt wird, also die Menge aller formalen Linearkombinationen $\sum n_i \sigma_i$ mit $n_i \in \mathbb{Z}$ und σ_i ein q -Simplex von K . Legen wir irgendeine Reihenfolge der Ecken von K fest, dann erhalten wir eine Orientierung auf allen Simplex σ von K . Ist nun σ ein q -Simplex in K , dann definieren wir $d\sigma \in C_{q-1}(K)$ als $\sum n_i \sigma_i$ wobei $n_i = 0$ falls σ_i keine Seite von σ , $n_i = 1$ falls σ_i Seite von σ und die Orientierung auf σ_i mit der

von σ induzierten Orientierung übereinstimmt, und $n_i = -1$ falls die Orientierungen nicht übereinstimmen.

Linear fortgesetzt gibt das einen Homomorphismus $d : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$, den *Randoperator*. Ein Element $c \in C_q(K)$ mit $d(c) = 0$ heißt ein q -Zykel und ein Element der Form $d(c')$ für $c' \in C_{q+1}(K)$ heißt ein q -Rand. Die nächste entscheidende Tatsache ist nun, dass jeder Rand ein Zykel ist, d.h. $d \circ d = 0$ gilt. Wir werden das später allgemein beweisen. Damit bilden aber die q -Ränder eine Untergruppe der q -Zykel. Der Quotient heißt die q -te Homologiegruppe $H_q(K)$.

Geometrisch kann man das so interpretieren: Die q -Zykel sind gerade "randlose" Kombinationen von q -Simplizes. Kombinationen von Rändern von $q+1$ -Simplizes sind trivialerweise solche, die nicht trivialen sind die, die nicht von dieser Form sind. Betrachten wir als Beispiel den Rand des Standard 3-Simplex, also die Oberfläche eines Tetraeders, die eine Triangulierung der S^2 ist. Die Summe aller 2-Simplizes ist randlos (sie ist ja "in Wirklichkeit" der Rand des 3-Simplex), aber dieser 3-Simplex fehlt, und hinterlässt ein "Loch" das man gerade dadurch erkennt, dass diese Kombination von 2-Simplizes eine nicht triviale Klasse in der zweiten Homologie definiert.

Das große Problem an diesen Homologiegruppen ist, dass in diesem Setting völlig unklar ist, ob sie topologischer Natur sind, d.h. ob sie nur vom unterliegenden Raum eines Simplizialkomplexes oder auch von der simplizialen Struktur abhängen. In den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts wurde mit großem Aufwand versucht, das zu beweisen, das Problem ist aber äußerst schwierig. Tatsächlich ist die einfachste Beweismethode zu zeigen, dass diese Homologie mit der singulären Homologie übereinstimmt und die singuläre Homologie topologisch ist.

Algebraische Vorbereitungen

In diesem Abschnitt beweisen wir einige Resultate aus der homologischen Algebra. Wir werden immer nur mit abelschen Gruppen arbeiten, aber alle Begriffe und Resultate gelten völlig analog für Moduln über einem kommutativen Ring mit 1.

6.2. Kettenkomplexe.

DEFINITION. (1) Ein *Kettenkomplex* ist eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von abelschen Gruppen und Homomorphismen $d_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$, sodass $d_{n-1} \circ d_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Meist schreibt man einfach d für jedes d_n und $d^2 = d \circ d = 0$ und schreibt die Folge als

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

(2) Die Untergruppe $Z_n(K) := \text{Ker}(d_n) \subset K_n$ heißt die Gruppe der n -Zykel, die Untergruppe $B_n(K) := \text{Im}(d_{n+1}) \subset K_n$ heißt die Gruppe der n -Ränder. Der Quotient $H_n(K) := Z_n(K)/B_n(K)$ heißt die n -te Homologiegruppe von K . Für $x \in K_n$ mit $d(x) = 0$ schreiben wir $[x]$ für die Klasse von x in $H_n(K)$.

(3) Seien (K, d) und (K', d') zwei Kettenkomplexe. Eine *Komplexabbildung* $f : K \rightarrow K'$ ist eine Folge von Gruppenhomomorphismen $f_n : K_n \rightarrow K'_n$, sodass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $f_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ f_n$ gilt. Man hat also eine kommutative "Leiter" der Form

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_{n+2}} & K_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & K_n & \xrightarrow{d_n} & K_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \xrightarrow{d'_{n+2}} & K'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & K'_n & \xrightarrow{d'_n} & K'_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & \cdots \end{array}$$

Die Bedingung an f impliziert sofort, dass $f(Z_n(K)) \subset Z_n(K')$ und $f(B_n(K)) \subset B_n(K')$ für alle n gilt. Damit induziert f für jedes n einen Homomorphismus $H_n(f) = f_{\#} : H_n(K) \rightarrow H_n(K')$. Ist $f' : K' \rightarrow K''$ eine weitere Komplexabbildung, dann ist offensichtlich $H_n(f' \circ f) = H_n(f') \circ H_n(f)$, und klarerweise ist $H_n(\text{id}_K) = \text{id}_{H_n(K)}$, also ist der Übergang zur n -ten Homologiegruppe ein Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe und Komplexabbildungen in die Kategorie der abelschen Gruppen.

(4) Der Komplex K heißt *exakt*, falls er eine exakte Sequenz bildet, also genau dann, wenn $H_n(K) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Um uns für die folgenden Beweise aufzuwärmen, die viele sogenannte Diagrammjagden enthalten, beweisen wir zunächst ein kategorientheoretisches Lemma.

LEMMA (Fünferlemma). *Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \phi_5 \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen mit exakten Zeilen. Dann gilt:

(1) Sind ϕ_2 und ϕ_4 injektiv und ist ϕ_1 surjektiv, dann ist ϕ_3 injektiv.

(2) Sind ϕ_2 und ϕ_4 surjektiv und ist ϕ_5 injektiv, dann ist ϕ_3 surjektiv.

Insbesondere ist ϕ_3 ein Isomorphismus falls die anderen ϕ 's Isomorphismen sind.

BEWEIS. (1) Sei $x \in A_3$ mit $\phi_3(x) = 0$. Dann ist $0 = g_3(\phi_3(x)) = \phi_4(f_3(x))$, und da ϕ_4 injektiv ist, ist $f_3(x) = 0$. Wegen der Exaktheit der oberen Zeile gibt es ein $y \in A_2$ mit $x = f_2(y)$. Nun ist aber $g_2(\phi_2(y)) = \phi_3(f_2(y)) = \phi_3(x) = 0$, also gibt es nach der Exaktheit der unteren Zeile ein $\tilde{z} \in B_1$ mit $g_1(\tilde{z}) = \phi_2(y)$. Da ϕ_1 surjektiv ist, finden wir ein $z \in A_1$ mit $\phi_1(z) = \tilde{z}$. Dann ist aber $\phi_2(f_1(z)) = g_1(\phi_1(z)) = g_1(\tilde{z}) = \phi_2(y)$, und da ϕ_2 injektiv ist, gilt $y = f_1(z)$. Damit ist aber $x = f_2(y) = f_2(f_1(z)) = 0$, da nach der Exaktheit der oberen Zeile $f_2 \circ f_1 = 0$ gilt.

(2) Sei $z \in B_3$ beliebig. Da ϕ_4 surjektiv ist, finden wir ein $y \in A_4$ mit $\phi_4(y) = g_3(z)$. Nun ist aber $\phi_5(f_4(y)) = g_4(\phi_4(y)) = g_4(g_3(z)) = 0$, und da ϕ_5 injektiv ist, ist $f_4(y) = 0$. Damit gibt es aber ein $x \in A_3$ mit $f_3(x) = y$. Sei nun $z' = z - \phi_3(x)$. Dann ist $g_3(z') = g_3(z) - g_3(\phi_3(x)) = \phi_4(y) - \phi_4(f_3(x)) = 0$. Daher gibt es ein $w \in B_2$ mit $g_2(w) = z'$ und da ϕ_2 surjektiv ist, gibt es ein $x' \in A_2$ mit $\phi_2(x') = w$. Damit ist aber $g_2(\phi_2(x')) = \phi_3(f_2(x')) = z' = z - \phi_3(x)$ und daher $\phi_3(x + f_2(x')) = z$. \square

6.3. Die lange exakte Homologiesequenz. Seien K, K' und K'' Kettenkomplexe, $i : K' \rightarrow K$ und $p : K \rightarrow K''$ Komplexabbildungen. Man sagt

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$$

ist eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, wenn für jedes n die Sequenz

$$0 \longrightarrow K'_n \xrightarrow{i_n} K_n \xrightarrow{p_n} K''_n \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen ist.

SATZ. *Sei $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann existieren Homomorphismen $\partial_n : H_n(K'') \rightarrow H_{n-1}(K')$, sodass die Sequenz*

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(K'') \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(K') \xrightarrow{i_{\#}} H_n(K) \xrightarrow{p_{\#}} H_n(K'') \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(K') \longrightarrow \dots$$

exakt ist.

Der Einhängungshomomorphismus ist natürlich, d.h. ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen, dann erhält man eine kommutative Leiter der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(K) & \longrightarrow & H_n(K'') & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(K') & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f'_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f''_\# & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(L) & \longrightarrow & H_n(L'') & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(L') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

BEWEIS. In der Situation des Satzes erhalten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & K_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & K''_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & K'_n & \xrightarrow{i_n} & K_n & \xrightarrow{p_n} & K''_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n & & \\ 0 & \longrightarrow & K'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & K_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & K''_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d'_{n-1} & & \downarrow d_{n-1} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & K'_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-2}} & K_{n-2} & & & & \end{array}$$

Man merkt sich die Definition von $\partial_n : H_n(K'') \rightarrow H_{n-1}(K')$ am besten als $\partial_n = i_{n-1}^{-1} \circ d_n \circ p_n^{-1}$. Dies ist wie folgt zu verstehen: Sei $x'' \in K''_n$ mit $d''(x'') = 0$. Da p_n surjektiv ist, gibt es ein $x \in K_n$ mit $p_n(x) = x''$. Dann gilt aber $p_{n-1}(d_n(x)) = d''_n(p_n(x)) = 0$, also gibt es ein eindeutiges $x' \in K'_{n-1}$ mit $i_{n-1}(x') = d_n(x)$. Nun ist aber $i_{n-2}(d'_{n-1}(x')) = d_{n-1}(d_n(x)) = 0$ und da i_{n-2} injektiv ist, impliziert das $d'_{n-1}(x') = 0$. Damit gibt es $[x'] \in H_{n-1}(K')$ und wir definieren $\partial_n([x'']) = [x']$. Man kann sich das auch merken als $\partial([p(x)]) = [i^{-1}(d(x))]$.

Wir behaupten nun, dass das wohldefiniert ist. Nehmen wir zunächst an, dass wir ein anderes \tilde{x} mit $p_n(\tilde{x}) = x''$ wählen. Dann ist $p_n(\tilde{x} - x) = 0$, also gibt es ein $y' \in K'_n$ mit $i_n(y') = \tilde{x} - x$. Damit ist aber $d_n(\tilde{x}) = d_n(x + i_n(y')) = d_n(x) + i_{n-1}(d'_n(y'))$, und ein Urbild unter i_{n-1} davon ist gerade $x' + d'_n(y')$, und das repräsentiert die gleiche Klasse in $H_{n-1}(K')$ wie x' . Damit haben wir aber einen wohldefinierten Homomorphismus $Z_n(K'') \rightarrow H_{n-1}(K')$, und wir müssen nur noch zeigen, dass $B_n(K'')$ im Kern dieses Homomorphismus liegt. Betrachten wir also den Fall $x'' = d''_{n+1}(y'')$ für ein $y'' \in K''_{n+1}$. Da p_{n+1} surjektiv ist, gibt es ein $y \in K_{n+1}$ mit $p_{n+1}(y) = y''$. Dann ist aber $p_n(d_{n+1}(y)) = d''_{n+1}(p_{n+1}(y)) = x''$, und daher ist $d_{n+1}(y)$ ein passendes Urbild. Aber $d_n(d_{n+1}(y)) = 0$, und damit ist ∂_n wohldefiniert.

Daraus folgt aber auch sofort, dass ∂_n ein Homomorphismus ist. Es ist nämlich $[x''] + [y''] = [x'' + y'']$, und sind $x, y \in K_n$ Urbilder von x'' bzw. y'' , dann kann man als Urbild von $x'' + y''$ das Element $x + y$ wählen. Dann ist aber $d_n(x + y) = d_n(x) + d_n(y)$ und damit $\partial_n([x''] + [y'']) = \partial_n([x'']) + \partial_n([y''])$. Ganz analog folgt die Natürlichkeit: Ist $x'' \in K''_n$ und $x \in K_n$ ein Urbild unter p_n , dann ist $f''_\#([x'']) = [f''(x'')] = [f''(x)]$ und $f(x)$

ist ein Urbild von $f''(x'')$. Da alle Komplexabbildungen sind, vertauschen auch die Randoperatoren mit f , also folgt die Natürlichkeit.

Es bleibt uns also die Exaktheit der Sequenz zu zeigen. Zunächst ist $p_n \circ i_n = 0$ für jedes n , also ist $p_{\#} \circ i_{\#} = 0$, also $\text{Im}(i_{\#}) \subset \text{Ker}(p_{\#})$. Sei andererseits $[x] \in H_n(K)$ mit $p_{\#}[x] = [p_n(x)] = 0$. Dann gibt es ein $y'' \in K''_{n+1}$ sodass $d''_{n+1}(y'') = p_n(x)$ gilt. Da p_{n+1} surjektiv ist, finden wir ein $y \in K_{n+1}$ mit $p_{n+1}(y) = y''$. Dann ist aber $p_n(x - d_{n+1}(y)) = p_n(x) - d''_{n+1}(p_{n+1}(y)) = 0$. Da der Kern von p_n gerade das Bild von i_n ist, finden wir ein $x' \in K'_n$ mit $i_n(x') = x - d_{n+1}(y)$. Weiters ist $i_{n-1}(d'_n(x')) = d_n(x - d_{n+1}(y)) = 0$ also auch $d'_n(x') = 0$ und damit gibt es $[x'] \in H_n(K')$. Dann ist aber $i_{\#}[x'] = [x - d_{n+1}(y)] = [x]$, und somit ist $\text{Ker}(p_{\#}) = \text{Im}(i_{\#})$.

Als nächstes betrachten wir den Abschnitt $H_n(K'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(K') \xrightarrow{i_{\#}} H_{n-1}(K)$. Nach Konstruktion ist $\partial([x'']) = [x']$, wobei $i_{n-1}(x') = d_n(x)$ ist, für ein $x \in K_n$ mit $p_n(x) = x''$. Dann ist aber $i_{\#}([x']) = [i_{n-1}(x')] = [d_n(x)] = 0$ und somit ist $\text{Im}(\partial) \subset \text{Ker}(i_{\#})$. Sei andererseits $[x'] \in H_{n-1}(K')$ so, dass $0 = [i_{n-1}(x')] \in H_{n-1}(K)$. Dann gibt es ein $x \in K_n$ mit $i_{n-1}(x') = d_n(x)$. Sei $x'' = p_n(x) \in K''_n$. Dann ist $d''_n(x'') = p_{n-1}(d_n(x)) = p_{n-1}(i_{n-1}(x')) = 0$, also gibt es $[x''] \in H_n(K'')$, und nach Definition ist $\partial([x'']) = [x']$. Damit ist $\text{Ker}(i_{\#}) = \text{Im}(\partial)$ gezeigt.

Es bleibt der Abschnitt $H_n(K) \xrightarrow{p_{\#}} H_n(K'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(K')$ zu betrachten. Sei zunächst $[x''] \in H_n(K'')$ im Bild von $p_{\#}$. Dann ist $[x''] = [p_n(x)]$ für ein $x \in K_n$ mit $d_n(x) = 0$. Damit ist aber offensichtlich $\partial([x'']) = 0$, denn $\partial([p_n(x)]) = [i^{-1}(d_n(x))]$. Sei andererseits $[x''] \in H_n(K'')$ so, dass $\partial([x'']) = 0$, und sei $x \in K_n$ ein Element mit $p_n(x) = x''$. Dann gibt es ein $y' \in K'_n$, sodass $i_{n-1}(d'_n(y')) = d_n(x)$ gilt. Dann ist aber $d_n(x - i_n(y')) = d_n(x) - i_{n-1}(d'_n(y')) = 0$, also gibt es $[x - i_n(y')] \in H_n(K)$. Da $p_n(x - i_n(y')) = p_n(x) = x''$ ist, liegt $[x'']$ im Bild von $p_{\#}$. \square

Der Homomorphismus $\partial = (\partial_n)$ heißt der *Einhängungshomomorphismus* und die im Satz konstruierte exakte Sequenz heißt die *lange exakte Homologiesequenz* zu der gegebenen kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen.

KOROLLAR. Sei

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen und Komplexabbildungen mit exakten Zeilen. Falls zwei der senkrechten Pfeile Isomorphismen in der Homologie induzieren, dann auch der dritte.

BEWEIS. Das folgt sofort, indem man das Fünferlemma aus 6.2 auf die exakte Leiter anwendet, die aus dieser Situation nach dem Satz entsteht. \square

6.4. Ketten-Homotopie. Zum Abschluss der algebraischen Vorbereitungen wollen wir noch einen algebraischen Homotopiebegriff besprechen. Seien dazu (K, d) und (K', d') Kettenkomplexe und $f, g : K \rightarrow K'$ Komplexabbildungen. Eine *Ketten-Homotopie* von f nach g ist eine Familie von Homomorphismen $s_n : K_n \rightarrow K'_{n+1}$, sodass für jedes n die Gleichung $f_n - g_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$ gilt.

Die Komplexabbildungen f und g heißen *kettenhomotop*, falls eine Kettenhomotopie zwischen ihnen existiert. Man schreibt in dieser Situation $f \sim g$. Offensichtlich ist das eine Äquivalenzrelation.

PROPOSITION. Sind $f, g : K \rightarrow K'$ kettenhomotope Komplexabbildungen, dann ist $H_n(f) = H_n(g) : H_n(K) \rightarrow H_n(K')$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. Sei $[x] \in H_n(K)$. Dann ist nach Definition $f_{\#}([x]) = [f_n(x)] = [g_n(x) + d'_{n+1}(s_n(x)) + s_{n-1}(d_n(x))]$. Nun ist aber x ein Zykel, also $d_n(x) = 0$ und $[g_n(x) + d'_{n+1}(s_n(x))] = [g_n(x)]$. \square

Der singuläre Komplex eines topologischen Raumes

Um die Ideen der Homologie aus 6.1 auf beliebige Räume anwenden zu können, benutzt man eine eher gewagte Konstruktion: Man betrachtet einfach *alle* stetigen Bilder von Simplexes in X !

6.5.

DEFINITION. (1) Für $q \geq 0$ bezeichnen wir mit Δ_q den *abgeschlossenen* Standard q -Simplex, d.h. $\Delta_q = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$. Das ist gerade der abgeschlossene Simplex mit den Ecken e_0, \dots, e_n , wobei die e_i die Elemente der Standardbasis von \mathbb{R}^{n+1} sind.

(2) Für $j = 0, \dots, q$ definieren wir nun eine Abbildung $\delta^j = \delta_q^j : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$ durch $\delta^j(x_0, \dots, x_{q-1}) := (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{q-1})$. Das ist die Einbettung der $q-1$ -dimensionalen Seite von Δ_q , die e_j gegenüberliegt. Diese heißt die *j -te Seite* von Δ_q . Die Abbildung δ^j ist die eindeutige Simpliciale Abbildung $\Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$, die $\delta^j(e_i) = e_i$ für $i < j$ und $\delta^j(e_i) = e_{i+1}$ für $i \geq j$ erfüllt.

Für $k < j$ betrachte die Funktionen $\delta_{q+1}^j \circ \delta_q^k : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_{q+1}$. Nach Definition bildet diese e_i für $i < k$ auf e_i , für $k \leq i < j-1$ auf e_{i+1} und für $i \geq j-1$ auf e_{i+2} ab. Damit stimmt sie aber auf den Ecken (und somit überall) mit der Abbildung $\delta_{q+1}^k \circ \delta_q^{j-1}$ überein.

6.6. Der singuläre Komplex. Sei X ein topologischer Raum. Ein *singulärer q -Simplex* in X ist eine stetige Funktion $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$.

Für $q \geq 0$ sei $S_q(X)$ die freie abelsche Gruppe, die von allen singulären q -Simplexes in X erzeugt wird, also die Menge aller endlichen formalen Summen $\sum n_i \sigma_i$, wo $n_i \in \mathbb{Z}$ und $\sigma_i : \Delta_q \rightarrow X$ stetig ist. Ein Element $c_q \in S_q(X)$ heißt eine *q -Kette* in X . Für $q < 0$ setzt man $S_q(X) = 0$.

Nun definieren wir $d\sigma = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \delta_q^i$ für singuläre q -Simplexes $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$. Linear fortgesetzt liefert das einen Homomorphismus $d : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$. Offensichtlich entspricht dieses d genau dem Bilden des orientierten Randes aus 6.1.

Ist Y ein weiterer Raum und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion, dann setzen wir $S_q(f)(\sigma) := f \circ \sigma$ für jeden singulären q -Simplex $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$. Wiederum erweitert das eindeutig zu einem Homomorphismus $S_q(f) : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$.

SATZ. Für jeden Raum X ist

$$\dots \longrightarrow S_q(X) \xrightarrow{d} S_{q-1}(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} S_0(X) \longrightarrow 0$$

ein Kettenkomplex $S_*(X)$, und für jede stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ definiert $S_*(f) := (S_q(f))$ eine Komplexabbildung $S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$. Die Zuordnung $X \mapsto S_*(X)$, $f \mapsto S_*(f)$ ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der topologischen Räume und stetigen Funktionen in die Kategorie der Kettenkomplexe und Komplexabbildungen.

BEWEIS. Wir müssen zunächst zeigen, dass $d_{q-1} \circ d_q = 0$ gilt, und dafür reicht es zu zeigen, dass diese Komposition jeden singulären q -Simplex $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ auf 0 abbildet.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} d_{q-1}(d_q(\sigma)) &= d_{q-1}\left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \delta_q^i\right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i d_{q-1}(\sigma \circ \delta_q^i) = \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \sigma \circ \delta_q^i \circ \delta_{q-1}^j = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_q^i \circ \delta_{q-1}^j = \\ &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_q^i \circ \delta_{q-1}^j + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta_q^i \circ \delta_{q-1}^j. \end{aligned}$$

In der zweiten Summe können wir nun $\delta_q^i \circ \delta_{q-1}^j$ durch $\delta_q^j \circ \delta_{q-1}^{i-1}$ ersetzen, und dann j auf i und $i-1$ auf j umbenennen. Damit wird die zweite Summe gleich $\sum_{i \leq j} (-1)^{i+j+1} \sigma \circ \delta_q^i \circ \delta_{q-1}^j$, und das hebt sich gerade mit der ersten Summe weg.

Um zu beweisen, dass $S_*(f)$ eine Komplexabbildung ist, genügt es zu zeigen, dass $d(S_q(f)(\sigma)) = S_q(f)(d\sigma)$ für jeden singulären q -Simplex $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ gilt. Nun ist aber $S_q(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ und damit $d(S_q(f)(\sigma)) = \sum_i (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \delta^i$. Andererseits ist $S_q(f)(d(\sigma)) = S_q(f)(\sum_i (-1)^i \sigma \circ \delta^i)$ und das stimmt nach Definition mit dem vorherigen überein. Die Funktoreigenschaften sind trivialerweise erfüllt. \square

Der Komplex $S_*(X)$ heißt der *singuläre Komplex* von X . Nun definieren wir die *singulären Homologiegruppen* (mit Koeffizienten in \mathbb{Z}) eines Hausdorffraumes X als die Homologiegruppen des singulären Komplexes $S_*(X)$ von X . Man schreibt $H_*(X) = H_*(S_*(X))$ für diese Homologiegruppen, bzw. $H_q(X)$ für die q -te Homologiegruppe etc.

Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann induziert f eine Komplexabbildung $S_*(f) : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ und damit Gruppenhomomorphismen $H_q(f) = f_{\#} : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ für alle $q \geq 0$. Klarerweise ist $X \mapsto H_q(X)$, $f \mapsto H_q(f)$ für jedes q ein kovarianter Funktor von topologischen Räumen und stetigen Funktionen in abelsche Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Insbesondere induziert ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ Isomorphismen in allen Homologiegruppen.

BEISPIEL. (1) Sei pt der einpunktige Raum. Dann gibt es für jedes q genau einen singulären q -Simplex $\tau_q : \Delta_q \rightarrow pt$. Damit ist $S_q(pt) = \mathbb{Z}$ für alle $q \geq 0$. Außerdem ist $d(\tau_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \tau_q \circ \delta^i = \sum_{i=0}^q (-1)^i \tau_{q-1}$, also 0 für q ungerade und τ_{q-1} für q gerade. Der singuläre Komplex $S_*(pt)$ hat also die Form

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Damit ist aber offensichtlich $H_0(pt) = \mathbb{Z}$ und $H_q(pt) = 0$ für $q > 0$.

(2) Für jeden Raum X ist ein singulärer 0-Simplex in X gerade ein Punkt in X , also ist $S_0(X)$ gerade die freie abelsche Gruppe, die von den Punkten von X erzeugt wird. $S_1(X)$ ist die freie abelsche Gruppe, die von allen stetigen Wegen in X erzeugt wird. Für so einen Weg $c : I \rightarrow X$ ist nach Definition $dc = c(1) - c(0)$. Wir definieren nun einen Homomorphismus $\epsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, die sogenannte *Augmentierung* durch $\epsilon(\sum n_i x_i) = \sum n_i$, d.h. ϵ bildet jeden Punkt $x \in X$ auf $1 \in \mathbb{Z}$ ab. Dann ist ϵ offensichtlich surjektiv, und für $c : I \rightarrow X$ ist $\epsilon(dc) = \epsilon(c(1) - c(0)) = 1 - 1 = 0$, also verschwindet ϵ auf $d(S_1(X))$. Nun ist aber $d = 0$ auf $S_0(X)$, und damit induziert ϵ einen surjektiven Homomorphismus $H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Wir behaupten nun, dass ϵ für bogenzusammenhängendes X ein Isomorphismus ist. Sei dazu $\sum_{i=1}^k n_i x_i$ eine 0-Kette in X , die im Kern von ϵ liegt, also so, dass $\sum n_i = 0$ gilt. Dann wählen wir einen beliebigen Punkt $x \in X$ und für jedes $i = 1, \dots, k$ einen

stetigen Weg $c_i : I \rightarrow X$ von x nach x_i . Dann betrachten wir $\sum n_i c_i \in S_1(X)$. Nach Definition ist

$$d\left(\sum n_i c_i\right) = \sum n_i d(c_i) = \sum n_i (c_i(1) - c_i(0)) = \sum n_i x_i - \left(\sum n_i\right)x = \sum n_i x_i.$$

Damit ist aber $\sum n_i x_i$ ein Rand und somit ϵ injektiv.

(3) Sei X eine (topologische) disjunkte Vereinigung von Teilräumen X_α . Da jeder Standardsimplex zusammenhängend ist, liegt jeder singuläre Simplex von X ganz in einem der X_α . Daraus folgt aber direkt, dass $S_q(X) = \bigoplus_\alpha S_q(X_\alpha)$ für alle $q \geq 0$ gilt. Außerdem respektieren die Randoperatoren diese Zerlegung, da der Rand eines singulären Simplex in X_α natürlich wiederum ganz in X_α liegt. Das wiederum impliziert direkt, dass auch für die Homologie $H_q(X) = \bigoplus_\alpha H_q(X_\alpha)$ gilt.

Insbesondere ist für jeden topologischen Raum X die Homologie $H(X)$ gerade die direkte Summe über die Homologien der Bogenkomponenten von X . Aus (1) folgt dann sofort, dass für einen diskreten Raum X die 0-te Homologie gerade die freie abelsche Gruppe über X ist und alle höheren Homologiegruppen trivial sind.

Andererseits folgt aus (2) sofort, dass für jeden topologischen Raum X die 0-te Homologie gerade die freie abelsche Gruppe über der Menge der Bogenkomponenten von X ist.

6.7. Die Kegelkonstruktion. Wir wollen nun noch zeigen, dass konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n und damit insbesondere der \mathbb{R}^n selbst homologisch nicht von einem Punkt zu unterscheiden sind. Dazu führen wir die sogenannte Kegelkonstruktion ein, die wir später noch benötigen werden.

DEFINITION. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $p \in A$ ein Punkt und $\sigma : \Delta_q \rightarrow A$ ein singulärer q -Simplex in A . Wir definieren einen singulären $q+1$ -Simplex $p \bullet \sigma$ in A wie folgt: Jeder Punkt in Δ_{q+1} kann eindeutig in der Form $(1-t)e_0 + t\delta_{q+1}^0(x)$ für ein $x \in \Delta_q$ geschrieben werden, und wir definieren

$$(p \bullet \sigma)((1-t)e_0 + t\delta_{q+1}^0(x)) := (1-t)p + t\sigma(x).$$

Wir betrachten also Δ_{q+1} als Kegel über der 0-ten Seite, und setzen σ affin auf diesen Kegel fort, wobei wir die "Spitze" nach p abbilden.

Die Abbildung $\sigma \mapsto p \bullet \sigma$ induziert einen Homomorphismus $S_q(A) \rightarrow S_{q+1}(A)$, den wir als $c \mapsto p \bullet c$ schreiben.

Wir wollen nun den Rand $d(p \bullet \sigma)$ berechnen. Zunächst ist offensichtlich $(p \bullet \sigma) \circ \delta_{q+1}^0 = \sigma$. Ist $q = 0$, dann ist $(p \bullet \sigma) \circ \delta_1^1 = p$, und somit ist $d(p \bullet c) = c - \epsilon(c)p$ für alle $c \in S_0(X)$, wobei ϵ die Augmentierung aus Beispiel (2) von 6.6 bezeichnet. Ist andererseits $q > 0$, dann ist $(p \bullet \sigma) \circ \delta_{q+1}^j = p \bullet (\sigma \circ \delta_q^{j-1})$ für $j \geq 1$. Damit ist aber $d(p \bullet c) = c - p \bullet dc$ für alle $c \in S_q(X)$ mit $q \geq 1$.

Ist nun $c \in S_q(X)$ mit $q > 0$ ein Zykel, also $dc = 0$, dann ist nach der obigen Formel $c = d(p \bullet c)$ für einen beliebigen Punkt $p \in A$. Daraus folgt aber, dass $H_q(A) = 0$ für alle $q > 0$. Da eine konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n insbesondere bogenzusammenhängend ist, gilt $H_0(A) = \mathbb{Z}$ nach Beispiel (2) von 6.6. Damit haben wir gezeigt:

PROPOSITION. *Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex, dann ist $H_0(A) = \mathbb{Z}$ und $H_q(A) = 0$ für alle $q > 0$.*

Homotopieinvarianz der singulären Homologiegruppen

Aus der Funktoreigenschaft der Homologiegruppen wissen wir bereits, dass homöomorphe Räume isomorphe Homologiegruppen haben. Wir wollen nun zeigen, dass die

Homologiegruppen auch mit Homotopien verträglich sind, genauer, dass für homotope Funktionen die induzierten Homomorphismen in allen Homologiegruppen gleich sind.

6.8. Die Idee des Beweises ist die folgende: Sind $f, g : X \rightarrow Y$ homotop, dann sei $h : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g . Dann ist aber $f = h \circ \text{ins}_0$ und $g = h \circ \text{ins}_1$, wobei für jedes $t \in I$ die Abbildung $\text{ins}_t : X \rightarrow X \times I$ durch $\text{ins}_t(x) := (x, t)$ definiert ist. Damit ist aber $H(f) = H(h) \circ H(\text{ins}_0)$ und $H(g) = H(h) \circ H(\text{ins}_1)$, und somit genügt es zu zeigen, dass ins_0 und ins_1 den selben Homomorphismus in der Homologie induzieren. Mit Hilfe der Natürlichkeit von ins_t kann man das auf den Fall des einpunktigen Raumes zurückführen.

LEMMA. *Angenommen wir haben für jeden topologischen Raum X Kettenabbildungen $\phi_X, \psi_X : S(X) \rightarrow S(X \times I)$ gegeben, die natürlich sind, d.h. so, dass für jede stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ die Gleichung $\phi_Y \circ S(f) = S(f \times \text{id}_I) \circ \phi_X$ und die analoge Gleichung für ψ gilt. (Kategorientheoretisch bedeutet das, dass ϕ und ψ natürliche Transformationen zwischen den Funktoren $S(_)$ und $S(_ \times I)$ sind.) Gilt dann $H_0(\phi_{pt}) = H_0(\psi_{pt})$ für den einpunktigen Raum pt , dann sind für jeden Raum X die Komplexabbildungen ϕ_X und ψ_X natürlich kettenhomotop, d.h. es gibt Homomorphismen $s_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X \times I)$, sodass $s_q \circ S(f) = S(f \times \text{id}_I) \circ s_q$ für jedes f und $\phi_X - \psi_X = d \circ s_q + s_{q-1} \circ d$ gilt.*

BEWEIS. Wir konstruieren die Homomorphismen s_q durch Induktion nach q . Für $q < 0$ ist $s_q = 0$ und beide Eigenschaften sind trivialerweise erfüllt. Nehmen wir also an, dass $q \geq 0$ gilt und s_n für alle $n < q$ bereits konstruiert wurde.

Die Identitätsabbildung $\text{id}_q := \text{id}_{\Delta_q} : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ ist ein singulärer q -Simplex in Δ_q . Ist $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ ein singulärer q -Simplex in X , dann ist nach Definition $\sigma = S(\sigma)(\text{id}_q)$, wobei man zum Bilden von $S(\sigma)$ einfach σ als stetige Abbildung betrachtet.

Wir schreiben nun vorübergehend einfach ϕ für ϕ_{Δ_q} und analog für ψ und betrachten $z_q := \phi(\text{id}_q) - \psi(\text{id}_q) - s_{q-1}(d \text{id}_q) \in S_q(\Delta_q \times I)$. Nun sind ϕ und ψ Komplexabbildungen, vertauschen also mit den Randoperatoren, und für $d(\text{id}_q) \in S_{q-1}(\Delta_q)$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $\phi(d \text{id}_q) - \psi(d \text{id}_q) = ds_{q-1}(d \text{id}_q) + s_{q-2}(dd \text{id}_q)$ und der letzte Term ist automatisch gleich Null. Damit ist aber $d(z_q) = 0$. Wir behaupten, dass z_q sogar ein Rand ist. Das ist für $q > 0$ klar, weil $H_q(\Delta_q \times I) = 0$ für $q > 0$ nach Proposition 6.7 gilt. Für $q = 0$ ist aber $\Delta_0 = pt$ und $s_{q-1} = 0$. Damit ist in diesem Fall $z_0 = \phi(\text{id}_0) - \psi(\text{id}_0)$ und da ϕ und ψ nach Voraussetzung den selben Homomorphismus $H_0(\Delta_0) \rightarrow H_0(\Delta_0 \times I)$ induzieren, ist $\phi(\text{id}_0) - \psi(\text{id}_0)$ ein Rand.

Damit gibt es in jedem Fall eine Kette $c_{q+1} \in S_{q+1}(\Delta_q \times I)$, sodass $d(c_{q+1}) = z_q$ gilt. Sei nun X beliebig und sei $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ ein singulärer q -Simplex. Dann definieren wir $s_q(\sigma) \in S_{q+1}(X \times I)$ durch $s_q(\sigma) := S_{q+1}(\sigma \times \text{id}_I)(c_{q+1})$, wobei wir analog wie oben die stetige Funktion $\sigma \times \text{id}_I : \Delta_q \times I \rightarrow X \times I$ benutzen. Setzt man das linear fort, so erhält man einen Homomorphismus $s_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X \times I)$ für jeden Raum X . Wir behaupten nun, dass dieses s_q die geforderten Eigenschaften hat.

Zunächst gilt für einen singulären q -Simplex $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$:

$$\begin{aligned} ds_q(\sigma) &= dS_{q+1}(\sigma \times \text{id}_I)(c_{q+1}) = S_{q+1}(\sigma \times \text{id}_I)(dc_{q+1}) = S_{q+1}(\sigma \times \text{id}_I)(z_q) = \\ &= S_{q+1}(\sigma \times \text{id}_I)(\phi(\text{id}_q) - \psi(\text{id}_q) - s_{q-1}(d \text{id}_q)) = \\ &= \phi(S_q(\sigma)(\text{id}_q)) - \psi(S_q(\sigma)(\text{id}_q)) - s_{q-1}(S_{q-1}(\sigma)(d \text{id}_q)) = \\ &= \phi(\sigma) - \psi(\sigma) - s_{q-1}(d\sigma), \end{aligned}$$

wobei wir die Natürlichkeit von ϕ , ψ und s_{q-1} benutzt haben. Damit gilt aber $\phi - \psi = ds_q + s_{q-1}d$ auf ganz $S_q(X)$.

Andererseits ist für σ wie oben

$$S_{q+1}(f \times \text{id}_I)(s_q(\sigma)) = S_{q+1}(f \times \text{id}_I)(S_{q+1}(\sigma \times \text{id}_I)(c_{q+1})),$$

und $s_q(S_q(f)(\sigma)) = s_q(f \circ \sigma) = S_{q+1}((f \circ \sigma) \times \text{id}_I)(c_{q+1})$, also folgt die Natürlichkeit direkt aus der Funktoreigenschaft von $S_{q+1}(-)$. \square

BEMERKUNG. Der Beweis stützt sich darauf, dass natürliche Dinge bereits durch ihren Wert auf den singulären Simplizes $\text{id}_q \in S_q(\Delta_q)$ eindeutig festgelegt sind, und darauf, dass Δ_q triviale Homologie hat. Man kann diese Methode allgemeiner ausarbeiten und bezeichnet sie dann als die “Methode der azyklischen Modelle”, siehe zum Beispiel [D]. Der Name stammt daher, dass man Räume mit trivialer Homologie oft als *azyklisch* bezeichnet, weil es in ihnen keine nicht trivialen Zyklen gibt.

SATZ. *Seien $f, g : X \rightarrow Y$ homotope stetige Funktionen. Dann ist $H_q(f) = H_q(g) : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ für jedes $q \geq 0$.*

BEWEIS. Für jeden Raum X betrachten wir die Abbildungen $\text{ins}_t : X \rightarrow X \times I$, die gegeben sind als $\text{ins}_t(x) := (x, t)$. Seien $S(\text{ins}_0), S(\text{ins}_1) : S(X) \rightarrow S(X \times I)$ die entsprechenden Komplexabbildungen. Dann erfüllen diese beiden Komplexabbildungen die Voraussetzungen von Lemma 6.8. Ist nämlich $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann ist offensichtlich $\text{ins}_t(f(x)) = (f(x), t) = (f \times \text{id}_I)(\text{ins}_t(x))$ und für den einpunktigen Raum induzieren beide Isomorphismen in der Homologie. Damit sind aber $S(\text{ins}_0)$ und $S(\text{ins}_1)$ kettenhomotop, induzieren also nach Proposition 6.4 den gleichen Homomorphismus in der Homologie.

Ist nun $h : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g dann ist $f = h \circ \text{ins}_0$ und damit $H_q(f) = H_q(h) \circ H_q(\text{ins}_0)$ und analog $H_q(g) = H_q(h) \circ H_q(\text{ins}_1)$ für alle $q \geq 0$. \square

Insbesondere sehen wir aus diesem Satz, dass eine Homotopieäquivalenz $f : X \rightarrow Y$ Isomorphismen in allen Homologiegruppen induziert.

Die Mayer–Vietoris Sequenz

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man die Homologie eines Raumes aus der Homologie von zwei Teilräumen, die den ganzen Raum überdecken, und der Homologie ihres Durchschnittes berechnen kann. Der Zusammenhang ist durch eine lange exakte Sequenz gegeben, die nach ihren Entdeckern als Mayer–Vietoris Sequenz bezeichnet wird. Dies ist ein entscheidender Vorteil gegenüber den Homotopiegruppen, wo dies nur für die Fundamentalgruppe durch den Satz von Seifert und van Kampen möglich war. Der entscheidende Schritt zur Konstruktion der Sequenz ist zu zeigen, dass man die Homologie aus beliebig kleinen singulären Simplizes berechnen kann. Das zeigt man mit Hilfe der baryzentrischen Unterteilung aus 4.11.

6.9. Baryzentrische Unterteilung. Für $q \geq 0$ definieren wir eine Kette $u_q \in S_q(\Delta_q)$ wie folgt: $u_0 := \text{id}_{\Delta_0}$ und für $q > 0$ ist

$$u_q := b_q \bullet \sum_{i=0}^q (-1)^i S_{q-1}(\delta_q^i)(u_{q-1}).$$

Dabei bezeichnet $b_q := (\frac{1}{q+1}, \dots, \frac{1}{q+1})$ den Schwerpunkt von Δ_q , die Funktionen $\delta_q^i : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$ sind die Einbettungen der Seiten aus 6.5 und \bullet bezeichnet die Kegelkonstruktion aus 6.7.

Für $q = 1$ ist b_1 gerade der Mittelpunkt des 1–Simplex, der ja eine Strecke in \mathbb{R}^2 ist. Daher ist u_1 gerade die Zerlegung des 1–Simplex in zwei Hälften. Das Vorzeichen

ist gerade so gewählt, das sich in beiden Hälften die richtige Orientierung ergibt. Für $n = 2$ erhält man dann b_2 als den Schwerpunkt des Dreiecks, teilt jede Seite in zwei Hälften und unterteilt den 2-Simplex in sechs kleinere Simplexes, wiederum mit passender Orientierung.

Die Simplexes, die in der Kette u_q auftreten, sind gerade die Simplexes der baryzentrischen Unterteilung des Standard q -Simplex (der natürlich ein Simplicialkomplex ist) aus 4.11.

Nun definieren wir für einen Raum X und einen singulären q -Simplex $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ eine Kette $\text{Ut}(\sigma) \in S_q(X)$ durch $\text{Ut}(\sigma) := S_q(\sigma)(u_q)$, wobei $S_q(\sigma) : S_q(\Delta_q) \rightarrow S_q(X)$ der von σ induzierte Homomorphismus ist. Dies liefert einen Homomorphismus $\text{Ut} = \text{Ut}_q : S_q(X) \rightarrow S_q(X)$.

LEMMA. *$\text{Ut} : S(X) \rightarrow S(X)$ ist eine natürliche Komplexabbildung, d.h. für jedes stetige $f : X \rightarrow Y$ ist $\text{Ut}_q \circ S_q(f) = S_q(f) \circ \text{Ut}_q : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$, die natürlich kettenhomotop zur Identität ist.*

BEWEIS. Zunächst ist $S_q(f)(\text{Ut}_q(\sigma)) = S_q(f)(S_q(\sigma)(u_q)) = S_q(f \circ \sigma)(u_q)$ für jeden singulären q -Simplex $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ und jede stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$, und die rechte Seite der Gleichung ist nach Definition $\text{Ut}_q(S_q(f)(\sigma))$, also ist die Natürlichkeit klar.

Als nächstes zeigen wir, dass $d \circ \text{Ut}_q = \text{Ut}_{q-1} \circ d$ für alle $q \geq 0$ gilt. Für $q = 0$ sind offensichtlich beide Seiten gleich Null. Ist $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$ ein singulärer 1-Simplex, dann ist $dS_1(\sigma)(u_1) = S_1(\sigma)(du_1)$ und nach Konstruktion ist $d(u_1) = e_1 - e_0$, also ist $dS_1(\sigma)(u_1) = \sigma(e_1) - \sigma(e_0) = d\sigma$, und da $\text{Ut}_0 = \text{id}$ ist, gilt die Gleichung für $q = 1$.

Nehmen wir also induktiv $q \geq 2$ an und dass $\text{Ut}(dc) = d\text{Ut}(c)$ für alle $c \in S_{q-1}(X)$ gezeigt ist. Man kann die Definition von u_q in 6.9 auch als $u_q = b_q \bullet \text{Ut}(d\text{id}_q)$ schreiben, wobei $\text{id}_q = \text{id}_{\Delta_q}$. Damit ist für $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ stetig

$$d\text{Ut}(\sigma) = dS_q(\sigma)(u_q) = S_q(\sigma)(du_q) = S_q(\sigma)(\text{Ut}(d\text{id}_q) - b_q \bullet d\text{Ut}(d\text{id}_q)),$$

wobei wir die Formel für den Rand einer Kegelkonstruktion aus 6.7 verwendet haben. Nach Induktionsvoraussetzung dürfen wir im letzten Term d mit Ut vertauschen, also verwindet dieser Term, und wir erhalten $S_q(\sigma)(\text{Ut}(d\text{id}_q))$. Nach dem ersten Teil ist dies aber $\text{Ut}(S_q(\sigma)(d\text{id}_q)) = \text{Ut}(d\sigma)$.

Es bleibt zu zeigen, dass Ut natürlich kettenhomotop zur Identität ist. Dazu sei $i = \text{ins}_0 : X \rightarrow X \times I$ die Insertion und $p = \text{pr}_1 : X \times I \rightarrow X$ für jeden Raum X die erste Projektion. Betrachten wir die Komplexabbildungen $S(i)$ und $S(i) \circ \text{Ut}$. Das sind beides natürliche Komplexabbildungen $S(X) \rightarrow S(X \times I)$, und offensichtlich stimmen für einen einpunktigen Raum die induzierten Homomorphismen in der Homologie überein. Damit sind die beiden Komplexabbildungen nach Lemma 6.8 natürlich kettenhomotop. Nun ist aber $\text{id}_{S(X)} = S(\text{id}_X) = S(p \circ i) = S(p) \circ S(i)$ und damit $\text{Ut} = S(p) \circ S(i) \circ \text{Ut}$, also sind auch diese beiden natürlich kettenhomotop. \square

6.10. Sei X ein topologischer Raum und sei \mathcal{U} eine Überdeckung von X . Dann bezeichnen wir mit $S_q^{\mathcal{U}}(X) \subset S_q(X)$ die Untergruppe, die von allen singulären q -Simplexes $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ erzeugt wird, deren Bild ganz in einem Element der Überdeckung \mathcal{U} liegt. Offensichtlich ist für einen singulären Simplex σ das Bild von $d\sigma$ im Bild von σ enthalten, also ist $d(S_q^{\mathcal{U}}) \subset S_{q-1}^{\mathcal{U}}$, und wir erhalten wir einen Teilkomplex $S^{\mathcal{U}}(X)$ von $S(X)$. Wir bezeichnen mit $i : S^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S(X)$ die Inklusion, die offensichtlich eine Komplexabbildung ist.

PROPOSITION. *Sei \mathcal{U} eine Überdeckung von X , sodass die offenen Inneren der Elemente von \mathcal{U} den Raum X immer noch überdecken. Dann induziert $i : S^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S(X)$ einen Isomorphismus in der Homologie.*

BEWEIS. Sei $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ ein singulärer q -Simplex. Dann ist $\{\sigma^{-1}(U^\circ) : U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung von Δ_q . Wie im Beweis von 4.13 liegt für hinreichend großes n jeder Simplex der n -fachen baryzentrischen Unterteilung von Δ_q ganz in einer der Mengen $\sigma^{-1}(U^\circ)$. Damit liegt aber $Ut^n(\sigma)$ im Bild von i , wobei Ut^n einfach die n -fache Anwendung von Ut bezeichnet. Nun ist aber Ut , und damit auch Ut^n natürlich kettenhomotop zur Identität, also gibt es Homomorphismen $s_q^n : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)$, sodass $c = Ut^n(c) + d(s_q^n(c)) + s_{q-1}^n(dc)$ für jede Kette $c \in S_q(X)$ gilt.

Ist nun $c = \sum n_i \sigma_i \in S_q(X)$ ein Zykel, also $dc = 0$, dann liegt (da die Summe endlich ist) für hinreichend großes n die Kette $Ut^n(c)$ im Bild von i . Die obige Gleichung sagt aber dann gerade, dass $c = Ut^n(c) + d(s_q^n(c))$, also ist c homolog zu $Ut^n(c)$ und damit ist der induzierte Homomorphismus $H_q(i) : H_q(S^{\mathcal{U}}(X)) \rightarrow H_q(S(X))$ surjektiv.

Sei andererseits c eine Kette im Bild von i , sodass $c = dc'$ für Kette $c' \in S_{q-1}(X)$. Dann ist wiederum $Ut^n(c')$ für hinreichend großes n im Bild von i . Wendet man d auf die obige Gleichung an, dann erhält man $dc' = dUt^n(c') + ds_{q-1}^n(dc')$. Wir behaupten nun, dass $s_{q-1}^n(dc')$ auch im Bild von i liegt. Können wir das zeigen, dann sind wir fertig, denn dann ist c auch in $S^{\mathcal{U}}(X)$ ein Rand und damit ist $H(i)$ auch injektiv.

Sei $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ ein singulärer Simplex. dass σ im Bild von i liegt, bedeutet gerade, dass es ein $U \in \mathcal{U}$ gibt, sodass σ im Bild von $S(i_U) : S(U) \rightarrow S(X)$ liegt, wobei $i_U : U \hookrightarrow X$ die Inklusion bedeutet. Nun impliziert die Natürlichkeit der Kettenhomotopie s^n sofort, dass damit auch $s_q^n(\sigma)$ im Bild von $S(i_U)$ liegt. Damit ist aber für jeden Zykel c , der im Bild von i liegt, auch $s_q^n(c)$ im Bild von i . \square

6.11. Die Mayer–Vietoris Sequenz. Sei nun X ein Raum und seien $U, V \subset X$ Teilräume, sodass $X = U^\circ \cup V^\circ$. Seien $i_U : U \hookrightarrow X$, $i_V : V \hookrightarrow X$, $j_U : U \cap V \hookrightarrow U$ und $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$ die Inklusionen. Setzen wir nun $\mathcal{U} := \{U, V\}$ und betrachten die Sequenz

$$0 \longrightarrow S(U \cap V) \xrightarrow{g} S(U) \oplus S(V) \xrightarrow{h} S^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0,$$

wo $g(c) := (S(j_U)(c), -S(j_V)(c))$ und $h(c_1, c_2) := S(i_U)(c_1) + S(i_V)(c_2)$. Wir behaupten, dass diese Sequenz von Kettenkomplexen und Komplexabbildungen exakt ist. Offensichtlich ist g injektiv und h surjektiv. Außerdem ist $i_U \circ j_U = i_V \circ j_V$ und damit $h \circ g = 0$, also $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(h)$. Sei schließlich $(c_1, c_2) \in \text{Ker}(h)$, also $S(i_U)(c_1) + S(i_V)(c_2) = 0$. Dann kann man $c_1 = \sum n_i \sigma_i$ und $c_2 = \sum m_j \tau_j$ als endliche Summen schreiben, und Anwenden von $S(i_U)$ bzw. $S(i_V)$ bedeutet nur, dass man die σ_i und τ_j als singuläre Simplizes in X betrachtet. Da $S^{\mathcal{U}}(X)$ frei von den singulären Simplizes erzeugt ist, folgt aus $\sum n_i \sigma_i + \sum m_j \tau_j = 0$, dass es zu jedem σ_i ein τ_j mit $\sigma_i = \tau_j$ und $m_j = -n_i$ geben muss. Das bedeutet aber, dass jedes σ_i in $U \cap V$ liegen muss, und damit ist $(c_1, c_2) = g(\sum n_i \sigma_i)$.

Bilden wir nun die lange exakte Homologiesequenz zu dieser kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen, und identifizieren nach 6.10 $H(S^{\mathcal{U}}(X))$ mit $H(X)$, dann erhalten wir:

SATZ (Mayer–Vietoris, um 1930). *Sei X ein Raum, $U, V \subset X$ Teilräume, sodass $X = U^\circ \cup V^\circ$. Dann ist die folgende Sequenz exakt und natürlich*

$$\dots \longrightarrow H_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial} H_q(U \cap V) \xrightarrow{g\#} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{h\#} H_q(X) \xrightarrow{\partial} \dots$$

6.12. Homologie der Sphären. Da S^0 zweipunktig diskret ist, wissen wir aus Beispiel (3) von 6.6, dass $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z}^2$ und $H_q(S^0) = 0$ für $q > 0$ gilt. Für $n > 0$ betrachten wir wie üblich S^n als Teilmenge des \mathbb{R}^{n+1} und definieren U_N bzw. U_S als die Menge aller Punkt von S^n , deren letzte Koordinate $> -1/2$ bzw. $< 1/2$ ist. Dann

ist $\{U_N, U_S\}$ eine Überdeckung von S^n , die offensichtlich die Voraussetzungen von Satz 6.11 erfüllt. Die entsprechende Mayer-Vietoris Sequenz enthält die Abschnitte

$$H_{q+1}(U_N) \oplus H_{q+1}(U_S) \xrightarrow{h\#} H_{q+1}(S^n) \xrightarrow{\partial} H_q(U_N \cap U_S) \xrightarrow{g\#} H_q(U_N) \oplus H_q(U_S).$$

Nun sind U_N und U_S offensichtlich kontrahierbar, und $U_N \cap U_S$ ist homotopieäquivalent zu S^{n-1} . Für $q > 0$ sind beide Enden des obigen Teiles der exakten Sequenz 0, und daher ist $H_{q+1}(S^n) \cong H_q(S^{n-1})$ für alle $q, n > 0$. Induktiv erhalten wir damit aus $H_q(S^0) = 0$ für alle $q > 0$, dass $H_q(S^n) = 0$ für alle $q > n$ gilt. So seltsame Phänomene, wie $\pi_3(S^2) \neq 0$ treten also bei den Homologiegruppen nicht auf.

Da S^n für $n > 0$ bogenzusammenhängend ist, wissen wir aus Beispiel (2) von 6.6, dass $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ für alle $n > 0$ gilt. Als nächsten Schritt wollen wir nun $H_1(S^1)$ berechnen. Der entsprechende Abschnitt in der Mayer-Vietoris Sequenz ist

$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\partial} H_0(U_N \cap U_S) \xrightarrow{g\#} H_0(U_N) \oplus H_0(U_S),$$

also ist $\partial : H_1(S^1) \rightarrow H_0(U_N \cap U_S) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ injektiv, und das Bild ist gerade der Kern von $g\# : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Seien nun O und W je ein fixer Punkt in den beiden Bogenkomponenten von $U_N \cap U_S$. Dann lässt sich jedes Element von $H_0(U_N \cap U_S)$ eindeutig als $aO + bW$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ schreiben. Nach Definition ist $g(aO + bW) = (S(j_{U_N})(aO + bW), -S(j_{U_S})(aO + bW))$, wobei die Abbildungen j gerade die Einbettungen von $U_N \cap U_S$ nach U_N bzw. U_S sind. Nun repräsentieren aber O und W in $H_0(U_N)$ als auch in $H_0(U_S)$ die selbe Homologiekategorie, also ist $g\#(aO + bW) = ((a+b)O, (-a-b)O)$. Der Kern von $g\#$ ist damit gerade die Menge aller $aO - aW$ für $a \in \mathbb{Z}$, also isomorph zu \mathbb{Z} .

Suchen wir nun einen Erzeuger von $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, dann müssen wir einfach eine 1-Kette in S^1 finden, die unter ∂ auf $O - W$ abgebildet wird. Ist $c : I \rightarrow S^1$ ein singulärer 1-Simplex, dann erhält man $\partial(c)$, indem man ein Urbild von c unter h wählt, davon den Rand bildet, der im Bild von g liegt, und sein Urbild in $H_0(U_N \cap U_S)$ betrachtet. Wählen wir eine Kurve c_1 von W nach O , die ganz in U_N liegt, und eine Kurve c_2 von O nach W , die ganz in U_S liegt, und betrachten wir $c_1 + c_2 \in S_1(S^1)$. Dann ist $d(c_1) = O - W$ und $d(c_2) = W - O$ also ist $c_1 + c_2$ ein Zykel in S^1 . Ein Urbild unter h ist gegeben als (c_1, c_2) und der Rand davon ist $(O - W, W - O)$. Ein Urbild davon unter g ist aber gerade $O - W$, also haben wir einen Erzeuger gefunden. Dieser repräsentiert klarerweise die selbe Klasse in $H_1(S^1)$ wie ein Homöomorphismus vom Rand des Standard 1-Simplex auf S^1 .

Induktiv folgt daraus und aus $H_{q+1}(S^n) \cong H_q(S^{n-1})$ für alle $q > 0$ nun sofort, dass $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ für alle $n \geq 1$ ist, und man überprüft leicht, dass ein Erzeuger jeweils durch einen Homöomorphismus vom Rand des Standard n -Simplex auf S^n gegeben ist.

Schließlich betrachten wir $H_1(S^n)$ für $n > 1$, und damit den Abschnitt

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \xrightarrow{\partial} H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{g\#} H_0(U_N) \oplus H_0(U_S)$$

der Mayer-Vietoris Sequenz, und wie oben ist ∂ injektiv. Nun ist aber S^{n-1} bogenzusammenhängend, also $H_0(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, und jedes Element davon lässt sich als aP für $a \in \mathbb{Z}$ und P ein beliebiger fester Punkt von S^{n-1} schreiben. Unter g wird aP aber auf $(aP, -aP)$ abgebildet, und da P sowohl $H_0(U_N)$ als auch $H_0(U_S)$ erzeugt, ist $g\#$ injektiv, und damit das Bild von ∂ nur die Null. Damit ist aber $H_1(S^n) = 0$ für alle $n > 1$, und induktiv folgt mittels $H_{q+1}(S^n) \cong H_q(S^{n-1})$ für $q > 0$, dass $H_q(S^n) = 0$ für $0 < q < n$ gilt. Insgesamt haben wir also gezeigt:

PROPOSITION. Die Homologie der n -Sphäre S^n hat je einen freien Erzeuger in den Dimensionen 0 und n . Für $n > 0$ ist daher

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

KOROLLAR. Für $n \neq m$ sind S^n und S^m nicht homotopieäquivalent und \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m sowie B^n und B^m nicht homöomorph.

BEMERKUNG. (1) Ist X ein beliebiger Raum und ΣX die unreduzierte Suspension, dann kann man ganz analog eine Überdeckung $\{U_N, U_S\}$ von X definieren, die wiederum kontrahierbar sind und deren Durchschnitt Homotopieäquivalent zu X ist. Die entsprechende Mayer-Vietoris Sequenz liefert wiederum direkt, dass $H_{q+1}(\Sigma X) \cong H_q(X)$ für alle $q > 0$ ist. Ist X bogenzusammenhängend, dann sieht man wie oben, dass $H_1(\Sigma X) = 0$ gilt. Außerdem ist ΣX immer bogenzusammenhängend und damit ist $H_0(\Sigma X) = \mathbb{Z}$.

(2) Mit diesem Resultat sehen wir auch, dass die Dimension einer Zelle eines CW-Komplexes nicht von der Wahl einer charakteristischen Abbildung abhängt, siehe 4.15.

6.13. Unsere Kenntnis der Homologiegruppen der Sphäre erlaubt uns nun, die Resultate aus 2.5 auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern.

KOROLLAR. (1) $S^{n-1} \subset B^n$ ist kein Retrakt.

(2) (Brouwerscher Fixpunktsatz) Jede stetige Funktion $f : B^n \rightarrow B^n$ hat mindestens einen Fixpunkt.

(3) Sei $n \geq 1$ und $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gibt es entweder ein $y \in B^n$ mit $f(y) = 0$ oder ein $z \in S^{n-1}$ und ein $\lambda > 0$ in \mathbb{R} , sodass $f(z) = \lambda z$.

(4) Sei f wie in (3). Dann gibt es entweder eine $y \in B^n$ mit $f(y) = y$ oder ein $z \in S^{n-1}$ und ein $\mu > 1$ mit $f(z) = \mu z$.

BEWEIS. (1) Da B^n kontrahierbar ist, ist $H_*(B^n) \cong H_*(pt)$. Wäre $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ eine Retraktion, dann wäre $H_*(r) \circ H_*(i) : H_*(S^{n-1}) \rightarrow H_*(B^n) \rightarrow H_*(S^{n-1})$ die Identität, wobei $i : S^{n-1} \hookrightarrow B^n$ die Inklusion bezeichnet. Für $n > 1$ würde damit die Identität auf $\mathbb{Z} = H_{n-1}(S^{n-1})$ über die triviale Gruppe $H_{n-1}(B^n)$ faktorisieren, und für $n = 1$ die Identität auf \mathbb{Z}^2 über \mathbb{Z} und das ist unmöglich.

(2) Wie im Fall $n = 2$ in 2.5 würde eine fixpunktfreie Funktion $f : B^n \rightarrow B^n$ eine Retraktion $B^n \rightarrow S^{n-1}$ liefern, indem man den Punkt x auf den Schnitt des Strahls von $f(x)$ durch x mit S^{n-1} abbildet.

(3) Wir definieren $\rho : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\rho(x) = \begin{cases} (2|x| - 1)x - (2 - 2|x|)f(x/|x|) & |x| \geq 1/2 \\ -f(4|x|x) & |x| \leq 1/2. \end{cases}$$

Dann ist $\rho(z) = z$ für $z \in S^{n-1}$. Daher muss es aber ein $x \in D^n$ mit $\rho(x) = 0$ geben, sonst wäre $x \mapsto \rho(x)/|\rho(x)|$ eine Retraktion von B^n auf S^{n-1} . Also haben wir ein x mit $|x| < 1$ und $\rho(x) = 0$. Ist $|x| \leq 1/2$, dann bedeutet das $f(4|x|x) = 0$, also ist $4|x|x \in B^n$ ein Punkt der unter f auf Null abgebildet wird. Ist andererseits $1/2 < |x| < 1$, dann ist $(2|x| - 1)x = (2 - 2|x|)f(x/|x|)$, also $f(x/|x|) = \frac{2|x|-1}{2-2|x|}x$, also wird $x/|x|$ unter f auf ein nichttriviales Vielfaches von sich selbst abgebildet.

(4) folgt sofort, indem man (3) auf $f - \text{id}$ anwendet. \square

6.14. Der Abbildungsgrad. Sei $f : S^n \rightarrow S^n$ für $n \geq 1$ eine stetige Abbildung. Dann haben wir $H_n(f) : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ und $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Damit ist $H_n(f)$ ein Gruppenhomomorphismus von \mathbb{Z} auf sich selbst, also durch Multiplikation mit einer

ganzen Zahl gegeben. Diese Zahl wird mit $\deg(f)$ bezeichnet und heißt der *Abbildungsgrad* von f . Für $n = 1$ bezeichnet man $\deg(f)$ auch als die *Windungszahl* von f .

Folgende Eigenschaften des Abbildungsgrades folgen direkt aus der Definition:

- (1) $\deg(\text{id}_{S^n}) = 1$.
- (2) $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$.
- (3) Jede konstante Funktion hat Abbildungsgrad 0.
- (4) Homotope Funktionen haben gleichen Abbildungsgrad.
- (5) Eine Homotopieäquivalenz hat Abbildungsgrad ± 1 .

BEMERKUNG. (1) Im Fall $n = 1$ überlegt man leicht direkt, dass die Abbildung $z \mapsto z^n$ im hier eingeführten Sinne Abbildungsgrad n hat. Gemeinsam mit den obigen Eigenschaften impliziert das sofort, dass im Fall $n = 1$ der hier definierte Abbildungsgrad mit dem aus 2.4 übereinstimmt.

(2) Die Bedingung (4) ist umkehrbar: Zwei stetige Funktionen $f, g : S^n \rightarrow S^n$ sind genau dann homotop, wenn sie den gleichen Abbildungsgrad haben (H. Hopf, 1932). Dies ist eine der Arten, wie man $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ für alle $n \geq 1$ zeigen kann.

PROPOSITION. (1) Für $n \geq 1$ sei $f : S^n \rightarrow S^n$ die stetige Funktion, die gegeben ist als $f(x_0, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$. Dann ist $\deg(f) = -1$.

(2) Der Grad der Antipodalabbildung $A : S^n \rightarrow S^n$, die gegeben ist als $A(x) = -x$ ist $(-1)^{n+1}$.

BEWEIS. (1) Im Fall $n = 1$ betrachten wir S^1 als Teilmengen von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Dann ist die Antipodalabbildung durch $x + iy \mapsto -x + iy$, also $z \mapsto -\bar{z} = -z^{-1}$ gegeben. Man sieht sofort, dass diese Funktion einmal in negativer Richtung um den Kreis läuft, also folgt aus 2.4 sofort, dass der Abbildungsgrad -1 ist.

Nehmen wir induktiv an, dass wir das Resultat für S^{n-1} bereits bewiesen haben. Sei $\{U_N, U_S\}$ die Überdeckung von S^n aus 6.12. Nach Definition ist $f(U_N) \subset U_N$ und $f(U_S) \subset U_S$, also können wir die Natürlichkeit der Mayer-Vietoris Sequenz benutzen. Die Sequenz enthält den Abschnitt

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & H_{n-1}(U_N \cap U_S) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow H_n(f) & & \downarrow H_{n-1}(f|_{U_N \cap U_S}) & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & H_{n-1}(U_N \cap U_S) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die Inklusion $S^{n-1} \hookrightarrow U_N \cap U_S$ als Äquator induziert einen Isomorphismus zwischen $H_{n-1}(U_N \cap U_S)$ und $H_{n-1}(S^{n-1})$, also wirkt nach Induktionsvoraussetzung die rechte Abbildung durch Multiplikation mit -1 .

(2) Zunächst bemerken wir, dass wir auch eine Abbildung vom Grad -1 erhalten, wenn wir eine beliebige Koordinate durch ihr negatives ersetzen. Diese Abbildung kann man nämlich als $h \circ f \circ h$ schreiben, wobei h die gegebene Koordinate mit der ersten vertauscht. Dann ergibt sich als Grad $\deg(h)^2 \deg(f)$, und als Homöomorphismus hat h Grad ± 1 . Damit ist aber die Antipodalabbildung gegeben als Komposition von $n + 1$ Funktionen, die jeweils Grad -1 haben. \square

Betrachtet man S^n als die unreduzierte Suspension ΣS^{n-1} , dann zeigt der Beweis von (1), dass $\deg(\Sigma f) = \deg(f)$ für alle $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.

KOROLLAR. (1) Ist $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ stetig, dann gibt es entweder ein x mit $f(x) = x$, oder es gibt ein y mit $f(y) = -y$.

(2) (Igelsatz) Es gibt keine stetige Funktion $f : S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ohne Nullstelle, die $f(x) \perp x$ für alle $x \in S^{2n}$ erfüllt. Also gibt es auf S^{2n} kein stetiges Vektorfeld ohne Nullstelle.

BEWEIS. (1) Nach Beispiel (4) von 2.2 sind zwei stetige Funktionen $f, g : S^n \rightarrow S^n$, die $f(x) \neq -g(x)$ für alle x erfüllen automatisch homotop. Ist also $f : S^n \rightarrow S^n$ eine Funktion mit $f(x) \neq x$ für alle x , dann ist f homotop zur Antipodalabbildung, hat also Grad $(-1)^{n+1}$, und damit für gerades n Grad -1 . Würde nun außerdem $f(x) \neq -x$ für alle x gelten, dann wäre f auch homotop zur Identität, hätte also Grad 1.

(2) Ist $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion ohne Nullstelle mit $f(x) \perp x$ für alle x , dann definiert $\phi(x) := f(x)/|f(x)|$ eine stetige Funktion $\phi : S^n \rightarrow S^n$ mit $\phi(x) \neq \pm x$ für alle $x \in S^n$, und so eine Funktion kann es für gerades n nach (1) nicht geben. \square

BEMERKUNG. Auf Sphären ungerader Dimension gibt es im allgemeinen Vektorfelder ohne Nullstellen. Man kann sogar genau zeigen, wie viele Vektorfelder es auf S^n gibt, die in jedem Punkt linear unabhängig sind (Adams, 1961). Schreibt man nämlich $n = 16^a 2^b q$ mit $a \geq 0$, $3 \geq b \geq 0$ und q ungerade, dann gibt es auf S^{n-1} genau $8a + 2^b - 1$ solche Vektorfelder. Insbesondere gibt es nur für $n = 1, 3$ und 7 die Maximalzahl von n Vektorfeldern auf S^n , die in jedem Punkt linear unabhängig sind. Dies hängt eng damit zusammen, dass auf \mathbb{R}^n nur für $n = 1, 2, 4$ und 8 eine Divisionsalgebrenstruktur existiert.

Relative Homologie

In diesem Kapitel werden wir zunächst Homologiegruppen für topologische Paare definieren und mit der langen exakten Sequenz eines Paares und dem Excisionssatz die beiden letzten fundamentalen Eigenschaften der singulären Homologietheorie kennen lernen. Dann werden wir die relative Homologie benutzen, um einige Invarianzsätze zu beweisen und schließlich zeigen, wie man die Homologiegruppen von CW-Komplexen berechnen kann.

7.1. Grundlegendes. Sei (X, A) ein topologisches Paar, $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann ist offensichtlich die induzierte Abbildung $S_*(i) : S_*(A) \rightarrow S_*(X)$ eine injektive Komplexabbildung. Sie bedeutet ja nur, dass man singuläre Simplizes in A als singuläre Simplizes in X betrachtet. Wir werden $S_*(i)$ unterdrücken und einfach jedes $S_q(A)$ als Untergruppe von $S_q(X)$ betrachten.

Geht man nun zum Quotienten $S_q(X, A) := S_q(X)/S_q(A)$ über, dann induziert der Randoperator $d : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$ einen Operator $d : S_q(X, A) \rightarrow S_{q-1}(X, A)$ (weil $d(S_q(A)) \subset S_{q-1}(A)$), der wieder $d^2 = 0$ erfüllt. Also erhalten wir wiederum einen Kettenkomplex $(S_*(X, A), d)$, den *relativen singulären Komplex* des Paares (X, A) .

Die Homologiegruppen dieses Komplexes heißen die *relativen (singulären) Homologiegruppen* des Paares (X, A) und werden mit $H_q(X, A)$ bezeichnet.

Ist (Y, B) ein weiteres Paar und $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Paaren, dann ist $f(A) \subset B$ und damit $S_*(f)(S_*(A)) \subset S_*(B)$. Damit induziert f aber eine Komplexabbildung $S_*(f) : S_*(X, A) \rightarrow S_*(Y, B)$, und diese induziert Homomorphismen $f_\# = H_q(f) : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$ für alle $q \geq 0$.

Man bemerke, dass nach Definition für jeden Raum X und $A = \emptyset$, die leere Menge, $S_*(X, \emptyset) = S_*(X)$ und damit auch $H_*(X, \emptyset) = H_*(X)$ gilt.

SATZ (lange exakte Homologiesequenz eines Paares). *Sei (X, A) ein topologisches Paar, und seien $i : A \rightarrow X$ und $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Dann gibt es eine natürliche lange exakte Sequenz der Form*

$$\cdots \xrightarrow{j_\#} H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} H_q(A) \xrightarrow{i_\#} H_q(X) \xrightarrow{j_\#} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Ist (Y, B) ein weiteres Paar und $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Paaren, dann erhält man eine kommutative Leiter der Form

$$\begin{array}{cccccccc} \xrightarrow{j_\#} & H_{q+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_q(A) & \xrightarrow{i_\#} & H_q(X) & \xrightarrow{j_\#} & H_q(X, A) & \xrightarrow{\partial} \\ & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & \\ \xrightarrow{j_\#} & H_{q+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_q(A) & \xrightarrow{i_\#} & H_q(X) & \xrightarrow{j_\#} & H_q(X, A) & \xrightarrow{\partial} \end{array}$$

BEWEIS. Offensichtlich ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(A) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow S_*(f_A) & & \downarrow S_*(f) & & \downarrow S_*(f) \\ 0 & \longrightarrow & S_*(B) & \longrightarrow & S_*(Y) & \longrightarrow & S_*(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen und Komplexabbildungen mit exakten Zeilen, also folgt das Resultat direkt aus Satz 6.3. \square

BEMERKUNG. Klarerweise liefert jede Kette $c \in S_q(X)$ eine Kette in $S_q(X, A)$. Die Zyklen in $S_q(X, A)$ entsprechen gerade Ketten $c \in S_q(X)$ deren Rand dc in $S_{q-1}(A)$ liegt. Zwei solche Zyklen c_0, c_1 repräsentieren genau dann die selbe Klasse in $H_q(X, A)$, wenn es Ketten $c' \in S_q(A)$ und $c'' \in S_{q+1}(X)$ gibt, sodass $c_1 - c_0 = c' + dc''$ gilt. Damit kann man auch den Einhängungshomomorphismus $\partial : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ schön beschreiben: Sei $c \in S_q(X, A)$ ein Zykel, also $c \in S_q(X)$ und $dc \in S_{q-1}(A)$. Dann ist natürlich $d(dc) = 0$, also gibt es die Klasse $\partial([c]) = [dc] \in H_{q-1}(A)$. Diese ist im allgemeinen nicht trivial, da dc zwar Rand einer Kette in X ist, aber im allgemeinen keine Kette in A mit diesem Rand existiert.

BEISPIEL. (1) Angenommen $H_q(i) : H_q(A) \rightarrow H_q(X)$ ist injektiv für alle q . Dann ist in der langen exakten Homologiesequenz von (X, A) jeder Einhängungshomomorphismus $\partial : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ der Nullhomomorphismus. Also zerfällt die lange exakte Homologiesequenz in viele kurze exakte Sequenzen der Form

$$0 \rightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_\#} H_q(X) \xrightarrow{j_\#} H_q(X, A) \rightarrow 0,$$

also ist $H_q(X, A) \cong H_q(X)/H_q(A)$.

(2) Ist $A \subset X$ ein Retrakt, dann gibt es eine stetige Funktion $r : X \rightarrow A$, sodass $r \circ i = \text{id}_A$ gilt. Damit gilt aber auch $r_\# \circ i_\# = \text{id}_{H_*(A)}$. Insbesondere ist damit $i_\#$ injektiv, und wir können (1) anwenden. Nun haben wir aber in der kurzen exakten Sequenz von oben den Homomorphismus $r_\# : H_q(X) \rightarrow H_q(A)$ mit $r_\# \circ i_\# = \text{id}$. Man sagt: "Die Sequenz splittet". Dann ist aber $(r_\#, j_\#) : H_q(X) \rightarrow H_q(A) \oplus H_q(X, A)$ für jedes q ein Isomorphismus.

(3) Ist insbesondere $x_0 \in X$ ein Punkt, dann ist klarerweise $\{x_0\}$ ein Retrakt von X , und damit ist nach (2) $H_q(X) \cong H_q(x_0) \oplus H_q(X, x_0)$, also $H_q(X) \cong H_q(X, x_0)$ für $q > 0$ und $H_0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus H_0(X, x_0)$.

(4) Ist $A \subset X$ sogar ein Deformationsretrakt, dann ist $H_q(i)$ ein Isomorphismus für jedes q , also ist $H_q(X, A) = 0$ für alle q .

7.2. Die lange exakte Homologiesequenz eines Tripels. Eine einfache Variante der langen exakten Sequenz eines Paares, die später noch wichtig sein wird, ist die lange exakte Sequenz eines Tripels. Dazu sei X ein Raum, und $B \subset A \subset X$ seien Teilräume. Dann ist $S_*(B) \subset S_*(A) \subset S_*(X)$, und für jedes q ist $(S_q(X)/S_q(B))/(S_q(A)/S_q(B)) \cong S_q(X)/S_q(A)$. Damit erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S_*(A, B) \xrightarrow{S_*(i)} S_*(X, B) \xrightarrow{S_*(j)} S_*(X, A) \longrightarrow 0$$

von Kettenkomplexen und Komplexabbildungen, wobei $i : (A, B) \rightarrow (X, B)$ und $j : (X, B) \rightarrow (X, A)$ die Inklusionen sind. Also gilt:

SATZ (lange exakte Sequenz eines Tripels). *Zu dem Tripel $B \subset A \subset X$ mit Inklusionen $j : (X, B) \rightarrow (X, A)$ und $i : (A, B) \rightarrow (X, B)$ gibt es eine natürliche lange exakte*

Sequenz der Form

$$\cdots \xrightarrow{j\#} H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} H_q(A, B) \xrightarrow{i\#} H_q(X, B) \xrightarrow{j\#} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Wiederum kann man den Einhängungshomomorphismus in diesem Fall gut explizit beschreiben: Ein Zykel $c \in S_q(X, A)$ ist gerade eine Kette $c \in S_q(X)$, sodass $dc \in S_{q-1}(A)$. Dann ist dc ein Zykel, insbesondere definiert es auch einen Zykel in $S_{q-1}(A, B)$, dessen Klasse gerade $\partial([c])$ ist. Man kann das auch so betrachten: Sei $k : (A, \emptyset) \rightarrow (A, B)$ die Inklusion und $k\# : H_{q-1}(A) \rightarrow H_{q-1}(A, B)$ der induzierte Homomorphismus, der in der Sequenz des Paares (A, B) auftritt, und sei $\tilde{\partial} : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ der Einhängungshomomorphismus der langen exakten Sequenz des Paares (X, A) . Dann ist $\partial = k\# \circ \tilde{\partial}$.

7.3. Auch für die relativen Homologiegruppen gilt ein Homotopiesatz. Seien $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotop als Funktionen von Paaren, d.h. es gibt eine Homotopie $H : X \times I \rightarrow Y$ von f nach g , sodass $H(a, t) \in B$ für alle $a \in A$ und $t \in I$. Dann kann man H als stetige Funktion vom Paar $(X \times I, A \times I)$ in das Paar (Y, B) betrachten. Wie im Fall von Räumen können wir wieder die Abbildungen $\text{ins}_t : (X, A) \rightarrow (X \times I, A \times I)$ betrachten, die durch $\text{ins}_t(x) = (x, t)$ definiert sind, und es ist $f = H \circ \text{ins}_0$ und $g = H \circ \text{ins}_1$. Um zu beweisen, dass $H_q(f) = H_q(g) : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$ gilt, genügt es daher wie in 6.8 zu zeigen, dass die Kettenabbildungen $S_*(\text{ins}_0), S_*(\text{ins}_1) : S_*(X, A) \rightarrow S_*(X \times I, A \times I)$ kettenhomotop sind. Nun haben wir aber in 6.8 gezeigt, dass für jeden Raum X die Kettenabbildungen $S_*(\text{ins}_0), S_*(\text{ins}_1) : S_*(X) \rightarrow S_*(X \times I)$ natürlich kettenhomotop sind. Sind also $s_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X \times I)$ und $s_q : S_q(A) \rightarrow S_{q+1}(A \times I)$ die entsprechenden Homomorphismen, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} S_q(A) & \xrightarrow{S_q(i)} & S_q(X) \\ \downarrow s_q & & \downarrow s_q \\ S_{q+1}(A \times I) & \xrightarrow{S_{q+1}(i \times \text{id}_I)} & S_{q+1}(X \times I) \end{array}$$

Damit erhalten wir einen induzierten Homomorphismus

$$s_q : S_q(X, A) \rightarrow S_{q+1}(X \times I, A \times I),$$

und klarerweise ergeben diese eine Kettenhomotopie zwischen $S_*(\text{ins}_0)$ und $S_*(\text{ins}_1)$. Damit haben wir bewiesen:

SATZ. Seien $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotope Abbildungen von Paaren. Dann ist $H_q(f) = H_q(g) : H_q(X, A) \rightarrow H_q(X, B)$.

7.4. Der Excisionsatz. Die letzte entscheidende strukturelle Eigenschaft der Homologiegruppen, die wir noch beweisen müssen, ist der sogenannte Excisions- oder Ausschneidungssatz. Er ist nahe verwandt zur Mayer-Vietoris Sequenz.

SATZ (Excision). Sei (X, A) ein topologisches Paar, $U \subset X$ eine Teilmenge, sodass $\bar{U} \subset A^\circ$. Dann induziert die Inklusion $i : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ für alle $q \geq 0$ einen Isomorphismus $i\# : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_q(X, A)$.

BEWEIS. Die Überdeckung $\mathcal{U} := \{A^\circ, X \setminus U\}$ von X erfüllt die Voraussetzungen von 6.10, also ist $H(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \cong H(X)$. Analoges gilt für die Überdeckung $\mathcal{U}' := \{A^\circ, A \setminus U\}$ von A , also ist $H(A) \cong H(S_*^{\mathcal{U}'}(A))$. Schränkt man die Inklusion $S_*(A) \hookrightarrow S_*(X)$ auf $S_*^{\mathcal{U}'}(A)$ ein, dann erhält man offensichtlich Werte in $S_*^{\mathcal{U}}(X)$. Damit erhält man einen

induzierten Homomorphismus $S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*^{\mathcal{U}'}(A) \rightarrow S_*(X)/S_*(A)$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*^{\mathcal{U}'}(A) & \longrightarrow & S_*^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*^{\mathcal{U}'}(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S_*(A) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(X)/S_*(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

von Kettenkomplexen und Komplexabbildungen mit exakten Zeilen. Nach Proposition 6.10 und Korollar 6.3 ist daher $H(X, A) \cong H(S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*^{\mathcal{U}'}(A))$.

Andererseits ist $S_*(X \setminus U) \subset S_*^{\mathcal{U}}(X)$ und $S_*(A \setminus U) \subset S_*^{\mathcal{U}'}(A)$ und die Inklusionen induzieren wieder eine Komplexabbildung $S_*(X \setminus U)/S_*(A \setminus U) \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*^{\mathcal{U}'}(A)$. Wir behaupten, dass die ein Isomorphismus ist. Zunächst lässt sich nach Definition jede Kette in $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ als Summe einer Kette in $S_*(X \setminus U)$ und einer Kette in $S_*(A^\circ)$ schreiben. Die zweite Kette liegt aber auch in $S_*^{\mathcal{U}'}(A)$, also ist der induzierte Homomorphismus surjektiv. Damit müssen wir nur noch zeigen, dass $S_*(X \setminus U) \cap S_*^{\mathcal{U}'}(A) = S_*(A \setminus U)$ ist. Das folgt aber sofort, da $S_*(X \setminus U) \cap S_*(A^\circ) = S_*(A^\circ \setminus U)$ in $S_*(A \setminus U)$ enthalten ist. \square

7.5. Die Eilenberg–Steenrod Axiome.

- Die Bedingungen
- (1) $(X, A) \mapsto H(X, A)$ ist ein Funktor von der Kategorie der topologischen Paare in die Kategorie der abelschen Gruppen.
 - (2) Es gibt die natürliche lange exakte Sequenz eines Paares.
 - (3) Homotope Abbildungen von Paaren induzieren die selben Homomorphismen in der Homologie.
 - (4) Es gilt der Excisionssatz.
 - (5) Die Homologie eines Punktes ist \mathbb{Z} in Dimension 0 und Null in allen höheren Dimensionen

werden als die *Eilenberg–Steenrod Axiome* bezeichnet. Man kann beweisen, dass diese Axiome die singuläre Homologietheorie für endliche CW–Komplexe eindeutig charakterisieren. Eine wichtige Rolle in der modernen algebraischen Topologie spielen die sogenannten *verallgemeinerten Homologietheorien* (und vor allem die entsprechenden verallgemeinerten Kohomologietheorien). Das sind Theorien, die alle bis auf das letzte der obigen Axiome erfüllen. Zu diesen Theorien zählen die stabile Homotopietheorie, die K–Theorie und die diversen Bordismentheorien. Man kann auch beweisen, dass man alle diese Theorien auch homotopietheoretisch definieren kann, d.h. sie können immer durch Homotopieklassen ausgedrückt werden.

Lokale Homologie und Invarianzsätze

In diesem Abschnitt werden wir als erste Anwendung der relativen Homologiegruppen die sogenannten lokalen Homologiegruppen betrachten und einige weitere Aussagen über die Topologie des \mathbb{R}^n und seiner Teilmengen beweisen.

7.6. Als ersten Schritt zeigen wir einen Weg, wie man die Dimension von \mathbb{R}^n homologisch “sehen” kann.

PROPOSITION. (1) Für $n \geq 1$ ist $H_q(B^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$.

(2) Ist $p \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt, dann ist $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus p) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$.

BEWEIS. (1) Betrachte die lange exakte Sequenz des Paares (B^n, S^{n-1}) . Da B^n kontrahierbar ist, ist $H_q(B^n) = 0$ für alle $q > 0$, und damit ist der Einhängungshomomorphismus $H_{q+1}(B^n, S^{n-1}) \rightarrow H_q(S^{n-1})$ für $q > 0$ ein Isomorphismus.

Für $n > 1$ sowohl B^n als auch S^{n-1} bogenzusammenhängend, also induziert die Inklusion $S^{n-1} \hookrightarrow B^n$ einen Isomorphismus $H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(B^n)$. Damit sind aber die Homomorphismen $H_1(B^n, S^{n-1}) \rightarrow H_0(S^{n-1})$ und $H_0(B^n) \rightarrow H_0(B^n, S^{n-1})$ beide der Nullhomomorphismus, aber nach Exaktheit und wegen $H_1(B^n) = 0$ ist der erste injektiv und der zweite surjektiv, also ist $H_q(B^n, S^{n-1}) = 0$ für $q = 0, 1$ und $n > 1$.

Im Fall $n = 1$ ist $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ und $H_0(B^1) \cong \mathbb{Z}$, und der Homomorphismus $H_0(S^0) \rightarrow H_0(B^1)$ ist gegeben durch $(a, b) \mapsto a + b$, also surjektiv. Wegen der Surjektivität ist $H_0(B^1, S^0) = 0$ wie oben, und wegen $H_1(B^1) = 0$ ist $H_1(B^1, S^0)$ isomorph zum Kern des obigen Homomorphismus, also zu \mathbb{Z} .

(2) Klarerweise dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$ annehmen. Betrachten wir die Inklusion $(B^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$, und die induzierten Homomorphismen in den absoluten und relativen Homologiegruppen. Dann sind diese Homomorphismen in den absoluten Gruppen Isomorphismen, also sind wegen der langen exakten Sequenz der Paare und des Fünferlemmas aus 6.2 auch die relativen Homologiegruppen isomorph. \square

7.7. lokale Homologie. Ist X ein beliebiger topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt, so nennt man $H_*(X, X \setminus x_0)$ die *lokale Homologie* von X bei x_0 . Der Name "lokale Homologie" kommt daher, dass für jede Umgebung U von x_0 der Excisionsatz (angewandt auf $X \setminus U$) impliziert, dass $H_*(X, X \setminus x_0) \cong H_*(U, U \setminus x_0)$. Die lokale Homologie hängt also nur von beliebig kleinen Umgebungen von x_0 ab, ist also wirklich etwas lokales.

Betrachten wir den sogenannten *Halbraum* $\mathcal{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ und (wie üblich) \mathbb{R}^{n-1} als Teilmenge von $\mathcal{H}^n \subset \mathbb{R}^n$. Natürlich ist \mathbb{R}^{n-1} gerade der topologische Rand $\partial\mathcal{H}^n$ von \mathcal{H}^n in \mathbb{R}^n . Für eine Teilmenge $U \subset \mathcal{H}^n$, die offen in \mathcal{H}^n ist, ist klarerweise $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ offen in \mathbb{R}^{n-1} .

PROPOSITION. (1) Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen. Sind U und V homöomorph, dann ist $m = n$.

(2) Seien $U \subset \mathcal{H}^m$ und $V \subset \mathcal{H}^n$ offene Teilmengen, und sei $h : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus. Dann ist $m = n$ und h bildet das Innere $U \cap \mathcal{H}^{m^\circ}$ homöomorph auf $V \cap \mathcal{H}^{n^\circ}$ und den Rand $U \cap \mathbb{R}^{m-1}$ homöomorph auf $V \cap \mathbb{R}^{n-1}$ ab.

BEWEIS. (1) Nach den obigen Überlegungen ist für jeden Punkt $x \in U$ die lokale Homologie $H_q(U, U \setminus x)$ gerade \mathbb{Z} für $q = n$ und Null sonst. Da sich ein Homöomorphismus $h : U \rightarrow V$ auf einen Homöomorphismus $h : U \setminus \{x\} \rightarrow V \setminus \{h(x)\}$ einschränkt, muss h einen Isomorphismus in den lokalen Homologiegruppen induzieren.

(2) Punkte in $(\mathcal{H}^n)^\circ$ haben eine Umgebung die offen in \mathbb{R}^n ist, also ist die lokale Homologie von \mathcal{H}^n bei x wieder \mathbb{Z} für $q = n$ und 0 für $q \neq n$. Für einen Randpunkt $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist das Paar $(\mathcal{H}^n, \mathcal{H}^n \setminus \{x\})$ homotopieäquivalent zu (x_0, x_0) , wobei $x_0 \in (\mathcal{H}^n)^\circ$ ein fix gewählter Punkt ist. Die Homotopieäquivalenz ist explizit gegeben durch $H(y, t) = (1-t)y + tx_0$. Damit verschwinden in Randpunkten alle lokalen Homologiegruppen, und das Resultat folgt wie in (1). \square

BEMERKUNG. Diese Resultate sind fundamental für die Theorie der (berandeten) topologischen Mannigfaltigkeiten. Man definiert eine (berandete) topologische Mannigfaltigkeit als einen separablen metrisierbaren Raum M , sodass jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n

(bzw. eines Halbraumes \mathcal{H}^n) ist. Aus Teil (1) der Proposition sieht man, dass dann die Zahl n (zumindest auf Zusammenhangskomponenten) konstant ist. Diese Zahl heißt die *Dimension* der Mannigfaltigkeit M . Weiters sehen wir, dass im berandeten Fall das Bild eines Punktes unter den Homöomorphismen mit offenen Teilmengen von \mathcal{H}^n entweder immer oder nie im Teilraum \mathbb{R}^{n-1} liegt. Punkte, deren Bild in \mathbb{R}^{n-1} liegt, heißen *Randpunkt*, die Menge ∂M aller Randpunkte heißt der *Rand* von M . Jeder Randpunkt hat dann eine offene Umgebung in ∂M , die homöomorph zu einer offenen Teilmenge in \mathbb{R}^{n-1} ist. Also ist ∂M wieder eine topologische Mannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension $n - 1$. Man kann die lokalen Homologiegruppen auch benutzen, um für topologische Mannigfaltigkeiten den Begriff der Orientierbarkeit zu definieren, aber dies würde uns hier zu weit führen.

CW–Homologie

Unser nächstes Ziel ist allgemein zu zeigen, wie man die Homologiegruppen von CW–Komplexen berechnen kann.

7.8. Als ersten Schritt stellen wir eine Verbindung zwischen absoluten und relativen Homologiegruppen her, die auch als eigenständiges Resultat interessant ist.

PROPOSITION. *Sei (X, A) eine abgeschlossene Kofaserung und sei $p : (X, A) \rightarrow (X/A, [A])$ die Quotientenabbildung. Dann induziert p für jedes $q \geq 0$ einen Isomorphismus $p_{\#} : H_q(X, A) \rightarrow H_q(X/A, [A])$. Insbesondere ist $H_q(X, A) \cong H_q(X/A)$ für $q > 0$.*

BEWEIS. Nach Satz 4.3 finden wir eine Retraktion $h : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$. Seien h_1 und h_2 die beiden Komponenten von h . Setzt man $U := h_2^{-1}((0, 1])$, dann ist dies eine offene Umgebung von A , und $r := h_1|_{X \times \{1\}}$ schränkt sich zu einer Retraktion $U \rightarrow A$ ein. Wir müssen zunächst den Zusammenhang zwischen $H(X, A)$ und $H(X, U)$ klären: Die Inklusion $i : (X, A) \hookrightarrow (X, U)$ induziert einen Homomorphismus $i_{\#} : H(X, A) \rightarrow H(X, U)$. Andererseits kann man r als stetige Funktion von Paaren $(X, U) \rightarrow (X, A)$ betrachten, und erhält einen Homomorphismus $r_{\#} : H(X, U) \rightarrow H(X, A)$. Nun zeigt aber die Abbildung h (als Homotopie betrachtet), dass $r \circ i : (X, A) \rightarrow (X, A)$ als Abbildung von Paaren homotop zur Identität ist. Somit ist $r_{\#} \circ i_{\#} = \text{id}$ und insbesondere $i_{\#} : H_q(X, A) \rightarrow H_q(X, U)$ injektiv und $r_{\#} : H_q(X, U) \rightarrow H_q(X, A)$ surjektiv.

Betrachten wir nun das Paar $(X/A, [A])$ und die kanonische Abbildung $p : (X, A) \rightarrow (X/A, [A])$. Dann faktorisiert die Abbildung h von oben zu einer Retraktion $\tilde{h} : (X/A) \times I \rightarrow (X/A) \times \{0\} \cup [A] \times I$, und man kann die obige Konstruktion darauf anwenden. Offensichtlich ist $\tilde{h}_2^{-1}((0, 1]) = p(U)$. Die obige Konstruktion liefert damit ein injektives $\tilde{i}_{\#} : H(X/A, [A]) \rightarrow H(X/A, p(U))$ und ein surjektives $\tilde{r}_{\#} : H(X/A, p(U)) \rightarrow H(X/A, [A])$, und nach Konstruktion haben wir kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{i_{\#}} & H_q(X, U) & & H_q(X, U) & \xrightarrow{r_{\#}} & H_q(X, A) \\ \downarrow p_{\#} & & \downarrow p_{\#} & & \downarrow p_{\#} & & \downarrow p_{\#} \\ H_q(X/A, [A]) & \xrightarrow{\tilde{i}_{\#}} & H_q(X/A, p(U)) & & H_q(X/A, p(U)) & \xrightarrow{\tilde{r}_{\#}} & H_q(X/A, [A]) \end{array}$$

Sei nun $V := h_2^{-1}((1/2, 1])$. Dann ist V eine offene Umgebung von A in X und $\bar{V} \subset U^\circ$, also induziert nach dem Excisionssatz 7.4 die Inklusion $(X \setminus V, U \setminus V) \hookrightarrow (X, U)$ einen Isomorphismus $H(X \setminus V, U \setminus V) \cong H(X, U)$. Analog ist $\tilde{h}_2^{-1}((1/2, 1]) = p(V)$ eine offene

Umgebung von $[A]$ und $\overline{p(V)} \subset p(U)^\circ$, also induziert die Inklusion $(X/A \setminus p(V), p(U) \setminus p(V)) \hookrightarrow (X/A, p(U))$ ebenfalls einen Isomorphismus in der relativen Homologie. Nun gibt aber die Einschränkung der Projektion p auf $X \setminus V$ einen Homöomorphismus von Paaren $(X \setminus V, U \setminus V) \cong (X/A \setminus p(V), p(U) \setminus p(V))$. Damit sehen wir, dass $p_\# : H(X, U) \rightarrow H(X/A, p(U))$ ein Isomorphismus ist.

Nach dem linken Diagramm von oben ist $\tilde{i}_\# \circ p_\# = p_\# \circ i_\#$, und das ist injektiv, also ist auch $p_\# : H(X, A) \rightarrow H(X/A, [A])$ injektiv. Nach dem rechten Diagramm ist $p_\# \circ r_\# = \tilde{r}_\# \circ p_\#$, und diese Abbildung ist surjektiv, also ist auch $p_\# : H(X, A) \rightarrow H(X/A, [A])$ surjektiv und damit ein Isomorphismus. Schließlich ist nach Beispiel (3) von 7.1 $H_q(X/A, [A]) \cong H_q(X/A)$ für $q > 0$. \square

KOROLLAR. *Seien (X, A) und (Y, B) abgeschlossene Kofaserungen, und sei $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ein relativer Homöomorphismus. Dann ist $f_\# : H(X, A) \rightarrow H(Y, B)$ ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Als Abbildung von Paaren induziert f eine punkterhaltende stetige Funktion $\bar{f} : X/A \rightarrow Y/B$, und da f ein relativer Homöomorphismus ist, ist \bar{f} ein Homöomorphismus. Damit folgt das Resultat sofort aus dem Satz. \square

7.9. Mit Hilfe dieser Resultate können wir sofort einige allgemeine Aussagen über die Homologiegruppen von CW-Komplexen machen. Sei X ein CW-Komplex, und für jedes k sei X^k das k -Skelett von X . Nach 4.18 gibt es für jedes k einen relativen Homöomorphismus $(\sqcup_\alpha B_\alpha^k, \sqcup_\alpha S_\alpha^{k-1}) \rightarrow (X^k, X^{k-1})$. Nach 4.3 und Proposition 4.18 sind diese beiden Paare abgeschlossene Kofaserungen, also induziert dieser relative Homöomorphismus nach Korollar 7.8 einen Isomorphismus in der relativen Homologie. Nach Beispiel (3) von 6.6 ist $S_*(\sqcup_\alpha B_\alpha^k) \cong \bigoplus_\alpha S_*(B_\alpha^k)$ und $S_*(\sqcup_\alpha S_\alpha^{k-1}) \cong \bigoplus_\alpha S_*(S_\alpha^{k-1})$ also ist auch $S_*(\sqcup_\alpha B_\alpha^k, \sqcup_\alpha S_\alpha^{k-1}) \cong \bigoplus_\alpha S_*(B_\alpha^k, S_\alpha^{k-1})$, und die Randoperatoren respektieren diese Zerlegung. Damit ist nach Teil (1) von Proposition 7.6 $H_q(\sqcup_\alpha B_\alpha^k, \sqcup_\alpha S_\alpha^{k-1})$ gleich Null für $q \neq k$ und gleich $\bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$ für $q = k$. Damit ist $H_q(X^k, X^{k-1})$ Null für $q \neq k$ und eine freie abelsche Gruppe mit je einem Erzeuger für jede k -Zelle für $q = k$.

Betrachten wir nun die exakte Sequenz des Paares (X^k, X^{k-1}) , so enthält diese die Abschnitte

$$\dots \rightarrow H_{q+1}(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_q(X^{k-1}) \rightarrow H_q(X^k) \rightarrow H_q(X^k, X^{k-1}) \rightarrow \dots$$

Für $q \neq k - 1, k$ ist damit $H_q(X^{k-1}) \cong H_q(X^k)$ und für $q = k - 1$ erhalten wir eine Surjektion $H_{k-1}(X^{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(X^k)$.

PROPOSITION. (1) *Der von der Inklusion $X^q \hookrightarrow X$ induzierte Homomorphismus $H_k(X^q) \rightarrow H_k(X)$ ist bijektiv für $k < q$ und surjektiv für $k = q$.*

(2) *Besitzt X keine Zellen der Dimension q , dann ist $H_q(X) = 0$. Insbesondere ist für einen n -dimensionalen CW-Komplex $H_q(X) = 0$ für alle $q > n$.*

BEWEIS. (1) Betrachten wir die Inklusionen $X^q \hookrightarrow X^{q+1} \hookrightarrow X^{q+2} \hookrightarrow \dots$ und die induzierten Homomorphismen $H_q(X^q) \rightarrow H_q(X^{q+1}) \rightarrow H_q(X^{q+2}) \rightarrow \dots$. Nach unseren obigen Überlegungen ist der erste dieser Homomorphismen surjektiv und alle weiteren sind bijektiv. Ist X endlichdimensional, dann ist das Resultat bereits klar, denn dann ist $X = X^n$. Im allgemeinen argumentiert man wie folgt: Das Bild jedes singulären Simplex in X ist kompakt, liegt also nach 4.17(2) in einem endlichen CW-Teilraum von X . Damit gibt es für jede Kette $c \in H_q(X)$ eine Zahl $p \geq q + 1$, sodass c im Bild von $H_q(X^p) \rightarrow H_q(X)$ liegt. (Man wählt einfach p so groß, dass alle Bilder der endlich vielen singulären Simplizes in c ganz in X^p liegen). Damit liegt c aber auch im Bild von $H_q(X^k) \rightarrow H_q(X)$ für alle $k \geq q$. Ganz analog sieht man die Injektivität für alle $k > q$.

(2) Nach den obigen Überlegungen ist $H_q(X^{q-1}) \cong H_q(X^{q-2}) \cong \dots \cong H_q(X^0)$ und die letzte Gruppe ist trivial, da X^0 diskret und $q > 0$ ist. Da X keine q -Zellen besitzt, ist $X^q = X^{q-1}$, also folgt das Resultat nach (1). \square

7.10. Der zelluläre Komplex. Für einen CW-Komplex X betrachten wir die lange exakte Sequenz des Tripels (X^q, X^{q-1}, X^{q-2}) aus 7.2. Diese enthält den Einhängungshomomorphismus $\partial = \partial_q : H_q(X^q, X^{q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2})$. Dieser ist die Komposition des Homomorphismus $H_{q-1}(X^{q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2})$ der durch die Inklusion $(X^{q-1}, \emptyset) \hookrightarrow (X^{q-1}, X^{q-2})$ induziert wird, mit dem Einhängungshomomorphismus $H_q(X^q, X^{q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X^{q-1})$ aus der langen exakten Sequenz des Paares (X^q, X^{q-1}) . Betrachten wir nun die Komposition

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q : H_q(X^q, X^{q-1}) \rightarrow H_{q-2}(X^{q-2}, X^{q-3}),$$

so ist diese eine Komposition von vier Homomorphismen, wobei die mittleren beiden $H_{q-1}(X^{q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) \rightarrow H_{q-2}(X^{q-2})$ ein Teil der langen exakten Sequenz des Paares (X^{q-1}, X^{q-2}) sind. Damit ist aber insbesondere ihre Komposition gleich Null, also ist $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

Damit erhalten wir einen Komplex $(W_q(X), \partial_q)$, wobei $W_q(X) := H_q(X^q, X^{q-1})$. Nach 7.9 ist $W_q(X)$ gerade die freie abelsche Gruppe, die von den q -Zellen von X erzeugt wird. Deshalb heißt dieser Komplex der *zelluläre Komplex* von X und seine Homologie die *zelluläre Homologie* von X . Wir werden später die Randoperatoren ∂_q in diesem Komplex noch explizit beschreiben. Zunächst zeigen wir

SATZ. Die zelluläre Homologie von X stimmt mit der singulären Homologie überein. Also kann man die singuläre Homologie von CW-Komplexen aus dem zellulären Komplex berechnen.

BEWEIS. Betrachten wir die Gruppe $H_q(X^q)$. Nach 7.9(1) induziert die Inklusion $i : X^q \rightarrow X$ eine Surjektion $i_\# : H_q(X^q) \rightarrow H_q(X)$. Andererseits betrachten wir die lange exakte Sequenz des Paares (X^q, X^{q-1}) . Diese enthält den Abschnitt

$$\dots \rightarrow H_q(X^{q-1}) \rightarrow H_q(X^q) \xrightarrow{j_\#} H_q(X^q, X^{q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X^{q-1}) \rightarrow \dots,$$

wobei $j_\#$ durch die Inklusion $(X^q, \emptyset) \hookrightarrow (X^q, X^{q-1})$ induziert ist. Nach 7.9(2) ist $H_q(X^{q-1}) = 0$, also ist $j_\# : H_q(X^q) \rightarrow W_q(X)$ injektiv. Der Randoperator $\partial_q : W_q(X) \rightarrow W_{q-1}(X)$ ist gerade die Komposition $H_q(X^q, X^{q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X^{q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2})$, und wir haben gerade gezeigt, dass der zweite dieser Homomorphismen injektiv ist. Damit ist aber der Kern von ∂_q genau der Kern des Einhängungshomomorphismus $H_q(X^q, X^{q-1}) \rightarrow H_{q-1}(X^{q-1})$, also nach der exakten Sequenz von oben gerade das Bild von $j_\#$. Damit induziert $j_\#$ einen Isomorphismus zwischen $H_q(X^q)$ und den q -Zykeln im zellulären Komplex von X .

Um den Beweis abzuschließen zeigen wir noch, dass für ein Element $z \in H_q(X^q)$ das Element $j_\#(z)$ genau dann ein Rand im zellulären Komplex ist, wenn z im Kern von $i_\#$ liegt. Zunächst ist nach 7.9(1) der von der Inklusion $X^{q+1} \rightarrow X$ induzierte Homomorphismus $H_k(X^{q+1}) \rightarrow H_k(X)$ bijektiv für $k \leq q$ und surjektiv für $k = q+1$. Damit folgt aber direkt aus der langen exakten Sequenz des Paares (X, X^{q+1}) , dass $H_k(X, X^{q+1}) = 0$ für $k \leq q+1$ gilt. Insbesondere haben wir also $H_{q+1}(X, X^{q+1}) = 0$.

Setzen wir diese Information in die lange exakte Sequenz des Tripels (X, X^{q+1}, X^q) ein, so sehen wir, dass der von der Inklusion $(X^{q+1}, X^q) \hookrightarrow (X, X^q)$ induzierte Homomorphismus $H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) \rightarrow H_{q+1}(X, X^q)$ surjektiv ist. Diese Inklusion induziert

eine kommutative Leiter mit den exakten Sequenzen der beiden Paare als Zeilen. Insbesondere erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_{q+1}(X, X^q) & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & H_q(X^q) & \xrightarrow{i_{\#}} & H_q(X) \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \\ H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) & \xrightarrow{\delta} & H_q(X^q) & \xrightarrow{j_{\#}} & W_q(X) \end{array}$$

Nach Definition ist $\partial_{k+1} = j_{\#} \circ \delta$, also das Bild von ∂_{k+1} gerade $j_{\#}(\text{Im}(\delta))$. Da der linke senkrechte Homomorphismus im Diagramm surjektiv ist, ist $\text{Im}(\delta) = \text{Im}(\tilde{\delta}) = \text{Ker}(i_{\#})$, also $\text{Im}(\partial_{k+1}) = j_{\#}(\text{Ker}(i_{\#}))$. \square

BEISPIEL. Mit Hilfe dieses Resultates können wir die Homologiegruppen einiger CW-Komplexe direkt ohne jede Rechnung angeben:

(1) Betrachte den komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$. Nach Beispiel (6) von 4.15 besitzt $\mathbb{C}P^n$ eine CW-Zerlegung mit je einer Zelle in den Dimensionen $0, 2, 4, \dots, 2n$. Damit ist aber der zelluläre Komplex gegeben durch $W_k(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ für k gerade und $\leq 2n$ und 0 sonst. Insbesondere müssen alle Randoperatoren in diesem Komplex trivial sein, also ist auch $H_k(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ für $k = 0, 2, 4, \dots, 2n$ und Null sonst.

(2) Betrachte das Produkt $S^n \times S^n$ für $n \geq 2$. Die CW-Zerlegung von S^n mit einer 0-Zelle und einer n -Zelle induziert eine CW-Zerlegung von $S^n \times S^n$ mit einer 0-Zelle, 2 Zellen der Dimension n und einer Zelle der Dimension $2n$. Damit muss aber $H_k(S^n \times S^n) = \mathbb{Z}$ für $k = 0, 2n, \mathbb{Z}^2$ für $k = n$ und Null für alle anderen k gelten.

(3) Natürlich liefert der Satz auch sofort einige allgemeine Aussagen, etwa, dass für einen endlichen CW-Komplex jede Homologiegruppe endlich erzeugt ist, und zwar mit höchstens so vielen Erzeugern, wie es Zellen in dieser Dimension gibt.

7.11. Die Randoperatoren im zellulären Komplex. Um den zellulären Komplex allgemein zur Berechnung der singulären Homologie von CW-Komplexen zu benutzen, müssen wir noch die Randoperatoren des zellulären Komplexes besser beschreiben.

Zunächst fixieren wir einen Erzeuger z von $H_k(S^k) \cong \mathbb{Z}$. Nach der exakten Sequenz des Paares (B^{k+1}, S^k) ist der Einhängungshomomorphismus $H_{k+1}(B^{k+1}, S^k) \rightarrow H_k(S^k)$ ein Isomorphismus, also liefert z einen Erzeuger z_{k+1} von $H_{k+1}(B^{k+1}, S^k)$. Betrachten wir andererseits das Paar (B^k, S^{k-1}) . Nach 7.8 ist $H_k(B^k, S^{k-1}) \cong H_k(B^k/S^{k-1}, [S^{k-1}])$ und das ist isomorph zu $H_k(S^k)$, also erhalten wir automatisch auch einen Erzeuger z_k von $H_k(B^k, S^{k-1})$.

Sei nun a eine $k+1$ -Zelle und b eine k -Zelle von X , und seien $F_a : (B^{k+1}, S^k) \rightarrow (X^{k+1}, X^k)$ und $F_b : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (X^k, X^{k-1})$ charakteristische Abbildungen für die Zellen. Dann definieren wir eine stetige Funktion $\phi_b^a : S^k \rightarrow S^k$ wie folgt: Zunächst schränken wir F_a auf S^k ein und erhalten damit gerade die Klebeabbildung $f_a : S^k \rightarrow X^k$ der Zelle a . Dann sei $p_b : X^k \rightarrow X^k/(X^k \setminus b)$ die kanonische Projektion. Schließlich kann man die charakteristische Abbildung F_b der Zelle b auch als relativen Homöomorphismus zwischen (B^k, S^{k-1}) und $(X^k, X^k \setminus b)$ betrachten. Damit induziert sie aber einen Homöomorphismus $\bar{F}_b : X^k/(X^k \setminus b) \rightarrow B^k/S^{k-1} \cong S^k$. Wir definieren $\phi_b^a := (\bar{F}_b)^{-1} \circ p_b \circ f_a$.

Klarerweise kennen wir den Randoperator $\partial : W_{k+1}(X) \rightarrow W_k(X)$ vollständig, wenn wir $\partial((F_a)_{\#}(z_{k+1}))$ angeben können, wobei z_{k+1} der oben angegebene Erzeuger von $H_{k+1}(B^{k+1}, S^k)$ ist (siehe 7.9). Wir behaupten, dass die Gleichung

$$\partial((F_a)_{\#}(z_{k+1})) = \sum_b \text{deg}(\phi_b^a)(F_b)_{\#}(z_k)$$

gilt, wobei $\deg(\phi_b^a)$ den Abbildungsgrad aus 6.14 bezeichnet. Man beachte, dass das Bild $f_a(S^k)$ nach dem Axiom C für CW-Komplexe nur endlich viele Zellen trifft, also ist das tatsächlich eine endliche Summe.

Zunächst erinnern wir uns, dass der Randoperator ∂ die Komposition des Einhängungshomomorphismus $\delta : H_{k+1}(X^{k+1}, X^k) \rightarrow H_k(X^k)$ aus der langen exakten Sequenz des Paares (X^{k+1}, X^k) mit dem Homomorphismus $j_\# : H_k(X^k) \rightarrow H_k(X^k, X^{k-1})$ ist, der von der Inklusion $(X^k, \emptyset) \hookrightarrow (X^k, X^{k-1})$ induziert wird. Aus der Natürlichkeit der langen exakten Sequenz von Paaren folgt nun sofort, dass $\delta((F_a)_\#(z_{k+1})) = (f_a)_\#(z)$, wobei z der oben gewählte Erzeuger von $H_k(S^k)$ ist.

Betrachten wir andererseits die Inklusion $(X^k, X^{k-1}) \hookrightarrow (X^k, X^k \setminus b)$ und den induzierten Homomorphismus $H_k(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_k(X^k, X^k \setminus b)$. Diesen kann man noch mit dem von der Projektion induzierten Isomorphismus $H_k(X^k, X^k \setminus b) \rightarrow H_k(X^k/(X^k \setminus b))$ komponieren. Dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_k(B^k, S^{k-1}) & \xrightarrow{(F_b)_\#} & H_k(X^k, X^{k-1}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ H_k(S^k) & \xrightarrow{(\bar{F}_b)_\#} & H_k(X^k/(X^k \setminus b)) \end{array}$$

Damit sehen wir aber, dass $(F_b)_\#(z_k)$ unter dem rechten Homomorphismus in diesem Diagramm gerade auf $(\bar{F}_b)_\#(z)$ abgebildet wird. Ist andererseits β eine andere k -Zelle mit einer charakteristischen Abbildung $F_\beta : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (X^k, X^{k-1})$, dann ist $F_\beta(B^k)$ disjunkt zur Zelle b , also geht $(F_\beta)_\#(z_k)$ unter diesem Homomorphismus auf 0. Nun ist aber die Komposition der Abbildungen

$$H_k(X^k) \xrightarrow{j_\#} H_k(X^k, X^{k-1}) \longrightarrow H_k(X^k/(X^k \setminus b))$$

nach Konstruktion gerade $(p_b)_\#$, also folgt das Resultat aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_k(S^k) & \xrightarrow{(f_a)_\#} & H_k(X^k) \\ \downarrow (\phi_b^a)_\# & & \downarrow (p_b)_\# \\ H_k(S^k) & \xrightarrow{(\bar{F}_b)_\#} & H_k(X^k/(X^k \setminus b)), \end{array}$$

sowie daraus, dass man jedes Element von $H_k(X^k, X^{k-1})$ eindeutig als Linearkombination der Form $\sum_\beta n_\beta (F_\beta)_\#(z_k)$ schreiben kann.

Im Fall $k = 0$ ist die Beschreibung einfacher. Hier sind die charakteristischen Abbildungen $F : (I, \{0, 1\}) \rightarrow (X^1, X^0)$ und der Randoperator hat Werte in $H_0(X^0)$. Man verifiziert leicht direkt, dass $\partial(F_\#(z)) = F(1) - F(0)$ für eine geeignete Wahl eines Erzeugers $z \in H_1(I, \{0, 1\})$ gilt.

7.12. Funktorielle Eigenschaften der zellulären Homologie. Die zelluläre Homologie ist nicht funktoriell für allgemeine stetige Funktionen zwischen CW-Komplexen, sondern nur für zelluläre Abbildungen: Seien X und Y CW-Komplexe und sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und zellulär. Nach Definition bedeutet das, dass $f(X^k) \subset Y^k$ für jedes $k \geq 0$ gilt. f respektiert also die Skelette. Damit induziert f natürlich für jedes $k \geq 0$ eine stetige Abbildung $(X^k, X^{k-1}) \rightarrow (Y^k, Y^{k-1})$ von Paaren, die wiederum einen Homomorphismus $W_k(X) = H_k(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_k(Y^k, Y^{k-1}) = W_k(Y)$ induziert. Diesen Homomorphismus bezeichnen wir mit $W_k(f)$.

Der Randoperator $\partial : W_k(X) \rightarrow W_{k-1}(X)$ ist nach Definition der Einhängungshomomorphismus aus der langen exakten Sequenz des Tripels (X^k, X^{k-1}, X^{k-2}) . Man

kann f auch als stetige Abbildung $(X^k, X^{k-1}, X^{k-2}) \rightarrow (Y^k, Y^{k-1}, Y^{k-2})$ von Tripeln betrachten, also folgt $\partial \circ W_k(f) = W_{k-1}(f) \circ \partial$ aus der Natürlichkeit der langen exakten Sequenz eines Tripels. Somit ist $W(f) : W(X) \rightarrow W(Y)$ eine Komplexabbildung und induziert Homomorphismen in den zellulären Homologiegruppen.

Erinnern wir uns schließlich noch an den Beweis von Satz 7.10, in dem wir gesehen haben, dass die zelluläre Homologie mit der singulären Homologie übereinstimmt. Wir hatten die Inklusionen $i : X^k \hookrightarrow X$ und $j : (X^k, \emptyset) \hookrightarrow (X^k, X^{k-1})$ und die induzierten Homomorphismen $i_{\#} : H_k(X^k) \rightarrow H_k(X)$ und $j_{\#} : H_k(X^k) \rightarrow W_k(X)$. Dann haben wir gezeigt, dass $i_{\#}$ injektiv ist, und $j_{\#}$ eine Bijektion zwischen $H_k(X^k)$ und dem Kern $\text{Ker}(\partial)$ induziert und dass $\text{Im}(\partial) = j_{\#}(\text{Ker } i_{\#})$ gilt. Nun erhalten wir aber offensichtlich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_k(X) & \xleftarrow{i_{\#}} & H_k(X^k) & \xrightarrow{j_{\#}} & W_k(X) \\ \downarrow H_k(f) & & \downarrow H_k(f|_{X^k}) & & \downarrow W_k(f) \\ H_k(Y) & \xleftarrow{i_{\#}} & H_k(Y^k) & \xrightarrow{j_{\#}} & W_k(Y) \end{array}$$

Damit stimmt aber, modulo des in 7.10 konstruierten Isomorphismus zwischen singulärer und zellulärer Homologie, der Homomorphismus $H_k(f)$ mit dem von $W_k(f)$ induzierten Homomorphismus in der zellulären Homologie überein.

7.13. Beispiel: Homologie von $\mathbb{R}P^n$. Betrachten wir die CW-Zerlegung von S^n mit je zwei Zellen in den Dimensionen $0, 1, \dots, n$ aus 4.15(3). Man beginnt also mit zwei Punkten, die schon die S^0 sind, klebt daran zwei 1-Zellen und erhält die S^1 , daran je eine 2-Zelle als obere und untere Hemisphäre um die S^2 zu erhalten, und so weiter. Dann bekommt man eine CW-Zerlegung von S^n sodass das k -Skelett gerade S^k ist. Betrachten wir außerdem auf $\mathbb{R}P^n$ die CW-Zerlegung aus 4.15(5) mit je einer Zelle in den Dimensionen $0, 1, \dots, n$, dann ist die Quotientenabbildung $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ eine zelluläre Abbildung.

Wir bezeichnen nun die beiden k -Zellen in unserer CW-Zerlegung von S^n mit e_N^k und e_S^k . Sei F^k eine charakteristische Abbildung für e_N^k . Betrachten wir weiters die Antipodalabbildung $A : S^n \rightarrow S^n$. Diese ist für die gewählte CW-Zerlegung von S^n zellulär. Klarerweise ist $A \circ F^k$ eine charakteristische Abbildung für die k -Zelle e_S^k , und nach der Konstruktion der CW-Zerlegung auf $\mathbb{R}P^n$ in 4.15(5) ist $p \circ F^k$ eine charakteristische Abbildung für die eine k -Zelle e^k in der gewählten CW-Zerlegung von $\mathbb{R}P^n$. Damit haben wir zusammenpassende charakteristische Abbildungen für alle auftretenden Zellen gefunden.

Ist nun $z_k \in H_k(B^k, S^{k-1})$ ein Erzeuger, dann ist für die gewählte CW-Zerlegung $W_k(S^n) = H_k(S^k, S^{k-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, wobei man als Erzeuger $F_{\#}^k(z_k)$ und $(A \circ F^k)_{\#}(z_k)$ wählen kann. Weiters ist $W_k(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$ mit Erzeuger $(p \circ F^k)_{\#}(z_k)$. Wir wollen als nächstes die Wirkung der Randoperatoren berechnen. Wir wissen, dass $\partial = j_{\#} \circ \delta$ gilt, wobei $\delta : H_k(S^k, S^{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(S^{k-1})$ der Einhängungshomomorphismus aus der langen exakten Sequenz des Paares (S^k, S^{k-1}) und $j : (S^{k-1}, \emptyset) \hookrightarrow (S^{k-1}, S^{k-2})$ die Inklusion ist. Wir können die Antipodalabbildung als Abbildung $(S^k, S^{k-1}) \rightarrow (S^k, S^{k-1})$ auffassen. Wegen der Natürlichkeit der exakten Sequenz eines Paares ist $\delta \circ A_{\#} = A_{\#} \circ \delta$. Damit ist aber

$$\partial((A \circ F^k)_{\#}(z_k)) = (j_{\#} \circ \delta \circ A_{\#} \circ F_{\#}^k)(z_k) = (j_{\#} \circ A_{\#} \circ \delta \circ F_{\#}^k)(z_k).$$

Im letzten Term steht aber $A_{\#} : H_{k-1}(S^{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(S^{k-1})$, und wir wissen aus Teil (2) von Proposition 6.14, dass dort $A_{\#}$ durch Multiplikation mit $(-1)^k$ wirkt. Damit ist aber offensichtlich $\partial(F_{\#}^k(z_k) - (-1)^k(A \circ F^k)_{\#}(z_k)) = 0$.

Wir behaupten, dass dieses Element den Kern von $\partial : W_k(S^n) \rightarrow W_{k-1}(S^n)$ erzeugt. Man kann jedes Element in $W_k(S^n)$ als $n_1 F_{\#}^k(z_k) + n_2 (A \circ F^k)_{\#}(z_k)$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ schreiben. Nach der obigen Rechnung erhält man durch Anwenden von ∂ darauf gerade $(n_1 + (-1)^k n_2) \partial(F_{\#}^k(z_k))$. Damit sehen wir zunächst, dass für $k < n$ das Bild von ∂ isomorph zu \mathbb{Z} ist also insbesondere ∂ nicht surjektiv ist (weil $W_k(S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). Wäre $\partial(F_{\#}^k(z_k)) = 0$, dann wäre $\partial : W_k(S^n) \rightarrow W_{k-1}(S^n)$ der Nullhomomorphismus. Da aber $\partial : W_{k+1}(S^n) \rightarrow W_k(S^n)$ nicht surjektiv (und für $k = n$ trivial) ist, ist das wegen $H_k(S^n) = 0$ (und $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$) unmöglich. Damit besteht aber der Kern von ∂ genau aus jenen Elementen, bei denen in der obigen Darstellung $n_1 + (-1)^k n_2 = 0$ gilt, und die Behauptung folgt.

Wir können noch unsere Kenntnis der Homologiegruppen der Sphären benutzen. Da $\text{Im}(\partial) \subset \text{Ker}(\partial)$ muss $\partial(F_{\#}^{k+1}(z_{k+1}))$ ein Vielfaches von $F_{\#}^k(z_k) - (-1)^k (A \circ F^k)_{\#}(z_k)$ sein, und da $H_k(S^n) = 0$ für $0 < k < n$ gilt, muss der Faktor 1 oder -1 sein. Für $k = 0$ ist das offensichtlich.

Nun betrachten wir die Abbildung $W_k(p) : W_k(S^n) \rightarrow W_k(\mathbb{R}P^n)$. Von oben wissen wir, dass $(p \circ F^k)_{\#}(z_k) = W_k(p)(F_{\#}^k(z_k))$ die Gruppe $W_k(\mathbb{R}P^n)$ erzeugt, also ist $W_k(p)$ surjektiv. Weiters ist nach Definition $p \circ A = p$, also ist

$$W_k(p)((A \circ F^k)_{\#}(z_k)) = W_k(p)(F_{\#}^k(z_k)).$$

Dann gilt aber

$$\begin{aligned} \partial(W_k(p)(F_{\#}^k(z_k))) &= W_{k-1}(p)(\partial(F_{\#}^k(z_k))) = \\ &= W_{k-1}(p)(\pm(F_{\#}^{k-1}(z_{k-1}) - (-1)^{k-1}(A \circ F^{k-1})_{\#}(z_{k-1}))) = \\ &= \pm(1 - (-1)^{k-1})(p \circ F^{k-1})_{\#}(z_{k-1}). \end{aligned}$$

Somit ist aber $\partial : W_k(\mathbb{R}P^n) \rightarrow W_{k-1}(\mathbb{R}P^n)$ für ungerades k identisch Null und für gerades k Multiplikation mit 2 oder -2 . Jedenfalls erhalten wir

$$H_k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, k = n \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}_2 & k < n, k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

7.14. Die Euler–Charakteristik. Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch die Euler–Charakteristik besprechen. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff des Ranges einer abelschen Gruppe. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen ist jede solche Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}$, wobei die p_i eindeutig bestimmte Primzahlen sind. Die Zahl r heißt der *Rang* der abelschen Gruppe G . Eine andere einfache Möglichkeit den Rang zu definieren ist folgende: Man betrachtet das Tensorprodukt (von abelschen Gruppen) $G \otimes \mathbb{R}$, siehe 8.6. Das ist dann ein endlich erzeugter Modul über dem Ring \mathbb{R} , also ein endlichdimensionaler Vektorraum, und der Rang von G ist einfach die Dimension dieses Vektorraumes. Ist H eine Untergruppe von G , dann ist der Rang des Quotienten G/H gleich der Differenz der Ränge von G und H .

Sei nun X ein topologischer Raum, sodass jede Homologiegruppe von X endlich erzeugt ist. Dann bezeichnet man den Rang der q -ten Homologiegruppe $H_q(X)$ mit $b_q(X)$, und nennt das die q -te *Betti–Zahl* von X . Hat nun X weiters die Eigenschaft,

dass nur endlich viele Betti-Zahlen ungleich Null sind, dann definiert man die *Euler-Charakteristik* $\chi(X) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i(X)$ als die alternierende Summe der Betti-Zahlen. Offensichtlich ist diese Bedingung für endliche CW-Komplexe automatisch erfüllt, weil für sie die zellulären Homologiegruppen (die offensichtlich endlich erzeugt und über der Dimension trivial sind) mit den singulären Homologiegruppen übereinstimmen. Damit ist die Euler-Charakteristik für jeden endlichen CW-Komplex definiert.

Wir wissen bereits, dass kontrahierbare Räume Euler-Charakteristik Eins haben. Aus unserer Berechnung von Homologiegruppen folgt weiters $\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 2 & n \text{ gerade} \end{cases}$,

$$\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1 \text{ und } \chi(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

PROPOSITION. *Ist X ein endlicher CW-Komplex mit genau α_i Zellen der Dimension i , dann ist $\chi(X) = \sum_i (-1)^i \alpha_i$. Die Euler-Charakteristik stimmt also mit der alternierende Summe der Anzahlen der Zellen überein.*

BEWEIS. Wir können die Homologie aus dem zellulären Komplex berechnen. Nach Definition ist der Rang der Gruppe $W_k(X)$ gerade α_k , und die Betti-Zahl $b_k(X)$ ist der Rang von $H_k(X) = \text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})$, also gerade die Differenz der Ränge. Nun ist aber $W_k(X) / \text{Ker}(\partial_k) \cong \text{Im}(\partial_k)$, also ist der Rang von $W_k(X)$ gleich der Summe der Ränge von $\text{Ker}(\partial_k)$ und $\text{Im}(\partial_k)$. Jetzt rechnen wir:

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \sum_i (-1)^i b_i(X) = \sum_i (-1)^i (\text{Rang}(\text{Ker}(\partial_i)) - \text{Rang}(\text{Im}(\partial_{i+1}))) = \\ &= \sum_i (-1)^i \text{Rang}(\text{Ker}(\partial_i)) + \sum_i (-1)^{i+1} \text{Rang}(\text{Im}(\partial_{i+1})) = \\ &= \sum_i (-1)^i (\text{Rang}(\text{Ker}(\partial_i)) + \text{Rang}(\text{Im}(\partial_i))) = \sum_i (-1)^i \alpha_i \end{aligned}$$

□

Damit sehen wir, dass, obwohl es CW-Zerlegungen eines Raumes mit verschiedenen Zellenzahlen geben kann, die alternierende Summe über die Zahlen der Zellen immer die gleiche sein muss. Insbesondere geben die Simplizes eines Simplicialkomplexes eine CW-Zerlegung. Also erhält man eine Aussage über die alternierende Summe über die Anzahl der Simplizes in jeder Dimension. Wendet man das auf den Spezialfall der S^2 an, dann erhält man den klassischen Eulerschen Polyedersatz. Dazu muss man bedenken, dass der Rand einer konvexen Teilmenge des \mathbb{R}^3 mit nichtleerem Inneren nach Proposition 1.4 homöomorph zu S^2 ist.

Exkurs: Vermischtes aus der Homologietheorie

In diesem Kapitel werden wir einerseits einige weitere Anwendungen der Homologietheorie, insbesondere den Jordan'schen Kurvensatz besprechen, andererseits werden wir einige weiterführende Konzepte der Homologietheorie skizzieren.

Der Jordan'sche Kurvensatz

Wir wollen uns hier mit Resultaten beschäftigen, die sich um die Frage gruppieren, ob man den \mathbb{R}^n bzw. die Sphäre S^n durch eingebettete Bälle oder Sphären niedrigerer Dimension in zwei Bogenzusammenhangskomponenten zerlegen kann. Um diese Frage zu beantworten, genügt es klarerweise, die nullte Homologiegruppe des Komplements zu berechnen. Wir werden sogar alle Homologiegruppen des Komplements berechnen.

8.1. Entfernt man aus der Sphäre S^n einen Punkt, dann erhält man den kontrahierbaren Raum \mathbb{R}^n . Insbesondere hat also das Komplement eines Punktes in S^n trivial Homologie. Der erste Schritt in Richtung des Jordan'schen Kurvensatzes ist, dieses Resultat auf Teilmengen von S^n zu verallgemeinern, die homöomorph zu B^r sind.

SATZ. Sei $B \subset S^n$ eine Teilmenge, die homöomorph zu B^r ist. Dann ist $H_0(S^n \setminus B) = \mathbb{Z}$ und $H_q(S^n \setminus B) = 0$ für $q > 0$. Insbesondere ist $S^n \setminus B$ bogenzusammenhängend.

BEWEIS. Mittels Induktion nach r . Für $r = 0$ ist B ein Punkt, und damit $S^n \setminus B \cong \mathbb{R}^n$, also gilt der Satz. Nehmen wir also $r \geq 1$ an und dass der Satz für Bälle der Dimension $r - 1$ gilt. Sei $z \in S_q(S^n \setminus B)$ ein Zykel im Fall $q > 0$ und ein Element der Form $x - y$ für $x, y \in S^n \setminus B$ im Fall $q = 0$. Wir müssen zeigen, dass z ein Rand ist.

Sei $f : I^r = I^{r-1} \times I \rightarrow B$ ein Homöomorphismus, $B_t := f(I^{r-1} \times \{t\}) \subset S^n$ für $0 \leq t \leq 1$. Da $S^n \setminus B \subset S^n \setminus B_t$ für alle t gilt, gibt es nach Induktionsvoraussetzung für jedes t eine Kette $b_t \in S_{q+1}(S^n \setminus B_t)$ mit $d(b_t) = z$.

Für fixes t kann man b_t als $\sum n_i \sigma_i$ für endlich viele singuläre Simplizes σ_i in $S^n \setminus B_t$ schreiben. Da die Vereinigung der Bilder dieser Simplizes kompakt ist und B_t nicht trifft, gibt es eine offene Umgebung U_t von B_t , die ebenfalls nicht von dieser Vereinigung getroffen wird. Das Urbild $f^{-1}(U_t) \subset I^{r-1} \times I$ ist offen und enthält $I^{r-1} \times \{t\}$, also gibt es eine Umgebung V_t von t in I , sodass $I^{r-1} \times V_t \subset f^{-1}(U_t)$. Nun wählen wir eine natürliche Zahl m so groß, dass es für jedes $j = 1, \dots, m$ im Intervall $I_j := [(j-1)/m, j/m]$ ein t_j gibt, sodass $I_j \subset V_{t_j}$ gilt. Dann setzen wir $Q_j := f(I^{r-1} \times I_j)$. Nach Konstruktion liegt das in $U_{t_j} \subset B$. Dann ist aber die Kette b_{t_j} eine Linearkombination von singulären Simplizes, deren Bild Q_j nicht trifft, kann also als Kette in $S_{q+1}(S^n \setminus Q_j)$ betrachtet werden.

Somit haben wir B als Vereinigung von endlich vielen homöomorphen Bildern Q_j von r -Bällen geschrieben, und für jedes j eine Kette $b_j \in S_{q+1}(S^n \setminus Q_j)$ gefunden, die als Rand z hat. Nun betrachten wir $X_1 := S^n \setminus Q_1$ und $X_2 := S^n \setminus Q_2$. Dann sind die X_i offen in S^n , also können wir die Mayer-Vietoris Sequenz zur Überdeckung $\{X_1, X_2\}$ von $X_1 \cup X_2$ betrachten. Diese enthält den Abschnitt

$$H_{q+1}(X_1 \cup X_2) \rightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_q(X_1) \oplus H_q(X_2).$$

Nun ist $X_1 \cup X_2$ gerade $S^n \setminus B_{1/m}$, also ist die linke Gruppe nach Induktionsvoraussetzung Null, und damit ist der Homomorphismus $H_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$, der ja von der Inklusion von $X_1 \cap X_2$ nach X_1 bzw. X_2 induziert wird, injektiv. Die Homologieklassse $[z] \in H_q(X_1 \cap X_2)$ wird unter diesem Homomorphismus auf 0 abgebildet, weil z ja Rand von b_1 und b_2 ist. Damit gibt es aber eine Kette in $S_{q+1}(S^n \setminus (Q_1 \cup Q_2))$ die z als Rand hat. Nun kann man dieses Argument einfach mit $S^n \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ und $S^n \setminus Q_3$ wiederholen, und so weiter. \square

KOROLLAR. Sei $n \geq 2$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu B^r . Dann ist $H_q(\mathbb{R}^n \setminus B) \cong \mathbb{Z}$ für $q = 0, n-1$ und Null für alle anderen q . Insbesondere ist $\mathbb{R}^n \setminus B$ bogenzusammenhängend.

BEWEIS. Die stereographische Projektion liefert einen Homöomorphismus zwischen $S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $N \in S^n$ den "Nordpol" bezeichnet. Bezeichnen wir mit $A \subset S^n$ das Urbild von B unter diesem Homöomorphismus, dann ist $N \notin A$. Damit ist aber $H_q(\mathbb{R}^n \setminus B) \cong H_q(S^n \setminus (A \cup N))$. Betrachten wir den Einhängungshomomorphismus

$$\partial : H_{q+1}(S^n \setminus A, S^n \setminus (A \cup N)) \rightarrow H_q(S^n \setminus (A \cup N))$$

aus der langen exakten Sequenz des Paares $(S^n \setminus A, S^n \setminus (A \cup N))$. Für $q > 0$ ist dieser nach dem Satz und der Exaktheit der Sequenz des Paares ein Isomorphismus. Nun ist aber nach dem Excisionssatz 7.4 die Homologie $H_{q+1}(S^n \setminus A, S^n \setminus (A \cup N))$ isomorph zu $H_{q+1}(S^n, S^n \setminus N)$, also zur lokalen Homologie von S^n bei N . Da N eine offene Umgebung hat, die homöomorph zu \mathbb{R}^n ist, ist diese Homologie \mathbb{Z} für $q = n-1$ und 0 für $q \neq n-1$. Damit sehen wir, dass $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus B) \cong \mathbb{Z}$ und $H_q(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$ für $q \neq 0, n-1$ gelten muss. Im Fall $q = 0$ ist die lokale Homologie trivial, weil wir $n-1 > 0$ angenommen haben. Damit ist aber ∂ in diesem Fall der Nullhomomorphismus, und daher nach der Exaktheit der Sequenz des Paares $i_{\#} : H_0(S^n \setminus (A \cup N)) \rightarrow H_0(S^n \setminus A)$ injektiv. Nach dem Satz ist aber die rechte Gruppe isomorph zu \mathbb{Z} , also muss das auch für $H_0(S^n \setminus (A \cup N))$ gelten. \square

8.2. Als nächstes behandeln wir den Fall von Teilmengen von S^n die homöomorph zu S^r für $0 \leq r < n$ sind:

SATZ. Sei $S \subset S^n$ homöomorph zu S^r , wobei $n \geq 2$ und $0 \leq r < n$ gilt. Dann hat $H(S^n \setminus S)$ je einen freien Erzeuger in den Dimensionen 0 und $n-r-1$. Für $r < n-1$ ist daher $H_0(S^n \setminus S) \cong H_{n-r-1}(S^n \setminus S) \cong \mathbb{Z}$ und alle anderen Homologiegruppen sind trivial. Für $r = n-1$ ist $H_0(S^n \setminus S) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ und alle anderen Homologiegruppen sind trivial.

BEWEIS. Durch Induktion nach r . Für $r = 0$ besteht S aus genau zwei Punkten und damit ist $S^n \setminus S$ homotopieäquivalent zu S^{n-1} , also stimmt der Satz. Nehmen wir also $r \geq 1$ an, und dass der Satz für $r-1$ -Sphären bereits bewiesen ist. Sei $f : S^r \rightarrow S$ ein Homöomorphismus. Seien B_+ und B_- die Bilder der oberen bzw. unteren Hemisphäre unter f . Dann ist B_{\pm} homöomorph zu B^r und $T := B_+ \cap B_-$ ist homöomorph zu S^{r-1} . Aus der Mayer-Vietoris Sequenz zur Überdeckung $\{S^n \setminus B_+, S^n \setminus B_-\}$ von $S^n \setminus T$ und Satz 8.1 folgt sofort, dass $H_{q+1}(S^n \setminus S) \cong H_q(S^n \setminus T)$ für $q > 0$ gilt.

Damit bleibt nur noch die Aussage über $H_0(S^n \setminus S)$ zu beweisen. Die Mayer-Vietoris Sequenz liefert eine exakte Sequenz der Form

$$H_1(S^n \setminus T) \rightarrow H_0(S^n \setminus S) \rightarrow H_0(S^n \setminus B_+) \oplus H_0(S^n \setminus B_-) \rightarrow H_0(S^n \setminus T) \rightarrow 0$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind $S^n \setminus B_{\pm}$ und $S^n \setminus T$ bogenzusammenhängend, also werden ihre nullten Homologien von einem beliebigen Punkt $x \in S^n \setminus S$ erzeugt. Damit

ist der letzte Homomorphismus in der Sequenz einfach der Homomorphismus $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, der durch $(m, n) \mapsto m + n$ gegeben ist. Somit erhalten wir aber eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_1(S^n \setminus T) \rightarrow H_0(S^n \setminus S) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

und damit folgt das Resultat. □

Genau wie beim Übergang von Satz 8.1 auf Korollar 8.1 erhält man nun

KOROLLAR. *Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^r , wobei $n \geq 2$ und $0 \leq r < n$ gilt. Dann hat $H(\mathbb{R}^n \setminus S)$ je einen freien Erzeuger in den Dimensionen $0, n-1$ und $n-r-1$. Für $r \neq n-1$ sind also H_0, H_{n-1} und H_{n-r-1} isomorph zu \mathbb{Z} und alle anderen Homologiegruppen trivial und für $r = n-1$ ist H_0 isomorph zu $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ und H_{n-1} isomorph zu \mathbb{Z} , und alle anderen Homologiegruppen sind trivial.*

Damit sehen wir, dass eine eingebettete $n-1$ -Sphäre den \mathbb{R}^n bzw. die Sphäre S^n in genau zwei Bogenkomponenten zerlegt. Das ist für $n = 2$ der klassische Jordan'sche Kurvensatz und für $n > 2$ der sogenannte Brouwer'sche Separationssatz.

8.3. Für den Fall einer eingebetteten $n-1$ -Sphäre in S^n kann man noch genauere Aussagen über die Bogenkomponenten des Komplements machen:

SATZ. *Sei $n \geq 2$ und $S \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^{n-1} , und seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ die beiden Bogenkomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus S$. Dann sind U und V offen in \mathbb{R}^n und S ist der Rand von U und V . Der Satz gilt analog, wenn man \mathbb{R}^n durch S^n ersetzt.*

BEWEIS. Das Komplement von S ist offen im ganzen Raum, also wie dieser lokal bogenzusammenhängend. Daher sind die Bogenkomponenten U und V offen in diesem Komplement, also auch im ganzen Raum. Nun sei \dot{U} der Rand von U . Dann ist $\dot{U} \cap U = \emptyset$, weil U offen ist. Andererseits ist $\mathbb{R}^n \setminus V$ abgeschlossen, also muss $\dot{U} \subset S$ gelten. Analog gilt natürlich auch $\dot{V} \subset S$.

Wir behaupten nun, dass $S \subset \dot{U}$ gilt. Sei dazu $x \in S$ und sei W eine offene Umgebung von x in \mathbb{R}^n . Dann ist $W \cap S$ eine offene Umgebung von x in S , also kann man S als $B_+ \cup B_-$ schreiben, wobei B_\pm homöomorph zu B^{n-1} ist und $B_+ \subset S \cap W$ gilt. Nach Korollar 8.1 ist $\mathbb{R}^n \setminus B_-$ bogenzusammenhängend, also gibt es einen Weg $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus B_-$, der in U beginnt und in V endet. Dann muss das Bild von c aber einen Punkt von \dot{U} enthalten, und dieser muss wiederum nach Konstruktion in $B_+ \subset S \cap W$ liegen. Damit enthält aber jede offene Umgebung von x einen Punkt von \dot{U} , und da \dot{U} abgeschlossen ist, gilt $x \in \dot{U}$ und somit $S \subset \dot{U}$. Analog gilt $S \subset \dot{V}$. Damit haben wir aber $\dot{U} = \dot{V} = S$. □

BEMERKUNG. (1) Die Aussagen des letzten Satzes klingen von vorne herein sehr plausibel. Um zu sehen, dass sie nicht so offensichtlich sind, betrachte man die Teilmenge $S^1 \cup I \subset \mathbb{R}^2$, die natürlich auch stetiges Bild der S^1 in \mathbb{R}^2 ist. Diese teilt den \mathbb{R}^2 in zwei Komponenten, ist aber nicht Rand der äußeren Komponente.

(2) Betrachtet man homöomorphe Bilder von S^{n-1} in \mathbb{R}^n dann ist genau eine der beiden Komponenten des Komplements beschränkt, also gibt es in diesem Fall eine innere und eine äußere Komponente.

(3) Im Fall $n = 2$ gibt es ein wesentlich stärkeres Resultat, nämlich den Satz von Schönflies: Ist $S \subset S^2$ homöomorph zu S^1 , dann gibt es einen Homöomorphismus $f : S^2 \rightarrow S^2$, der S auf den Äquator abbildet. Insbesondere sind beide Komponenten des Komplements in diesem Fall homöomorph zu D^2 , also kontrahierbar. Für ein homöomorphes Bild $S \subset \mathbb{R}^2$ von S^1 gibt es einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, der S auf den Einheitskreis abbildet. In diesem Fall ist also die innere Komponente des Komplements homöomorph zu D^2 und die äußere Komponente homöomorph zu $D^2 \setminus 0$.

In höheren Dimensionen gilt kein analoges Resultat. Tatsächlich gibt es eine Einbettung $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, sodass die äußere Komponente des Komplements nicht einfach zusammenhängend ist. Eine (künstlerische) Darstellung dieser Einbettung findet sich auf Seite 2 des Buches [F–F–G].

8.4. Schließlich können wir den Brouwer'schen Separationssatz noch benutzen um die Resultate über Teilmengen des \mathbb{R}^n aus 7.7 nochmals deutlich zu verstärken. Wir können nämlich beweisen das für Teilmengen von \mathbb{R}^n offen in \mathbb{R}^n zu sein eine topologische Eigenschaft ist!

SATZ (Invarianz der Domäne). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und sei $h : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus. Ist U offen in \mathbb{R}^n , dann ist auch V offen in \mathbb{R}^n .*

BEWEIS. Sei $y \in V$ beliebig und sei $x := h^{-1}(y)$. Da U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass der abgeschlossene ϵ -Ball B um x noch ganz in U liegt. Sei S der Rand dieses Balls. Die Teilmenge $\mathbb{R}^n \setminus h(B)$ ist bogenzusammenhängend nach Korollar 8.1 und $h(B) \setminus h(S)$ ist homöomorph zu D^n , also ebenfalls bogenzusammenhängend. Außerdem sind diese beiden Mengen disjunkt, und ihre Vereinigung ist $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$ also müssen sie gerade die beiden Bogenkomponenten dieses Raumes sein. Insbesondere ist damit nach 8.3 $h(B) \setminus h(S)$ offen, also eine offene Umgebung von y die nach Konstruktion noch in V liegt. Damit ist V offen. \square

BEMERKUNG. Diese Resultat zeigt tatsächlich eine tief liegende topologische Eigenschaft des \mathbb{R}^n . Betrachten wir zum Beispiel das Einheitsintervall I und die Teilmengen $U = (0, 1/2]$ und $V = (1/2, 1]$, dann ist $x \mapsto x + 1/2$ ein Homöomorphismus zwischen U und V , V ist offen in I , U aber nicht.

KOROLLAR. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und sei $h : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus. Dann bildet h das Innere U° homöomorph auf das Innere V° und $U \cap \dot{U}$ homöomorph auf $V \cap \dot{V}$ ab.*

BEWEIS. Nach dem Satz ist $h(U^\circ)$ offen, also $h(U^\circ) \subset V^\circ$. Analog ist aber $h^{-1}(V^\circ) \subset U^\circ$, also ist $h(U^\circ) = V^\circ$. Damit ist aber $h|_{U^\circ} : U^\circ \rightarrow V^\circ$ ein Homöomorphismus. Andererseits ist $U \cap \dot{U} = U \setminus U^\circ$, also folgt das Resultat. \square

Homologie mit Koeffizienten

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, wie man Homologiegruppen mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe definieren kann. Es zeigt sich, dass man mit algebraischen Methoden die Homologiegruppen mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe aus den Homologiegruppen mit Koeffizienten in \mathbb{Z} berechnen kann. Andererseits kann man zum Beispiel für glatte Mannigfaltigkeiten die Homologiegruppen mit Koeffizienten in \mathbb{R} mittels Differentialformen berechnen (de-Rham Homologie), was oft wesentlich leichter ist, als die singulären Homologiegruppen direkt zu berechnen.

8.5. In 6.6 haben wir den singulären Komplex $S_*(X)$ eines topologischen Raumes X definiert, indem wir für jedes $q \in \mathbb{N}$ die Kettengruppe $S_q(X)$ als die freie abelsche Gruppe definiert haben, die von allen singulären q -Simplizes erzeugt wird. Somit ist $S_q(X)$ gerade die Menge aller formalen Linearkombinationen von singulären Simplizes mit Koeffizienten in \mathbb{Z} . Ist nun G eine beliebige abelsche Gruppe, dann können wir analog $S_q(X; G)$ als die Menge aller formalen Linearkombinationen von singulären Simplizes mit Koeffizienten in G betrachten.

Als grundlegendes Beispiel sollte man den Fall $G = \mathbb{R}$ (oder allgemeiner $G = \mathbb{K}$, ein Körper der Charakteristik Null) im Auge behalten. Nach Definition ist $S_q(X; \mathbb{K})$ gerade der freie \mathbb{K} -Vektorraum, der von allen singulären q -Simplizes erzeugt wird.

Genau wie in 6.6 erhalten wir den Operator $d : S_q(X; G) \rightarrow S_{q-1}(X; G)$ und $(S_*(X; G), d)$ ist ein Kettenkomplex. Die Homologie dieses Komplexes heißt die *singuläre Homologie von X mit Koeffizienten in G* und wird mit $H_*(X; G)$ bezeichnet. Natürlich ist $H_*(X) = H_*(X; \mathbb{Z})$. Für eine stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ erhält man einen Komplexabbildung $S_*(f; G) : S_*(X; G) \rightarrow S_*(Y; G)$ und damit $f_\# : H_*(X; G) \rightarrow H_*(Y; G)$. All das funktioniert auch ganz analog für relative Homologiegruppen wie in Kapitel 7. Alle strukturellen Eigenschaften der Homologiegruppen (Funktorialität, Homotopieinvarianz, lange exakte Sequenzen von Paaren und Tripeln, Excision, Mayer-Vietoris-Sequenz) gelten auch mit Koeffizienten in G . Für den einpunktigen Raum pt erhält man $H_0(pt; G) = G$ und $H_q(pt; G) = 0$ für $q > 0$ und analog wie in 7.5 bestimmt das zusammen mit den strukturellen Eigenschaften die Homologie vollständig.

Es zeigt sich, dass die Homologiegruppen mit Koeffizienten in G aus den gewöhnlichen Homologiegruppen (mit Koeffizienten in \mathbb{Z}) berechnet werden können. Dazu müssen wir einige algebraische Vorarbeiten leisten.

8.6. Tensorprodukte von abelschen Gruppen. Bekanntlich sind die abelschen Gruppen genau die Moduln über dem kommutativen Ring \mathbb{Z} . Nun kann man allgemein für Moduln A, B, C über einem kommutativen Ring R mit Einselement R -bilineare Abbildungen $A \times B \rightarrow C$ betrachten. Wie im Fall von Vektorräumen definiert man ein *Tensorprodukt* von A und B als einen Modul M zusammen mit einer bilinearen Abbildung $b : A \times B \rightarrow M$ sodass für jeden Modul C und jede R -bilineare Abbildung $\phi : A \times B \rightarrow C$ eine eindeutige R -lineare Abbildung $\tilde{\phi} : M \rightarrow C$ existiert, für die $\phi = \tilde{\phi} \circ b$ gilt. Man sieht leicht, dass das Paar (M, b) (falls es existiert) durch diese Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Man schreibt dann $A \otimes B$ für M und die bilineare Abbildung $A \times B \rightarrow A \otimes B$ als $(a, b) \mapsto a \otimes b$. Analog wie im Fall von Vektorräumen kann man eine allgemeine Konstruktion für das Tensorprodukt als Quotient eines geeigneten freien Moduls angeben.

Wiederum wie im Fall von Vektorräumen gibt es eine einfache Umformulierung der Eigenschaft des Tensorprodukts. Für Moduln B und C ist die Menge $\text{Hom}(B, C)$ ein R -Modul unter den punktweisen Operationen. R -bilineare Abbildungen $A \times B \rightarrow C$ entsprechen dann genau Homomorphismen $A \rightarrow \text{Hom}(B, C)$ und die universelle Eigenschaft schreibt sich als $\text{Hom}(A \otimes B, C) \cong \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C))$.

Wie im Fall von Vektorräumen liefern Homomorphismen $f : A \rightarrow A'$ und $g : B \rightarrow B'$ einen Homomorphismus $f \otimes g : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$. Auch einige grundlegende Isomorphismen, wie etwa $A \otimes B \cong B \otimes A$, $A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$ und $A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ erhält man wie im Fall von Vektorräumen.

Ein wichtiger Unterschied zum Fall von Vektorräumen ist, dass es im Allgemeinen Moduln gibt, die nicht frei sind, also keine Basis besitzen. Damit ist auch das Tensorprodukt von zwei Moduln nicht einfach durch seine "Dimension" (die für Moduln ohnehin keinen Sinn macht) bestimmt, sondern es treten interessantere Phänomene auf:

BEISPIEL. In allen Beispielen betrachten wir abelsche Gruppen, also $R = \mathbb{Z}$.

(1) Seien G, H beliebige abelsche Gruppen. Für eine \mathbb{Z} -bilineare Funktion $\phi : \mathbb{Z} \times G \rightarrow H$ ist $\phi(n, g) = n\phi(1, g)$. Definiert man $b : \mathbb{Z} \times G \rightarrow G$ durch $b(n, g) = ng$ und $\tilde{\phi} : G \rightarrow H$ durch $\tilde{\phi}(g) := \phi(1, g)$, dann sieht man sofort, dass dies die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts hat. Somit ist $\mathbb{Z} \otimes G \cong G$, via $n \otimes g \mapsto ng$.

Allgemeiner ist für eine freie abelsche Gruppe A mit Erzeugern $\{a_i : i \in I\}$ die Gruppe $A \otimes G$ genau die Gruppe der formalen Linearkombinationen der a_i mit Koeffizienten in G via $(\sum n_i a_i \otimes g) \mapsto \sum (n_i g) a_i$. Insbesondere ist für jeden topologischen Raum X die Kettengruppe $S_q(X; G)$ gerade $S_q(X) \otimes G$. (Formal ist es besser, $S_q(X; G)$ gleich als $S_q(X) \otimes G$ und den Operator $d : S_q(X; G) \rightarrow S_{q-1}(X; G)$ als $d \otimes \text{id}_G$ zu definieren.)

(2) Betrachten wir das Tensorprodukt $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q$ für natürliche Zahlen p und q . Bezeichnen wir die Erzeuger von \mathbb{Z}_p bzw. \mathbb{Z}_q mit a und b . Dann kann man jedes Element von \mathbb{Z}_p als na für $0 \leq n < p$ und jedes Element von \mathbb{Z}_q als mb mit $0 \leq m < q$ schreiben. Ist nun G eine abelsche Gruppe und $\phi : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \rightarrow G$ bilinear, dann ist $\phi(na, mb) = nm\phi(a, b)$. Damit ist ϕ eindeutig bestimmt durch das Element $\phi(a, b) \in G$. Nun ist aber $pa = 0$, also $p\phi(a, b) = 0$ und analog $q\phi(a, b) = 0$. Damit muss aber die Ordnung des Elementes $\phi(a, b)$ die Zahlen p und q teilen. Sei nun r der größte gemeinsame Teiler von p und q , und sei $\beta : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_r$ gegeben, indem man (a, b) auf den Erzeuger von \mathbb{Z}_r abbildet. Dann hat das offensichtlich die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, also ist $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{\text{ggT}(p,q)}$. Insbesondere ist beispielsweise $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 = 0$ und $\mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_{30} \cong \mathbb{Z}_6$.

(3) Sei \mathbb{K} ein Körper der Charakteristik Null, zum Beispiel \mathbb{R} oder \mathbb{Q} . Dann ist $\mathbb{K} \otimes \mathbb{Z}_p = 0$. Ist nämlich $a \in \mathbb{Z}_p$ ein Erzeuger, dann ist jede bilineare Funktion $\phi : \mathbb{K} \times \mathbb{Z}_p \rightarrow G$ eindeutig durch die Werte $\phi(k, a) \in G$ für $k \in \mathbb{K}$ bestimmt. Nun ist $pa = 0$, also auch $p\phi(k, a) = \phi(pk, a)$ gleich Null für alle $k \in \mathbb{K}$. Die natürliche Zahl p ist aber in einem Körper der Charakteristik Null invertierbar, also kann jedes Element $k \in \mathbb{K}$ als pk' geschrieben werden.

(4) Benutzen wir die Verträglichkeit des Tensorprodukts mit direkten Summen, dann können wir mit (1) und (2) Tensorprodukte von endlich erzeugten abelschen Gruppen mit endlich erzeugten abelschen Gruppen und mit Körpern der Charakteristik Null ausrechnen, weil sich jede endlich erzeugte abelsche Gruppe als $\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}$ schreiben lässt. Insbesondere ist das Tensorprodukt dieser Gruppe mit einem Körper \mathbb{K} der Charakteristik Null gerade \mathbb{K}^r (vergleiche mit 7.14).

Nach Beispiel (1) hat also der singuläre Komplex von X mit Koeffizienten in G gerade die Form $(S_*(X) \otimes G, d \otimes \text{id}_G)$. Damit liegt es nahe zu vermuten, dass die Homologie dieses Komplexes einfach $H_*(X) \otimes G$ ist. Wie wir sehen werden, stimmt dies, falls $G = \mathbb{K}$ für einen Körper \mathbb{K} der Charakteristik 0 ist. Im Allgemeinen ist die Situation aber komplizierter, wie man an einem einfachen Beispiel sofort sehen kann. Betrachte den Komplex $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, wobei die Kopien von \mathbb{Z} im Grad 0 und im Grad 1 sitzen. Nun ist die Multiplikation mit 2 natürlich injektive, also erhalten wir als Homologie $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ im Grad 0 und 0 in allen anderen Graden. Tensoriert man diesen Komplex mit \mathbb{Z}_2 , dann ist $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$ mit Erzeuger $1 \otimes 1$. Dieser Erzeuger wird durch $\cdot 2 \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}_2}$ auf $2 \otimes 1$ abgebildet, was aber das Nullelement in \mathbb{Z}_2 repräsentiert. Somit ist das Tensorprodukt des obigen Komplexes mit \mathbb{Z}_2 gerade $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ und die Homologie davon ist \mathbb{Z}_2 in den Graden 0 und 1. Um das zu verstehen, benötigen wir noch ein algebraisches Hilfsmittel.

8.7. Torsionsprodukte von abelschen Gruppen. Sei A eine abelsche Gruppe. Wähle ein Erzeugendensystem $\{a_i\}$ für A und sei F die freie abelsche Gruppe, die von den a_i erzeugt wird. Dann erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus $F \rightarrow A$, dessen Kern wir mit R bezeichnen. Damit finden wir eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$, in der F eine freie abelsche Gruppe ist. Man kann allgemein zeigen, dass Untergruppen von freien abelschen Gruppen selbst frei sind. Damit ist auch R eine freie abelsche Gruppe, und man nennt eine Sequenz der obigen Form eine *freie Auflösung*

von A . Ist nun B eine weitere abelsche Gruppe, dann können wir diese Sequenz mit B tensorieren und erhalten $0 \rightarrow R \otimes B \rightarrow F \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow 0$. Man verifiziert leicht, dass diese Sequenz exakt bei $F \otimes B$ und bei $A \otimes B$ ist. Die Abbildung $R \otimes B \rightarrow F \otimes B$ ist aber im Allgemeinen nicht injektiv, und man definiert das *Torsionsprodukt* $\text{Tor}(A, B)$ als den Kern dieser Abbildung.

Als typisches Beispiel kann man die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ betrachten. Tensoriert man diese Sequenz mit \mathbb{Z}_2 , dann erhält man $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ und damit insbesondere $\text{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

A priori ist völlig unklar, dass dieses Torsionsprodukt nicht von der Wahl von F abhängt, man kann dies aber relative leicht beweisen: Sei $0 \rightarrow R' \rightarrow F' \rightarrow A \rightarrow 0$ eine weitere kurze exakte Sequenz sodass F' eine freie abelsche Gruppe ist. Für jeden Erzeuger von F betrachte das Bild in A und wähle ein Urbild in F' . Das definiert einen Homomorphismus $\phi : F \rightarrow F'$. Wendet man ϕ auf Elemente von $R \subset F$ an, dann erhält man Elemente von F' die im Kern R' von $F' \rightarrow A$ liegen. Damit erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & F & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & R' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Analog erhält man einen Homomorphismus $\phi' : F' \rightarrow F$ mit $\phi'(R') \subset R$. Für jeden Erzeuger x_i von F ist $\phi'(\phi(x_i)) - x_i := \gamma(x_i) \in R$, und das liefert einen Homomorphismus $\gamma : F \rightarrow R$ mit $\phi'(\phi(x)) = x + \gamma(x)$ für alle $x \in F$. Analog erhält man $\gamma' : F' \rightarrow R'$. Tensoriert man nun alles mit B , dann erhält man Komplexabbildungen $\phi \otimes \text{id}_B$ und $\phi' \otimes \text{id}_B$. Weiters definiert $\gamma \otimes \text{id}_B$ eine Kettenhomotopie zwischen $(\phi' \otimes \text{id}_B) \circ (\phi \otimes \text{id}_B)$ und der Identität und analog für $\gamma' \otimes \text{id}_B$. Damit induzieren aber $\phi \otimes \text{id}_B$ und $\phi' \otimes \text{id}_B$ inverse Isomorphismen in der Homologie der beiden Komplexe, und das Torsionsprodukt ist bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl der freien Auflösung.

Daraus folgt nun direkt, dass für eine freie abelsche Gruppe A und eine beliebige abelsche Gruppe B das Torsionsprodukt $\text{Tor}(A, B)$ trivial ist, weil man $F = A$ und $R = 0$ wählen kann. Direkt aus der Definition sieht man weiters leicht, dass das Torsionsprodukt additiv in beiden Variablen ist, also $\text{Tor}(A \oplus A', B) \cong \text{Tor}(A, B) \oplus \text{Tor}(A', B)$ und analog für $\text{Tor}(A, B \oplus B')$. Ein nichttriviales Resultat der homologischen Algebra besagt, dass $\text{Tor}(A, B) \cong \text{Tor}(B, A)$ gilt.

BEISPIEL. (1) Betrachten wir die Gruppe \mathbb{Z}_p . Dafür erhalten wir die freie Auflösung $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$. Damit ist für jede abelsche Gruppe G das Torsionsprodukt $\text{Tor}(\mathbb{Z}_p, G)$ gerade der Kern des Homomorphismus $g \mapsto pg$, also die Untergruppe aller Elemente deren Ordnung p teilt. Für $G = \mathbb{Z}_q$ erhalten wir $\text{Tor}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) \cong \mathbb{Z}_{\text{ggT}(p,q)}$. Andererseits ist aus dieser Beschreibung auch offensichtlich, dass für einen Körper \mathbb{K} der Charakteristik Null $\text{Tor}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K}) = 0$ gilt.

(2) Wir haben bereits gesehen, dass Torsionsprodukte mit freien abelschen Gruppen immer trivial sind. Zusammen mit Beispiel (1) und der Verträglichkeit des Torsionsprodukts mit direkten Summen, impliziert das, dass $\text{Tor}(G, \mathbb{K}) = 0$ für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G und jeden Körper \mathbb{K} der Charakteristik Null gilt.

8.8. Das universelle Koeffiziententheorem. Die Überlegungen aus 8.5 und 8.7 zeigen, dass wir die Berechnung der Homologie mit Koeffizienten auf ein allgemeines

Problem der homologischen Algebra zurückführen können. Betrachten wir einen Kettenkomplex (C_*, d) . Für eine abelsche Gruppe G können wir den Komplex $(C_* \otimes G, d \otimes \text{id}_G)$ bilden, und wir wollen die Homologie dieses Komplexes in Termen der Homologie von (C_*, d) verstehen. Zunächst benötigen wir noch ein einfaches Lemma über kurze exakte Sequenzen.

LEMMA. Sei $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Dann sind äquivalent:

(1) Es gibt einen Isomorphismus $\phi : B \rightarrow A \oplus C$, sodass $\phi \circ i : A \rightarrow A \oplus C$ die kanonische Inklusion ist, und so dass p die Komposition der kanonischen Projektion $A \oplus C \rightarrow C$ mit ϕ ist.

(2) Es gibt einen Homomorphismus $r : B \rightarrow A$ mit $r \circ i = \text{id}_A$.

(3) Es gibt einen Homomorphismus $s : C \rightarrow B$ mit $p \circ s = \text{id}_C$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann sagt man "die Sequenz splittet".

BEWEIS. Offensichtlich impliziert (1) die beiden anderen Bedingungen, da es für die direkte Summe kanonische Inklusionen und Projektionen bezüglich beider Faktoren gibt.

Ist (2) erfüllt, dann definiert man $\phi : B \rightarrow A \oplus C$ durch $\phi(b) := (r(b), p(b))$. Dann ist ϕ offensichtlich ein surjektiver Homomorphismus, der i auf die kanonische Inklusion und die kanonische Projektion auf p bringt. Ist $\phi(b) = 0$, dann ist $p(b) = 0$, also gibt es ein $a \in A$, sodass $b = i(a)$ ist. Dann ist aber $a = r(b) = 0$, also $b = 0$, also ist ϕ ein Isomorphismus.

Ist schließlich (3) erfüllt, dann definiert man $\psi : A \oplus C \rightarrow B$ durch $\psi(a, c) := i(a) + s(c)$. Ist $b \in B$ beliebig, dann ist $b - s(p(b))$ im Kern von p also im Bild von i , also ist ψ surjektiv. Ist andererseits $i(a) + s(c) = 0$, dann wenden wir p an und erhalten $c = 0$, also ist $i(a) = 0$ und da i injektiv ist, ist $a = 0$, also ist ψ ein Isomorphismus. Die Inverse von ψ erfüllt dann offensichtlich alle Bedingungen von (1). \square

SATZ (universelles Koeffiziententheorem). Sei C ein Kettenkomplex, sodass jede Gruppe C_q eine freie abelsche Gruppe ist, und sei G eine beliebige abelsche Gruppe. Dann gibt es für jedes n eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \rightarrow H_n(C \otimes G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0.$$

Diese Sequenz ist natürlich und splittet unnatürlich, also ist $H_n(C \otimes G)$ (unnatürlich) isomorph zu $H_n(C) \otimes G \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(C), G)$.

BEWEIS. Setzen wir wie üblich $Z_n := \text{Ker}(d_n) \subset C_n$ und $B_n := \text{Im}(d_{n+1}) \subset C_n$. Dann ist offensichtlich $0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1} \rightarrow 0$ für jedes n eine kurze exakte Sequenz. Da B_{n-1} als Untergruppe der freien abelschen Gruppe C_{n-1} ebenfalls frei ist, ist $\text{Tor}(G, B_{n-1}) = 0$, also ist auch die Sequenz $0 \rightarrow Z_n \otimes G \rightarrow C_n \otimes G \rightarrow B_{n-1} \otimes G \rightarrow 0$ für jedes n exakt. Diese Sequenzen kann man als kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow (Z_* \otimes G, 0) \rightarrow (C_* \otimes G, d) \rightarrow (B'_* \otimes G, 0) \rightarrow 0$ von Kettenkomplexen auffassen, wobei $B'_n := B_{n-1}$. Damit erhalten wir aber eine induzierte lange exakte Sequenz in der Homologie. Nun ist $H_n(Z \otimes G) = Z_n \otimes G$ und $H_n(B' \otimes G) = B_{n-1} \otimes G$. Nach Definition ist der Einhängungshomomorphismus $\partial : H_n(B' \otimes G) \rightarrow H_{n-1}(Z \otimes G)$ dadurch induziert, dass man zu einem Element von $B_{n-1} \otimes G$ ein Urbild in $C_n \otimes G$ nimmt, davon den Rand bildet und diesen als Element in $Z_{n-1} \otimes G$ betrachtet. Da die Abbildung $C_n \rightarrow B_{n-1}$ gerade d ist, ist dieser Einhängungshomomorphismus genau die von der Inklusion $B_{n-1} \hookrightarrow Z_{n-1}$ induzierte Abbildung. Also enthält die lange exakte Sequenz Abschnitte der Form

$$B_n \otimes G \rightarrow Z_n \otimes G \rightarrow H_n(C \otimes G) \rightarrow B_{n-1} \otimes G \rightarrow Z_{n-1} \otimes G$$

Nun ist aber $H_n(C) \otimes G$ gerade der Quotient von $Z_n \otimes G$ nach dem Bild des ersten Homomorphismus in dieser Sequenz. Andererseits ist $0 \rightarrow B_{n-1} \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow H_{n-1}(C) \rightarrow 0$ eine freie Auflösung, also ist der Kern von $B_{n-1} \otimes G \rightarrow Z_{n-1} \otimes G$ gerade $\text{Tor}(H_{n-1}(C), G)$. Somit erhalten aus dem oberen Abschnitt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \rightarrow H_n(C \otimes G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0$$

wie behauptet. Wir müssen noch zeigen, dass diese Sequenz (unnatürlich) splittet. Dazu bemerken wir zunächst, dass die Sequenz $0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0$ splittet, weil B_{n-1} frei ist. (Man wählt einfach für jeden Erzeuger von B_{n-1} ein Urbild.) Damit splittet aber auch die Sequenz, die man daraus durch tensorieren mit G erhält. Schränken wir den entsprechenden Homomorphismus $C_n \otimes G \rightarrow Z_n \otimes G$ auf die Zykel in der ersten Gruppe ein und komponieren noch mit der Projektion $Z_n \otimes G \rightarrow H_n(C) \otimes G$, dann verschwindet das auf Rändern und induziert damit einen Homomorphismus $H_n(C \otimes G) \rightarrow H_n(C) \otimes G$, der die obige Sequenz splittet. \square

Nach Definition ist für jeden topologischen Raum X und jedes $q \geq 0$ die abelsche Gruppe $S_q(X)$ frei, also kann man das universelle Koeffiziententheorem in diesem Fall anwenden. Im Fall eines topologischen Paares (X, A) ist leicht zu sehen, dass $S_q(X, A)$ die freie abelsche Gruppe über allen singulären Simplizes ist, deren Bild nicht in A enthalten ist, also kann man auch in diesem Fall den Satz anwenden und erhält eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_q(X, A) \otimes G \rightarrow H_q(X, A; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{q-1}(X, A), G) \rightarrow 0,$$

und einen (unnatürlichen) Isomorphismus

$$H_q(X, A; G) \cong (H_q(X, A) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{q-1}(X, A), G).$$

Seien G und G' abelsche Gruppen, $\phi : G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus und (X, A) ein topologisches Paar. Dann definieren die Homomorphismen $\text{id} \otimes \phi : S_q(X, A) \otimes G \rightarrow S_q(X, A) \otimes G'$ eine Komplexabbildung $\phi_* : S_q(X, A; G) \rightarrow S_q(X, A; G')$ und diese induziert einen Homomorphismus $\phi_* : H_q(X, A; G) \rightarrow H_q(X, A; G')$ in der Homologie. Sei schließlich $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Dann kann man zeigen, dass für jede freie Gruppe F die Sequenz $0 \rightarrow F \otimes G' \rightarrow F \otimes G \rightarrow F \otimes G'' \rightarrow 0$ ebenfalls exakt ist. Damit erhalten wir aber (weil jedes $S_q(X, A)$ frei ist) eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow S(X, A; G') \rightarrow S(X, A; G) \rightarrow S(X, A; G'') \rightarrow 0$ von Kettenkomplexen, und damit eine lange exakte Sequenz in der Homologie der Form

$$\dots \rightarrow H_q(X, A; G') \rightarrow H_q(X, A; G) \rightarrow H_q(X, A; G'') \xrightarrow{\beta} H_{q-1}(X, A; G') \rightarrow \dots$$

Der Einhängungshomomorphismus $\beta : H_q(X, A; G'') \rightarrow H_{q-1}(X, A; G')$ ein dieser Sequenz heißt der *Bockstein Homomorphismus*.

BEISPIEL. Wir wollen die singuläre Homologie des reellen projektiven Raumes $\mathbb{R}P^n$ mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_2 berechnen. Nach 7.13 kennen wir die Homologie mit Koeffizienten in \mathbb{Z} :

$$H_q(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ und } q = n, \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}_2 & 0 < q < n, q \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Von oben wissen wir, dass $H_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong (H_q(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Tor}(H_{q-1}(\mathbb{R}P^n), \mathbb{Z}_2)$ gilt. Für $q = 0$ bleibt nur der erste Term und dieser liefert $H_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Im Fall $q = 1$ ist $H_{q-1}(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$, also liefert der zweite Term nichts, der erste gibt aber einen Faktor \mathbb{Z}_2 . Ist q gerade, dann ist $H_q(\mathbb{R}P^n) = 0$ und falls $q \leq n$ ist, dann ist $H_{q-1}(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$, also liefert in diesem Fall der zweite Term, dass $H_q(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ gilt. Schließlich ist für

ungerades $q > 1$ der zweite Term immer trivial, aber der erste liefert einen Faktor \mathbb{Z}_2 . Insgesamt erhalten wir damit, dass

$$H_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \leq q \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

8.9. Der Fixpunktsatz von Lefschetz. Als eine Anwendung der Homologie mit Koeffizienten formulieren wir ohne Beweis den Fixpunktsatz von Lefschetz. Sei dazu X ein Polyeder, also homöomorph zu einem Simplicialkomplex. Dann ist X insbesondere ein endlicher CW-Raum, und daher sind alle Homologiegruppen von X endlich erzeugte abelsche Gruppen. Betrachten wir nun $H_*(X; \mathbb{R})$. In Beispiel (2) von 8.7 haben wir gesehen, dass $\text{Tor}(G, \mathbb{R}) = 0$ für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G gilt. Damit ist aber nach dem universellen Koeffiziententheorem $H_q(X; \mathbb{R}) \cong H_q(X) \otimes \mathbb{R}$, also ist jedes $H_q(X; \mathbb{R})$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum.

Ist nun $f : X \rightarrow X$ stetig, dann haben wir für jedes q die induzierte lineare Abbildung $f_* = H_q(f; \mathbb{R}) : H_q(X; \mathbb{R}) \rightarrow H_q(X; \mathbb{R})$. Als lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum hat diese Abbildung eine wohldefinierte Spur, die wir mit $\lambda_q(f)$ bezeichnen. Schließlich definieren wir die *Lefschetz-Zahl* $\lambda(f)$ als die alternierende Summe $\lambda(f) := \sum (-1)^q \lambda_q(f)$. Da $H_q(X; \mathbb{R}) = 0$ für $q > \dim(X)$ ist, ist diese Summe immer wohldefiniert. Der Fixpunktsatz von Lefschetz lautet nun:

SATZ (Lefschetz, 1926). *Ist $\lambda(f) \neq 0$, dann hat f mindestens einen Fixpunkt.*

Dieser Satz hat einige recht starke Konsequenzen: Sei zum Beispiel X kontrahierbar. Dann ist $H_q(X; \mathbb{R})$ genau \mathbb{R} für $q = 0$ und 0 für $q \neq 0$. Damit ist aber $\lambda(f) = \lambda_0(f) = 1$ für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$, also hat jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$ einen Fixpunkt. Für $X = B^n$ erhalten wir damit den Brouwerschen Fixpunktsatz 6.13(2).

Ist allgemeiner X triangulierbar mit Euler-Charakteristik $\chi(X) \neq 0$, dann ist die Euler-Charakteristik gegeben als $\sum (-1)^q \dim(H_q(X; \mathbb{R}))$, und das ist genau die Lefschetz Zahl der Identität auf X . Damit hat also in diesem Fall jede Funktion $f : X \rightarrow X$, die homotop zur Identität ist, mindestens einen Fixpunkt.

Singuläre Kohomologie

Die singuläre Kohomologietheorie ist in einem gewissen Sinn dual zur singulären Homologie. In der Kohomologie gibt es aber einige zusätzliche Strukturen, vor allem verschiedene Produkte, die besonders interessant sind.

8.10. Homomorphismengruppen. Seien G und H abelsche Gruppen, und sei $\text{Hom}(G, H)$ die Menge aller Gruppenhomomorphismen von G nach H . (Man denkt in diesem Bereich besser an \mathbb{Z} -Moduln und Modulhomomorphismen als an abelsche Gruppen und Gruppenhomomorphismen.) Dann bilden diese Homomorphismen selbst eine abelsche Gruppe unter der punktweisen Addition, d.h. $(\phi + \psi)(g) = \phi(g) + \psi(g)$.

Ist $f : G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus, dann definiert man $f^* : \text{Hom}(G', H) \rightarrow \text{Hom}(G, H)$ durch $f^*(\phi) := \phi \circ f$. Man verifiziert sofort, dass f^* wiederum ein Gruppenhomomorphismus ist und dass $(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*$ gilt, also $G \mapsto \text{Hom}(G, H)$, $f \mapsto f^*$ einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen auf sich selbst definiert. Ist andererseits $f : H \rightarrow H'$ ein Homomorphismus, dann definiert man $f_* : \text{Hom}(G, H) \rightarrow \text{Hom}(G, H')$ durch $f_*(\phi) := f \circ \phi$. Wiederum ist f_* ein Homomorphismus und $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, also definiert $H \mapsto \text{Hom}(G, H)$, $f \mapsto f_*$ einen kovarianten Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen auf sich selbst.

BEISPIEL. (1) Sei G eine beliebige abelsche Gruppe und sei $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow G$ ein Homomorphismus. Dann ist $\phi(n) = n\phi(1)$, also ist ϕ eindeutig durch $\phi(1) \in G$ bestimmt. Nach Definition der Gruppenstruktur auf $\text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ definiert damit $\phi \mapsto \phi(1)$ einen Isomorphismus $\text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \rightarrow G$. Analog ist $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, G) \cong \{g \in G : ng = 0\}$ durch die Abbildung $\phi \mapsto \phi(1)$.

(2) Mittels (1) sieht man leicht, dass $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{\text{ggT}(m,n)}$ gilt.

(3) Sei $\bigoplus_{\alpha} G_{\alpha}$ eine direkte Summe von abelschen Gruppen. Dann entspricht ein Homomorphismus $\phi : \bigoplus G_{\alpha} \rightarrow H$ genau einer beliebigen Familie von Homomorphismen $f_{\alpha} : G_{\alpha} \rightarrow H$ via $\sum g_{\alpha} \mapsto \sum f_{\alpha}(g_{\alpha}) \in H$. Damit erhalten wir einen Isomorphismus $\text{Hom}(\bigoplus_{\alpha} G_{\alpha}, H) \cong \prod_{\alpha} \text{Hom}(G_{\alpha}, H)$.

Andererseits stimmen bei abelschen Gruppen endliche direkte Summen mit endlichen direkten Produkten überein. Daher gilt $\text{Hom}(G, \bigoplus_{i=1}^n H_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}(G, H_i)$. Damit und mit (1) und (2) kann man nun $\text{Hom}(G, H)$ für beliebige endlich erzeugte abelsche Gruppen G und H berechnen.

8.11. Singuläre Kohomologie. Sei X ein topologischer Raum, $(S_*(X), d)$ der singuläre Komplex von X aus 6.6 und sei G eine abelsche Gruppe. Für jedes $q \geq 0$ setzen wir $S^q(X; G) := \text{Hom}(S_q(X), G)$. Dann induziert der Randoperator $d : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$ einen Homomorphismus $\delta = d^* : S^{q-1}(X; G) \rightarrow S^q(X; G)$, den sogenannten *Korandoperator*. Die Elemente von $S^q(X; G)$ heißen q -Koketten, Elemente der Untergruppe $Z^q(X; G) := \text{Ker}(\delta : S^q(X; G) \rightarrow S^{q+1}(X; G))$ heißen q -Kozykel und Elemente in $B^q(X; G) := \text{Im}(\delta : S^{q-1}(X; G) \rightarrow S^q(X; G))$ heißen q -Koränder. Da $d^2 = d \circ d = 0$ gilt ist auch $\delta \circ \delta = 0$ und damit ist $B^q(X; G) \subset Z^q(X; G)$. Der Quotient $H^q(X; G) := Z^q(X; G)/B^q(X; G)$ heißt die q -te singuläre Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in G .

Eine q -Kokette auf X mit Werten in G ist nach Definition einfach ein Homomorphismus $S_q(X) \rightarrow G$. Da $S_q(X)$ frei über den singulären q -Simplizes ist, entspricht so ein Homomorphismus genau einer Funktion von der Menge aller singulären q -Simplizes nach G . Um eine q -Kokette zu definieren muss man also nur einfach jedem singulären q -Simplex ein Element von G zuordnen. So eine Zuordnung entspricht genau dann einem Kozykel, wenn sie auf jedem Rand verschwindet, und sie ist genau dann ein Korand, wenn sie von der Form $\phi(c) = \psi(dc)$ ist.

Um die Resultate aus der homologischen Algebra direkt zu verwenden, kann man einfach die Indizes negativ machen. Man setzt einfach $C_q = S^{-q}(X; G)$ für $q \leq 0$ und $C_q = 0$ für $q > 0$. Dann ist $\delta : C_q \rightarrow C_{q-1}$ ein Homomorphismus und (C_q, δ) ist ein Kettenkomplex im Sinne von 6.2. Damit kann man die Resultate aus 6.2 bis 6.4 sinngemäß verwenden.

Sei nun $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion, dann induziert f für jedes $q \geq 0$ einen Homomorphismus $S_q(f) : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$. Dieser wiederum induziert einen Homomorphismus $S^q(f) = S_q(f)^* : S^q(Y; G) \rightarrow S^q(X; G)$. Da die Gleichung $S_q(f) \circ d = d \circ S_{q+1}(f)$ gilt, gilt auch $S^{q+1}(f) \circ \delta = \delta \circ S^q(f)$ und damit erhalten wir einen induzierten Homomorphismus $f^{\#} = H^q(f) : H^q(Y; G) \rightarrow H^q(X; G)$. Analog wie bei den singulären Homologiegruppen verifiziert man leicht, dass $X \mapsto H^q(X; G)$, $f \mapsto H^q(f)$ einen kontravarianten Funktor definiert.

Sei andererseits $\phi : G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen. Dann haben wir die induzierten Homomorphismen $\phi_* : S^q(X; G) \rightarrow S^q(X; G')$, die durch $\phi_*(f) := \phi \circ f$ für einen Homomorphismus $f : S_q(X) \rightarrow G$ gegeben sind. Nun ist für eine Kette $c \in S_q(X)$ die Komposition $\phi_*(\delta(f))(c) = (\phi \circ \delta f)(c) = \phi(f(dc)) = \delta(\phi_*(f))(c)$. Damit kommutiert auch ϕ_* mit den Korandoperatoren und man erhält induzierte Homomorphismen $\phi_* : H^q(X; G) \rightarrow H^q(X; G')$ für jeden topologischen Raum

X und jedes $q \geq 0$. Wieder verifiziert man leicht, dass für fixes X und q die Zuordnung $G \mapsto H^q(X; G)$, $\phi \mapsto \phi_*$ einen kovarianten Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen auf sich selbst definiert.

Ist (X, A) ein topologisches Paar, dann definiert man die relative Kohomologie analog, wobei man einfach $S^q(X, A; G) := \text{Hom}(S_q(X, A), G)$ definiert. Eine stetige Funktion $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induziert wieder einen Homomorphismus $H^q(f) : H^q(Y, B; G) \rightarrow H^q(X, A; G)$. Nun ist für jedes $q \geq 0$ die Sequenz $0 \rightarrow S_q(A) \rightarrow S_q(X) \rightarrow S_q(X, A) \rightarrow 0$ exakt. Außerdem haben wir bereits bemerkt, dass die Gruppe $S_q(X, A)$ frei ist, also splittet diese Sequenz auch. (Man wählt einfach für jeden Erzeuger von $S_q(X, A)$ ein Urbild in $S_q(X)$ und betrachtet den entsprechenden Homomorphismus.) Damit ist aber auch die induzierte Sequenz $0 \rightarrow S^q(X, A; G) \rightarrow S^q(X; G) \rightarrow S^q(A; G) \rightarrow 0$ für jede abelsche Gruppe G exakt. Damit erhalten wir aber die *lange exakte Kohomologiesequenz* des Paares (X, A) mit Koeffizienten in G :

$$\dots \rightarrow H^q(X, A; G) \rightarrow H^q(X; G) \rightarrow H^q(A; G) \rightarrow H^{q+1}(X, A; G) \rightarrow \dots$$

Seien $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotope Funktionen von Paaren. Dann wissen wir aus 7.3, dass die entsprechenden Homomorphismen $S_q(f), S_q(g) : S_q(X, A) \rightarrow S_q(Y, B)$ kettenhomotop sind. Dies bedeutet aber, dass es Homomorphismen $s_q : S_q(X, A) \rightarrow S_{q+1}(Y, B)$ gibt, die $S_q(f) - S_q(g) = d \circ s_q - s_{q-1} \circ d$ erfüllen. Damit erhalten wir aber für jede abelsche Gruppe G die Homomorphismen $(s_q)^* : S^{q+1}(Y, B; G) \rightarrow S^q(X, A; G)$ und diese erfüllen die Gleichung $S^q(f) - S^q(g) = -\delta \circ (s_{q-1})^* + (s_q)^* \circ \delta$. Damit sind aber die Komplexabbildungen $S^q(f)$ und $S^q(g)$ ebenfalls kettenhomotop, und daher induzieren homotope Funktionen den selben Homomorphismus in der Kohomologie. Schließlich folgt auch der Excisionssatz für die Kohomologie leicht aus dem Excisionssatz für die singuläre Homologie. Damit haben wir aber die analogen Eigenschaften zu den Eilenberg–Steenrod Axiomen aus 7.5 für die singuläre Kohomologie verifiziert.

Nehmen wir schließlich noch an, dass $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen ist. Aus der Tatsache, dass für jedes q die Gruppe $S_q(X, A)$ frei ist, kann man leicht folgern, dass die induzierte Sequenz

$$0 \rightarrow S^q(X, A; G') \rightarrow S^q(X, A; G) \rightarrow S^q(X, A; G'') \rightarrow 0$$

für jedes q ebenfalls exakt ist. Damit erhalten wir eine lange exakte Sequenz in der Kohomologie der Form

$$\dots \rightarrow H^q(X, A; G') \rightarrow H^q(X, A; G) \rightarrow H^q(X, A; G'') \rightarrow H^{q+1}(X, A; G') \rightarrow \dots$$

Der Einhängungshomomorphismus $H^q(X, A; G'') \rightarrow H^{q+1}(X, A; G')$ in dieser Sequenz heißt wiederum der *Bockstein Homomorphismus*.

8.12. Analog zu den singulären Homologiegruppen mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe G kann man auch die singulären Kohomologiegruppen aus den Homologiegruppen mit ganzzahligen Koeffizienten berechnen. Um das Resultat zu formulieren brauchen wir noch ein rein algebraisches Konzept, dass dual zu den Gruppen $\text{Tor}(A, G)$ aus 8.7 ist.

Zu einer abelschen Gruppe A sei $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$ eine freie Auflösung wie in 8.7. Wenden wir darauf für eine fixe abelsche Gruppe G den (kontravarianten) Funktor $\text{Hom}(-, G)$ an, dann erhalten wir einen Komplex

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(F, G) \rightarrow \text{Hom}(R, G) \rightarrow 0.$$

Man zeigt, dass diese Sequenz exakt bei $\text{Hom}(A, G)$ und bei $\text{Hom}(F, G)$ ist, der Homomorphismus $\text{Hom}(F, G) \rightarrow \text{Hom}(R, G)$ ist aber im Allgemeinen nicht surjektiv. Der Quotient von $\text{Hom}(R, G)$ nach dem Bild dieses Homomorphismus wird mit $\text{Ext}(A, G)$

bezeichnet. Analog wie in 8.7 zeigt man, dass die Gruppe $\text{Ext}(A, G)$ unabhängig von der Wahl der freien Auflösung ist.

Ein Beispiel für eine nichttriviale Ext-Gruppe liefert wieder die übliche freie Auflösung $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$, in der der erste Homomorphismus durch Multiplikation mit 2 gegeben ist. Aus 8.10 wissen wir, dass sowohl $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ als auch $\text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ isomorph zu \mathbb{Z}_2 sind, wobei der Isomorphismus durch $\phi \mapsto \phi(1)$ gegeben ist. Analog wie früher induziert die Multiplikation mit 2 den Nullhomomorphismus $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, und man sieht leicht, dass der resultierende Komplex gerade $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ ist. Damit erhalten wir $\text{Ext}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Allgemeiner zeigt man analog, dass $\text{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{\text{ggT}(m,n)}$ gilt. Ist A eine freie abelsche Gruppe oder ein Körper der Charakteristik 0, dann ist $\text{Ext}(A, G) = 0$ für alle G . Schließlich ist noch leicht einzusehen, dass Ext verträglich mit endlichen direkten Summen in beiden Faktoren ist, also kann man wieder die Ext-Gruppen zu endlich erzeugten abelschen Gruppen und Körpern der Charakteristik 0 allgemein berechnen.

BEMERKUNG. Die Gruppe $\text{Ext}(A, G)$ klassifiziert die Erweiterungen von A mit Kern G , das heißt sie entspricht genau den Isomorphieklassen (in einem gewissen Sinn) von kurzen exakten Sequenzen von abelschen Gruppen der Form $0 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow 0$. Daher stammt auch der Name Ext wie extension.

8.13. Das universelle Koeffiziententheorem. Sei $c \in S_q(X, A)$ eine Kette und sei $f \in S^q(X, A; G)$ eine Kokette. Dann ist f nach Definition ein Homomorphismus von $S_q(X, A)$ nach G , also können wir $f(c) \in G$ bilden. Natürlich können wir f auch auf die Untergruppe $Z_q(X, A)$ der Zykel einschränken und erhalten dann einen Homomorphismus $Z_q(X, A) \rightarrow G$. Ist f ein Kozykel, also $\delta(f) = 0$, dann bedeutet das nach Definition genau, dass f auf Rändern verschwindet, also liegt $B_q(X, A)$ im Kern des obigen Homomorphismus, und wir können somit f als Homomorphismus $H_q(X, A) = Z_q(X, A)/B_q(X, A) \rightarrow G$ betrachten. Man erhält damit eine Abbildung $Z^q(X, A; G) \rightarrow \text{Hom}(H_q(X, A), G)$, die nach Definition ein Gruppenhomomorphismus ist. Ist schließlich f ein Korand, dann hängt nach Definition $f(c)$ nur von dc ab, insbesondere verschwindet die Einschränkung von f auf $Z_q(X, A)$. Damit liegt aber $B^q(X, A; G)$ im Kern des obigen Homomorphismus, also erhalten wir einen Homomorphismus $H^q(X, A; G) \rightarrow \text{Hom}(H_q(X, A), G)$. Aus der Tatsache, dass $S_q(X, A)$ eine freie abelsche Gruppe ist, folgt leicht, dass dieser Homomorphismus surjektiv ist. Schließlich sei noch bemerkt, dass man diesen Homomorphismus auch als Paarung $H^q(X, A; G) \times H_q(X, A) \rightarrow G$ betrachten kann. Für ein vollständiges Resultat müssen wir noch den Kern des Homomorphismus $H^q(X, A; G) \rightarrow \text{Hom}(H_q(X, A), G)$ beschreiben. Das kann man analog zum universellen Koeffiziententheorem für die Homologie in einem allgemeineren Setting für Kettenkomplexe machen, in denen jede auftretende Gruppe eine freie abelsche Gruppe ist. Wir notieren hier nur das Resultat im Fall der singulären Kohomologiegruppen, das zeigt, dass man die singuläre Kohomologie mit beliebigen Koeffizienten aus den singulären Homologiegruppen mit ganzzahligen Koeffizienten berechnen kann. Der Beweis dafür ist analog zum Beweis von Satz 8.8.

SATZ (universelles Koeffiziententheorem). Sei (X, A) ein topologisches Paar. Dann gibt es für jedes $n \geq 0$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X, A), G) \rightarrow H^n(X, A; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X, A), G) \rightarrow 0$$

Diese Sequenz ist natürlich und splittet unnatürlich. Insbesondere ist daher die Gruppe $H^n(X, A; G)$ isomorph zu $\text{Hom}(H_n(X, A), G) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X, A), G)$.

BEISPIEL. (1) Sei X ein endlicher CW-Komplex. Dann stimmt die singuläre Homologie mit der zellulären Homologie überein. Damit ist insbesondere jede Homologiegruppe $H_q(X)$ endlich erzeugt. Ist nun \mathbb{K} ein Körper der Charakteristik Null, dann ist nach Beispiel (1) und (2) von 8.10 immer $\text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{K}) = 0$. Damit folgt aus dem universellen Koeffiziententheorem aber, dass $H^n(X; \mathbb{K}) \cong \text{Hom}(H_n(X), \mathbb{K})$ gilt. Nun folgt aber leicht aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts, dass $\text{Hom}(H_n(X), \mathbb{K}) \cong L(H_n(X) \otimes \mathbb{K}, \mathbb{K})$ gilt, wobei $L()$ den Vektorraum der linearen Abbildungen bezeichnet. In 8.9 haben wir gesehen, dass $H_n(X) \otimes \mathbb{K} \cong H_n(X; \mathbb{K})$ gilt. Damit ist aber in diesem Fall die Kohomologie $H^n(X; \mathbb{K})$ einfach der Dualraum der Homologie $H_n(X; \mathbb{K})$.

(2) Ein fundamentales Resultat ist der Satz von de-Rham, der besagt, dass für eine glatte Mannigfaltigkeit M die de-Rham Kohomologie, die man mit Hilfe glatter Differentialformen definiert, mit der singulären Kohomologie mit Koeffizienten in \mathbb{R} übereinstimmt. Nach Teil (1) ist insbesondere für kompakte glatte Mannigfaltigkeiten die k -te de-Rham Kohomologie genau der Dualraum von $H_k(M, \mathbb{R})$.

8.14. Das Cup Produkt. Ein wesentlicher Vorteil der Kohomologie gegenüber den Homologiegruppen ist die Existenz eines Produktes, zumindest falls der Koeffizientenbereich nicht nur eine abelsche Gruppe sondern ein kommutativer Ring ist. Wir betrachten in diesem Abschnitt also die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring R mit Einselement. Wir wollen ein Produkt $\cup : H^p(X; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X; R)$ definieren. Seien also $\phi \in S^p(X; R)$ und $\psi \in S^q(X; R)$ singuläre Koketten. Um ein Element $\phi \cup \psi \in S^{p+q}(X; R)$ zu definieren, müssen wir nur angeben, wie dieses Element auf einem singulären $p+q$ -Simplex σ wirkt. Zunächst definieren wir $i_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_{p+q}$ durch $i_p(x_0, \dots, x_p) := (x_0, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ und $j_q : \Delta_q \rightarrow \Delta_{p+q}$ durch $j_q(x_0, \dots, x_q) := (0, \dots, 0, x_0, \dots, x_q)$. i_p ist also die Inklusion der "vorderen" p -dimensionalen Seite und j_q die Inklusion der "hinteren" q -dimensionalen Seite des Standard Simplex Δ_{p+q} . Dann definieren wir $(\phi \cup \psi)(\sigma) := \phi(\sigma \circ i_p) \cdot \psi(\sigma \circ j_q)$ wobei wir auf der rechten Seite die Multiplikation im Ring R benutzen. Das erweitert nun eindeutig zu einem Element $\phi \cup \psi \in S^{p+q}(X; R)$. Klarerweise ist die Abbildung \cup bilinear.

Der nächste Schritt ist dann, die Verträglichkeit dieser Operation mit dem Korandoperator δ zu überprüfen. Aus der Definition von δ folgt relativ einfach, dass $\delta(\phi \cup \psi) = \delta(\phi) \cup \psi + (-1)^p \phi \cup \delta(\psi)$ gilt. Damit folgt aber sofort, dass für Kozykel ϕ und ψ auch $\phi \cup \psi$ ein Kozykel ist. Ist andererseits $\phi \in S^{q-1}(X; R)$ beliebig und ψ ein Kozykel, dann folgt aus obiger Formel, dass $\delta(\phi) \cup \psi = \delta(\phi \cup \psi)$. Analog sieht man auch, dass für einen Kozykel ϕ das Cup Produkt $\phi \cup \delta(\psi)$ ein Korand ist. Also ist das Cup Produkt eines Kozykels mit einem Korand immer ein Korand, und somit erhalten wir eine wohldefinierte bilineare Abbildung $\cup : H^p(X; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X; R)$.

Man kann zeigen, dass das Cup Produkt (schon auf der Ebene der Koketten) assoziativ ist, und dass es ein neutrales Element gibt, nämlich den Homomorphismus $S_0(X) \rightarrow R$, der jeden Punkt von X auf das Einselement von R abbildet. Im Fall $R = \mathbb{Z}$ ist das gerade die Augmentierung aus Beispiel (2) von 6.6. Eine nichttriviale (aber sehr wichtige) Eigenschaft des Cup Produktes, die erst auf der Ebene der Kohomologieklassen gilt, ist die sogenannte *graduierete Kommutativität*, d.h. die Tatsache, dass für $[\phi] \in H^p(X; R)$ und $[\psi] \in H^q(X; R)$ die Gleichung $[\psi] \cup [\phi] = (-1)^{pq} [\phi] \cup [\psi]$ gilt. Damit wird aber für jeden Raum X die direkte Summe $H^*(X; R) := \bigoplus_{q \geq 0} H^q(X; R)$ mit dem Cup Produkt zu einem graduert kommutativen Ring.

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion und seien $\phi \in S^p(Y; R)$ und $\psi \in S^q(Y; R)$ Kozykel. Dann induziert f für jedes n den Homomorphismus $f^* : S^n(Y; R) \rightarrow S^n(X; R)$, der gegeben ist durch $(f^*\alpha)(\sigma) = \alpha(f_*(\sigma)) = \alpha(f \circ \sigma)$ für $\alpha \in S^n(Y; R)$ und jeden

singulären n -Simplex $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$. Betrachten wir nun das Cup-Produkt $(f^*\phi) \cup (f^*\psi)$. Nach Definition wirkt das auf einen singulären $p + q$ -Simplex σ in X durch $(f^*\phi)(\sigma \circ i_p) \cdot (f^*\psi)(\sigma \circ j_q) = \phi(f \circ \sigma \circ i_p) \cdot \psi(f \circ \sigma \circ j_q)$, was aber nach Definition mit der Wirkung von $\phi \cup \psi$ auf $f_*\sigma$ übereinstimmt. Damit ist aber $f^*(\phi \cup \psi) = (f^*\phi) \cup (f^*\psi)$, also ist die Abbildung $f^\# : H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)$ ein Ringhomomorphismus.

Im Fall einer glatten Mannigfaltigkeit und $R = \mathbb{R}$ entspricht das Cup-Produkt auf der singulären Kohomologie genau dem Produkt in der de-Rham Kohomologie, das vom Hackprodukt von Differentialformen induziert wird.

Mit Hilfe des Cup-Produkts kann man tatsächlich topologische Räume unterscheiden, bei denen alle Homologiegruppen isomorph sind. Betrachten wir beispielsweise die komplexen projektiven Räume $\mathbb{C}P^n$. Aus 7.10 wissen wir, dass die Homologiegruppen $H_q(\mathbb{C}P^n)$ isomorph zu \mathbb{Z} für gerades $q \leq 2n$ sind, während alle anderen Homologiegruppen trivial sind. Nach dem universellen Koeffiziententheorem 8.13 sind auch die ganzzahligen Kohomologiegruppen $H^q(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ isomorph zu \mathbb{Z} für gerades $q \leq 2n$ und trivial für alle anderen q . Man kann nun beweisen, dass für einen Erzeuger α von $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ und $2 \leq \ell \leq n$ das ℓ -fache Cup-Produkt $\alpha \cup \dots \cup \alpha$ ein Erzeuger von $H^{2\ell}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ ist. Dies bedeutet, dass $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ als Ring isomorph zu $\mathbb{Z}[t]/\langle t^{n+1} \rangle$ ist, wobei der Erzeuger t den Grad 2 hat und $\langle t^{n+1} \rangle$ das vom Polynom t^{n+1} erzeugte Ideal bezeichnet.

Betrachten wir andererseits das Wedge $S^2 \vee S^4$ einer zwei- mit einer 4-Sphäre. Dieser Raum besitzt eine CW-Zerlegung mit je einer Zelle in den Dimensionen 0, 2 und 4. Damit ist aber seine zelluläre Homologie offensichtlich isomorph zu \mathbb{Z} in den Dimensionen 0, 2 und 4, während alle anderen Homologiegruppen trivial sind. Damit sind die Homologiegruppen (und damit nach dem universellen Koeffiziententheorem auch die Kohomologiegruppen mit ganzzahligen Koeffizienten) dieses Raumes isomorph zu denen des $\mathbb{C}P^2$. In diesem Fall kann man aber zeigen, dass das Cup-Produkt eines Erzeugers von $H^2(S^2 \vee S^4, \mathbb{Z})$ mit sich selbst immer Null ist, also sind die Ringstrukturen verschieden und die Räume $\mathbb{C}P^2$ und $S^2 \vee S^4$ können damit nicht homotopieäquivalent sein. Aus Beispiel (6) von 4.15 wissen wir, dass man $\mathbb{C}P^2$ erhält, indem man eine 4-Zelle längs der Hopf-Faserung $f : S^3 \rightarrow S^2$ an $S^2 = \mathbb{C}P^1$ klebt. Andererseits entsteht $S^2 \vee S^4$ dadurch, dass man eine 4-Zelle längs einer konstanten Funktion $g : S^3 \rightarrow S^2$ an S^2 klebt. Damit folgt zusammen mit Satz 4.7, dass die Hopf-Faserung nicht nullhomotop sein kann, weil sonst $\mathbb{C}P^2$ und $S^2 \vee S^4$ homotopieäquivalent wären.

8.15. Das Cap-Produkt. Das Cap-Produkt gibt eine Verknüpfung zwischen singulärer Homologie und singulärer Kohomologie, die die Paarung zwischen Homologie und Kohomologie aus 8.13 verallgemeinert. Allgemein liefert das Cap-Produkt eine Abbildung $H^p(X; R) \times H_{p+q}(X; R) \rightarrow H_q(X; R)$, wobei R wie bisher ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Wir werden uns hier auf den Fall $R = \mathbb{Z}$ beschränken.

Sei also $\phi \in S^q(X; \mathbb{Z})$ und sei $\sigma : \Delta_{p+q} \rightarrow X$ ein singulärer $p + q$ -Simplex. Seien weiters $i_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_{p+q}$ und $j_q : \Delta_q \rightarrow \Delta_{p+q}$ die Inklusionen aus 8.14. Dann definieren wir $\phi \cap \sigma \in S_q(X)$ durch $\phi \cap \sigma := \phi(\sigma \circ i_p) \cdot (\sigma \circ j_q)$. Das erweitert offensichtlich zu einer bilinearen Abbildung $S^p(X; \mathbb{Z}) \times S_{p+q}(X) \rightarrow S_q(X)$. Analog wie im Fall des Cup-Produktes verifiziert man leicht, dass

$$d(\phi \cap \sigma) = (\delta\phi) \cap \sigma + (-1)^p \phi \cap (d(\sigma)).$$

Daraus folgt wiederum sofort, dass das Produkt eines Kozykels mit einem Zykel ein Zykel ist, sowie das man einen Rand erhält, wenn man das Produkt eines Korandes mit einem Zykel oder das Produkt eines Kozykels mit einem Rand bildet. Insgesamt folgt

daraus, dass wir eine wohldefinierte, bilineare Abbildung

$$\cap : H^p(X; \mathbb{Z}) \times H_{p+q}(X) \rightarrow H_q(X)$$

erhalten.

Offensichtlich gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Cup- und dem Cap Produkt, der schon auf der Ebene der Ketten und Koketten gilt: Ist $\psi \in S^q(X; \mathbb{Z})$, dann gilt $\psi(\phi \cap \sigma) = (\phi \cup \psi)(\sigma)$. Weiters ist leicht einzusehen, dass das Cap Produkt natürlich, also verträglich mit den von stetigen Funktionen induzierten Homomorphismen ist. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion, dann ist $f_*(f^*(\phi) \cap \sigma) = \phi \cap f_*(\sigma)$. Das folgt wiederum direkt aus den Definitionen.

Die wichtigste Anwendung des Cap Produktes ist die sogenannte Poincaré-Dualität für Mannigfaltigkeiten. Wir haben in 7.7 topologische Mannigfaltigkeiten definiert und auch erwähnt, dass man mit Hilfe der lokalen Homologiegruppen Orientierbarkeit für topologische Mannigfaltigkeiten definieren kann. Sei M eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n . Die Definition der Orientierbarkeit läuft gerade darauf hinaus, dass es eine Homologieklassse $[M] \in H_n(M)$ gibt, die für jeden Punkt $x \in M$ einen Erzeuger der lokalen Homologie $H_n(M, M \setminus x)$ induziert. Man kann dann zeigen, dass $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ und $[M]$ ein Erzeuger dafür ist. Die Klasse $[M]$ heißt die *fundamentale Homologieklassse* oder der *Fundamentalzykel* von M . Das wichtigste Resultat über die Homologie von topologischen Mannigfaltigkeiten ist nun

SATZ (Poincaré Dualität). *Sei M eine kompakte, orientierte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Fundamentalzykel $[M] \in H_n(M)$. Dann induziert das Cap Produkt mit $[M]$ für jedes $i = 0, \dots, n$ einen Isomorphismus $H^i(M; \mathbb{Z}) \cong H_{n-i}(M)$.*

Für nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten gibt es ein analoges Resultat, wobei man aber den Koeffizientenbereich \mathbb{Z} durch \mathbb{Z}_2 ersetzen muss.

Zusammenhänge zwischen Homotopie und Homologie

Zum Abschluss beschreiben wir einige Verbindungen zwischen Homotopie- und Homologietheorie. Insbesondere befassen wir uns mit der Frage, wie weit der Homotopietyp eines topologischen Raumes durch seine Homologiegruppen festgelegt ist.

8.16. Der erste Schritt in diese Richtung, den wir hier besprechen, ist der bereits in 6.14 erwähnte Satz von H. Hopf über Abbildungen zwischen Sphären. In 6.14 haben wir für eine stetige Funktion $f : S^n \rightarrow S^n$ den induzierten Homomorphismus $H_n(f)$ betrachtet, der $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ auf sich selbst abbildet. Dieser ist daher durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl, dem Abbildungsgrad $\deg(f)$ von f gegeben. Da für eine stetige Funktion g , die homotop zu f ist, $H_n(g) = H_n(f)$ gilt, haben homotope Funktionen den gleichen Abbildungsgrad. Mit simplizialen Methoden kann man folgendes Resultat beweisen:

SATZ (H. Hopf, 1932). *Zwei stetige Funktionen $f, g : S^n \rightarrow S^n$ sind genau dann homotop, wenn sie den gleichen Abbildungsgrad haben.*

8.17. Der Hurewicz-Homomorphismus. Fixieren wir für jedes n einen Erzeuger $[S^n] \in H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, etwa einen Homöomorphismus vom Rand des Standard $n + 1$ -Simplex auf S^n . Diese Homologieklassse ist gerade der Fundamentalzykel der Mannigfaltigkeit S^n aus 8.15. Sei nun (X, x_0) ein bogenzusammenhängender punktierter Raum. Dann ist die n -te Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_0)$ gerade die Gruppe aller punkterhaltenden Homotopieklassen von stetigen punkterhaltenden Funktionen $f : S^n \rightarrow X$. So eine stetige Funktion induziert einen Homomorphismus $f_{\#} = H_n(f) : H_n(S^n) \rightarrow H_n(X)$. Ersetzt

man f durch eine homotope Funktion \tilde{f} , dann ist nach Satz 6.8 $H_n(\tilde{f}) = H_n(f)$, also hängt das Element $h_n([f]) := f_{\#}([S^n]) \in H_n(X)$ wirklich nur von der Homotopieklasse von f ab. Damit erhalten wir eine wohldefinierte Funktion $h_n : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$. Diese Funktion heißt der *Hurewicz Homomorphismus*.

PROPOSITION. h_n ist ein Homomorphismus und natürlich bezüglich stetiger punkterhaltender Abbildungen $\phi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

BEWEIS. Sei $[f] \in \pi_n(X, x_0)$. Nach Definition ist $\phi_*([f]) = [\phi \circ f]$. Damit ist aber $h_n(\phi_*([f])) = (\phi \circ f)_{\#}([S^n]) = \phi_{\#}(f_{\#}([S^n])) = \phi_{\#}(h_n([f]))$, also ist die Natürlichkeit offensichtlich. Das Produkt auf $\pi_n(X, x_0)$ ist nun nach Definition gegeben als $[f][g] = [(f, g) \circ \Delta]$, wobei $(f, g) : S^n \vee S^n \rightarrow X$ die von f und g induzierte stetige Abbildung ist, und $\Delta : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ die Abbildung aus 2.10 bezeichnet. Nun ist aber $\Delta_{\#}([S^n]) = (i_1)_{\#}([S^n]) + (i_2)_{\#}([S^n])$, wobei $i_1, i_2 : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ die beiden Inklusionen sind. Dies ist relativ leicht einzusehen, indem man geeignete CW-Zerlegungen betrachtet und in der zellulären Homologie rechnet. Damit ist

$$h_n([f][g]) = (f, g)_{\#}(\Delta_{\#}([S^n])) = (f, g)_{\#}((i_1)_{\#}([S^n]) + (i_2)_{\#}([S^n])),$$

und da nach Definition $(f, g) \circ i_1 = f$ und $(f, g) \circ i_2 = g$ gilt, stimmt das mit $f_{\#}([S^n]) + g_{\#}([S^n])$ überein. \square

Mit diesen Begriffen kann man den Satz von Hopf aus 8.16 so interpretieren, dass für die Sphäre S^n der Hurewicz Homomorphismus $h_n : \pi_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ ein Isomorphismus ist. Es gilt aber ein viel allgemeineres Resultat:

SATZ (Hurewicz, 1935). (1) Für jeden bogenzusammenhängenden punktierten Raum (X, x_0) ist der Hurewicz Homomorphismus $h_1 : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X, x_0)$ surjektiv, und sein Kern ist genau die Kommutatoruntergruppe von $\pi_1(X, x_0)$. Also ist $H_1(X)$ isomorph zur Abelisierung von $\pi_1(X, x_0)$.

(2) Ist X $(n-1)$ -fach zusammenhängend, also bogenzusammenhängend und $\pi_k(X, x_0) = 0$ für alle $k \leq n-1$, dann ist auch $H_k(X) = 0$ für $1 \leq k \leq n-1$ und der Hurewicz Homomorphismus $h_n : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$ ist ein Isomorphismus. Für einfach zusammenhängende Räume stimmt damit die erste nichttriviale Homotopiegruppe mit der ersten nichttrivialen Homologiegruppe überein.

Für allgemeine Räume ist der Beweis dieses Satzes relativ kompliziert (siehe z.B. [W, Kapitel 4] oder [S-Z, Kapitel 16.8]), für endliche CW-Komplexe kann man den Satz relativ leicht beweisen, indem man zunächst X durch einen "schönen" homotopieäquivalenten CW-Komplex ersetzt (siehe Bemerkung (2) von 4.21 und 5.9), und dann die Beschreibungen von $\pi_1(X, x_0)$ aus 4.21 bzw. der ersten nichttrivialen Homotopiegruppe eines CW-Komplexes aus 5.9 mit den zellulären Homologiegruppen vergleicht.

BEISPIEL. Außerhalb der ersten nichttrivialen Gruppen muss der Hurewicz Homomorphismus weder injektiv noch surjektiv sein. Betrachten wir als Beispiel der Torus $T^2 = S^1 \times S^1$. Er hat als universelle Überlagerung $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, also sind seine Fundamentalgruppe gerade \mathbb{Z}^2 , und alle höheren Homotopiegruppen sind trivial. Andererseits ist T^2 eine kompakte, orientierte, zweidimensionale Mannigfaltigkeit, und muss daher $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$ erfüllen. (Man kann auch leicht direkt die zelluläre Homologie von T^2 berechnen.) Somit ist der Hurewicz Homomorphismus $h_2 : \pi_2(T^2) \rightarrow H_2(T^2)$ nicht surjektiv. Andererseits wissen wir aus 5.7, dass $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ gilt, während $H_3(S^2) = 0$ ist. Damit ist der Hurewicz Homomorphismus $h_3 : \pi_3(S^2) \rightarrow H_3(S^2)$ nicht injektiv.

8.18. Der Satz von Hurewicz liefert uns auch Informationen darüber, in wie weit der Homotopietyp eines Raumes durch seine Homologiegruppen bestimmt ist. Sei dazu X ein einfach zusammenhängender, bogenzusammenhängender Raum, sodass $H_q(X) = 0$ für alle $q > 0$ gilt. Dann muss nach dem Satz von Hurewicz 8.17 auch $\pi_k(X, x_0) = 0$ für alle $k \geq 1$ und jeden Basispunkt $x_0 \in X$ gelten. Nach Voraussetzung ist nämlich $\pi_1(X, x_0) = 0$. Gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\pi_k(X, x_0) \neq 0$ ist, dann könnte man dieses k minimal wählen. Für dieses minimale k würde dann aus dem Hurewicz Satz $H_k(X) \cong \pi_k(X, x_0)$ folgen, was einen Widerspruch liefert. Ist X ein CW-Komplex, dann wissen wir aus 5.9, dass X kontrahierbar sein muss.

Analog wie in 5.9 führt dies zu einer Charakterisierung für Homotopieäquivalenzen zwischen CW Komplexen, die erstmals von J.H.C Whitehead bewiesen wurde: Sind X und Y einfach zusammenhängende CW Komplexe und ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion, sodass $H_q(f) : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ für alle $q \geq 2$ ein Isomorphismus ist, dann ist f eine Homotopieäquivalenz.

Literaturverzeichnis

- [C–R] J. Cigler, H.C.Reichel, *Topologie* Eine Grundvorlesung, BI Hochschultaschenbücher 121, Bibliographisches Institut, 1987.
- [D] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Grundlehren 200, Springer, 1972.
- [F–F–G] A.T. Fomenko, D.B. Fuchs, V.L. Gutenmacher: *Homotopic Topology* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.
- [H] A. Hatcher: *Algebraic Topology* Cambridge University Press, 2002.
- [S] E.H. Spanier *Algebraic Topology*, McGraw–Hill, 1966.
- [S–Z] R. Stöcker, H. Zieschang: *Algebraische Topologie*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [W] G.W. Whitehead: *Elements of Homotopy Theory* Graduate Texts in Mathematics 61, Springer, 1978.

Index

- n -fach zusammenhängend, 63
- Abbildung
 - zelluläre, 58
- Abbildungsgrad
 - für S^1 , 15
 - für S^n , 86
- Abbildungskegel, 46
- Abbildungszylinder, 46
- AHE, 41
- Augmentierung, 79

- baryzentrische Unterteilung, 50, 83
- Betti-Zahl, 100
- Bockstein Homomorphismus, 111, 114

- Cap Produkt, 117
- charakteristische Abbildung, 56
- Cup Produkt, 116
- CW-Komplex, 58
 - endlicher, 56
 - Fundamentalgruppe, 61
- CW-Paar, 58
- CW-Teilraum, 58
- CW-Zerlegung, 58

- Deformationsretrakt, 43

- Eckenstern, 52
- einfach zusammenhängend, 23
- Einhängungshomomorphismus
 - Homotopiesequenz, 66
- Einhängungshomomorphismus
 - Homologiesequenz, 77
- Einpunktvereinigung, 20
- Erzeugendensystem, 25
- Euler-Charakteristik, 100
- Evaluationsabbildung, 9
- Exponentialgesetz, 9

- Faser
 - einer Überlagerung, 31
 - einer Faserung, 64
- Faserbündel, 67
- Faserung, 64
- freie Auflösung, 108
- Fundamentalgruppe, 23

- Unabhängigkeit vom Basispunkt, 25
- Fundamentalzykel, 118
- Funktor, 4

- geometrische Realisierung, 49
- Gruppe
 - freie, 26

- H-Raum, 18
- Homologie
 - lokale, 93
 - zelluläre, 96
- Homologiegruppe
 - eines Kettenkomplexes, 74
 - relative, 89
 - simpliciale, 74
 - singuläre, 79
- Homologietheorie
 - verallgemeinerte, 92
- homotop, 12
 - punkterhaltend, 12
 - relativ zu A , 12
- Homotopie, 12
- Homotopie-Faser, 71
- Homotopie-Kofaser, 46
- homotopieäquivalent, 14
- Homotopieäquivalenz, 14
- Homotopiegruppe
 - erste, 23
 - höhere, 63
- Homotopiekategorie, 13
- Homotopieklasse, 12
- Homotopietyp, 14
- Hopf-Faserung, 58
- Hurewicz Homomorphismus, 119

- Isotropieuntergruppe, 33

- Kategorie, 3
- Kegel
 - reduzierter, 20
 - unreduzierter, 7
- Kette
 - singuläre, 78
- kettenhomotop, 77
- Kettenkomplex, 74

- exakter, 75
- Kofaserung, 41
- Kohomologiegruppe, 113
- Kokette, 113
- Komplex
 - singulärer, 78
 - zellulärer, 96
- Komplexabbildung, 74
- kontrahierbar, 13
- Korand, 113
- Korandoperator, 113
- Kozykel, 113

- lange exakte Homologiesequenz, 77
- Lift
 - auf Überlagerungen, 31
- Linsenraum, 39

- Mannigfaltigkeit
 - topologische, 93
 - topologische mit Rand, 93
- Morphismus, 3

- NDR-Paar, 44
- Normalteiler
 - erzeugter, 27
- nullhomotop, 12

- Orbit, 33
- Orientierung
 - eines Simplex, 73
 - induzierte einer Seite, 73

- Pfadraum, 10
- Polyeder, 49, 112
- Präsentation, 27
- Produkt
 - freies, 28
- Pullback, 71

- Rand, 74
- Randoperator
 - simpliciale Homologie, 74
- Rechtswirkung, 33
- relativer Homöomorphismus, 5
- Retrakt, 43

- Satz
 - Brouwer'scher Fixpunktsatz
 - für B^2 , 16
 - für B^n , 86
 - Excisionssatz, 91
 - Fünferlemma, 75
 - Fixpunktsatz von Lefschetz, 112
 - Fundamentalsatz der Algebra, 16
 - Homotopieinvarianz der Homologiegruppen, 82
 - Homotopieinvarianz der relativen Homologiegruppen, 91
 - Igelsatz, 87
 - Invarianz der Dimension, 93
 - Invarianz der Domäne, 106
 - Jordan'scher Kurvensatz, 105
 - lange exakte Homologiesequenz, 75
 - lange exakte Sequenz eines Paares, 89
 - lange exakte Sequenz eines Tripels, 90
 - Mayer–Vietoris Sequenz, 84
 - Poincaré Dualität, 118
 - simplicialer Approximationssatz, 53
 - universelles Koeffiziententheorem, 110, 115
 - von Borsuk–Ulam, 16
 - von Seifert und van Kampen, 28
 - zelluläre und singuläre Homologie, 96
 - zellulärer Approximationssatz, 60
- Schleifenraum, 10, 71
- schwache Äquivalenz, 70
- Sequenz
 - exakte, 65
- Simplex, 47
 - Seite eines, 47
 - singulärer, 78
- simpliciale Abbildung, 49
- simpliciale Approximation, 52
- Simplicialkomplex, 48
 - abstrakter, 48
- singulärer Komplex
 - relativer, 89
- Skelett, 56, 58
- Stabilisator, 33
- Standard Simplex, 47, 78
- Suspension
 - reduzierte, 20
 - unreduzierte, 8

- Tensorprodukt, 107
- Topologie
 - kompakt–offene, 8
- Torsionsprodukt, 109
- Trägersimplex, 49
- triangulierbar, 49
- Triangulierung, 49

- Überlagerung, 30
 - Homotopie-Liftungseigenschaft, 31
 - universelle, 36
- Überlagerungshomomorphismus, 34
- Untergruppe
 - erzeugte, 25
- Urysohn Funktion, 7

- Verkleben von Räumen, 5

- Wedge, 20
- Wirkung
 - strikt diskontinuierliche, 38
- wohlpunktiert, 45

- Zykel, 74