

# Analysis 3

Andreas Čap

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT WIEN, OSKAR-MORGENSTERN-  
PLATZ 1, 1090 WIEN

*Email address:* `Andreas.Cap@univie.ac.at`



## Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Kapitel 0. Vorbemerkungen – Analysis, Geometrie und Topologie	1
Kapitel 1. Kurven	5
Stetige Kurven	5
Differenzierbare Kurven	9
Kurvenintegrale	13
Geschlossene Kurven und Topologie	20
Kapitel 2. Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ und Differentialformen	33
Alternierende Multilinearformen	42
Differentialformen	50
Die äußere Ableitung	53
Kapitel 3. Integration über Teilmannigfaltigkeiten und Satz von Stokes	59
Integration von Differentialformen	59
Teilmannigfaltigkeiten mit Rand	73
Literaturverzeichnis	85



# Vorwort



## Vorbemerkungen – Analysis, Geometrie und Topologie

Die Vorlesung “Analysis 3” im neuen Bachelorcurriculum soll sich primär topologischen und geometrischen Aspekten der Analysis widmen und einen ersten Einblick in die Differentialgeometrie bieten. In den ersten beiden Teilen der Analysis-Vorlesung beschäftigt man sich mit Funktionen auf Teilmengen von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^n$ . Dabei spielen drei verschiedene Klassen von Funktionen die Hauptrolle, nämlich

- differenzierbare Funktionen (auf offenen Teilmengen)
- stetige Funktionen
- integrierbare Funktionen.

Vom Standpunkt der Vorlesungen über Analysis sind das zunächst einmal immer allgemeinere Klassen von Funktionen, weil differenzierbare Funktionen immer stetig und stetige Funktionen (zumindest auf kompakten Teilmengen) immer integrierbar sind. In den ersten Semestern wird aber auch schon deutlich, dass manche der Konzepte in einem viel allgemeineren Rahmen Sinn machen: Stetigkeit und verwandte Begriffe verallgemeinern sich problemlos auf *metrische Räume* und nach kleiner Umformulierung auf *topologische Räume*. Im ersten Fall betrachtet man Mengen mit einer Distanzfunktion, die nur ganz wenige Eigenschaften erfüllen muss um zu einer sinnvollen Version der Begriffe zu führen. Im zweiten Fall gibt man sich abstrakt eine Familie von “offenen Mengen” vor, die wieder nur ganz wenige Eigenschaften haben muss um sinnvolle Begriffe zu liefern. Andererseits zeigt die Vorlesung “Integration und Stochastik”, wie die Maßtheorie einen Begriff von integrierbaren Funktionen in einem sehr allgemeinen Rahmen liefert.

Eines der Ziele dieser Vorlesung wird sein, ein allgemeineres Setting für die Differentialrechnung zu entwickeln. Das wird allerdings kein abstraktes Setting wie in der Topologie und der Maßtheorie sein, sondern sich auf “schöne” Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ , sogenannte Teilmannigfaltigkeiten beschränken. Die einfachsten Beispiele solcher Teilmannigfaltigkeiten sind Sphären und allgemeiner glatte Flächen in  $\mathbb{R}^3$ . Ist die Differentialrechnung auf solchen Teilmengen einmal entwickelt, dann kann man sie verwenden, um die “Geometrie” solcher Teilmengen zu studieren. Intuitiv sollte man hier vor allem an verschiedene Konzepte von Krümmung denken. Neben der Differentialrechnung wird für solche Teilmannigfaltigkeiten auch die Integrationstheorie eine wichtige Rolle spielen, wobei andere Fragen im Mittelpunkt stehen werden als in der Maßtheorie. Einen ersten Einblick in diese Fragen sollten Sie schon bei der Besprechung von Kurvenintegralen in der Vorlesung “Analysis 2” bekommen haben. Sowohl die Differentialrechnung als auch die Integration auf Teilmannigfaltigkeiten hat dann interessante Wechselwirkungen mit der Topologie, die wir ausgiebig studieren werden.

**0.1. Wiederholung: Einige Grundbegriffe der Topologie.** Wir werden hier den Standpunkt von allgemeinen topologischen Räumen einnehmen. Wir arbeiten also mit einer beliebigen Menge  $X$ , für die man eine Familie  $\mathcal{T}$  von Teilmengen von  $X$  gewählt hat, die als *offene Teilmengen* bezeichnet werden. Man verlangt nur, dass die leere Menge und die Menge  $X$  in  $\mathcal{T}$  liegen und dass  $\mathcal{T}$  abgeschlossen unter beliebigen

Vereinigungen und endlichen Durchschnitten ist. Also muss für beliebige Mengen  $O_i \in \mathcal{T}$  auch  $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$  und für endlich viele Mengen  $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$  auch  $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{T}$  gelten. Dann nennt man  $(X, \mathcal{T})$  einen *topologischen Raum*. Insbesondere kann man auf jedem metrischen Raum  $(X, d)$  in natürlicher Weise eine Topologie, die *metrische Topologie* definieren. Dazu betrachtet man für  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\varepsilon > 0$  und einen Punkt  $x \in X$  die Kugel  $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$  und nennt eine Teilmenge  $O \subset X$  offen genau dann, wenn für jedes  $x \in O$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $B_\varepsilon(x) \subset O$  gilt.

Man nennt dann eine Teilmenge  $A$  in einem topologischen Raum *abgeschlossen*, wenn das Komplement  $X \setminus A$  offen ist, also in  $\mathcal{T}$  liegt. Ist  $x \in X$  ein Punkt, dann nennt man eine Teilmenge  $U \subset X$  eine *Umgebung* von  $x$ , wenn es eine offene Teilmenge  $O \in \mathcal{T}$  gibt, sodass  $x \in O$  und  $O \subset U$  gelten. Die Menge  $\mathcal{U}_x$  aller Umgebungen von  $x$  heißt das *Umgebungssystem* von  $x$ .

Mit diesen Begriffen lassen sich bereits die beiden fundamentalen Definitionen der Topologie formulieren. Betrachten wir eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$ , also einfach eine Funktion  $\mathbb{N} \rightarrow X$  die mit  $n \mapsto x_n$  bezeichnen. Für  $x \in X$  sagt man dann, dass die Folge  $x_n$  gegen  $x$  *konvergiert*, wenn es für jede Umgebung  $U \in \mathcal{U}_x$  einen Index  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $n \geq N$  immer  $x_n \in U$  gilt. Betrachten wir andererseits eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen und einen Punkt  $x \in X$ , dann ist  $f$  *stetig in  $x$* , wenn für jede Umgebung  $U \subset Y$  von  $f(x)$ , das Urbild  $f^{-1}(U) \subset X$  eine Umgebung von  $x$  ist. Man nennt die Funktion  $f$  stetig, wenn  $f$  stetig in jedem Punkt  $x \in X$  ist und zeigt leicht, dass  $f$  genau dann stetig ist, wenn für jede offene Teilmenge  $A \subset Y$  das Urbild  $f^{-1}(A) \subset X$  offen ist. Für die metrische Topologie auf einem metrischen Raum zeigt man leicht, dass diese Definitionen äquivalent zu den üblichen “ $\varepsilon$ - $\delta$ -Definitionen” für Konvergenz und Stetigkeit sind.

Eine fundamentale Tatsache der Topologie ist, dass eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf einer Menge  $X$  automatisch eine Topologie auf jeder Teilmenge  $Y \subset X$  induziert. Dazu kann man einfach  $\mathcal{T}_Y$  als  $\{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$  definieren und man verifiziert sofort, dass die geforderten Eigenschaften erfüllt sind. Wichtiger als diese explizite Beschreiben ist aber, dass diese sogenannte *Spurtopologie* auf  $Y$  eine schöne Eigenschaft hat. Betrachtet man die Inklusion  $i : Y \hookrightarrow X$ , dann ist diese nach Definition stetig. Für einen topologischen Raum  $Z$  kann man eine Funktion  $f : Z \rightarrow Y$  natürlich auch als Funktion nach  $X$  betrachten, die man (formal korrekter) als  $i \circ f : Z \rightarrow X$  schreiben kann. Aus der Definition folgt leicht, dass eine Komposition stetiger Funktionen selbst stetig ist. Ist also  $f : Z \rightarrow Y$  stetig, dann ist auch  $i \circ f$  stetig, also “ $f$  stetig als Funktion nach  $X$ ”. Die schöne Eigenschaft der Spurtopologie ist nun, dass auch die Umkehrung gilt. Ist also  $f : Z \rightarrow X$  eine stetige Funktion, sodass  $f(Z) \subset Y$  gilt, dann kann man  $f$  auch als Funktion nach  $Y$  betrachten und als solche ist  $f$  stetig bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_Y$ . Insbesondere können wir als *jede* Teilmenge eines metrischen Raumes und somit jede Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  in natürlicher Weise als topologischen Raum betrachten und haben damit natürliche Begriffe von Konvergenz und Stetigkeit verfügbar.

**0.2. Wiederholung: Kompaktheit.** Vom Standpunkt der Anwendungen auf die Analysis ist Kompaktheit eine der beiden wichtigsten topologischen Eigenschaften. Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum, dann ist eine *offene Überdeckung* von  $X$  eine Familie  $\{O_i : i \in I\}$  von offenen Mengen, sodass die Vereinigung  $\cup_{i \in I} O_i$  die ganze Menge  $X$  ist. Man nennt den Raum  $X$  *kompakt*, wenn es für jede offene Überdeckung  $\{O_i : i \in I\}$  eine *endliche Teilüberdeckung* gibt, also endlich viele Indizes  $i_1, \dots, i_N$



sodass  $X = \bigcup_{j=1}^N O_{i_j}$  gilt. Man nennt eine Teilmenge  $K \subset X$  *kompakt* wenn der topologische Raum  $(K, \mathcal{T}_K)$  kompakt ist. Äquivalent kann man das durch offene Überdeckungen und endliche Teilüberdeckungen formulieren (wobei man nun nur verlangt, dass  $K \subset \bigcup \dots$  gilt). Man zeigt leicht, dass eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raumes selbst kompakt ist. Eine Umkehrung dieser Eigenschaft ist nur unter einer schwachen zusätzlichen Bedingung verfügbar. Man nennt einen topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$  einen *Hausdorffraum*, wenn für zwei verschiedene Punkte  $x, y \in X$  (d.h. mit  $x \neq y$ ) es immer eine Umgebung  $U$  von  $x$  und eine Umgebung  $V$  von  $y$  gibt, sodass  $U \cap V = \emptyset$  gilt. Insbesondere ist diese Bedingung für die metrische Topologie auf einem metrischen Raum immer erfüllt. Sie ist auch insofern wichtig, als sie sicherstellt, dass eine Folge höchstens gegen einen Punkt konvergieren kann. Die oben angeführte Umkehrung sagt nun, dass eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes automatisch abgeschlossen ist. Ein fundamentales Resultat, das aus den Vorlesungen über Analysis bekannt ist, ist der *Satz von Heine-Borel*, der kompakte Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  charakterisiert: Eine Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt wenn sie abgeschlossen und (bezüglich der üblichen euklidischen Distanz) beschränkt ist.

Kompaktheit ist in sehr schöner Weise mit stetigen Funktionen verträglich. Sei  $K$  ein kompakter topologischer Raum,  $X$  ein beliebiger topologischer Raum und  $f : K \rightarrow X$  eine stetige Funktion. Dann ist die Teilmenge  $f(K) \subset X$  kompakt. Das führt direkt zum *Satz vom Maximum*, der viele Anwendungen in der Analysis hat, indem man  $X = \mathbb{R}$  setzt. Dann ist  $f(K) \subset \mathbb{R}$  nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt und besitzt daher ein Supremum und ein Infimum und abgeschlossen, also liegen diese Elemente in der Teilmenge. Also nimmt  $f$  auf dem Raum  $K$  ein Maximum und ein Minimum an. Eine weitere fundamentale Anwendung von Kompaktheit formulieren wir hier nur für metrische Topologien: Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $K \subset X$  eine kompakte Teilmenge (für die metrische Topologie). Dann besitzt jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die Werte in  $K$  hat, eine konvergente Teilfolge (deren Limes dann ebenfalls in  $K$  liegt).

**0.3. Wiederholung: Zusammenhang.** Für unsere Zwecke wird der Begriff des Zusammenhanges noch wichtiger sein als die Kompaktheit, vor allem weil er interessante Verallgemeinerungen zulässt. Eine *Disjunktion* eines topologischen Raumes  $X$  besteht aus zwei nichtleeren offenen Teilmengen  $U, V \subset X$ , sodass  $U \cap V = \emptyset$  und  $U \cup V = X$  gilt. Man nennt den Raum  $X$  *zusammenhängend*, wenn er keine Disjunktion besitzt. Wie zuvor nennt man eine Teilmenge  $A \subset X$  *zusammenhängend*, wenn der topologische Raum  $(A, \mathcal{T}_A)$  zusammenhängend ist, das kann auch über ein Analogon von Disjunktionen definiert werden. Aus der Definition folgt leicht, dass auch Zusammenhang mit stetigen Funktionen in sehr schöner Weise verträglich ist: Ist  $X$  ein zusammenhängender topologischer Raum und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Funktion, dann ist die Teilmenge  $f(X) \subset Y$  zusammenhängend. Grundlage für viele Anwendungen in der Analysis ist hier, dass die zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  genau die Intervalle sind. Das führt dann direkt zur allgemeinen Version des *Zwischenwertsatzes*: Sei  $X$  ein zusammenhängender topologischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und seien  $a < b \in \mathbb{R}$  sodass  $a, b \in f(X)$  gilt. Dann liegt auch jedes  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b$  in  $f(X)$ .

Einen guten Hinweis auf die Anwendbarkeit des Zusammenhangsbegriffs in der Analysis gibt der folgende in Dimension 1 einfache Satz, den wir später auf höhere Dimensionen verallgemeinern werden. Vergleicht man dieses Resultat mit dem aus der Analysis Vorlesung bekannten Banachschen Fixpunktsatz, dann sieht man, dass das Resultat einen deutlich anderen Charakter hat. Insbesondere zeigt der Beweis nicht, wie man

einen Fixpunkt finden könnte, man sieht nur, dass eine Funktion ohne Fixpunkt zu einem Widerspruch führen würde.

**PROPOSITION 0.3** (Brouwer'scher Fixpunktsatz in Dimension 1). *Sei  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  eine stetige Funktion. Dann gibt es einen Punkt  $x_0 \in [-1, 1]$  sodass  $f(x_0) = x_0$  gilt.*

**BEWEIS.** Man kann den Beweis leicht führen, indem man den Zwischenwertsatz auf die Funktion  $g(x) := f(x) - x$  anwendet. In Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen geben wir einen anderen Beweis: Nehmen wir indirekt an, dass  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  eine stetige Funktion ist, die  $f(x) \neq x$  für alle  $x \in [-1, 1]$  erfüllt. Dann ist  $x - f(x) \neq 0$  für alle  $x$ , also können wir eine stetige Funktion  $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $F(x) := \frac{x-f(x)}{|x-f(x)|}$  definieren. Nach Konstruktion gilt  $F(x) = \pm 1$  für alle  $x$ , also hat  $F$  Werte in  $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ . Nun gilt aber  $f(-1) > -1$  und  $f(1) < 1$  gelten, was sofort  $F(-1) = -1$  und  $F(1) = 1$  impliziert. Das liefert aber einen Widerspruch, weil  $[-1, 1]$  zusammenhängend ist, während  $\{-1, 1\}$  nicht zusammenhängend ist.  $\square$

Natürlich ist hier nicht relevant, dass wir das Intervall  $[-1, 1]$  betrachten, das Argument funktioniert analog für jedes abgeschlossene Intervall  $[a, b]$ . Es funktioniert aber offensichtlich nicht für  $\mathbb{R}$  (man nehme  $f(x) = x + 1$ ) und daraus folgt leicht, dass der Satz auch nicht für offene Intervalle  $(a, b)$  gilt (siehe Übungen). Auch für halboffene Intervalle liefern die Funktionen  $f(x) = \frac{x}{2}$  auf  $(0, 1]$  und  $[-1, 0)$  Gegenbeispiele.

Wir werden diesen Satz später auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Das wesentliche Argument im Beweis ist, dass es keine stetige Funktion  $F : [-1, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$  geben kann, deren Einschränkung auf  $\{-1, 1\}$  die Identität ist. Nun ist aber  $[-1, 1]$  der Einheitsball in  $\mathbb{R}$  und  $\{-1, 1\}$  die zugehörige Einheitssphäre. Betrachten wir allgemein den Einheitsball  $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  und die Einheitssphäre  $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ . Wenn man zeigen kann, dass es keine stetige Funktion  $F : B^n \rightarrow S^{n-1}$  gibt, sodass  $F|_{S^{n-1}} = \text{id}$  ist, dann kann man einen ganz analogen Widerspruchsbeweis wie oben führen: Für eine Funktion  $f : B^n \rightarrow B^n$  sodass  $f(x) \neq x$  für alle  $x \in B^n$  gilt, definiert man  $F : B^n \rightarrow S^{n-1}$  indem für  $x \in B^n$  den Strahl von  $f(x)$  in Richtung  $x$  betrachtet und mit  $S^{n-1}$  schneidet. Dann gilt nach Konstruktion  $F(x) = x$  für alle  $x \in S^{n-1}$  und man kann für  $F$  eine explizite Formel angeben, die zeigt, dass  $F$  stetig ist. Der Schlüssel zur Nicht-Existenz von  $F$  liegt darin, dass  $B^n$  und  $S^{n-1}$  als topologische Räume hinreichend verschieden sind. Für  $n = 1$  folgt das einfach, weil  $B^1$  zusammenhängend ist und  $S^0$  nicht, für  $n > 1$  sind subtilere topologische Begriffe notwendig.

## KAPITEL 1

### Kurven

Kurven bilden die einfachsten geometrischen Objekte, also beginnen wir mit ihrem Studium. Auch hier treten aber schon einige Feinheiten auf, insbesondere im Unterschied zwischen der Kurve als Funktion und dem Bild dieser Funktion als geometrisches Objekt.

#### Stetige Kurven

**1.1. Stetige Kurven und Wegzusammenhang.** Eine *stetig parametrisierte Kurve* in einem topologischen Raum  $X$  ist einfach eine stetige Funktion von einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  nach  $X$ . Ist  $I = [a, b]$ , dann nennt man  $c(a) \in X$  den *Anfangspunkt* der Kurve und  $c(b) \in X$  den *Endpunkt* der Kurve und spricht dann auch von einer Kurve *von  $c(a)$  nach  $c(b)$* . Stetige Kurven führen dann direkt zu einer einfacheren Version des Zusammenhangsbegriffs.

**DEFINITION 1.1.** (1) Ein topologischer Raum  $X$  heißt *wegzusammenhängend* oder *bogenzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte  $x, y \in X$  eine stetige Kurve in  $X$  mit Anfangspunkt  $x$  und Endpunkt  $y$  gibt.

(2) Ein topologischer Raum  $X$  heißt *lokal bogenzusammenhängend*, wenn es für jeden Punkt  $x \in X$  und jede Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$  eine bogenzusammenhängende Umgebung  $V$  von  $x$  in  $X$  gibt, die  $V \subset U$  erfüllt.

(3) Für einen Punkt  $x$  in einem topologischen Raum  $X$  sei die *Bogenkomponente*  $\mathcal{B}_x$  von  $x$  die Menge aller Punkte  $y \in X$ , sodass es eine stetige Kurve von  $x$  nach  $y$  gibt.

Offensichtlich sind  $\mathbb{R}^n$  und jede konvexe Teilmenge  $C \subset \mathbb{R}^n$  wegzusammenhängend. Damit sind insbesondere beliebige Kugeln in  $\mathbb{R}^n$  wegzusammenhängend und somit ist  $\mathbb{R}^n$  und jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  lokal bogenzusammenhängend. Wir beobachten auch, dass wir für stetige Kurven  $c_1 : [a, b] \rightarrow X$  und  $c_2 : [b, d] \rightarrow X$  mit  $c_1(b) = c_2(b)$

eine stetige Kurve  $c : [a, d] \rightarrow X$  durch  $c(t) := \begin{cases} c_1(t) & t \in [a, b] \\ c_2(t) & t \in (b, d] \end{cases}$  definieren können.

Also kann man stetige Kurven problemlos "hintereinander hängen".

Einige Grundresultate über dieses Konzept und die Beziehung zum Zusammenhang sind leicht zu beweisen:

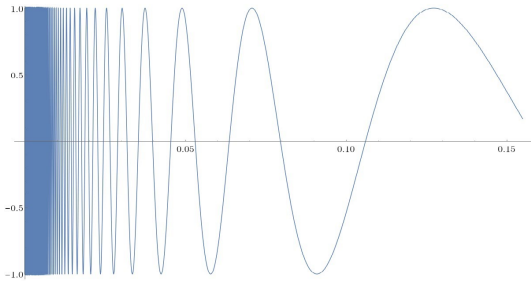
**PROPOSITION 1.1.** (1) *Ist  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum, dann ist  $X$  zusammenhängend.*

(2) *Sei  $X$  lokal bogenzusammenhängend. Dann ist für jeden Punkt  $x \in X$  die Bogenkomponente  $\mathcal{B}_x \subset X$  offen und abgeschlossen in  $X$ . Ist  $X$  zusammenhängend, dann ist  $X$  wegzusammenhängend.*

**BEWEIS.** (1) Nehmen wir indirekt an, dass wir eine Disjunktion  $X = U \cup V$  von  $X$  finden. Dann ist  $U, V \neq \emptyset$  also können wir Punkte  $x \in U$  und  $y \in V$  wählen. Nach Voraussetzung gibt es eine stetige Kurve  $c : [a, b] \rightarrow X$  mit  $c(a) = x$  und  $c(b) = y$ . Dann ist aber  $[a, b] = c^{-1}(U) \cup c^{-1}(V)$  eine Disjunktion von  $[a, b]$  und das liefert einen Widerspruch, weil  $[a, b]$  zusammenhängend ist.

(2) Sei  $y \in \mathcal{B}_x$  ein Punkt. Dann besitzt  $y$  eine wegzusammenhängende Umgebung  $V \subset X$ . Durch Hintereinanderhängen von Kurven sieht man sofort, dass  $V \subset \mathcal{B}_x$  gilt und da  $y \in \mathcal{B}_x$  beliebig war, ist  $\mathcal{B}_x \subset X$  offen. Das gleiche Argument zeigt aber auch, dass für  $z \in X$  aus  $\mathcal{B}_z \cap \mathcal{B}_x \neq \emptyset$  schon  $\mathcal{B}_z \subset \mathcal{B}_x$  und damit  $\mathcal{B}_z = \mathcal{B}_x$  folgt. Damit folgt aber, dass  $X \setminus \mathcal{B}_x$  eine Vereinigung von Mengen der Form  $\mathcal{B}_z$  und damit ebenfalls offen ist, also ist  $\mathcal{B}_x$  abgeschlossen. Ist  $X$  zusammenhängend, dann folgt  $\mathcal{B}_x = X$  und somit ist  $X$  wegzusammenhängend.  $\square$

**BEISPIEL 1.1.** Für offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sind Zusammenhang und Wegzusammenhang somit äquivalent. Für allgemeine Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  ist die Situation nicht so einfach und schon für  $n = 2$  gibt es ein Beispiel einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ , die zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist (“the topologist’s sine curve”): In  $\mathbb{R}^2$  betrachten wir die Teilmenge  $A := \{(t, \sin(1/t)) : t > 0\}$  die offensichtlich wegzusammenhängend und damit nach Proposition 1.1 zusammenhängend ist. Dann setzen wir  $B := A \cup \{(0, s) : s \in [-1, 1]\}$ .



Natürlich finden wir für jeden Punkt  $(0, s)$  mit  $s \in [-1, 1]$  eine Folge in  $A$ , die gegen  $(0, s)$  konvergiert, etwa  $((t_k, \sin(1/t_k)))_{k \in \mathbb{N}}$  wobei  $\sin(1/t_0) = s$  und  $t_k := (\frac{1}{t_0} + 2k\pi)^{-1}$ . Also ist  $B$  im Abschluss  $\overline{A}$  von  $A$  enthalten (und tatsächlich gilt  $B = \overline{A}$ ) und aus Resultaten der Topologie folgt, dass  $B$  zusammenhängend ist: Sind nämlich  $U, V \subset B$

offen, sodass  $U \cap V = \emptyset$  und  $U \cup V = B$  gilt, dann definieren wir  $f : B \rightarrow \{0, 1\}$  durch

$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & x \in V \end{cases}$  und es folgt sofort, dass  $f$  stetig ist. Damit ist aber auch die

Einschränkung  $f|_A : A \rightarrow \{0, 1\}$  stetig und weil  $A$  zusammenhängend ist, muss  $f$  konstant auf  $A$  sein. Aus der Beobachtung über Folgen von oben folgt damit sofort, dass  $f$  konstant auf  $B$  ist, also  $U = \emptyset$  oder  $V = \emptyset$  gelten muss.

Nehmen wir indirekt an, dass  $B$  wegzusammenhängend ist. Dann finden wir eine stetige Kurve  $c : [a, b] \rightarrow B$ , die  $(1/2\pi, 0)$  mit  $(0, 0)$  verbindet und wir schreiben  $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ . Betrachten wir nun die Menge  $S := \{t \in [a, b] : \forall s \in [a, t] : c_1(s) > 0\}$ . Offensichtlich ist  $S \neq \emptyset$  also existiert  $\tau_0 := \sup(S)$  und aus der Stetigkeit von  $c_1$  folgt sofort, dass  $c_1(\tau_0) = 0$  gelten muss. Aus der Stetigkeit von  $c$  folgt weiters, dass  $c_2(\tau_0) = \lim_{t \rightarrow \tau_0} c_2(t)$  gilt. Sei nun  $v \in [-1, 1]$  beliebig und  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  wie oben eine monoton fallende Folge mit  $t_0 \leq 1/2\pi$ ,  $t_k \rightarrow 0$  und  $\sin(1/t_k) = v$  für alle  $k$ . Wegen des Zwischenwertsatzes finden wir  $s_0 \in (a, \tau_0)$ , sodass  $c_1(s_0) = t_0$  gilt, dann  $s_1 \in (s_0, \tau_0)$  sodass  $c_1(s_1) = t_1$  gilt. Induktiv liefert das eine monoton wachsende Folge  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $[a, \tau_0]$  sodass  $c_1(s_k) = t_k$  und damit  $c_2(s_k) = v$  gilt. Diese Folge muss gegen ihr Supremum konvergieren und wegen  $t_k \rightarrow 0$  muss  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \tau_0$  gelten. Da  $c_2(s_k) = v$  für alle  $k$  gilt und  $v$  in der Konstruktion beliebig war, sehen wir, dass der Limes  $\lim_{t \rightarrow \tau_0} c_2(t)$  nicht existieren kann was einen Widerspruch liefert. Somit kann  $B$  nicht wegzusammenhängend sein.

**1.2. Rektifizierbarkeit und Bogenlänge.** Als nächstes wollen wir versuchen, für stetige Kurven in  $\mathbb{R}^n$  eine Bogenlänge zu definieren. Die Idee dazu ist relativ einfach: Wenn eine stetige Kurve zwei Punkte  $x, y \in \mathbb{R}^n$  verbindet, dann sollte ihre Bogenlänge zumindest der Abstand der beiden Punkte sein. Wendet man das auf Stücke der Kurve an, dann führt das zu folgender Überlegung für eine Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ : Betrachten wir endlich viele Punkte  $t_0, \dots, t_N \in I$  mit  $t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N$ , dann sollte die

Bogenlänge von  $c$  zumindest  $\sum_{k=0}^{N-1} d(c(t_k), c(t_{k+1}))$  sein. Das motiviert folgende Definition.

DEFINITION 1.2. (1) Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig parametrisierte Kurve. Dann nennt man  $c$  *rektifizierbar*, wenn die Menge

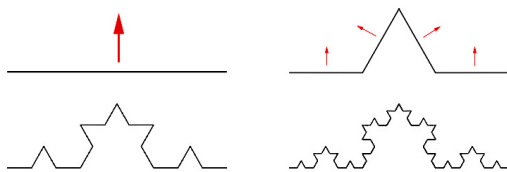
$$(1.1) \quad \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} d(c(t_k), c(t_{k+1})) : N \in \mathbb{N}, t_i \in I, t_0 < t_1 < \dots < t_N \right\} \subset \mathbb{R}$$

nach oben beschränkt ist. Ist dass der Fall, dann nennt man das Supremum von (1.1) die *Bogenlänge*  $L(c) \in \mathbb{R}$  von  $c$ .

Betrachten wir eine Familie  $t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N$  wie in Definition 1.2 und nehmen wir an, dass wir einen zusätzlichen Punkt  $s$  einfügen, wobei  $s < t_0$  oder  $t_i < s < t_{i+1}$  für eine  $i = 0, \dots, N - 1$  oder  $t_N < s$  gilt. Dann sehen wir aus der Nichtnegativität der Distanz und der Dreiecksungleichung, dass die Summe der “neuen” Distanzen durch die ursprüngliche Summe nach unten beschränkt ist. Man kann also immer Punkte einfügen ohne die Summe zu verkleinern. Das hat einige unmittelbare Konsequenzen: Ist  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  rektifizierbar und  $J \subset I$  ein Teilintervall, dann ist  $c|_J : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  rektifizierbar. Insbesondere können wir für eine rektifizierbare Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $a, b \in I$  mit  $a < b$  die stetige Kurve  $c|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachten und  $L_a^b(c)$  als ihre Bogenlänge definieren. Für  $a < b < d \in I$  folgt dann leicht, dass  $L_a^d(c) = L_a^b(c) + L_b^d(c)$  gilt (siehe Übungen). Schließlich kann man sich für  $I = [a, b]$  in der Menge (1.1) immer auf den Fall  $t_0 = a$  und  $t_N = b$  einschränken ohne den Begriff der Rektifizierbarkeit oder die Bogenlänge der Kurve zu ändern.

Insbesondere ist für eine rektifizierbare Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $a, b \in I$  mit  $a < b$  natürlich  $d(c(a), c(b)) \leq L_a^b(c)$  und man sieht leicht, dass für Kurven der Form  $c(t) = x + tv$  mit  $x, v \in \mathbb{R}^n$  Gleichheit gilt. Der Begriff der Rektifizierbarkeit und der Bogenlänge macht natürlich völlig analog in metrischen Räumen Sinn und auch dort gilt  $d(c(a), c(b)) \leq L_a^b(c)$ . Aber auch im Fall von wegzusammenhängenden metrischen Räumen ist unklar ob es Kurven gibt, für die Gleichheit gilt. Überlegungen dieser Art führen zur Definition interessanter Klassen von speziellen metrischen Räumen.

BEISPIEL 1.2. Ist  $I \subset \mathbb{R}$  offen oder halboffen, dann sieht man ganz leicht, dass es Beispiele von stetigen (und sogar differenzierbaren) Kurven  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, die nicht rektifizierbar sind. Für unbeschränktes  $I$  liefern Geraden ein Beispiel, für beschränktes  $I$  können wir etwa  $c(t) = (t, \sin(1/t))$  als Kurve  $(0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  betrachten (siehe Übungen). Schwieriger ist die Frage der Rektifizierbarkeit im Fall eines kompakten Intervalls  $[a, b]$ . Wir werden in Kürze sehen, dass jede stetig differenzierbare Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  rektifizierbar ist. Für stetige Kurven gibt es aber ein Gegenbeispiel, das (in leicht abgewandelter Form) als *Schneeflockenkurve* bekannt ist. In Beschreibungen dieses Beispiels findet man üblicherweise Skizzen wie die folgende, zusammen mit der Behauptung,



das eine unendliche Iteration dieser Konstruktion zu einer “unendlich langen” Kurve führt. Aus dieser Beschreibung ist nicht klar, wie man tatsächlich zu einer stetig parametrisierten, nicht rektifizierbaren Kurve

kommen soll, aber die nötigen Überlegungen lassen sich leicht hinzufügen: Wir konstruieren eine Folge stetiger Funktionen  $c_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $i \in \mathbb{N}$  wie folgt: Wir setzen  $c_0(t) = (t, 0)$ , was dem ersten Bild entspricht. Die Kurve  $c_1$  soll auf  $[0, 1/3]$  und  $[2/3, 1]$  mit  $c_0$  übereinstimmen, auf  $[1/3, 1/2]$  setzen wir  $c_1(t) := (t, 2(t - 1/3))$  und auf  $[1/2, 2/3]$

definieren wir  $c_1(t) := (t, 1/3 - 2(t - 1/2))$ . Das liefert eine (offensichtlich stetige) Parametrisierung des zweiten Bildes, sodass  $c_1(t)$  immer vertikal über  $c_0(t)$  liegt. Insbesondere folgt  $|c_1(t) - c_0(t)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{3}$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Im nächsten Schritt konstruieren wir  $c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  indem wir jeweils auf dem mittleren Drittel jeder der 4 von  $c_1$  durchlaufenen Strecken einen Term addieren, der orthogonal auf die jeweilige Strecke steht. Aus dieser Konstruktion folgt sofort, dass  $|c_2(t) - c_1(t)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{9}$  gilt. Induktiv erhalten wir stetige Kurven  $c_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , sodass  $|c_i(t) - c_{i-1}(t)| < \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{3^i}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt. Für  $n \leq m \in \mathbb{N}$  folgt induktiv sofort, dass  $|c_m(t) - c_n(t)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{3^k}$  gilt. Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe  $\sum_k \frac{1}{3^k}$  folgt damit sofort, dass für jedes  $t \in [0, 1]$  die Folge  $(c_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}^2$  ist.

Damit können wir eine Funktion  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch  $c(t) := \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(t)$  definieren und natürlich konvergiert die Funktionenfolge  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen  $c$ . Aus der Konstruktion ist aber klar, dass die Folge  $(c_i)$  gleichmäßig gegen  $c$  konvergiert, also definiert  $c$  tatsächlich eine stetig parametrisierte Kurve in  $\mathbb{R}^2$ . Also bleibt noch zu zeigen, dass die Kurve  $c$  tatsächlich nicht rektifizierbar ist. Dazu überlegt man einfach, dass für die "Eckpunkte" von  $c_1$ , also die Punkte  $c_1(t)$  mit  $t \in A_1 := \{0, 1/3, 1/2, 2/3, 1\}$  nach Konstruktion  $c_i(t) = c_1(t)$  für alle  $i \geq 1$  gilt. Damit folgt aber auch  $c(t) = c_1(t)$  für diese Punkte und die Summe der Abstände der aufeinander folgenden Punkte ist natürlich  $4/3$ . Analog gilt liegen die Eckpunkte von  $c_2$  auch auf allen weiteren  $c_i$  und damit auf  $c$  und die Summe der Abstände der aufeinander folgenden Punkte ist  $(4/3)^2$ . Iterativ finden wir für jedes  $k \in \mathbb{N}$  Punkte auf  $c$ , für die die Summe der Abstände aufeinander folgender Punkte  $(4/3)^k$  ist. Damit folgt aber sofort, dass die Menge (1.1) für die Kurve  $c$  nicht nach oben beschränkt, also  $c$  nicht rektifizierbar ist.

**1.3. Stetige Reparametrisierungen.** Als nächstes wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob die Bogenlänge einer Kurve nur vom Bild der Kurve oder auch von der gewählten Parametrisierung abhängt. Man kann sofort sehen, dass die Parametrisierung durchaus eine Rolle spielt, indem man etwa mit einer Parametrisierung mehrmals um den Einheitskreis herumläuft. Alle diese Parametrisierungen liefern das gleiche Bild aber natürlich erhält man bei mehreren Umläufen ein Vielfaches der Bogenlänge. Interessanter wird die Frage, wenn wir uns zum Beispiel auf injektive stetige Parametrisierungen einer Kurve einschränken. Für ein abgeschlossenes Intervall  $[a, b]$  und eine injektive stetige Funktion  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist dann aber  $c$  eine stetige Bijektion von  $[a, b]$  auf die Teilmenge  $c([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$ . Wegen der Kompaktheit von  $[a, b]$  muss  $c$  ein Homöomorphismus sein, also ist auch die inverse Funktion  $c^{-1} : c([a, b]) \rightarrow [a, b]$  stetig. Ist  $\tilde{c} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine weitere injektive stetige Funktion mit dem gleichen Bild, dann können wir  $\varphi : c^{-1} \circ \tilde{c} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  bilden, was ebenfalls ein Homöomorphismus ist und natürlich ist dann  $\tilde{c} = c \circ \varphi$ . Das motiviert die folgende Definition.

**DEFINITION 1.3.** Seien  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig parametrisierte Kurven. Man nennt  $\tilde{c}$  eine *Reparametrisierung* von  $c$ , wenn es einen Homöomorphismus  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$  gibt, sodass  $\tilde{c} = c \circ \varphi$  gilt.

Aus der Definition folgt sofort, dass Reparametrisierung zu sein eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller stetig parametrisierten Kurven in  $\mathbb{R}^n$  definiert. Weiters verifiziert man leicht (siehe Übungen) dass jeder Homöomorphismus zwischen zwei Intervallen streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Die Verträglichkeit der Bogenlänge mit Reparametrisierungen ist nun leicht zu beweisen.

**PROPOSITION 1.3.** *Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig parametrisierte Kurve,  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$  ein Homöomorphismus und  $\tilde{c} := c \circ \varphi$  die entsprechende Reparametrisierung von  $c$ . Ist  $c$  rektifizierbar, dann ist auch  $\tilde{c}$  rektifizierbar und  $L(c) = L(\tilde{c})$ .*

**BEWEIS.** Nehmen wir zunächst an, dass  $\varphi$  streng monoton wachsend ist. Betrachten wir  $N \in \mathbb{N}$  und  $\tilde{t}_0, \dots, \tilde{t}_N \in \tilde{I}$  mit  $\tilde{t}_0 < \dots < \tilde{t}_N$  und setzen  $t_i = \varphi(\tilde{t}_i)$ . Dann gilt  $t_i \in I$  und  $t_0 < \dots < t_N$  und natürlich ist  $c(t_i) = \tilde{c}(\tilde{t}_i)$  für alle  $i$ . Ist  $c$  rektifizierbar, dann erhalten wir sofort  $\sum_{i=1}^N d(\tilde{c}(\tilde{t}_i), \tilde{c}(\tilde{t}_{i-1})) \leq L(c)$ , also ist  $\tilde{c}$  rektifizierbar und  $L(\tilde{c}) \leq L(c)$ . Ist umgekehrt  $0 < \ell < L(c)$ , dann finden wir  $N$  und Punkte  $t_i$  sodass  $\ell < \sum_{i=1}^N d(c(t_i), c(t_{i-1}))$  gilt und durch betrachten der Punkte  $\tilde{t}_i := \varphi^{-1}(t_i)$  erhalten wir sofort, dass  $L(\tilde{c}) > \ell$  gilt, was die Behauptung beweist.  $\square$

## Differenzierbare Kurven

**1.4. (Stetig) differenzierbare Parametrisierungen.** Betrachten wir ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und eine stetige Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die auf dem Inneren  $I^\circ$  von  $I$  differenzierbar ist. Natürlich können wir  $c$  in Komponenten als  $c = (c_1, \dots, c_n)$  schreiben und die Differenzierbarkeit komponentenweise definieren. Allerdings hat es Vorteile, die Differenzierbarkeit direkt zu definieren, analog wie man das für reellwertige Funktionen macht. Das liefert auch direkt eine intuitive Interpretation der Ableitung  $c'(t)$  in jedem Punkt  $t \in I^\circ$ . Für hinreichend kleine Zahlen  $0 \neq h \in \mathbb{R}$  können wir einfach  $\frac{1}{h}(c(t+h) - c(t))$  bilden, also den Skalar  $1/h$  mit dem Vektor  $c(t+h) - c(t)$  multiplizieren. Dann verlangt man, dass der Limes dieses Ausdrucks für  $h \rightarrow 0$  existiert und definiert die Ableitung als  $c'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(c(t+h) - c(t))$ . Stellt man sich den Parameter  $t$  als Zeit vor und  $c$  als die Bahn eines Teilchens, dann liefert das sofort die Interpretation von  $c'(t)$  als "Momentangeschwindigkeit" zum Zeitpunkt  $t$ . Natürlich ist diese Momentangeschwindigkeit ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$ .

In vielen Situationen werden wir stärkere Bedingungen als Differenzierbarkeit verlangen müssen, die dann analoge Interpretationen erlauben. Verlangen wir etwa, dass  $c$  eine  $C^1$ -Funktion ist (also  $c' : I^\circ \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig ist), dann bedeutet das gerade, dass wir zusätzlich Stetigkeit der Momentangeschwindigkeit verlangen. Das ist insbesondere erfüllt, wenn  $c$  zwei mal differenzierbar ist und in diesem Fall kann man die zweite Ableitung  $c''(t)$  als Momentanbeschleunigung interpretieren. Die Bedingung, dass  $c$  eine  $C^2$ -Kurve ist, bedeutet also gerade, dass man Stetigkeit der Momentanbeschleunigung fordert und so weiter.

Für eine differenzierbare Kurve  $c$  ist dann natürlich der Betrag der Momentangeschwindigkeit durch  $\|c'(t)\| = \sqrt{\langle c'(t), c'(t) \rangle}$  gegeben. Physikalisch ist plausibel, dass man den in einem Zeitintervall zurückgelegten Weg als Integral dieses Betrags über das entsprechende Intervall berechnen kann, und zumindest im Fall einer  $C^1$ -Kurve ist dieses Integral auf jeden Fall definiert. Es stellt sich heraus, dass das tatsächlich funktioniert, aber dazu müssen wir noch ein wenig an Technik bereitstellen.

Der Begriff eines (bestimmten) Integrals macht analog wie für reellwertige Funktionen auch für Kurven in  $\mathbb{R}^n$  Sinn. Wie oben könnte man das Integral einer Kurve komponentenweise definieren, aber es ist auch hier günstiger, eine direkte Definition zu wählen. Nachdem es für unsere Zwecke genügt, stetige Kurven zu integrieren, kann man das einfach über Riemann-Summen machen. Das hat den technischen Vorteil, dass eine wichtige Zutat für unser nächstes Resultat offensichtlich wird. Betrachten wir eine stetige Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Um eine Riemann-Summe zu bilden benötigen wir eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$  und Zwischenpunkte  $\tilde{t}_i \in [t_i, t_{i+1}]$  für  $i = 0, \dots, N-1$ . Dann bildet man den Ausdruck  $\sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i)c(\tilde{t}_i)$ , der wieder ein

Vektor in  $\mathbb{R}^n$  ist und verlangt, dass diese Ausdrücke in geeigneter Weise konvergieren, was für stetiges  $c$  immer der Fall ist. Dann erhalten wir aber natürlich

$$\left\| \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) c(\tilde{t}_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) \|c(\tilde{t}_i)\|.$$

Die rechte Seite ist aber eine Riemannsumme für die stetige reellwertige Funktion  $t \mapsto \|c(t)\|$ , also erhalten wir sofort

$$(1.2) \quad \left\| \int_a^b c(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|c(t)\| dt.$$

Andererseits folgt aus der direkten Definition leicht, dass das Integral  $\int_a^b c(t) dt$  auch komponentenweise berechnet werden kann.

**PROPOSITION 1.4.** *Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Funktion. Dann ist für  $a, b \in I$  mit  $a < b$  die Kurve  $c|_{[a,b]}$  rektifizierbar und  $L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$ . Damit ist die Funktion  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch  $t \mapsto L_a^t(c)$  gegeben ist, differenzierbar mit Ableitung  $t \mapsto \|c'(t)\|$ , also sogar  $C^1$ .*

**BEWEIS.** Wählen wir  $N \in \mathbb{N}$  und  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$ . Dann liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sofort  $c(t_{i+1}) - c(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} c'(t) dt$ . Mit Hilfe von (1.2) erhalten wir daraus

$$d(c_i(t), c_{i+1}(t)) = \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|c'(t)\| dt.$$

Summieren von  $i = 0$  bis  $N-1$  zeigt dann direkt, dass die Menge (1.1) aus Definition 1.2 durch  $\int_a^b \|c'(t)\| dt$  nach oben beschränkt ist. Da  $\|c'\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist, ist dieses Integral endlich, also ist  $c|_{[a,b]}$  rektifizierbar und  $L_a^b(c) \leq \int_a^b \|c'(t)\| dt$ .

Um die Gleichheit zu beweisen wählen wir  $\varepsilon > 0$ . Als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  ist  $c'$  gleichmäßig stetig, also finden wir ein  $\delta > 0$ , sodass aus  $|t - s| < \delta$  immer  $\|c'(t) - c'(s)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  folgt. Betrachten wir nun eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$  wie oben, sodass  $|t_{i+1} - t_i| < \delta$  für alle  $i$  gilt. Dann folgt  $\|c'(t) - c'(t_i)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  für alle  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  und wegen (1.2) liefert Integrieren

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} c'(t) dt - c'(t_i)(t_{i+1} - t_i) \right\| < (t_{i+1} - t_i) \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Insbesondere folgt daraus  $\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \geq \|c'(t_i)\|(t_{i+1} - t_i) - (t_{i+1} - t_i) \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  und aufsummieren liefert  $\sum \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \geq \sum_i \|c'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) - \varepsilon/2$ . Aber der erste Term ist eine Riemann Summe für  $\int_a^b \|c'(t)\| dt$  und durch Verfeinern kann man erreichen, dass diese  $\varepsilon/2$ -nahe am Integral liegt. Das führt zu einer Unterteilung, für die die Summen der Abstände aufeinander folgender Punkt zumindest gleich  $\int_a^b \|c'(t)\| dt - \varepsilon$  ist. Das zeigt  $L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$  und der Rest des Satzes folgt offensichtlich.  $\square$

Insbesondere zeigt dieses Resultat, dass man für die Schneeflockenkurve aus Beispiel 1.2 keine stetig differenzierbare Parametrisierung finden kann. Das klingt vielleicht nicht überraschend, weil ja (für  $i \geq 1$ ) schon die Kurven  $c_i$  in der Konstruktion "Ecken" haben, was nicht der intuitiven Vorstellung einer differenzierbaren Kurve entspricht. Wie wir gleich sehen werden, ist diese intuitive Vorstellung nicht richtig und man muss weitere Einschränkungen treffen um "geometrisch schöne" Bilder zu erhalten. Insbesondere kann jede der Kurven  $c_i$  sehr wohl stetig differenzierbar parametrisiert werden.



**1.5. Reguläre Parametrisierungen.** Für jede endliche Differenzierbarkeitsklasse  $C^k$  kann man ganz leicht sehen, dass Kurven mit einer  $C^k$ -Parametrisierung Ecken haben können. Betrachten wir für  $N \geq 2$  die Kurve  $c_N : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  die durch

$c_N(t) := \begin{cases} (t^N, 0) & t \leq 0 \\ (0, t^N) & t > 0 \end{cases}$  definiert ist. Dann läuft jedes  $c_N$  auf der  $x$ -Achse zum

Nullpunkt und dann längs der positiven  $y$ -Achse vom Nullpunkt weg und hat damit eine "Ecke" im Nullpunkt. Offensichtlich ist jedes  $c_N$  differenzierbar für  $t \neq 0$ . Für  $c_2$  ist die Ableitungen durch  $(t, 0)$  für  $t < 0$  und durch  $(0, t)$  für  $t > 0$  gegeben, also ist  $c_2$  eine  $C^1$ -Funktion auf  $[-1, 1]$ . Daraus folgt sofort, dass die Ableitung von  $c_3$  eine  $C^1$ -Funktion und damit  $c_3$  eine  $C^2$ -Funktion ist. Induktiv folgt dass  $c_N$  für alle  $N \geq 2$  eine  $C^{N-1}$ -Funktion ist, deren Bild eine "Ecke" hat.

Mit etwas mehr Analysis kann man eine Ecke wie oben auch mit einer  $C^\infty$ -Funktion parametrisieren. Was man dazu benötigt ist eine  $C^\infty$ -Funktion  $\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\alpha(t) > 0$  für alle  $t \in (0, \infty)$  gilt und sodass für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha^{(k)}(t) = 0$  ist, wobei  $\alpha^{(k)}$  die  $k$ te Ableitung von  $\alpha$  bezeichnet. (Spezielle  $C^\infty$ -Funktionen dieser Art werden später noch eine wichtige Rolle spielen.) Man kann leicht zeigen (siehe Übungen), dass die Funktion  $\alpha(t) := e^{-1/t}$  diese Eigenschaften besitzt. Daraus folgt aber sofort, dass man  $\alpha$  zu einer  $C^\infty$ -Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  ausdehnen kann, indem man  $\alpha(t) = 0$  für  $t \leq 0$  definiert. Damit kann man dann analog wie oben eine Kurve

$c : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch  $c(t) = \begin{cases} (\alpha(-t), 0) & t \leq 0 \\ (0, \alpha(t)) & t > 0 \end{cases}$  definieren, deren Bild wieder eine

"Ecke" hat und nach Konstruktion ist  $c$  eine  $C^\infty$ -Funktion. Natürlich kann man mit ähnlichen Konstruktionen  $C^\infty$ -Parametrisierungen für endliche Polygonzüge und damit insbesondere für jede der Kurven  $c_i$  aus Beispiel 1.2 konstruieren.

Wenn man sich für parametrisierte Kurven interessiert, die der Intuition für differenzierbare Kurven näher kommt, muss man solche Ecken natürlich vermeiden. Es gibt eine einfache Möglichkeit, wie man die obigen Beispiele vermeiden kann, was die folgenden Definition motiviert. Wir werden später noch wesentlich besser verstehen, warum das tatsächlich zu Kurven mit geometrisch schönen Eigenschaften führt.

**DEFINITION 1.5.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Funktion.

(1) Man sagt,  $c$  ist eine *regulär parametrisierte Kurve* in  $\mathbb{R}^n$ , wenn  $c'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  gilt.

(2) Eine *Reparametrisierung* einer regulär parametrisierten Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Kurve der Form  $\tilde{c} = d \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $\varphi : I \rightarrow J$  ein Diffeomorphismus ist, also eine bijektive  $C^1$ -Funktion, sodass auch  $\varphi^{-1} : J \rightarrow I$  eine  $C^1$ -Funktion ist.

Für Parametrisierungen mit höherer Differenzierbarkeitsklasse fordert man natürlich für Reparametrisierungen einen Diffeomorphismus der gleichen Differenzierbarkeitsklasse. Nach dem inversen Funktionensatz ist für beliebiges  $k \geq 1$  eine bijektive  $C^k$ -Funktion  $\varphi : J \rightarrow I$  genau dann ein  $C^k$ -Diffeomorphismus, wenn  $\varphi'(t) \neq 0$  für alle  $t \in J$  gilt. Dann muss natürlich  $\varphi'(t)$  immer positiv oder immer negativ sein. Im ersten Fall nennt man  $\varphi$  *orientierungstreu* im zweiten Fall *orientierungsvertauschend*.

Natürlich hat jede Reparametrisierung einer parametrisierten Kurve  $c$  das gleiche Bild wie  $c$ . Analog wie in Abschnitt 1.3 ist leicht zu sehen, dass auch für regulär parametrisierte Kurven die Umkehrung nicht gilt. Man kann ja etwa einen Kreis mit konstanter Geschwindigkeit verschieden oft durchlaufen. Für reguläre Kurven liegen die beiden Konzepte aber schon ziemlich nahe beisammen. Auf dem Weg dazu beweisen wir ein

Resultat, dass von unabhängigem Interesse ist. Dazu betrachten wir eine spezielle Klasse von regulär parametrisierten Kurven, nämlich Graphen. Sei dazu  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f = (f_1, \dots, f_{n-1}) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  eine  $C^1$ -Funktion. Dann können wir den Graphen von  $f$  in  $I \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  betrachten und durch  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c(t) := (t, f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))$  parametrisieren. Offensichtlich ist  $c'(t) = (1, f_1'(t), \dots, f_{n-1}'(t)) \neq 0$ , also ist diese Parametrisierung regulär. Analog dazu kann man auch Parametrisierungen als Graph über der  $i$ ten Achse (statt über der ersten Achse) betrachten.

**PROPOSITION 1.5.** *Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine regulär parametrisierte Kurve*

(1) *Sei  $t_0 \in I$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$  so, dass die  $i$ te Komponente von  $c'(t_0)$  ungleich 0 ist. Dann gibt es ein offenes Intervall  $\hat{I} \subset I$  mit  $t_0 \in \hat{I}$  und eine Reparametrisierung von  $c|_{\hat{I}}$  als Graph über der  $i$ ten Achse. Insbesondere ist dann  $c|_{\hat{I}}$  ein Homöomorphismus  $\hat{I} \rightarrow c(\hat{I})$ .*

(2) *Nehmen wir an, dass  $I$  offen und  $c : I \rightarrow c(I)$  ein Homöomorphismus ist. Sei  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine weitere regulär parametrisierte Kurve mit  $\tilde{c}(\tilde{I}) = c(I)$  sodass auch  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \tilde{c}(\tilde{I})$  ein Homöomorphismus ist. Dann ist die Funktion  $\varphi := c^{-1} \circ \tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow I$  ein Diffeomorphismus und damit  $\tilde{c}$  eine Reparametrisierung von  $c$ .*

**BEWEIS.** (1) Die Funktion  $c_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt  $(c_i)'(t_0) \neq 0$ , also finden wir nach dem inversen Funktionensatz offene Intervalle  $\hat{I} \subset I$  und  $J \subset \mathbb{R}$  mit  $t_0 \in \hat{I}$  und  $c_i(t_0) \in J$ , sodass  $c_i|_{\hat{I}} : \hat{I} \rightarrow J$  ein Diffeomorphismus ist. Für  $\varphi := (c_i|_{\hat{I}})^{-1} : J \rightarrow \hat{I}$  gilt dann natürlich für alle  $s \in J$ , dass  $c(\varphi(s))$  als  $i$ te Komponente  $s$  hat, also ist  $c \circ \varphi$  ein Graph über der  $i$ ten Achse.

Nach Konstruktion ist  $c_i : \hat{I} \rightarrow J$  injektiv, also ist die stetige Funktion  $c : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv und damit bijektiv auf das Bild  $c(\hat{I})$ . Andererseits ist die Projektion auf die  $i$ te Koordinate eine stetige Funktion  $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Damit ist auch die Einschränkung auf  $c(\hat{I})$  stetig und nach Konstruktion hat sie Werte in  $J$ . Damit ist aber  $\varphi \circ p_i|_{c(\hat{I})}$  eine stetige Inverse zu  $c|_{\hat{I}}$ .

(2) Es genügt zu zeigen, dass  $\varphi = c^{-1} \circ \tilde{c}$  eine  $C^1$ -Funktion ist, für die Inverse  $\varphi^{-1} = \tilde{c}^{-1} \circ c$  folgt das analog. Zu  $t_0 \in I$  sei  $x_0 = c(t_0)$  und  $i$  ein Index, sodass  $(c_i)'(t_0) \neq 0$  ist. Nach Teil (1) finden wir ein Intervall  $\hat{J} \subset \mathbb{R}$  und einen Diffeomorphismus  $\psi : \hat{J} \rightarrow \hat{I}$  auf ein offenes Intervall  $\hat{I} \subset I$  mit  $t_0 \in \hat{I}$ , sodass  $c \circ \psi$  als Graph über der  $i$ ten Achse parametrisiert ist. Nach Voraussetzung ist  $c(\hat{I})$  offen in  $c(I)$  und damit ist auch  $\tilde{J} := \tilde{c}^{-1}(c(\hat{I})) \subset J$  offen. Für  $s \in \tilde{J}$  ist  $\tilde{c}(s) \in c(\hat{I})$  und es gibt in diesem Bild nur einen Punkt mit  $i$ ter Koordinate  $\tilde{c}_i(s)$ , nämlich  $c(\psi(\tilde{c}_i(s)))$ . Damit ist aber  $c^{-1} \circ \tilde{c} = \psi \circ \tilde{c}_i : \tilde{J} \rightarrow \tilde{I}$  und das ist nach Konstruktion stetig differenzierbar. Also ist  $c^{-1} \circ \tilde{c}$  auf einer offenen Umgebung von  $t_0$  eine  $C^1$ -Funktion und da  $t_0$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

## 1.6. Bogenlängenparametrisierungen.

**DEFINITION 1.6.** Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Dann sagt man *die Kurve  $c$  ist nach der Bogenlänge parametrisiert*, wenn  $\|c'(t)\| = 1$  für alle  $t \in I$  gilt.

Natürlich sind solche Kurven regulär parametrisiert. Die Motivation für die Terminologie ist offensichtlich: Ist  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nach der Bogenlänge parametrisiert, dann ist für beliebige Elemente  $a, b \in I$  mit  $a < b$  natürlich  $L_a^b(c) = \int_a^b 1 dt = (b - a)$ . Also kann man (bis auf eine Verschiebung) den Parameter  $t \in I$  tatsächlich als Bogenlänge eines Teils der Kurve interpretieren.

**PROPOSITION 1.6.** *Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine regulär parametrisierte Kurve.*

(1) Jede Reparametrisierung von  $c$  ist ebenfalls regulär.

(2) Zu je zwei Punkten  $a, b \in I$  mit  $a < b$  existiert eine Zahl  $L \in \mathbb{R}$  und ein orientierungstreuer  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\varphi : [0, L] \rightarrow [a, b]$ , sodass die entsprechende Reparametrisierung  $c \circ \varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $c|_{[a, b]}$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

(3) Ist  $c$  nach der Bogenlänge parametrisiert und  $\varphi : J \rightarrow I$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus, sodass  $c \circ \varphi$  ebenfalls nach der Bogenlänge parametrisiert ist, dann ist  $\varphi$  von der Form  $\varphi(t) = \pm t + C$  für eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$ .

BEWEIS. (1) Aus  $\tilde{c} = c \circ \varphi$  folgt nach der Kettenregel sofort  $\tilde{c}'(t) = \varphi'(t)c'(\varphi(t))$  und damit das Resultat.

(2) Betrachten wir die Funktion  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch  $\psi(t) = L_a^t(c)$  gegeben ist. Nach Proposition 1.4 ist  $\psi$  differenzierbar mit Ableitung  $\psi'(t) = \|c'(t)\| > 0$  also ist  $\psi$   $C^1$  und streng monoton wachsend. Setzt man  $L := \psi(b) > 0$  dann folgt, dass  $\psi$  eine Bijektion und damit einen  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\psi : [a, b] \rightarrow [0, L]$  definiert. Setzt man  $\varphi := \psi^{-1} : [0, L] \rightarrow [a, b]$  dann ist  $\varphi'(t) = 1/\psi'(\varphi(t)) = 1/\|c'(\varphi(t))\| > 0$  also ist auch  $\varphi$  ein orientierungstreuer  $C^1$ -Diffeomorphismus. Für  $\tilde{c} := c \circ \varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  erhalten wir  $\tilde{c}'(t) = \varphi'(t)c'(\varphi(t))$  und damit folgt sofort  $\|\tilde{c}'(t)\| = 1$  für alle  $t \in [0, L]$ , also ist  $\tilde{c}$  nach der Bogenlänge parametrisiert.

(3) Nach der Kettenregel folgt sofort, dass  $|\varphi'(t)| = 1$  für alle  $t \in J$  gelten muss, also gilt entweder  $\varphi'(t) = 1$  für alle  $t \in J$  oder  $\varphi'(t) = -1$  für alle  $t \in J$ . Wählen wir eine beliebige Zahl  $t_0 \in J$ , dann folgt für  $t \in J$  einfach  $\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t \varphi'(t) dt$ . Ist  $\varphi' \equiv 1$ , dann erhalten wir  $\varphi(t) - \varphi(t_0) = t - t_0$ , also  $\varphi(t) = t + C$  für  $C = \varphi(t_0) - t_0$ . Für  $\varphi' \equiv -1$  erhalten wir analog  $\varphi(t) = -t + C$  für  $C = \varphi(t_0) + t_0$ .  $\square$

## Kurvenintegrale

**1.7. Definition und Parametrisierungsinvarianz.** Im Fall von stetig differenzierbar parametrisierten Kurven gibt es einen alternativen Beweis für die Invarianz der Bogenlänge unter Reparametrisierungen aus Proposition 1.3. Aus Proposition 1.4 wissen wir ja, dass wir für eine stetig differenzierbar parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $a, b \in I$  mit  $a < b$  die Bogenlänge als  $L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$  berechnen können. Sei nun  $\varphi : J \rightarrow I$  ein orientierungstreuer  $C^1$ -Diffeomorphismus und  $\tilde{c} = c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  die entsprechende Reparametrisierung. Dann gilt nach der Kettenregel  $\tilde{c}'(s) = \varphi'(s)c'(\varphi(s))$  und damit  $\|\tilde{c}'(s)\| = |\varphi'(s)| \cdot \|c'(\varphi(s))\|$  und nach Voraussetzung ist  $\varphi'(s) > 0$ . Damit folgt aber

$$L_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}(\tilde{c}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\tilde{c}'(s)\| ds = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|c'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = \int_{\varphi(\tilde{a})}^{\varphi(\tilde{b})} \|c'(t)\| dt = L_a^b(c)$$

direkt aus der Substitutionsregel für eindimensionale Integrale.

Daraus ergeben sich verschiedene Verallgemeinerungen, die Sie zum Teil schon in den ersten Vorlesungen über Analysis kennen gelernt haben. In der einfachsten Form betrachten wir eine  $C^1$ -Funktion  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $c([a, b]) \subset U$  und eine stetige Funktion  $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dabei sollte man sich  $Z$  als Funktion vorstellen, die jedem Punkt  $x \in U$  einen Vektor zuordnet der "im Punkt  $x$  angehängt ist". Dann können wir das Integral  $\int_c Z := \int_a^b \langle Z(c(t)), c'(t) \rangle dt$ , das *Kurvenintegral von  $Z$  über  $c$*  betrachten. Sei  $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus und  $\tilde{c} := c \circ \varphi$  die entsprechende Reparametrisierung von  $c$ . Dann gilt natürlich wie oben  $\tilde{c}'(s) = \varphi'(s)c'(\varphi(s))$  und  $Z(\tilde{c}(s)) = Z(c(\varphi(s)))$ . Damit erhalten wir wieder mit Hilfe der

Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{c}} Z &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle Z(\tilde{c}(s)), \tilde{c}'(s) \rangle ds = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle Z(c(\varphi(s))), c'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds \\ &= \int_a^b \langle Z(c(t)), c'(t) \rangle dt = \int_c Z.\end{aligned}$$

Man kann sich daher dieses Kurvenintegral als ein Integral von  $Z$  über das Bild  $c(I)$  vorstellen, also als Integral über eine Kurve im geometrischen Sinn. Ein wichtiger Punkt hier ist, dass solche Integrale in vielen Situationen eine direkte physikalische Interpretation erlauben. Interpretiert man zum Beispiel  $c$  als die Bahn eines Teilchens und  $Z$  als ein Kraftfeld, also  $Z(x)$  als die Kraft, die im Punkt  $x$  auf das Teilchen wirken würde, dann ist  $\int_c Z$  gerade die Arbeit die notwendig ist, um das Teilchen durch das Kraftfeld zu bewegen. Aus der Physik kommt auch die Bezeichnung *Vektorfeld* für solche Funktionen  $Z$ . Auch elektrische Felder, Magnetfelder und Strömungsfelder werden in der Physik in dieser Form beschrieben. Wir werden aber bald sehen, dass vom Standpunkt des Integrals eine andere Interpretation der beteiligten Funktion günstiger ist.

Eine einfache Variation dieser Idee ist, dass man  $Z$  ja eigentlich nur entlang der Kurve "kennen" muss um ein Kurvenintegral zu definieren. Für  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  können wir auch ein *Vektorfeld längs  $c$*  betrachten, also eine stetige Funktion  $Z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Die Interpretation ist hier wieder, dass  $Z(t)$  einen Vektor beschreibt, der am Punkt  $c(t)$  angehängt ist. Dann können wir das Kurvenintegral durch  $\int_c Z := \int_a^b \langle Z(t), c'(t) \rangle dt$  definieren. Für einen  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}]$  erhalten wir dann die Reparametrisierung  $\tilde{c} = c \circ \varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und ein Vektorfeld  $Z \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  längs  $\tilde{c}$ . Wie oben zeigt die Substitutionsregel sofort, dass  $\int_{\tilde{c}} Z \circ \varphi = \int_c Z$  gilt.

**1.8. Diffeomorphismen.** Der Begriff des Diffeomorphismus, den wir für Intervalle schon in Abschnitt 1.5 kennen gelernt haben, macht auch in höheren Dimensionen Sinn. Sind  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen und ist  $k \geq 1$  eine natürliche Zahl, dann ist ein  $C^k$ -Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  eine bijektive  $C^k$ -Funktion, sodass auch die inverse Funktion  $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$  eine  $C^k$ -Funktion ist. Differenziert man die Gleichungen  $\Phi \circ \Phi^{-1} = \text{id}_V$  und  $\Phi^{-1} \circ \Phi = \text{id}_U$ , dann folgt sofort, dass für jedes  $x \in U$  die linearen Abbildungen  $D\Phi(x)$  und  $D\Phi^{-1}(\Phi(x))$  invers zueinander sind, also gilt  $D(\Phi^{-1})(\Phi(x)) = (D\Phi(x))^{-1}$ . Das zeigt auch sofort, dass es für  $m \neq n$  keinen Diffeomorphismus zwischen einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$  und einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  geben kann.

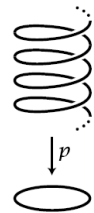
Etwas allgemeiner nennt man für  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen eine  $C^k$ -Funktion  $\Phi : U \rightarrow V$  einen *lokalen  $C^k$ -Diffeomorphismus* wenn es für jeden Punkt  $x \in U$  eine offene Umgebung  $\tilde{U}$  von  $x$  in  $U$  gibt, sodass  $\tilde{V} := \Phi(\tilde{U})$  offen in  $V$  und  $\Phi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  ein Diffeomorphismus ist. Natürlich ist auch für jeden lokalen Diffeomorphismus  $\Phi$  und jeden Punkt  $x \in U$  die lineare Abbildung  $D\Phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  invertierbar (und  $(D\Phi(x))^{-1}$  ist die Ableitung in  $\Phi(x)$  von  $(\Phi|_{\tilde{U}})^{-1}$ ). Der inverse Funktionensatz, der im weiteren eine zentrale Rolle spielen wird, sagt aber genau, dass eine  $C^k$ -Funktion  $\Phi : U \rightarrow V$  genau dann ein lokaler  $C^k$ -Diffeomorphismus ist, wenn für jedes  $x \in U$  die lineare Abbildung  $D\Phi(x)$  invertierbar ist.

**BEISPIEL 1.8.** Ein typisches Beispiel für einen Diffeomorphismus liefern Polarkoordinaten. Betrachten wir die offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ , die durch  $U := \{(r, \alpha) : r > 0, -\pi < \alpha < \pi\}$  und  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$  gegeben ist und definieren wir  $\Phi(r, \alpha) := (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$ . Dann ist  $\Phi$  natürlich beliebig oft differenzierbar und für

die Ableitung erhalten wir  $D\Phi(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -r \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & r \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ . Die Determinante dieser Matrix ist offensichtlich durch  $r(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) = r \neq 0$  gegeben, also ist  $D\Phi(r, \alpha)$  immer invertierbar. Um zu sehen, dass  $\Phi$  bijektiv ist beobachten wir zunächst, dass für  $\Phi(r, \alpha) = (x, y)$  natürlich  $r^2 = x^2 + y^2$  und damit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  gelten muss. Dann folgt die Bijektivität aus der bekannten Tatsache, dass man jeden Punkt  $a \neq -1$  mit  $\|a\| = 1$  eindeutig als  $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$  mit  $\alpha \in (-\pi, \pi)$  schreiben kann. Die Tatsache, dass  $\Phi^{-1}$  beliebig oft differenzierbar ist, kann man lokal verifizieren. So sieht man zum Beispiel sofort, dass man für  $x \neq 0$  die Funktion  $\Phi^{-1}(x, y)$  als  $(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x))$  schreiben kann, was offensichtlich beliebig oft differenzierbar ist und ähnliches funktioniert auf der Teilmenge  $\{(x, y) \in V : y \neq 0\}$ . Damit ist  $\Phi$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus.

Wir erhalten so aber auch leicht ein Beispiel für einen lokalen Diffeomorphismus, der kein Diffeomorphismus ist. Dieses Beispiel wird auch unabhängig davon im weiteren eine wichtige Rolle spielen. Es ergibt sich in natürlicher Weise dadurch, dass man versucht, die Abbildung  $\Phi$  von oben so auszudehnen, dass sie "surjektiver" wird. Für den Nullpunkt gibt es da keine Hoffnung, aber für die Halbachse  $\{(x, 0) : x < 0\}$  kommen die Probleme nur aus der Uneindeutigkeit der Darstellung in der Form  $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ . Verzichtet man auf die Eindeutigkeit, dann fällt dieses Problem vollkommen weg. Wir können nämlich offene Teilmengen durch  $\hat{U} := \{(r, s) : r > 0\}$  und  $\hat{V} := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  definieren und dann  $\hat{\Phi} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$  durch  $\hat{\Phi}(r, s) := (r \cos(s), r \sin(s))$  definieren. Diese Funktion ist natürlich immer noch beliebig oft differenzierbar und surjektiv und wie oben folgt  $\det(D\hat{\Phi}(r, s)) = r > 0$ .

Also ist  $\hat{\Phi}$  ein lokaler  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Natürlich liefert für jeden Punkt  $(x, y) \in U$  die Einschränkung  $\Phi = \hat{\Phi}|_U$  einen Diffeomorphismus und analog erhält man passende Einschränkungen für Punkte auf der negativen  $x$ -Achse. Um sich die Funktion  $\hat{\Phi}$  zu veranschaulichen genügt es die Einschränkung auf die Punkte mit  $r = 1$  zu betrachten, die Werte im Einheitskreis hat. Das liefert das Bild einer Helix, die auf den Kreis projiziert wird:



Sei nun  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine parametrisierte Kurve, sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $c(I) \subset U$  und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist natürlich auch  $\Phi \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine parametrisierte Kurve. Ist  $c$  differenzierbar, dann ist natürlich auch  $\Phi \circ c$  differenzierbar und nach der Kettenregel gilt  $(\Phi \circ c)'(t) = D\Phi(c(t))(c'(t))$ . Insbesondere folgt, dass für eine regulär parametrisierte Kurve  $c$  auch  $\Phi \circ c$  regulär parametrisiert ist. Das Beispiel von oben zeigt, dass dieses Konzept insbesondere "Kurven in Polarkoordinaten" umfasst: Wählen wir für ein Intervall  $I$  Funktionen  $r : I \rightarrow (0, \infty)$  und  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  dann definiert natürlich  $c(t) := (r(t), s(t))$  eine parametrisierte Kurve in  $\mathbb{R}^2$ , die Werte in der offenen Teilmenge  $\hat{U}$  aus dem Beispiel oben hat und somit ist für den lokalen Diffeomorphismus  $\hat{\Phi}$  von oben auch  $\hat{\Phi} \circ c$  ein Kurve die als Polarkoordinaten  $(r(t), s(t))$  hat.

Aus der Definition bzw. aus Proposition 1.4 sieht man leicht, dass die Bogenlänge *nicht* invariant unter Diffeomorphismen ist. An einfachen Beispielen sieht man, dass das auch nicht zu erwarten ist: Betrachten wir etwa  $\Phi(x) = 2x$  als Diffeomorphismus auf  $\mathbb{R}^2$  und  $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c(t) := (\cos(t), \sin(t))$ . Dann ist  $c$  natürliche ein Bogenlängenparametrisierung des Einheitskreises, also  $L_0^{2\pi}(c) = 2\pi$ . Offensichtlich gilt  $\|(\Phi \circ c)'(t)\| = 2\|c'(t)\| = 2$ , also  $L_0^{2\pi}(\Phi \circ c) = 4\pi$ , was genau dem Umfang des Kreises mit Radius 2 entspricht. Aber natürlich können wir uns fragen, ob es nicht eine Version von Kurvenintegralen gibt, die invariant unter Diffeomorphismen ist.

### 1.9. Invarianz von Kurvenintegralen über Vektorfelder und Bewegungen.

Dazu muss man natürlich überlegen, wie man die Objekte, die man integriert mit einem Diffeomorphismus “mitbewegt”. Für offene Teilmengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , einen Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  und ein Vektorfeld  $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sieht das wie folgt aus. Für  $y \in V$  gibt es einen eindeutigen Punkt  $x \in U$  mit  $\Phi(x) = y$ , nämlich  $x = \Phi^{-1}(y)$  und in diesem Punkt haben wir den Vektor  $Z(x)$ . Vergleicht man mit  $(\Phi \circ c)'(t) = D\Phi(c(t))(c'(t))$  dann sollte man diesen Vektor mit der linearen Abbildung  $D\Phi(x)$  bewegen. Damit erhält man als natürliche Definition ein Vektorfeld  $\Phi_*Z$  auf  $V$ , dass durch

$$(1.3) \quad (\Phi_*Z)(y) := D\Phi(\Phi^{-1}(y))(Z(\Phi^{-1}(y)))$$

gegeben ist. Schreiben wir  $Z_i$  für die Komponenten von  $Z$ ,  $\Phi_i$  für die Komponenten von  $\Phi$  und  $(\Phi_*Z)_i$  für die Komponenten von  $\Phi_*Z$ , dann gilt also

$$(\Phi_*Z)_i(y) = \sum_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(\Phi^{-1}(y)) Z_j(\Phi^{-1}(y)).$$

Betrachten wir nun eine differenzierbare Kurve  $c : [a, b] \rightarrow U$ , dann erhalten wir für das Kurvenintegral über das Bild den folgenden Ausdruck.

$$\begin{aligned} \int_{\Phi \circ c} \Phi_*Z &= \int_a^b \langle (\Phi \circ c)'(t), \Phi_*Z((\Phi \circ c)(t)) \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle D\Phi(c(t))(c'(t)), D\Phi(c(t))(Z(c(t))) \rangle dt. \end{aligned}$$

Vergleicht man das mit  $\int_c Z = \int_a^b \langle c'(t), Z(c(t)) \rangle dt$ , dann sieht man, dass  $\int_{\Phi \circ c} \Phi_*Z = \int_c Z$  für beliebiges  $c$  und  $Z$  nur dann gelten kann, wenn für jedes  $x \in U$  die lineare Abbildung  $D\Phi(x)$  orthogonal und damit mit dem inneren Produkt verträglich ist. Das gilt aber nur für eine sehr eingeschränkte Klasse von Diffeomorphismen:

**PROPOSITION 1.9.** *Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängende offene Teilmengen und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus mit  $k \geq 2$ , sodass für alle  $x \in U$  die Ableitung  $D\Phi(x)$  orthogonal ist, also  $D\Phi(x)^t D\Phi(x) = \mathbb{I}$  für die Einheitsmatrix  $\mathbb{I}$  gilt. Dann ist  $\Phi$  eine euklidische Bewegung, d.h. es gibt eine orthogonale Matrix  $A$  und einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $\Phi(x) = Ax + b$  für alle  $x \in U$  gilt.*

**BEWEIS.** Wir behaupten zunächst, dass für die zweite Ableitung  $D^2\Phi = 0$  gilt. Schreiben wir die Ableitung  $D\Phi(x)$  als Matrix  $a_j^i(x)$ , also  $a_j^i(x) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x)$ , wobei wir  $\Phi$  in Komponenten als  $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  schreiben. Die Tatsache, dass  $D\Phi$  orthogonal ist, bedeutet dann genau, dass  $\sum_j a_j^i(x) a_j^k(x) = \delta_{ik}$  und analog für  $\sum_j a_j^i(x) a_j^k(x)$ . Bildet man die partielle Ableitung der zweiten Gleichung nach  $x_\ell$ , dann erhält man

$$(1.4) \quad \sum_j \left( \frac{\partial a_j^i}{\partial x_\ell}(x) a_j^k(x) + a_j^i(x) \frac{\partial a_j^k}{\partial x_\ell}(x) \right) = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $a_r^i(x)$  und  $a_s^k(x)$  und summiert dann über  $i$  und  $k$ , dann ergibt sich

$$\sum_i a_r^i(x) \frac{\partial a_s^i}{\partial x_\ell}(x) + \sum_k a_s^k(x) \frac{\partial a_r^k}{\partial x_\ell}(x) = 0.$$

Setzt man  $\varphi_{rs\ell}(x) := \sum_i a_r^i(x) \frac{\partial a_s^i}{\partial x_\ell}(x)$ , dann sagt diese Gleichung nach Umbenennung des Summationsindex gerade  $\varphi_{rs\ell}(x) = -\varphi_{sr\ell}(x)$ . Nach Konstruktion ist aber andererseits

$\frac{\partial a_s^i(x)}{\partial x_\ell} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x_s \partial x_\ell}$ . Damit impliziert die Symmetrie der zweiten partiellen Ableitungen aber sofort  $\varphi_{rsl}(x) = \varphi_{rls}(x)$ . Damit erhalten wir aber (wobei wir den Punkt  $x$  weglassen)

$$\varphi_{rsl} = -\varphi_{srl} = -\varphi_{slr} = \varphi_{lsr} = \varphi_{lrs} = -\varphi_{rls} = -\varphi_{rsl}$$

und damit  $\varphi_{rsl} = 0$  für alle  $r, s, \ell$ . Da die Matrix  $a_r^i$  invertierbar ist, ist das nur möglich wenn alle zweiten partiellen Ableitungen von  $\Phi$  verschwinden, also gilt  $D^2\Phi = 0$ .

Damit gibt es eine orthogonale Matrix  $A = (a_j^i)$  sodass  $D\Phi(x) = A$  für alle  $x \in U$  gilt. Fixieren wir einen Punkt  $x_0 \in U$  und betrachten wir eine differenzierbare Kurve  $c : [u, v] \rightarrow U$  mit  $c(u) = x_0$ . Dann folgt für die  $i$ te Komponente von  $(\Phi \circ c)'(t) = \sum_j a_j^i c_j'(t)$ . Integriert man das, dann erhält man  $\Phi_i(c(v)) - \Phi_i(x_0) = \sum_j a_j^i (c_j(v) - (x_0)_j)$ , also  $\Phi(c(v)) - \Phi(c(u)) = Ac(v) - Ax_0$ . Setzen wir  $b := \Phi(x_0) - Ax_0$ , dann erhalten wir  $\Phi(c(v)) = Ac(v) + b$ . Betrachten wir die Menge  $\{x \in U : \Phi(x) = Ax + b\}$  dann ist diese Menge nichtleer und abgeschlossen, weil beide Seiten der Gleichung stetig in  $x$  sind. Das Argument mit den Kurven zeigt aber sofort, dass diese Menge auch offen ist, also mit  $U$  übereinstimmen muss.  $\square$

Man verifiziert auch sofort (siehe Übungen), dass die Bogenlänge von stetigen und differenzierbaren Kurven invariant unter Euklidischen Bewegungen ist. Ist also  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Euklidische Bewegung und  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Kurve, dann gilt für alle  $a, b \in I$  mit  $a < b$ , dass  $L_a^b(f \circ c) = L_a^b(c)$  ist. Dazu zeigt man, dass für beliebige Punkte  $x, y \in \mathbb{R}^n$  die Gleichung  $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$  gilt und man kann auch zeigen, dass jede Funktion von  $\mathbb{R}^n$  auf sich selbst mit dieser Eigenschaft eine Euklidische Bewegung ist.

**1.10. 1-Formen und Invarianz von Kurvenintegralen.** Überraschenderweise lässt sich das Problem mit der Invarianz von Kurvenintegralen durch eine einfache Uminterpretation lösen. Wir können einfach bemerken, dass für jedes  $x \in U$  die Vorschrift  $v \mapsto \langle Z(x), v \rangle$  eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Dazu gibt es ein offensichtliches allgemeines Konzept:

**DEFINITION 1.10.** (1) Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Eine stetige 1-Form auf  $U$  ist eine stetige Funktion  $\alpha : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die linear in der zweiten Variable ist. Wir bezeichnen der Raum der stetigen 1-Formen auf  $U$  mit  $\Omega^1(U)$ .

(2) Wir sagen, dass  $\alpha$  differenzierbar, stetig differenzierbar, oder  $C^k$  für  $k \geq 1$  ist, wenn für jeden fixen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  die Funktion  $x \mapsto \alpha(x, v)$  die entsprechende Eigenschaft hat.

(3) Für eine stetig differenzierbar parametrisierte Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $c([a, b]) \subset U$  und eine stetige 1-Form  $\alpha$  auf  $U$  definieren wir das *Kurvenintegral*  $\int_c \alpha$  durch

$$\int_c \alpha := \int_a^b \alpha(c(t), c'(t)) dt.$$

(4) Für 1-Formen  $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$  und eine stetige Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir  $\alpha + \beta \in \Omega^1(U)$  durch  $(\alpha + \beta)(x, v) := \alpha(x, v) + \beta(x, v)$  und  $f\alpha \in \Omega^1(U)$  durch  $(f\alpha)(x, v) := f(x)\alpha(x, v)$ .

Aus der Definition folgt wieder, dass das Kurvenintegral invariant unter Reparametrisierungen ist. Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Funktion und  $\varphi : J \rightarrow I$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus und  $\tilde{c} = c \circ \varphi$  die entsprechende Reparametrisierung. Dann ist

$$\alpha(\tilde{c}(t), \tilde{c}'(t)) = \alpha(c(\varphi(t)), \varphi'(t)c'(\varphi(t))) = \alpha(c(\varphi(t)), c'(\varphi(t)))\varphi'(t)$$

und damit folgt  $\int_{\tilde{c}} \alpha = \int_c \alpha$  genau wie in Abschnitt 1.7.

Der Vorteil der “neuen” Interpretation ist, dass man in diesem Fall eine andere natürliche Wirkung von Diffeomorphismen erhält, sich noch dazu auf beliebige glatte Funktionen ausdehnt. Für einen Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  zwischen offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  und eine 1-Form  $\alpha$  auf  $U$  ist die natürliche Idee hier  $(\Phi_*\alpha)(y, v) := \alpha(\Phi^{-1}(x), (D\Phi(x))^{-1}(v))$  zu definieren. Die vielen Inversen in dieser Gleichung legen nahe, dass man versuchen könnte, 1-Formen “in die andere Richtung” zu transportieren. Das funktioniert dann aber sogar für beliebige  $C^1$ -Funktionen.

**DEFINITION 1.10.** (5) Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offene Teilmengen und sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -Funktion mit  $F(U) \subset V$ . Dann definieren wir für eine stetig 1-Form  $\alpha \in \Omega^1(V)$  den *Pullback*  $F^*\alpha \in \Omega^1(U)$  durch

$$(F^*\alpha)(x, v) := \alpha(F(x), DF(x)(v)).$$

(6) Für offene Teilmengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , einen Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  und eine 1-Form  $\alpha \in \Omega^1(U)$  definiert man den *Push-forward*  $\Phi_*\alpha \in \Omega^1(V)$  von  $\alpha$  längs  $\Phi$  durch  $\Phi_*\alpha := (\Phi^{-1})^*\alpha$ .

Wir bemerken, dass für eine  $C^k$ -1-Form  $\alpha$  und eine  $C^{k+1}$ -Funktion  $F$ , der Pullback  $F^*\alpha$  eine  $C^k$ -1-Form ist. Durch diese einfache Uminterpretation erhält man nun einen Begriff eines Kurvenintegrals mit ganz allgemeinen Invarianzeigenschaften:

**SATZ 1.10.** (1) Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -parametrisierte Kurve,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $c([a, b]) \subset U$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -Funktion und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen mit  $F(U) \subset V$ . Dann gilt für jede stetige 1-Form  $\alpha \in \Omega^1(V)$

$$\int_c F^*\alpha = \int_{F \circ c} \alpha.$$

Insbesondere gilt für  $U$  wie oben, eine offene Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^n$ , einen Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow v$  und eine stetige 1-Form  $\beta \in \Omega^1(U)$  immer  $\int_{\Phi \circ c} \Phi_*\beta = \int_c \beta$ .

(2) Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  und  $W \subset \mathbb{R}^p$  offen und seien  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $G : V \rightarrow \mathbb{R}^p$   $C^1$ -Funktionen mit  $F(U) \subset V$  und  $G(V) \subset W$ . Dann gilt für jede stetige 1-Form  $\gamma \in \Omega^1(W)$  die Gleichung  $(G \circ F)^*\gamma = F^*(G^*\gamma)$ .

**BEWEIS.** Durch die gut gewählten Begriffe sind die Beweise ganz einfach: Nach Definition und mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir

$$(F^*\alpha)(c(t), c'(t)) = \alpha(F(c(t)), DF(c(t))(c'(t))) = \alpha((F \circ c)(t), (F \circ c)'(t)),$$

also folgt die erste Behauptung in (1) sofort.

In der Situation von (2) erhalten wir nach Definition und mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} F^*(G^*\gamma)(x, v) &= (G^*\gamma)(F(x), DF(x)(v)) = \gamma(G(F(x)), DG(F(x))(DF(x)(v))) \\ &= \gamma((G \circ F)(x), D(G \circ F)(x)(v)) = (G \circ F)^*\gamma(x, v). \end{aligned}$$

In der Situation des zweiten Teils von (1) liefert das nach Definition von  $\Phi_*\beta$

$$\Phi^*(\Phi_*\beta) = \Phi^*((\Phi^{-1})^*\beta) = (\text{id}_U)^*\beta = \beta$$

und damit folgt die Behauptung aus dem ersten Teil von (1).  $\square$

**BEISPIEL 1.10.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion. Dann definiert die normale Ableitung von  $f$  eine stetige 1-Form  $df \in \Omega^1(U)$ , also  $df(x, v) := Df(x)(v)$ . Für eine parametrisierte  $C^1$ -Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit Werten in  $U$  gilt dann nach Definition und der Kettenregel

$$\int_c df = \int_a^b df(c(t), c'(t))dt = \int_a^b (f \circ c)'(t)dt = f(c(b)) - f(c(a)).$$



Hier hängt das Kurvenintegral also nur von den Endpunkten der Kurve  $c$  ab und nicht von der Kurve  $c$  selbst. In der klassischen Analysis wird das oft in der Sprache von Vektorfeldern formuliert. Man definiert den *Gradienten von  $f$*  als die Funktion  $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die als Komponenten die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  von  $f$  hat und interpretiert diese als Vektorfeld. Dieses Vektorfeld hat auch geometrisch eine schöne Interpretation, weil es normal auf die Niveaulächen von  $f$  steht. Von Standpunkt der 1-Formen aus besehen ist das nur eine ‘‘Rückübersetzung’’:  $\nabla f$  ist gerade das Vektorfeld, das für jeden Punkt  $x \in U$  und jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  die Gleichung  $\langle \nabla f(x), v \rangle = df(x)(v)$  erfüllt. Während aber das Verhalten von  $df$  unter Diffeomorphismen einfach durch die Kettenregel bestimmt wird, ist zwar das Verhalten des Gradienten unter Euklidischen Bewegungen einfach, für allgemeine Diffeomorphismen wird das aber sehr kompliziert.

Insbesondere können wir das auf die Koordinatenfunktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  anwenden, die in diesem Kontext üblicherweise mit  $x_i$  bezeichnet werden. Das liefert also 1-Formen  $dx_i$ , die beliebig oft differenzierbar sind und als *Koordinaten 1-Formen* bezeichnet werden. Nach Definition gilt  $dx_i(x, v) = v_i$ , wobei  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ist. Mit Hilfe der Operationen aus Teil (3) von Definition 1.10 können wir für stetige Funktionen  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige 1-Form auf  $U$  durch  $\sum_i f_i dx_i$  definieren. Nach Definition ist diese Form explizit gegeben durch  $(\sum_i f_i dx_i)(x, v) := \sum_i f_i(x) v_i$ . Offensichtlich ist für  $C^k$ -Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  auch  $\sum_i f_i dx_i$  eine  $C^k$ -1-Form.

Sei nun  $\alpha \in \Omega^1(U)$  also eine stetige Funktion  $\alpha : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Setzen wir als zweite Komponente den  $i$ ten Standardbasisvektor  $e_i$  ein, dann erhalten wir eine stetige Funktion  $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , also  $\alpha_i(x) := \alpha(x, e_i)$ . Wie oben definiert dann  $\sum_i \alpha_i dx_i$  eine stetige 1-Form auf  $U$ . Für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  gilt aber natürlich  $v = \sum_i v_i e_i$  und da  $\alpha$  in der zweiten Variable linear ist erhalten wir

$$\alpha(x, v) = \alpha(x, \sum_i v_i e_i) = \sum_i v_i \alpha(x, e_i) = \sum_i \alpha_i(x) dx_i(x, v)$$

und damit  $\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i$ . Somit können wir jede 1-Form auf diese Art darstellen. Ist  $\alpha$  eine  $C^k$ -1-Form, dann sind natürlich auch alle  $\alpha_i$   $C^k$ -Funktionen. Ist insbesondere  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion und  $\alpha = df$ , dann ist natürlich  $df(x, e_i)$  genau die  $i$ te partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ . Damit erhalten wir in diesem Spezialfall die Darstellung

$$(1.5) \quad df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Setzen wir diese Zerlegung (für allgemeines  $\alpha$ ) in die Definition des Kurvenintegrals ein und benutzen die Linearität des Integrals, dann erhalten wir die explizite Darstellung

$$(1.6) \quad \int_c \alpha = \sum_i \int_a^b \alpha_i(c(t)) c'_i(t) dt,$$

wobei  $c'_i$  die Ableitung der  $i$ ten Komponente  $c_i$  von  $c$  bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Beispiele können wir nun den Pullback explizit beschreiben:

**PROPOSITION 1.10.** *Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offene Teilmengen und sei  $F : U \rightarrow V$  eine  $C^1$ -Funktion. Dann gilt*

(1) *Für  $f \in C^1(V, \mathbb{R})$  ist  $F^*(df) = d(f \circ F)$ .*

(2) *Für  $f \in C(V, \mathbb{R})$  und  $\alpha \in \Omega^1(V)$  ist  $F^*(f\alpha) = (f \circ F)F^*\alpha$ .*

(3) *Schreiben wir  $\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i$ , dann ist  $F^*\alpha = \sum_j \beta_j dx_j$ , wobei die Funktion  $\beta_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\beta_j(x) = \sum_i \alpha_i(F(x)) \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$  gegeben ist.*

BEWEIS. (1) Nach der Kettenregel ist  $D(f \circ F)(x)(v) = Df(F(x))(DF(x)(v))$ . Nach Definition ist die linke Seite  $d(f \circ F)(x, v)$  und die rechte  $df(F(x), DF(x)(v)) = F^*(df)(x, v)$ .

(2) folgt direkt aus den Definitionen.

(3) Nach Definition gilt für die Koordinatenfunktion  $x_i$  natürlich  $x_i \circ F = F_i$  wobei  $F = (F_1, \dots, F_m)$  ist. Damit gilt nach (1) aber  $F^*(dx_i) = \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k$ . Nach Teil (2) müssen wir das nur noch mit  $\alpha_i(F(x))$  multiplizieren und dann aufsummieren. Damit ergibt sich aber für den Koeffizienten von  $dx_j$  genau die behauptete Formel. Alternativ kann man auch direkt  $\beta_j(x) = (F^*\alpha)(x, e_j)$  auswerten.  $\square$

Man bemerkt hier schon, dass die Notation etwas problematisch wird. Die Koordinaten 1-Formen auf  $U$  und  $V$  haben ja eigentlich nichts miteinander zu tun und werden trotzdem mit dem gleichen Symbol bezeichnet. Wir werden später die Koordinaten (und entsprechend auch die zugehörigen 1-Formen) auf verschiedenen Räumen mit verschiedenen Symbolen bezeichnen.

## Geschlossene Kurven und Topologie

Wir kommen nun zu weiteren topologischen Aspekten von Kurven. Grundlage dieser Begriffe ist die Frage, ob man gegebene Kurven "stetig ineinander deformieren" kann. Man kann einerseits leicht sehen, dass diese Frage nur für geschlossene Kurven interessant ist, andererseits muss man sich auch auf passende Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  einschränken. Wir werden uns primär mit  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und mit dem Einheitskreis  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  beschäftigen.

**1.11. Polarkoordinaten.** Der Schlüssel zu den topologischen Eigenschaften geschlossener Kurven ist die allgemeine Version von Polarkoordinaten, die wir in Abschnitt 1.8 kennen gelernt haben. Wir betrachten also die Abbildung  $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , die durch  $\Phi(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$  gegeben ist. In Abschnitt 1.8 haben wir gesehen, dass sich für jedes  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  Funktion  $\Phi$  zu einem Diffeomorphismus  $(0, \infty) \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{t(\cos \theta_0, \sin \theta_0) : t \leq 0\}$  einschränkt. Insbesondere ist  $\Phi$  ein lokaler Diffeomorphismus. Im folgenden Beweis werden wir verwenden, dass sich  $\Phi$  für jedes  $\theta_0$  auch zu einem Diffeomorphismus von  $(0, \infty) \times (\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2})$  auf eine offene Halbebene einschränkt.

Wir stellen uns nun die Frage, ob wir zu einer gegebenen parametrisierten Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  Funktionen  $r : I \rightarrow (0, \infty)$  und  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  finden können, sodass  $c(t) = \Phi(r(t), \theta(t))$ . In Anbetracht des geometrischen Bildes der Abbildung  $\Phi$  aus Abschnitt 1.8 nennt man die Kurve  $\tilde{c}(t) := (r(t), \theta(t))$  einen *Lift* von  $c$ . Tatsächlich gibt es so einen Lift und er ist durch seinen Wert in einem Punkt eindeutig bestimmt:

**SATZ 1.11.** *Sei  $c : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $c(t) = (x(t), y(t))$  eine stetige Kurve,  $r(t) := \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ , und  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  so, dass  $c(a) = (r(a) \cos \theta_0, r(a) \sin \theta_0)$  gilt. Dann gibt es eine eindeutige stetige Funktion  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\theta(a) = \theta_0$  und  $c(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$  für alle  $t \in I$  gilt.*

BEWEIS. Indem wir  $c$  durch  $t \mapsto c(t)/r(t)$  ersetzen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\|c(t)\| = 1$  für alle  $t$  gilt, und wir müssen zeigen, dass man so eine Kurve in der Form  $(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$  für eine stetige Funktion  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben kann. Als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist  $c$  gleichmäßig stetig, also finden wir eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$  sodass für  $s, s' \in [t_i, t_{i+1}]$  immer  $\|c(s) - c(s')\| < \sqrt{2}$  gilt. Da  $c$  Werte im Einheitskreis hat, bedeutet das, dass für jedes  $i$  das Bild  $c([t_i, t_{i+1}])$  in einer offenen Halbebene  $H_i \subset \mathbb{R}^2$  liegt. Betrachten wir nun die Halbebene  $H_0$ . Dann ist das Urbild  $\Phi^{-1}(H_0)$  natürlich

eine Vereinigung von Teilmengen der Form  $(0, \infty) \times (\mu_k, \mu_k + \pi)$  für  $k \in \mathbb{Z}$ , wobei  $\mu_k = \mu_0 + 2k\pi$ . Wegen  $c(a) \in H_0$  können wir  $\mu_0$  so wählen, dass  $\theta_0 \in (\mu_0, \mu_0 + \pi)$  gilt. Von oben wissen wir aber, dass  $\Phi : (0, \infty) \times (\mu_0, \mu_0 + \pi) =: A_0 \rightarrow H_0$  ein Diffeomorphismus und somit ein Homöomorphismus ist. Also können wir  $\theta$  auf  $[t_0, t_1]$  als die zweite Komponente von  $(\Phi|_{A_0})^{-1} \circ c$  definieren.

Dann gilt natürlich die geforderte Gleichung für  $t \in [t_0, t_1]$ . Nun betrachten wir  $p^{-1}(H_1)$ , erhalten analog eine Komponente  $A_1$ , die den Punkt  $(1, \theta(t_1))$  enthält, und definieren  $\theta$  auf  $[t_1, t_2]$  durch  $(\Phi|_{A_1})^{-1} \circ c$ . Klarerweise ist  $\theta$  stetig auf  $[t_0, t_2]$  und erfüllt die geforderte Gleichung. So erhalten wir in endlich vielen Schritten eine stetige Funktion  $\theta$  mit den gewünschten Eigenschaften.

Zur Eindeutigkeit: Sind  $\theta$  und  $\tilde{\theta}$  zwei Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften, dann betrachten wir die stetige Funktion  $\tilde{\theta} - \theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Konstruktion ist  $\cos(\tilde{\theta}(t)) = \cos(\theta(t))$  und  $\sin(\tilde{\theta}(t)) = \sin(\theta(t))$ , also müssen sich  $\tilde{\theta}(t)$  und  $\theta(t)$  immer um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden. Da aber nach Voraussetzung  $\tilde{\theta}(a) = \theta_0 = \theta(a)$  gilt, folgt  $\tilde{\theta} = \theta$  aus der Stetigkeit.  $\square$

Im Fall von stetig differenzierbar parametrisierten Kurven kann man die Funktion  $\theta$  aus dem Satz auch analytisch als Kurvenintegral berechnen. Wir wissen ja, dass die Abbildung  $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ein lokaler Diffeomorphismus ist. Betrachten wir eine lokale Inverse  $\Psi$ , dann ist  $D\Psi(\Phi(r, t)) = D\Phi(r, t)^{-1}$ , also können wir diese Ableitung einfach ausrechnen (und obwohl es verschiedene lokale Inverse um einen Punkt gibt, haben sie alle die gleiche Ableitung). Explizit gilt natürlich

$$D\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

und damit  $\det(D\Phi(r, \theta)) = r$ . Die inverse Matrix dazu ist einfach

$$\frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir die Koordinaten auf  $\mathbb{R}^2$  mit  $x$  und  $y$ , dann sind die Eintragungen in der zweiten Zeile durch  $\frac{-y}{x^2+y^2}$  und  $\frac{x}{x^2+y^2}$  gegeben. Nach Konstruktion sind das die partiellen Ableitungen der zweiten Komponente jeder lokalen Inversen zu  $\Phi$ . Damit können wir die Ableitung dieser zweiten Komponente als  $\eta := \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$  schreiben und das ist eine beliebig oft differenzierbare 1-Form auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Daraus folgt nun leicht die alternative Beschreibung:

**PROPOSITION 1.11.** *Sei  $\eta = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$  und sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $c(t) = (x(t), y(t))$  eine stetig differenzierbar parametrisierte Kurve. Dann gilt für den eindeutigen Lift  $(r(t), \theta(t))$  von  $c$  mit Anfangswert  $\theta_0$  aus Satz 1.11 die Gleichung  $\theta(t) = \theta_0 + \int_a^t \eta(c(s), c'(s)) ds$ . Insbesondere ist für jedes  $k \geq 1$  der Lift eine  $C^k$ -Funktion falls  $c$  eine  $C^k$ -Funktion ist.*

**BEWEIS.** Wie im Beweis von Proposition 1.11 können wir uns auf den Fall  $\|c(t)\| = 1$  für alle  $t$  einschränken und eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  finden. Nach Konstruktion ist die Einschränkung von  $\theta$  auf  $[t_i, t_{i+1}]$  gegeben durch die Komposition einer geeigneten lokalen Inversen von  $\Phi$  mit  $c$ . Aus Abschnitt 1.10 folgt damit, dass für  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  immer  $\theta(t) - \theta(t_i) = \int_{t_i}^t d\theta(s) ds = \int_{t_i}^t \eta(c(s), c'(s)) ds$  gilt. Ist

nun  $t \in [a, b]$  beliebig, dann sei  $i$  so gewählt, dass  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Dann ist aber

$$\begin{aligned} \theta(t) &= (\theta(t) - \theta(t_i)) + (\theta(t_i) - \theta(t_{i-1})) + \cdots + (\theta(t_1) - \theta(t_0)) + \theta(t_0) = \\ &= \int_{t_i}^t \eta(c(s), c'(s)) ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \eta(c(s), c'(s)) ds + \cdots + \int_{t_0}^{t_1} \eta(c(s), c'(s)) ds + \theta_0 = \\ &= \int_a^t \eta(c(s), c'(s)) ds + \theta_0. \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $\theta$  differenzierbar mit Ableitung  $\theta'(t) = \eta(c(t), c'(t))$ . Damit folgt die letzte Behauptung sofort, weil  $\eta$  beliebig oft differenzierbar ist.  $\square$

**1.12. Geschlossene Kurven und die Windungszahl.** Wie schon angekündigt betrachten wir nun den Fall von geschlossenen Kurven. Wir nennen eine stetige Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  *geschlossen*, wenn  $c(a) = c(b)$  gilt und *einfach geschlossen*, wenn dies die einzigen Punkte  $t, s \in [a, b]$  mit  $t \neq s$  aber  $c(t) = c(s)$  sind. Dafür gibt es eine schöne topologische Interpretation:

**LEMMA 1.12.** *Sei  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$  der Einheitskreis. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Dann liefert jede stetige Funktion  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige geschlossene Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  via*

$$c(t) = f\left(\cos \frac{2\pi(t-a)}{(b-a)}, \sin \frac{2\pi(t-a)}{(b-a)}\right)$$

und man erhält so jede stetige geschlossene Kurve. Die Kurve  $c$  ist genau dann einfach geschlossen, wenn  $f$  eine topologische Einbettung, also  $f : S^1 \rightarrow f(S^1)$  ein Homöomorphismus ist.

**BEWEIS.** Natürlich definiert  $t \mapsto \frac{2\pi(t-a)}{(b-a)}$  einen Homöomorphismus  $[a, b] \rightarrow [0, 2\pi]$  also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $[a, b] = [0, 2\pi]$  gilt. In diesem Fall ist dann aber  $c(t) = f(\cos t, \sin t)$  und das ist offensichtlich eine stetige Kurve mit  $c(0) = c(2\pi)$ .

Ist umgekehrt  $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben, dann können wir  $c$  periodisch zu einer stetigen Funktion  $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ausdehnen. Wir definieren einfach für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  die Funktion  $\tilde{c}$  auf  $[2k\pi, (2k+2)\pi]$  durch  $\tilde{c}(t) := c(t - 2k\pi)$ . Dann stimmen die Definitionen auf den Schnittpunkten der Intervalle überein, also ist  $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und natürlich gilt  $\tilde{c}(t+2k\pi) = \tilde{c}(t)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Wegen dieser Periodizität liefert aber  $f(\cos t, \sin t) := \tilde{c}(t)$  eine wohldefinierte Funktion  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , für die natürlich  $c(t) = f(\cos t, \sin t)$  für alle  $t \in [0, 2\pi]$  gilt. Also müssen wir nur noch zeigen, dass  $f$  stetig ist. Für einen Punkt  $(x_0, y_0) \in S^1$  finden wir eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und eine Funktion  $\Psi : U \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$  sodass  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_U$  für die Funktion  $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  gilt. Bezeichnen wir mit  $\theta$  die zweite Komponente von  $\Psi$ , dann gilt für  $(x, y) \in U \cap S^1$  nach Konstruktion  $(x, y) = (\cos(\theta(x, y)), \sin(\theta(x, y)))$  und damit  $f(x, y) = \tilde{c}(\theta(x, y))$ . Damit ist aber  $f$  stetig auf  $U \cap S^1$  also stetig lokal um  $(x_0, y_0)$ .

Damit bleibt nur noch die Charakterisierung von einfach geschlossenen Kurven zu zeigen. Nun ist aber offensichtlich  $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^n$  genau dann einfach geschlossen, wenn die entsprechende Funktion  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist. Das ist aber äquivalent dazu, dass  $f : S^1 \rightarrow f(S^1)$  bijektiv ist. Als beschränkte abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  ist  $S^1$  aber kompakt und als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist  $f(S^1)$  ein Hausdorffraum. Damit muss aber  $f : S^1 \rightarrow f(S^1)$  ein Homöomorphismus sein.  $\square$

Betrachten wir also nun eine geschlossene stetig parametrisierte Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , definieren  $r : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  durch  $r(t) := \|c(t)\|$  und wählen  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  so, dass

$c(a) = (r(a) \cos \theta_0, r(a) \sin \theta_0)$  gilt. Dann gibt es nach Satz 1.11 eine eindeutige stetige Funktion  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\theta(a) = \theta_0$  und  $c(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$  gilt. Aus  $c(b) = c(a)$  folgt nun sofort, dass es eine ganze Zahl  $k$  geben muss, sodass  $\theta(b) = \theta(a) + 2k\pi$  gilt. Diese Zahl ist unabhängig von der Wahl von  $\theta_0$ , weil jede andere mögliche Wahl von der Form  $\tilde{\theta}_0 = \theta_0 + 2\ell\pi$  für eine ganze Zahl  $\ell \in \mathbb{Z}$  ist. Betrachten wir  $\tilde{\theta}(t) := \theta(t) + 2\ell\pi$ , dann erfüllt das offensichtlich die Bedingungen von Satz 1.11, also muss es die eindeutige Funktion zu diesem Anfangswert sein. Damit folgt aber sofort, dass  $\tilde{\theta}(b) - \tilde{\theta}(a) = \theta(b) - \theta(a) = 2\pi k$  gilt.

**DEFINITION 1.12.** Die ganze Zahl  $k = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) \in \mathbb{Z}$  für eine Darstellung der Form  $c(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$  einer stetig parametrisierten geschlossenen Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  heißt die *Windungszahl von  $c$  um 0* und wird mit  $w_0(c)$  bezeichnet.

**BEISPIEL 1.12.** Man findet für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  problemlos eine stetig parametrisierte Kurve  $c_k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mit  $w_0(c_k) = k$ . Dazu muss man nur einfach  $c_k(t) := (\cos kt, \sin kt)$  setzen, was als zugehörige Funktion einfach  $\theta(t) = kt$  liefert. Am handlichsten kann man das im Bild von Funktionen  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  interpretieren, wenn man  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$  und damit  $S^1$  mit  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  identifiziert. Dann ist die entsprechende Funktion  $f_k : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  einfach durch  $f_k(z) = z^k$  gegeben.

Ist  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  eine stetig differenzierbar parametrisierte geschlossene Kurve, dann können wir nach Definition und Proposition 1.11 die Windungszahl auch analytisch als  $w_0(c) = \frac{1}{2\pi} \int_c \eta$  für die 1-Form  $\eta$  aus Abschnitt 1.11 berechnen.

Natürlich ist die Windungszahl invariant unter (orientierungstreuen) Reparametrisierungen. Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  eine stetig parametrisierte Kurve und  $r$  und  $\theta$  entsprechende Funktionen. Dann liefern für einen Homöomorphismus  $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$  mit  $\varphi(a') = a$  und  $\varphi(b') = b$  die Funktionen  $\tilde{r} = r \circ \varphi$  und  $\tilde{\theta} = \theta \circ \varphi$  natürlich eine “passende” Darstellung der Reparametrisierung  $\tilde{c} = c \circ \varphi$  von  $c$ . Und natürlich gilt  $\tilde{\theta}(b') - \tilde{\theta}(a') = \theta(b) - \theta(a)$  und damit  $w_0(\tilde{c}) = w_0(c)$ . Wir werden aber gleich sehen, dass die Windungszahl noch viel stärkere Invarianzeigenschaften besitzt.

**1.13. Homotopie.** Wir kommen nun zu einem der fundamentalen Begriffe der (algebraischen) Topologie. Die Motivation für den Begriff ist die Frage, ob man stetige Funktionen stetig ineinander “deformieren” kann. Der Begriff macht in einem ganz allgemeinen Setting Sinn. Wir bezeichnen hier mit  $I$  das Einheitsintervall, also  $I := [0, 1]$ . Wir betrachten Mengen  $X$  und  $Y$  und eine durch  $I$  parametrisierte Familie von Funktionen, also sei  $f_s : X \rightarrow Y$  eine Funktion für jedes  $s \in [0, 1]$ . Dann können wir eine Funktion  $F : X \times I \rightarrow Y$  durch  $F(x, s) := f_s(x)$  definieren und umgekehrt definiert natürlich für gegebenes  $F : X \times I \rightarrow Y$  die Vorschrift  $f_s(x) := F(x, s)$  eine Familie von Funktionen  $f_s : X \rightarrow Y$ . Sind nun  $X$  und  $Y$  topologische Räume, dann trägt auch  $X \times I$  eine natürliche Topologie und wir können über Stetigkeit der beteiligten Funktionen sprechen. Für eine stetige Funktion  $F : X \times I \rightarrow Y$  ist natürlich für jedes  $s \in [0, 1]$  die Funktion  $f_s : X \rightarrow Y$ ,  $f_s(x) := F(x, s)$  stetig. (Formal ist hier das Argument, dass für fixes  $s$  die Abbildung  $X \rightarrow X \times I$ ,  $x \mapsto (x, s)$  stetig ist.) Umgekehrt ist aber für eine allgemeine Familie  $f_s$  die resultierende Funktion  $F$  im Allgemeinen nicht stetig, die verschiedenen Funktionen  $f_s$  müssen ja a priori gar nichts miteinander zu tun haben. Man betrachtet aber einfach die Stetigkeit von  $F$  als Definition für die stetige Abhängigkeit der Familie  $f_s$  vom Parameter  $s$ . Damit ergibt sich ein natürlicher Begriff dafür, dass sich zwei stetige Funktionen stetig ineinander deformieren lassen:

DEFINITION 1.13. (1) Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und seien  $f, g : X \rightarrow Y$  stetige Funktionen. Man sagt, dass  $f$  und  $g$  *homotop* sind, wenn es eine stetige Funktion  $H : X \times I \rightarrow Y$  gibt, sodass für jedes  $x \in X$  die Gleichungen  $H(x, 0) = f(x)$  und  $H(x, 1) = g(x)$  gelten. In diesem Fall schreibt man  $f \sim g$  und nennt  $H$  eine *Homotopie von  $f$  nach  $g$* .

(2) Man nennt eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow Y$  *nullhomotop*, wenn sie homotop zur konstanten Funktion  $y_0$  für ein Element  $y_0 \in Y$  ist.

Man verifiziert sofort, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation ist: Für jede Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist  $H(x, s) := f(x)$  eine Homotopie von  $f$  nach  $f$ . Ist  $H : X \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ , dann definiert  $\tilde{H}(x, s) := H(x, 1 - s)$  eine Homotopie von  $g$  nach  $f$ . Sind schließlich  $H_1, H_2 : X \times I \rightarrow Y$  Homotopien von  $f$  nach  $g$  beziehungsweise von  $g$  nach  $h$ , dann definieren wir  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$  durch

$$\tilde{H}(x, s) := \begin{cases} H_1(x, 2s) & s \leq 1/2 \\ H_2(x, 2s - 1) & s > 1/2 \end{cases}.$$

Nachdem  $H_1(x, 1) = g(x) = H_2(x, 0)$  gilt, passen diese Funktionen auf  $X \times \{1/2\}$  zusammen und definieren damit eine stetige Funktion  $\tilde{H}$ , die natürlich eine Homotopie von  $f$  nach  $h$  ist.

BEISPIEL 1.13. Homotopie ist ein ziemlich grobes Konzept und in vielen Fällen sind je zwei gegebene Funktionen automatisch homotop.

(1) Für jeden topologischen Raum  $X$  ist jede stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  via  $H(x, s) := (1 - s)f(x)$  homotop zur konstanten Funktion 0 und damit nullhomotop. Somit folgt für beliebige Funktionen  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  immer  $f \sim g$ . Das funktioniert ganz analog für konvexe Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  und allgemeiner für sogenannte *sternförmige Teilmengen*. Diese Bedingung bedeutet für eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$ , dass es einen Punkt  $a_0 \in A$  gibt, sodass für jedes  $a \in A$  die Verbindungsstrecke  $\{(1 - s)a_0 + sa : s \in I\}$  zwischen  $a_0$  und  $a$  ganz in  $A$  liegt. Damit kann man nämlich für eine beliebige stetige Funktion  $f : X \rightarrow A$  eine Homotopie zur konstanten Funktion  $a_0$  durch

$$H(x, s) := (1 - s)f(x) + sa_0$$

definieren. Man läuft immer längs der Verbindungsstrecke von  $f(x) \in A$  zum Punkt  $a_0$ .

(2) Analog ist für eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$ , die sternförmig um einen Punkt  $a_0 \in A$  ist und jeden topologischen Raum  $Y$  jede Funktion  $f : A \rightarrow Y$  homotop zur konstanten Funktion  $f(a_0)$ . Dazu definiert man eine Homotopie durch

$$H(a, s) := f((1 - s)a + s(a_0)).$$

Man läuft also wieder längs der Verbindungsstrecke und bildet das mit  $f$  ab.

Im Allgemeinen sind zwei konstante Funktionen  $X \rightarrow Y$  nicht homotop. Betrachten wir nämlich  $y_0, y_1 \in Y$  und eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  mit  $H(x, 0) = y_0$  und  $H(x, 1) = y_1$  für alle  $x \in X$ . Dann wählen wir einen beliebigen Punkt  $x_0 \in X$  und erhalten durch  $c(s) := H(x_0, s)$  eine stetige Kurve  $c : I \rightarrow Y$  mit  $c(0) = y_0$  und  $c(1) = y_1$ . Umgekehrt liefert so eine Kurve via  $(x, s) \mapsto c(s)$  natürlich eine Homotopie zwischen den konstanten Funktionen. Also sind genau dann beliebige konstante Funktionen  $X \rightarrow Y$  homotop, wenn  $Y$  bogenzusammenhängend ist. Das liefert einen ersten Hinweis auf eine Verbindung zur Topologie.

Wir wollen diese Konzept nun auf Funktionen  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  anwenden. Hier können wir natürlich  $S^1 \times I$  als Zylinder  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$  in  $\mathbb{R}^3$  betrachten.

Funktionen  $f, g : S^1 \rightarrow Y$  kann man dann als Funktionen auf den beiden Kreisen betrachten, die den "Rand" des Zylinders bilden und  $f \sim g$  bedeutet genau, dass man eine stetige Funktion auf dem Zylinder findet, die diese beiden Funktionen als "Randwerte" hat. Das unterstützt das Bild der stetigen Deformation zwischen den beiden Funktionen.

Natürlich kann man das auch im Bild der geschlossenen stetigen Kurven formulieren. Analog zu Lemma 1.12 zeigt man leicht, dass die Funktionen  $f_1, f_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  zu zwei geschlossenen Kurven  $c_1, c_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  genau dann homotop sind, wenn es eine stetige Funktion  $H : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  gibt, sodass  $H(t, 0) = c_1(t)$ ,  $H(t, 1) = c_2(t)$  für alle  $t \in [a, b]$  sowie  $H(a, s) = H(b, s)$  für alle  $s \in I$  gilt. Man muss also verlangen, dass alle "Zwischenkurven" geschlossen sind. Damit können wir nun ein fundamentales Resultat beweisen:

**SATZ 1.13.** *Seien  $f_1, f_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  stetige Funktionen und seien  $c_1, c_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  die entsprechenden geschlossenen Kurven. Dann gilt  $f_1 \sim f_2$  genau dann, wenn  $w_0(c_1) = w_0(c_2)$  gilt. Insbesondere ist die Inklusion  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nicht nullhomotop.*

**BEWEIS.** ( $\Leftarrow$ ) Nach Satz 1.12 finden wir für  $i = 1, 2$  stetige Funktionen  $r_i : [0, 2\pi] \rightarrow (0, \infty)$  und  $\theta_i : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $c_i(t) = (r_i(t) \cos(\theta_i(t)), r_i(t) \sin(\theta_i(t)))$  gilt. Dann definieren wir  $R : [0, 2\pi] \times I \rightarrow (0, \infty)$  und  $\Theta : [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $R(t, s) := (1-s)r_1(t) + sr_2(t)$  und  $\Theta(t, s) := (1-s)\theta_1(t) + s\theta_2(t)$ . Dann sind diese Funktionen offensichtlich stetig, also definiert

$$H(t, s) = (R(t, s) \cos(\Theta(t, s)), R(t, s) \sin(\Theta(t, s)))$$

eine stetige Funktion  $H : [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Nach Konstruktion gilt offensichtlich  $H(t, 0) = c_1(t)$  und  $H(t, 1) = c_2(t)$ , also stellt sich nur noch die Frage, ob auch die "Zwischenkurven"  $t \mapsto H(t, s)$  für alle  $s \in I$  geschlossen sind. Nach Konstruktion ist  $r_i(0) = r_i(2\pi)$  für  $i = 1, 2$  also folgt  $R(2\pi, s) = R(0, s)$  für alle  $s \in I$  sofort aus der Definition. Andererseits berechnen wir einfach  $\Theta(2\pi, s) - \Theta(0, s)$  als

$$(1-s)(\theta_1(2\pi) - \theta_1(0)) + s(\theta_2(2\pi) - \theta_2(0)) = (1-s)2\pi w_0(c_1) + s2\pi w_0(c_2).$$

Nach Voraussetzung ist aber  $w_0(c_1) = w_0(c_2)$  und damit ist  $\Theta(2\pi, s) = \Theta(0, s) + 2\pi w_0(c_1)$  und somit  $H(2\pi, s) = H(0, s)$  für alle  $s \in I$ .

( $\Rightarrow$ ): Nehmen wir umgekehrt an, dass  $H : [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  eine Homotopie von  $c_1$  nach  $c_2$  ist, sodass  $H(2\pi, s) = H(0, s)$  für alle  $s \in I$  gilt. Dann definieren wir  $R : [0, 2\pi] \times I \rightarrow (0, \infty)$  durch  $R(t, s) = \|H(t, s)\|$ . Das ist natürlich eine stetige Funktion und wir behaupten, dass wir eine stetige Funktion  $\Theta : [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  finden, sodass

$$H(t, s) = (R(t, s) \cos(\Theta(t, s)), R(t, s) \sin(\Theta(t, s)))$$

gilt. Wenn wir die Funktion  $\Theta$  finden, vervollständigt das den Beweis, denn dann ist  $s \mapsto \Theta(2\pi, s) - \Theta(0, s)$  eine stetige Funktion  $I \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Werte wegen  $H(2\pi, s) = H(0, s)$  nur ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  sein können. So eine Funktion muss aber natürlich konstant sein, also folgt insbesondere  $\Theta(2\pi, 0) - \Theta(0, 0) = \Theta(2\pi, 1) - \Theta(0, 1)$ . Wegen  $H(t, 0) = c_1(t)$  und  $H(t, 1) = c_2(t)$  sind diese Differenzen aber gleich  $2\pi w_0(c_1)$  bzw.  $2\pi w_0(c_2)$  und damit folgt  $w_0(c_1) = w_0(c_2)$ . Die letzte Behauptung folgt dann natürlich, weil jede konstante Kurve Windungszahl 0 hat, während die Inklusion  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  der Kurve  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  auf  $[0, 2\pi]$  entspricht, die Windungszahl 1 hat.

Zum Beweis der Behauptung gehen wir analog wie im Beweis von Satz 1.11 vor. Wir ersetzen wir  $H(t, s)$  durch  $H(t, s)/R(t, s)$  um ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\|H(t, s)\| = 1$  für alle  $t, s$  anzunehmen und müssen dann

$$H(t, s) = (\cos(\Theta(t, s)), \sin(\Theta(t, s)))$$

für eine stetige Funktion  $\Theta$  schreiben. Nun ist der Raum  $[0, 2\pi] \times I$  kompakt, also  $H$  gleichmäßig stetig. Daher gibt es Unterteilungen  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$  und  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{M-1} < s_M = 1$  sodass für  $(t, s), (t', s') \in [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$  immer  $\|H(t, s) - H(t', s')\| < \sqrt{2}$  gilt und damit alle diese Punkte in einer Halbebene  $H_{i,j}$  liegen.

Wir wählen nun einen passenden Anfangswert  $\Theta(0, 0)$  und damit eine der Komponenten des Urbildes  $\Phi^{-1}(H_{0,0})$ . Die entsprechende Inverse zu  $\Phi$  liefert uns eine stetige Funktion  $\Theta : [0, t_1] \times [0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit der gewünschten Eigenschaft. Der Wert  $\Theta(0, s_1)$  liegt dann in einer Komponente von  $\Phi^{-1}(H_{0,1})$  und die entsprechende Inverse zu  $\Phi$  liefert eine Funktion  $\hat{\Theta} : [0, t_1] \times [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $\hat{\Theta}(0, s_1) = \Theta(0, s_1)$  erfüllt. Dann sind aber  $t \mapsto \Theta(t, s_1)$  und  $t \mapsto \hat{\Theta}(t, s_1)$  stetige Lifts (im Sinne von Satz 1.11) der Kurve  $t \mapsto H(t, s_1)$  auf  $[0, t_1]$ . Aus der Eindeutigkeit in Satz 1.11 folgt damit, dass  $\Theta$  und  $\hat{\Theta}$  auf  $[0, t_1] \times \{s_1\}$  übereinstimmen. Damit definieren die beiden Funktionen aber eine stetige Funktion  $[0, t_1] \times [0, s_2] \rightarrow \mathbb{R}$  mit der gewünschten Eigenschaft, die wir wieder mit  $\Theta$  bezeichnen. Das kann man nun iterativ fortsetzen und damit erhält man eine stetige Funktion  $\Theta : [0, t_1] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  mit der gewünschten Eigenschaft.

Nun können wir mit dem Anfangswert  $\Theta(t_1, 0)$  beginnen, damit eine stetige Funktion  $\hat{\Theta}$  auf  $[t_1, t_2] \times [0, s_1]$  definieren, diese dann auf  $[t_1, t_2] \times [0, s_2]$  und iterativ auf  $[t_1, t_2] \times I$  fortsetzen. Wir haben dann also  $\Theta : [0, t_1] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\hat{\Theta} : [t_1, t_2] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\Theta(t_1, 0) = \hat{\Theta}(t_1, 0)$ . Dann sind aber  $s \mapsto \Theta(t_1, s)$  und  $s \mapsto \hat{\Theta}(t_1, s)$  Lifts der Kurve  $s \mapsto H(t_1, s)$  mit dem gleichen Anfangswert, also folgt  $\Theta(t_1, s) = \hat{\Theta}(t_1, s)$  für alle  $s \in I$  aus Satz 1.11. Damit passen die beiden Funktionen wieder zusammen und definieren daher eine stetige Funktion  $[0, t_2] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Diesen Schritt können wir nun aber ebenfalls iterieren und erhalten damit in endlich vielen Schritten eine stetige Funktion  $\Theta : [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  mit der gewünschten Eigenschaft.  $\square$

**BEMERKUNG 1.13.** Insbesondere zeigt der Beweis, dass man für die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf der Menge  $C(S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  die Menge der Äquivalenzklassen mit  $\mathbb{Z}$  identifizieren kann. Die resultierende algebraische Struktur auf der Menge der "Homotopieklassen" hat eine einfache anschauliche Interpretation, im wesentlichen indem man für zwei geschlossene Kurven erst durch die eine und dann durch die andere Kurve läuft. Algebraische Strukturen auf Mengen von Homotopieklassen und ähnlichen Objekten sind ein wichtiges Thema in der algebraischen Topologie.

**1.14. Anwendungen.** Eine Interpretation der letzten Aussage in Satz 1.13 ist, dass der Einheitskreis  $S^1$  nichttriviale Topologie hat. Wie in Abschnitt 0.3 angekündigt können wir das nun benutzen um einen überraschenden Fixpunktsatz und andere unerwartete Tatsachen über stetige Funktionen zu beweisen. Schließlich führt der Begriff der Windungszahl überraschenderweise auch zu einem einfachen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra, also dafür, dass jedes komplexe Polynom Nullstellen besitzt.

Sei  $B^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$  die abgeschlossene Einheitscheibe in  $\mathbb{R}^2$ . Natürlich ist das eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  und  $S^1$  sitzt als "Rand" in  $B^2$ .

**SATZ 1.14.** (1) *Es gibt keine stetige Funktion  $r : B^2 \rightarrow S^1$  sodass  $r(x) = x$  für alle  $x \in S^1$  gilt. ("S<sup>1</sup> ist kein Retrakt von B<sup>2</sup>").*

(2) *(Brouwerscher Fixpunktsatz) Sei  $f : B^2 \rightarrow B^2$  eine stetige Funktion. Dann hat  $f$  einen Fixpunkt, also gibt es einen Punkt  $x_0 \in B^2$  sodass  $f(x_0) = x_0$  gilt.*

(3) *(Satz von Borsuk–Ulam) Sei  $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$  und sei  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige Funktion. Dann gibt es einen Punkt  $x_0 \in S^2$  sodass  $f(x_0) = f(-x_0)$  gilt. Insbesondere gibt es keine injektive stetige Funktion  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*



(4) (*Fundamentalsatz der Algebra*) Sei  $p \in \mathbb{C}[z]$  ein komplexes Polynom vom Grad  $n > 0$ . Dann hat  $p$  mindestens eine Nullstelle, also gibt es ein  $z_0 \in \mathbb{C}$  sodass  $p(z_0) = 0$  gilt.

BEWEIS. (1) Nehmen wir indirekt an, dass es so eine stetige Funktion  $r$  gibt. Dann definieren wir  $H : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  als  $H(x, s) := r((1-s)x)$ . Dann ist  $H$  natürlich stetig (und hat sogar Werte in  $S^1$ ) und natürlich gilt  $H(x, 0) = x$  und  $H(x, 1) = r(0)$ . Damit zeigt aber  $H$ , dass die Inklusion  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nullhomotop (als Funktion nach  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ) ist, ein Widerspruch zu Satz 1.13.

(2) Nehmen wir indirekt an, dass  $f : B^2 \rightarrow B^2$  eine stetige Funktion ist, sodass  $f(x) \neq x$  für alle  $x \in B^2$  gilt. Dann definieren wir  $r : B^2 \rightarrow S^1$  indem wir den Strahl von  $f(x)$  durch  $x$  bilden und mit  $S^1$  schneiden. Explizit ist der Strahl durch  $f(x) + t(x - f(x))$  für  $t \geq 0$  parametrisiert. Nun liefert  $\|f(x) + t(x - f(x))\| = 1$  eine quadratische Gleichung an  $t$  und wir suchen eine strikt positive Lösung dieser Gleichung, die Eindeutigkeit dieser Lösung ist geometrisch offensichtlich. Setzen wir  $A(x) := \langle x - f(x), f(x) \rangle$ , dann definiert das natürlich eine stetige Funktion  $A : B^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und die Lösung unserer Gleichung ist

$$t(x) := \frac{1}{\|x - f(x)\|^2} \left( -A(x) + \sqrt{A(x)^2 + (1 - \|f(x)\|^2)\|x - f(x)\|^2} \right).$$

Das sieht vielleicht etwas kompliziert aus, ist aber offensichtlich eine stetige Funktion in  $x$ . Damit ist aber auch  $r(x) := f(x) + t(x)(x - f(x))$  eine stetige Funktion auf  $B^2$  und nach Konstruktion ist  $r(x) \in S^1$  für alle  $x$ . Für  $x \in S^1$  ist geometrisch offensichtlich, dass  $t(x) = 1$  gelten muss und man kann das auch explizit überprüfen. Damit folgt aber  $r(x) = x$  und das ist ein Widerspruch zu Teil (1).

(3) Nehmen wir indirekt an, dass  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige Funktion ist, sodass  $f(x) \neq f(-x)$  für alle  $x \in S^2$  gilt. Dann definiert  $f_1(x) := f(x) - f(-x)$  eine stetige Funktion  $f_1 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und nach Konstruktion gilt  $f_1(-x) = -f_1(x)$ . Schränken wir diese Funktion auf den Äquator  $S^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$  ein, dann erhalten wir eine stetige Funktion  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  sodass  $g(-x) = -g(x)$  gilt. Nun können wir ähnlich wie in Teil (1) aus der Einschränkung von  $f_1$  auf die obere Hemisphäre eine Homotopie von  $g$  zur konstanten Funktion  $f_1(0, 0, 1)$  konstruieren. Explizit definiert man dazu  $H : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  durch

$$H((u, v), s) := f_1((1-s)u, (1-s)v, \sqrt{1 - (1-s)^2(u^2 + v^2)})$$

für  $(u, v) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ .

Betrachten wir andererseits  $g$  als geschlossene Kurve  $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  dann können wir diese nach Satz 1.13 als  $(r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$  für stetige Funktionen  $r$  und  $\theta$  schreiben. Die Bedingung, dass  $g(-x) = -g(x)$  ist zeigt, dass für  $t \in [0, \pi]$  immer  $r(t + \pi) = r(t)$  gelten muss, während sich  $\theta(t + \pi)$  von  $\theta(t)$  um ein ungerades Vielfaches von  $\pi$  unterscheiden muss. Da  $\theta(t + \pi) - \theta(t)$  eine stetige Funktion ist, muss es eine Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  geben, sodass  $\theta(t + \pi) = \theta(t) + (2k + 1)\pi$  gilt. Wendet man das auf  $\theta(0)$ ,  $\theta(\pi)$  und  $\theta(2\pi)$  an, dann erhält man  $\theta(2\pi) - \theta(0) = (4k + 2)\pi \neq 0$ . Damit ist aber  $w_0(c) = 2k + 1 \neq 0$ , also kann die Funktion  $g$  nicht nullhomotop sein, ein Widerspruch.

(4) Nachdem jedes Vielfache eines Polynoms die gleichen Nullstellen hat, genügt es Polynome mit führendem Koeffizienten 1 zu betrachten. Nehmen wir also indirekt an, dass für  $n > 0$  das Polynom  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$  keine Nullstelle hat. Sei  $\lambda := \|a_0\| + \dots + \|a_{n-1}\| + 1 \in \mathbb{R}$  und betrachten wir die Funktion  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , die gegeben ist durch  $f(z) := p(\lambda z)$  für  $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$ . Dann zeigt  $H(z, s) := p((1-s)\lambda z)$ , dass  $f$  homotop zur konstanten Funktion  $p(0)$  ist.

Andererseits gilt für  $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} \|p(\lambda z) - \lambda^n z^n\| &= \|a_0 + a_1 \lambda z + \cdots + a_{n-1} \lambda^{n-1} z^{n-1}\| \leq \|a_0\| + \lambda \|a_1\| + \cdots + \lambda^{n-1} \|a_{n-1}\| \\ &\leq \lambda^{n-1} (\|a_0\| + \cdots + \|a_{n-1}\|) < \lambda^n = \|\lambda^n z^n\|. \end{aligned}$$

Also liegt  $p(\lambda z)$  immer in der offenen Scheibe vom Radius  $\|\lambda^n z^n\|$  um den Punkt  $\lambda^n z^n$  und diese Scheibe liegt ganz in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Damit definiert aber  $\tilde{H}(z, s) := (1-s)p(\lambda z) + s\lambda^n z^n$  eine stetige Funktion mit Werten in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  die offensichtlich eine Homotopie zwischen  $f$  und der Funktion  $z \mapsto \lambda^n z^n$  ist. Aber nach Beispiel 1.12 hat die letztere Funktion den Abbildungsgrad  $n > 0$ , ein Widerspruch.  $\square$

**1.15. 1-Formen mit Stammfunktion.** Wir können die topologischen Überlegungen der letzten Abschnitte auch benutzen, um die Analysis von 1-Formen besser zu verstehen. Und zwar wollten wir uns mit der Frage beschäftigen, ob man für eine gegebene offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine gegebene 1-Form  $\alpha \in \Omega^1(U)$  in der Form  $\alpha = df$  für eine Funktion  $f$  schreiben kann. Die ersten Schritte dazu können wir für stetige 1-Formen machen, später werden wir uns weiter einschränken. Aus Beispiel 1.10 wissen wir ja schon, dass für eine stetig differenzierbar parametrisierte Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  immer  $\int_c df = f(c(b)) - f(c(a))$  gilt, also das Kurvenintegral nur von den Endpunkten der Kurve  $c$  abhängt. Um zu sehen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, ist es technisch handlicher unsere Begriffe noch etwas zu erweitern.

**DEFINITION 1.15.** (1) Eine *stückweise  $C^1$ -parametrisierte Kurve* ist eine stetige Funktion  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $a < b \in \mathbb{R}$ , sodass es eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$ , sodass für jedes  $j = 1, \dots, N$  die Einschränkung  $c_{(j)} := c|_{[t_{j-1}, t_j]} : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar ist.

(2) Für eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$ , eine Kurve  $c$  wie in (1) mit Werten in  $U$  und eine stetige 1-Form  $\alpha \in \Omega^1(U)$  definieren wir das *Kurvenintegral*  $\int_c \alpha := \sum_{j=1}^N \int_{c_{(j)}} \alpha$ .

Aus der Additivität des Integrals folgt sofort, dass die Definition in (2) unabhängig von der Wahl der Zerlegung ist (also dass sich nichts ändert, wenn man Zwischenpunkte "einfügt"), siehe Übungen. Natürlich ist es jetzt auch kein Problem, von stückweise  $C^1$ -parametrisierten geschlossenen Kurven zu sprechen.

Der Grund für die Einführung dieser Verallgemeinerung ist, dass die Existenz von stückweise  $C^1$ -parametrisierten Kurven oft leicht zu beweisen ist:

**LEMMA 1.15.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine zusammenhängende offene Teilmenge. Dann gibt es für je zwei Punkte  $x, y \in U$  ein Intervall  $[a, b]$  und eine stückweise  $C^1$ -parametrisierte Kurve  $c : [a, b] \rightarrow U$  mit  $c(a) = x$  und  $c(b) = y$ .*

**BEWEIS.** Aus Beispiel 1.1 wissen wir, dass  $U$  wegzusammenhängend ist, also finden wir eine stetige Kurve  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow U$ , sodass  $\tilde{c}(0) = x$  und  $\tilde{c}(1) = y$  gilt. Da  $U$  offen ist, finden wir für jedes  $s \in [0, 1]$  eine reelle Zahl  $\varepsilon_s > 0$ , so dass der Ball  $B_{\varepsilon_s}(c(s))$  ganz in  $U$  enthalten ist. Diese offenen Bälle bilden eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge  $c([0, 1]) \subset \mathbb{R}^n$  also gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Sei nun  $B_1$  einer dieser endlich vielen Bälle, der  $x = c(0)$  enthält. Dann sei  $s_1 := \sup\{s \in [0, 1] : c([0, s]) \subset B_1\}$ . Weil  $B_1$  offen ist muss  $c(s_1) \notin B_1$  gelten und wir wählen  $B_2$  als einen der endlich vielen Bälle, der  $c(s_1)$  enthält. Natürlich muss dann  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$  gelten. Dann setzen wir  $s_2 = \sup\{s \in [0, 1] : c([0, s]) \subset B_1 \cup B_2\}$ , finden einen Ball  $B_3$  und so weiter. Nach endlich vielen Schritten finden wir dann Bälle  $B_1, \dots, B_N$ , die  $c([0, 1])$  überdecken, sodass jeweils  $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$  gilt. Wählen wir einen Punkt  $x_i$  in diesem Durchschnitt für  $i = 1, \dots, N-1$  und setzen  $x_0 := x$  und  $x_N := y$ . Dann liegen  $x_{i-1}$  und  $x_i$  jeweils in  $B_i$

also liegt auch die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten ganz in  $B_i$  und natürlich kann man den resultierenden Streckenzug von  $x = x_0$  nach  $x_N = y$  stückweise stetig differenzierbar parametrisieren.  $\square$

Damit können wir nun unsere Charakterisierung beweisen:

**SATZ 1.15.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend. Dann sind für eine stetige 1-Form  $\alpha \in \Omega^1(U)$  folgende Bedingungen äquivalent:*

- (i) *Es gibt eine  $C^1$ -Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\alpha = df$  gilt.*
- (ii) *Für jede stückweise  $C^1$ -parametrisierte Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow U$  hängt  $\int_c \alpha$  nur von  $c(0)$  und  $c(1)$  ab.*
- (iii) *Für jede geschlossene, stückweise  $C^1$ -parametrisierte Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow U$  ist  $\int_c \alpha = 0$ .*

**BEWEIS.** (i) $\Rightarrow$ (ii) wissen wir aus Beispiel 1.10.

Weil für eine konstante Kurve jedes Kurvenintegral verschwindet folgt (ii) $\Rightarrow$ (iii) sofort.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) ist ein einfacher Trick: Seien  $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow U$  stückweise  $C^1$ -parametrisiert mit  $c_1(0) = c_2(0) =: x$  und  $c_1(1) = c_2(1) =: y$ , dann definieren wir  $c : [0, 1] \rightarrow U$  durch

$$c(t) := \begin{cases} c_1(2t) & t \leq 1/2 \\ c_2(2 - 2t) & t > 1/2 \end{cases} .$$

Man läuft also zuerst längs  $c_1$  von  $x$  nach  $y$  und dann

“rückwärts” längs  $c_2$  von  $y$  nach  $x$ . Nach Konstruktion ist  $c$  stückweise  $C^1$ -parametrisiert und geschlossen, also gilt  $\int_c \alpha = 0$  nach (iii). Zerlegt man  $\int_c \alpha$  nach Definition in ein Integral über Teilintervalle, dann kann man insbesondere  $1/2$  als einen der Teilungspunkte wählen. Die Stücke von  $c$  bis  $1/2$  sind dann aber Reparametrisierungen der entsprechenden Stücke von  $c_1$ , die Stücke danach sind Reparametrisierungen der entsprechenden Stücke von  $c_2$ , die aber in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Damit folgt  $0 = \int_c \alpha = \int_{c_1} \alpha - \int_{c_2} \alpha$ .

Der wesentliche Schritt des Beweises ist (ii) $\Rightarrow$ (i): Wählen wir einen fixen Punkt  $x_0 \in U$ . Dann finden wir nach Lemma 1.15 eine stückweise  $C^1$ -parametrisierte Kurve  $c_x : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $c_x(0) = x_0$  und  $c_x(1) = x$  und wir definieren  $F(x) := \int_{c_x} \alpha \in \mathbb{R}$ . Das ist unabhängig von der Wahl der Kurve nach Bedingung (ii), also erhalten wir eine wohldefinierte Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir müssen zeigen, dass  $F$  eine  $C^1$ -Funktion ist und  $dF = \alpha$  gilt. Das können wir lokal um einen Punkt  $x \in U$  beweisen. Da  $U$  offen ist, finden wir  $\varepsilon > 0$  sodass  $B_\varepsilon(x) \subset U$  gilt. Für  $y \in B_\varepsilon(x)$  wählen wir die Kurve  $c_y$  so, dass wir zunächst längs  $c_x$  nach  $x$  laufen und dann längs der Verbindungsstrecke  $\gamma$  von  $x$  nach  $y$ . Dann gilt nach Konstruktion  $F(y) = F(x) + \int_\gamma \alpha$ . Für  $t < \varepsilon$  und  $i = 1, \dots, n$  können wir das auf  $y = x + te_i$  anwenden und die Verbindungsstrecke als  $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(s) := x + se_i$  parametrisieren. Schreiben wir nun  $\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i$  und benutzen  $\gamma'_i(s) = e_i$ , dann zeigt Formel (1.6) sofort

$$F(x + te_i) = F(x) + \int_0^t \alpha_i(x + se_i) ds.$$

Da  $\alpha_i$  eine stetige Funktion ist, ist die rechte Seite differenzierbar in  $t$  nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und die Ableitung in  $t = 0$  ist  $\alpha_i(x)$ . Damit existieren die partiellen Ableitungen von  $F$  in jedem Punkt und  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \alpha_i$ . Damit ist aber  $F$  eine  $C^1$ -Funktion und  $\alpha = dF$ .  $\square$

**1.16. Geschlossene 1-Formen.** Natürlich sind die Bedingungen (ii) und (iii) in Proposition 1.15 praktisch nicht leicht zu verifizieren. Unter etwas stärkeren Voraussetzungen an die Differenzierbarkeit gibt es aber eine einfache notwendige Bedingung

für die Existenz einer Stammfunktion. Ist nämlich  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion, dann ist natürlich  $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  stetig differenzierbar und die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen von  $df$  sind die zweiten partiellen Ableitungen von  $f$ , die nach dem Satz von Schwarz symmetrisch sind. Das motiviert folgende Definition.

**DEFINITION 1.16.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $\alpha \in \Omega^1(U)$  eine stetig differenzierbare 1-Form, die wir als  $\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i$  schreiben. Dann heißt  $\alpha$  *geschlossen*, wenn für je zwei Indizes  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  die Gleichung  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$  gilt.

Das ist nun eine Bedingung, die problemlos überprüft werden kann (man muss ja nur partielle Ableitungen berechnen) und nach den obigen Überlegungen ist für jede  $C^2$ -Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  die 1-Form  $df$  geschlossen. Damit stellt sich die Frage, ob diese Bedingung auch hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion ist. Tatsächlich kennen wir schon ein Beispiel, das zeigt, dass die Bedingung im Allgemeinen nicht hinreichen sein kann: Betrachten wir  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und die 1-Form  $\eta$  aus Abschnitt 1.11, also  $\eta = \frac{-x_2}{(x_1)^2 + (x_2)^2} dx_1 + \frac{x_1}{(x_1)^2 + (x_2)^2} dx_2$ . Um zu überprüfen, dass diese Form geschlossen ist, müssen wir nur  $\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1}$  verifizieren, was eine einfache Rechnung ist. Nach den Überlegungen aus dem Beweis von Proposition 1.11 folgt das auch ganz ohne Rechnung. Dort haben wir gesehen, dass es für jeden Punkt  $x \in U$  eine offene Teilmenge  $V \subset U$  mit  $x \in V$  und eine  $C^\infty$ -Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  (nämlich die zweite Komponente einer lokalen Inversen  $\Psi$  von  $\Phi$ ) gibt, sodass auf  $V$  die Gleichung  $\eta = df$  gilt. Das genügt natürlich um sicherzustellen, dass die Gleichung in  $x$  erfüllt ist.

Es zeigt sich aber, dass für sternförmige offene Mengen die Bedingung sehr wohl hinreichend ist. Damit kann man aber nun umgekehrt 1-Formen benutzen, um Eigenschaften offener Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  zu studieren, was die nächste Verbindung zur Topologie liefert.

**PROPOSITION 1.16.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  sternförmig und  $\alpha \in \Omega^1(U)$  eine stetig differenzierbare, geschlossene 1-Form. Dann gibt es eine Funktion  $F \in C^2(U, \mathbb{R})$  sodass  $\alpha = dF$  gilt.

**BEWEIS.** Wir benutzen die gleiche Idee wie im Beweis von (ii)  $\Rightarrow$  (i) im Beweis von Satz 1.15, aber für die spezielle Familie von Kurven die wir in unserer Situation zur Verfügung haben. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $U$  sternförmig um  $x_0 = 0$  ist, was die Formeln etwas vereinfacht. Dann definieren wir  $F(x) := \int_0^1 \alpha(tx) x dt$ . Zerlegen wir  $\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i$ , dann schreibt sich der Integrand als  $g(t, x) := \sum_j \alpha_j(tx) x_j$  und  $g$  ist eine stetig differenzierbare Funktion  $[0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ . Schreiben wir  $F(x) = \int_0^1 g(t, x) dt$  dann ist das ein Parameterintegral und somit stetig differenzierbar als Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}$  mit partiellen Ableitungen  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) dt$ , siehe Abschnitt 18.9 in [**Hö:Ana2**]. Nun können wir die partiellen Ableitungen von  $g$  wie folgt berechnen:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) = \left( \sum_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(tx) tx_j \right) + \alpha_i(tx) = \left( \sum_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(tx) tx_j \right) + \alpha_i(tx) = \frac{d}{dt}(t\alpha_i(tx)).$$

Hier haben wir im zweiten Schritt benutzt, dass  $\alpha$  geschlossen ist und im letzten Schritt die Kettenregel. Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung ist  $\int_0^1 \frac{d}{dt}(t\alpha_i(tx)) = 1\alpha_i(1 \cdot x) - 0\alpha_i(0 \cdot x) = \alpha_i(x)$  und  $dF = \alpha$  folgt sofort.  $\square$

In der klassischen 3-dimensionalen Vektoranalysis kann man die Geschlossenheit von 1-Formen in Termen der Rotation von Vektorfeldern formulieren. Für eine offene

Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^3$  und ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit Komponenten  $Z_i$  für  $i = 1, 2, 3$  definiert man ein Vektorfeld  $\text{rot}(Z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial Z_2}{\partial x_3} - \frac{\partial Z_3}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial Z_1}{\partial x_3} + \frac{\partial Z_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Z_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Z_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$ . (Man

kann sich diese Definition leicht als Kreuzprodukt des Vektors mit den Komponenten  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  mit dem Vektor  $Z$  merken). Man nennt dieses Vektorfeld die *Rotation von  $Z$*  und  $Z$  *wirbelfrei* wenn  $\text{rot}(Z) = 0$  gilt. Offensichtlich ist das genau dann der Fall, wenn die 1-Form  $\sum_i Z_i dx_i$  geschlossen ist. Nach Proposition 1.16 kann man ein wirbelfreies Vektorfeld auf einer sternförmigen offenen Teilmenge  $U$  als Gradientenfeld  $\nabla F$  für eine  $C^2$ -Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben.

Wir bemerken an dieser Stelle auch noch, dass es für Proposition 1.16 auch konzeptuellere Beweise gibt, in denen der Bezug zur Topologie deutlicher wird.



## Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ und Differentialformen

Wir wenden uns nun höherdimensionalen Analoga von Kurven zu. Die Motivation, die man im Auge behalten sollte, ist einerseits die Suche nach Analoga von Kurvenintegralen in höheren Dimensionen, also z.B. Integrale über Flächen. Andererseits ist das Ziel, die Differentialrechnung auf “schöne Teilmengen” von  $\mathbb{R}^n$  (die nicht offen sind) zu verallgemeinern. Tatsächlich wird in unserem Zugang der zweite Punkt anfänglich wichtiger sein.

Man kann hier wie im Fall von Kurven mit Parametrisierungen beginnen, was in der Literatur auch häufig gemacht wird. Das Analogon von Reparametrisierungen wird (für  $k$ -dimensionale Objekte) dann durch Diffeomorphismen zwischen offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^k$  beschrieben. Das Problem dabei ist, dass diese Reparametrisierungen viel schwieriger zu verstehen sind, als im Fall von Kurven (wo man nur die Kurve “mit anderer Geschwindigkeit durchläuft”). Das führt einerseits zu viel Rechenaufwand, weil man immer wieder überprüfen muss, wie sich verschiedene Größen unter Reparametrisierungen verhalten. Vor allem wird es in diesem Zugang aber schwierig zu identifizieren, welche Größen tatsächlich in natürlicher Weise vorhanden sind. Also werden wir einen anderen Zugang wählen, in dem die “natürlich vorhandenen” Dinge im Zentrum stehen. In diesem Zugang ist auch leichter zu verstehen, warum die Verallgemeinerung der Differentialrechnung tatsächlich funktioniert.

**2.1. Definition von Teilmannigfaltigkeiten.** Die Grundidee im Studium von Teilmannigfaltigkeiten ist, dass man die Dinge (auf verschiedene Art) auf den Fall von offenen Teilmengen “zurück spielt”. Wir werden zum Beispiel direkt definieren, was eine  $C^\ell$ -Funktion auf einer Teilmannigfaltigkeit ist und erst später überlegen, wie man solche Funktionen auch tatsächlich differenzieren kann. Daher verwenden eine Definition, die verlangt das die fragliche Menge nicht nur als Menge “schön” ist, sondern als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . In jedem Fall erbt eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  eine Topologie (siehe Abschnitt 0.1). Also ist von Anfang an klar, was mit stetigen Funktionen von einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  in einen topologischen Raum bzw. von einem topologischen Raum in die Teilmenge gemeint ist.

**DEFINITION 2.1.** Sei  $k \leq n$  und betrachten wir  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  als die Menge jener Punkte, für die die letzten  $n - k$  Koordinaten gleich 0 sind. Seien  $r, s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  mit  $r, s \geq 1$ .

(1) Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt eine  $k$ -dimensionale  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeit, wenn es für jeden Punkt  $x \in M$  offene Teilmengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und einen  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  gibt, sodass  $\Phi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^k$  gilt. Der Diffeomorphismus  $\Phi$  heißt dann eine *lokale Trivialisierung* für  $M$ .

(2) Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeit,  $m \in \mathbb{N}$  beliebig und  $s \leq r$ . Eine Funktion  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt  $C^s$ -Funktion wenn es für jeden Punkt  $x \in M$  eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und ein Funktion  $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, die (im Sinne der Analysis)  $s$  mal stetig differenzierbar ist, sodass  $\tilde{F}|_{U \cap M} = F|_{M \cap U}$  gilt.

(3) Seien  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $N \subset \mathbb{R}^m$   $C^r$ -Teilmannigfaltigkeiten und  $s \leq r$ . Dann nennt man eine Funktion  $F : M \rightarrow N$  eine  $C^s$ -Funktion wenn  $F$  als Funktion nach  $\mathbb{R}^m$  eine  $C^s$ -Funktion wie in (2) ist.

Offensichtlich ist  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale  $C^\infty$ -Teilmannigfaltigkeit. Wir können ja einfach für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  einfach  $U = V = \mathbb{R}^n$  und  $\Phi = \text{id}$  wählen. Und man überlegt sofort, dass in diesem Fall Teil (2) der Definition genau die “üblichen”  $C^s$ -Funktionen liefert.

Analog ist jede offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Teilmannigfaltigkeit, man wählt für jedes  $x \in U$  einfach  $V = U$  und  $\Phi = \text{id}$ . Auch in diesem Fall liefert Teil (2) die üblichen  $C^s$ -Funktionen, weil stetige Differenzierbarkeit ein lokales Konzept ist. Teil (3) der Definition sagt uns dann insbesondere, was  $C^s$ -Funktionen von offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^m$  in eine  $k$ -dimensionale  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeit  $M$  von  $\mathbb{R}^n$  sind, nämlich einfach  $C^s$ -Funktionen (im Sinne der Analysis) nach  $\mathbb{R}^n$ , die Werte in  $M$  haben. Insbesondere können wir ohne Probleme über  $r$  mal stetig differenzierbar parametrisierte Kurven in einer Teilmannigfaltigkeit  $M$  sprechen.

Wie schon bemerkt erbt jede Teilmannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Topologie. Nach Definition ist eine Teilmenge  $W \subset M$  genau dann offen in  $M$ , wenn es eine offene Teilmenge  $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$  gibt, sodass  $W = \tilde{W} \cap M$ . Ist nun  $x \in W$  und  $\Phi : U \rightarrow V$  wie in Definition 2.1, dann ist  $\tilde{U} := \tilde{W} \cap U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und nach dem inversen Funktionensatz ist auch  $\Phi(\tilde{U}) := \tilde{V} \subset V$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $\Phi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  ein Diffeomorphismus. Nach Konstruktion ist  $\tilde{U} \cap M = W \cap (U \cap M)$  und das Bild dieser Teilmenge ist genau  $\tilde{V} \cap \mathbb{R}^k$ . Damit sehen wir, dass offene Teilmengen von Teilmannigfaltigkeiten selbst Teilmannigfaltigkeiten (der gleichen Dimension) sind.

Schließlich erhalten wir ein Konzept, das invariant unter Diffeomorphismen ist: Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeit,  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $M \subset W$  und  $F : W \rightarrow \tilde{W}$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus von  $W$  auf eine offene Teilmenge  $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ . Wir behaupten, dass  $F(M) \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeit ist. Für  $x \in F(M)$  betrachtet man  $F^{-1}(x) \in M$ , passende offene Mengen  $U$  und  $V$  mit  $F^{-1}(x) \in U$  und einen passenden  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$ . Dann ist  $U \cap W$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und damit ist auch  $\tilde{U} := F(U \cap W) \subset \tilde{W}$  offen und  $F(x) \in \tilde{U}$ . Nun ist aber auch  $\Phi \circ (F|_{U \cap W})^{-1} : \tilde{U} \rightarrow V$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus und wir bemerken, dass ein Punkt  $y \in \tilde{U}$  genau dann in  $\tilde{U} \cap F(M)$  liegt, wenn  $F^{-1}(y)$  in  $U \cap M$  liegt. Das zeigt sofort, dass  $\Phi \circ (F|_{U \cap W})^{-1}$  eine lokale Trivialisierung für  $F(M)$  um  $F(x)$  ist, also folgt die Behauptung.

**BEISPIEL 2.1.** Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  anhand der Definition als Teilmannigfaltigkeiten zu erkennen ist meist mühsam, der Vollständigkeit halber besprechen wir aber wenigstens ein Beispiel in dieser Form. Wir werden bald Resultate beweisen, die viel einfachere Kriterien liefern.

Betrachten wir die Einheitskugel  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . Betrachten wir zunächst  $e_1 \in S^{n-1}$  und schreiben Elemente von  $\mathbb{R}^n$  als  $(t, x)$  mit  $t \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ , also  $e_1 = (1, 0)$ . Die Teilmenge  $U := \{(t, x) : t > \|x\|\} \subset \mathbb{R}^n$  ist offen und natürlich ist  $e_1 = (1, 0) \in U$ . Andererseits ist auch

$$V := \{(y, s) \in \mathbb{R}^n : y \in \mathbb{R}^{n-1}, \|y\| < 1, s \in \mathbb{R}, s > -1\}$$

eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Nun definieren wir  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$\Phi(t, x) := \left(\frac{1}{t} \cdot x, \|(t, x)\| - 1\right)$$



und  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $\Psi(y, s) = (\lambda, \lambda y)$  mit  $\lambda = \lambda(y, s) := \frac{s+1}{\sqrt{1+\|y\|^2}}$ . Dann sind das offensichtlich  $C^\infty$ -Funktionen und wegen  $\|\frac{1}{t}x\| = \frac{1}{t}\|x\|$  hat  $\Phi$  Werte in  $V$ . Analog hat die zweite Komponente von  $\Psi(y, s)$  Norm  $\lambda\|y\| < \lambda$ , also hat  $\Psi$  Werte in  $U$ . Nun hat aber  $\Phi(\Psi(y, s)) = \Phi(\lambda, \lambda y)$  als erste Komponente offensichtlich  $y$ . Die zweite Komponente ist  $\lambda\sqrt{1+\|y\|^2} - 1 = (s+1) - 1 = s$ , also ist  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_V$ . Andererseits gilt für  $t > 0$  die Gleichung  $\|(t, x)\| = \sqrt{t^2 + \|x\|^2} = t\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}\|x\|^2}$  und daraus folgt sofort, dass  $\lambda(\frac{1}{t}x, \|(t, x)\| - 1) = t$  und somit  $\Psi \circ \Phi = \text{id}_U$  gilt. Also sind  $\Phi : U \rightarrow V$  und  $\Psi : V \rightarrow U$  inverse  $C^\infty$ -Diffeomorphismen und offensichtlich liegt  $(t, x)$  genau dann in  $S^{n-1}$  wenn die letzte Koordinate von  $\Phi(t, x)$  gleich 0 ist.

Betrachten wir nun einen beliebigen Punkt  $x \in S^{n-1}$ , dann ist  $x$  ein Einheitsvektor in  $\mathbb{R}^n$ , also findet man eine orthogonale Matrix  $A$ , die  $e_1$  auf  $x$  abbildet. Damit ist aber  $U_x := \{Az : z \in U\}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , die  $x$  enthält und wir können  $\Phi_x : U_x \rightarrow V$  durch  $\Phi_x(z) := \Phi(A^{-1}z)$  definieren. Analog definiert man  $\Psi_x : V \rightarrow U_x$  als  $\Psi_x(y, s) = A\Psi(y, s)$  und offensichtlich ist dies eine glatte Inverse zu  $\Phi_x$ . Für die orthogonale lineare Abbildung  $A^{-1}$  gilt  $\|A^{-1}z\| = \|z\|$  also gilt  $z \in U_x \cap S^{n-1}$  genau dann wenn  $A^{-1}z \in U \cap S^{n-1}$ , also genau dann, wenn die letzte Komponente von  $\Phi_x(z)$  gleich 0 ist. Damit erfüllt die Familie  $\{(U_x, \Phi_x) : x \in S^{n-1}\}$  alle Eigenschaften aus Definition 2.1 und wir haben verifiziert, dass  $S^{n-1}$  eine  $(n-1)$ -dimensionale  $C^\infty$ -Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  ist.

**2.2. Tangentialräume und Tangentialabbildungen.** Wir können die nächste Entwicklung leicht am Beispiel der Sphäre  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  motivieren und der Schlüssel liegt in der Betrachtung von Kurven. Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbar parametrisierte Kurve, die Werte in  $S^{n-1}$  hat. Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $S^{n-1} \subset U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -Funktion, dann können wir nach der Kettenregel  $Df(c(t))(c'(t))$  als  $(f \circ c)'(t)$  berechnen. Da aber  $c$  Werte in  $S^{n-1}$  hat, hängt  $(f \circ c)(t)$  und damit  $(f \circ c)'(t)$  nur von  $f|_{S^{n-1}}$  ab, also können wir gewisse Richtungsableitungen aus dieser Einschränkung berechnen.

Um herauszufinden, welche Richtungen das betrifft, bemerken wir, dass  $\|c(t)\| = 1$  für alle  $t \in I$  gilt. Wir können das äquivalent als  $1 = \langle c(t), c(t) \rangle = \sum_i c_i(t)^2$  schreiben und Differenzieren dieser Gleichung liefert  $0 = \sum_i 2c_i(t)c'_i(t) = 2\langle c(t), c'(t) \rangle$ . Damit gilt also immer  $c'(t) \perp c(t)$ . Ist umgekehrt  $x \in S^{n-1}$  in Punkt und  $v \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor mit  $\langle x, v \rangle = 0$ , dann können wir für hinreichend kleines  $t$  eine Kurve durch  $c(t) = \|x + tv\|^{-1}(x + tv)$  definieren. Weil  $v \perp x$  gilt ist  $\|x + tv\| = \sqrt{1 + t^2\|v\|^2}$  und damit folgt leicht (siehe Übungen), dass  $c'(0) = v$  gilt.

Damit sind die Ableitungen von Kurven durch  $x$ , die Werte in  $S^{n-1}$  haben, genau jene Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  die orthogonal auf  $x$  stehen. Verschiebt man diesen Orthogonalraum durch  $x$ , dann erhält man genau das intuitive Bild einer "Tangentialebene" an die Sphäre.

Das funktioniert analog für allgemeine Teilmannigfaltigkeiten. Um Funktionen auf einer Teilmannigfaltigkeit lokal um einen Punkt durch eine lineare Abbildung approximieren zu können, benötigt man zunächst einen Vektorraum der die Teilmannigfaltigkeit approximiert. Man könnte diesen Teilraum in eher offensichtlicher Weise über lokale Trivialisierungen wie in Definition 2.1 definieren. Konzeptuell ist es aber besser, eine Definition über Kurven zu benutzen, die keine Wahlen beinhaltet.

**DEFINITION 2.2.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit und  $x \in M$  ein Punkt. Dann betrachten wir alle stetig differenzierbar parametrisierten Kurven  $c : I \rightarrow M$ , wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist, das 0 enthält und für die  $c(0) = x$  gilt.

Wir definieren den *Tangentenraum*  $T_x M$  an  $M$  bei  $x$  als die Menge aller Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  die man in der Form  $c'(0)$  für solche Kurven realisieren kann.

Das ist natürlich eine Definition, die für beliebige Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  Sinn macht, im Allgemeinen erhält man so aber keine Teilräume von  $\mathbb{R}^n$ . Mit so einer Definition ist aber auch klar, dass es eigentlich nur eine sinnvolle Definition für die Ableitung einer  $C^1$ -Funktion  $f : M \rightarrow N$  zwischen zwei Teilmannigfaltigkeiten gibt. Wenn die Kettenregel gelten soll, dann kann die Definition nur wie im obigen Beispiel funktionieren. Wir können nun beweisen, dass das im Fall von Teilmannigfaltigkeiten tatsächlich so funktioniert.

**SATZ 2.2.** (1) Für eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  und jeden Punkt  $x \in M$  ist der Tangentenraum  $T_x M$  ein  $k$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ .

(2) Für eine  $C^1$ -Funktion  $f : M \rightarrow N$  zwischen Teilmannigfaltigkeiten und jeden Punkt  $x \in M$  gibt es eine eindeutige lineare Abbildung  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  die dadurch charakterisiert ist, dass  $T_x f(c'(0)) = (f \circ c)'(0)$  für jede glatte Kurve  $c : I \rightarrow M$  wie in Definition 2.2 gilt.

(3) Sind  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow P$   $C^r$ -Funktionen zwischen  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeiten mit  $r \geq 1$ , dann ist auch die Komposition  $g \circ f : M \rightarrow P$  eine  $C^r$ -Funktion und für jeden Punkt  $x \in M$  gilt die Kettenregel  $T_x(g \circ f) = T_{f(x)} g \circ T_x f : T_x M \rightarrow T_{g(f(x))} P$ .

**BEWEIS.** (1) Nach Definition finden wir offene Teilmengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und einen Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$ , sodass  $\Phi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^k$  gilt. Dann ist  $D\Phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein linearer Isomorphismus und wir behaupten, dass  $T_x M$  mit der Teilmenge  $E := \{X \in \mathbb{R}^n : D\Phi(x)(X) \in \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n\}$  übereinstimmt, die offensichtlich ein  $k$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  ist.

Sei zunächst  $c : I \rightarrow M$  eine glatte Kurve wie in Definition 2.2. Weil  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen ist und  $x \in U$  gilt, gibt es ein offenes Teilintervall  $\tilde{I} \subset I$  mit  $0 \in \tilde{I}$ , sodass  $c(\tilde{I})$  in  $U$  und damit in  $U \cap M$  enthalten ist. Damit ist aber  $\Phi \circ c : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Kurve in  $\mathbb{R}^n$ , die Werte in  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  hat. Offensichtlich ist dann  $(\Phi \circ c)'(0) = D\Phi(c(0))(c'(0)) \in \mathbb{R}^k$ , also folgt  $T_x M \subset E$ . Umgekehrt können wir für einen Vektor  $X \in \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  und  $t \in \mathbb{R}$  den Punkt  $\Phi(x) + tX \in \mathbb{R}^n$  betrachten. Da  $V = \Phi(U)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  ist, finden wir ein offenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $0 \in I$ , sodass  $\Phi(x) + tX \in V$  für all  $t \in I$  gilt. Damit definiert aber  $c(t) := \Phi^{-1}(\Phi(x) + tX)$  eine  $C^1$ -Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die nach Konstruktion Werte in  $U \cap M$  hat. Damit ist aber  $c'(0) = D\Phi^{-1}(\Phi(x))(X) \in T_x M$ , was sofort  $E \subset T_x M$  und damit (1) impliziert.

(2) Nach Definition finden wir eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und eine  $C^1$ -Funktion  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  die auf  $U \cap M$  mit  $f$  übereinstimmt. Für eine Kurve  $c : I \rightarrow M$  wie in Definition 2.2 können wir wieder annehmen, dass  $c(I) \subset U \cap M$  gilt. Dann ist aber  $f \circ c = \tilde{f} \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  und aus der Analysis ist bekannt, dass dies eine  $C^1$ -Kurve ist und nach der Kettenregel gilt  $(f \circ c)'(0) = D\tilde{f}(x)(c'(0))$ . Daraus folgt, dass  $c'(0) \mapsto (f \circ c)'(0)$  wohldefiniert ist und als Abbildung mit  $D\tilde{f}(x)|_{T_x M} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$  übereinstimmt. Das vervollständigt einerseits den Beweis von (2), andererseits bemerken wir, dass  $D\tilde{f}(x)(T_x M) \subset T_{f(x)} N$  gilt.

(3) Für einen Punkt  $x \in M$  finden wir eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und eine  $C^r$ -Funktion  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\tilde{f}|_{U \cap M} = f|_{U \cap M}$ . Analog finden wir zum Punkt  $f(x) \in N$  eine offene Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^m$  mit  $f(x) \in V$  und eine  $C^r$ -Funktion  $\tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ , die auf  $V \cap N$  mit  $g$  übereinstimmt. Indem wir  $U$  durch  $U \cap \tilde{f}^{-1}(V)$  ersetzen dürfen wir oBdA annehmen, dass  $\tilde{f}(U) \subset V$  gilt. Dann ist aber  $\tilde{g} \circ \tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  eine  $C^r$ -Funktion

und für  $y \in U \cap M$  ist  $\tilde{g}(\tilde{f}(y)) = \tilde{g}(f(y))$  und weil  $f(y) \in N$  gilt, stimmt das mit  $g(f(y))$  über ein. Da der Punkt  $x$  beliebig war, ist  $g \circ f : M \rightarrow P$  eine  $C^r$ -Funktion.

Aus Teil (2) wissen wir dann aber, dass  $T_x(g \circ f)$  mit der Einschränkung von  $D(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x)$  auf  $T_x M \subset \mathbb{R}^n$  übereinstimmt. Nach der Kettenregel der Analysis ist aber  $D(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x) = D\tilde{g}(\tilde{f}(x)) \circ D\tilde{f}(x)$  und aus Teil (2) wissen wir, dass auf dem Teilraum  $T_x M$  die Abbildung  $D\tilde{f}(x)$  mit  $T_x f$  übereinstimmt. Insbesondere liegen die Werte dann in  $T_{f(x)} N$ , und darauf stimmt  $D\tilde{g}(f(x))$  nach (2) mit  $T_{f(x)} g$  überein, was den Beweis vervollständigt.  $\square$

Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  eine offene Teilmenge,  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmannigfaltigkeit und  $f : U \rightarrow M$  eine  $C^r$ -Funktion. Dann ist  $f$  als Funktion nach  $\mathbb{R}^n$   $r$  mal stetig differenzierbar im Sinne der Analysis und der Beweis zeigt, dass für  $x \in U$  die Tangentialabbildung  $T_x f$  mit der Ableitung  $Df(x)$  im Sinne der Analysis übereinstimmt.

**2.3. Einfachere Beschreibungen.** Nachdem wir die Grundbegriffe beisammen haben, können wir jetzt einfachere Beschreibungen für Teilmannigfaltigkeiten herleiten. Betrachten wir eine lokale  $C^r$ -Trivialisierung  $\Phi : U \rightarrow V$  wie in Definition 2.1, dann ist es naheliegend, den Zielraum (in dem  $V$  enthalten ist) als  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  zu betrachten. Zerlegt man  $\Phi$  entsprechend in Komponenten  $(\Phi_1, \Phi_2)$  dann sind  $\Phi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $\Phi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  natürlich  $C^r$ -Funktionen. Die Bedingung in Definition 2.1 sagt dann gerade, dass  $U \cap M = \Phi_2^{-1}(\{0\})$  gilt, also erhält man eine Realisierung von  $M$  als Nullstellenmenge einer  $C^r$ -Funktion. Zusätzlich folgt aus der Tatsache, dass  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist natürlich dass für jeden Punkt  $y \in U$  die Ableitung  $D\Phi_2(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  surjektiv ist.

Betrachten wir andererseits die Inverse  $\Psi := \Phi^{-1} : V \rightarrow U$ , dann können wir  $W := V \cap \mathbb{R}^k$  betrachten, was offensichtlich eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^k$  ist. Und natürlich ist  $\Psi|_W : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^r$ -Funktion und schränkt sich zu einer Bijektion  $W \rightarrow U \cap M$  ein. Da die Ableitung dieser Funktion in jedem Punkt von  $W$  offensichtlich injektiv ist, erhalten wir das Analogon einer lokalen regulären Parametrisierung für  $M$ . Zusätzlich ist aber die Einschränkung  $\Phi_1|_{U \cap M}$  der Funktion  $\Phi_1$  von oben natürlich stetig für die Teilraumtopologie auf  $U \cap M$  und nach Konstruktion ist sie invers zu  $\Psi|_W$ . Damit definiert aber  $\Psi|_W$  einen Homöomorphismus von  $W$  auf  $U \cap M$  und ist somit eine Einbettung im Sinne der Topologie.

Jeder dieser beiden "Teile" einer lokalen Trivialisierung ist ausreichend um eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  als Teilmannigfaltigkeit zu identifizieren. Dazu erhält man auch gleich eine angepasste Beschreibung der Tangentialräume.

**SATZ 2.3.** *Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge auf der wir die von  $\mathbb{R}^n$  induzierte Topologie betrachten. Dann sind für jedes  $r \geq 1$  die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (1)  *$M$  ist eine  $k$ -dimensionale  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ .*
- (2) *(" $M$  ist lokal eine reguläre  $C^r$ -Nullstellenmenge") Für jedes  $x \in M$  gibt es eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und eine  $C^r$ -Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , sodass gilt*

- $M \cap U = F^{-1}(\{0\})$
- Für jedes  $y \in M \cap U$  ist  $DF(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  surjektiv.

*Für  $y \in U \cap M$  ist dann  $T_y M = \text{Ker}(DF(y))$ .*

- (3) *(" $M$  besitzt lokale reguläre  $C^r$ -Parametrisierungen") Für jedes  $x \in M$  gibt es offene Teilmengen  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \in V := \tilde{V} \cap M$  und  $U \subset \mathbb{R}^k$  und eine  $C^r$ -Funktion  $u : U \rightarrow \tilde{V}$  sodass gilt:*

- $u$  ist ein Homöomorphismus von  $U$  auf die offene Teilmenge  $V$  von  $M$ .
- Für jedes  $z \in U$  ist  $Du(z) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv.

*Für  $y = u(z) \in V$  ist dann  $T_y M = \text{Im}(Du(z))$ .*

BEWEIS. Die Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts zeigen, dass (1) $\Rightarrow$ (2) und (1) $\Rightarrow$ (3) gelten.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei  $x \in M$  und seien  $U$  und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  gegeben. Dann ist  $E_1 := \text{Ker}(DF(x))$  ein  $k$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  und wir fixieren eine Identifikation von  $E_1$  mit  $\mathbb{R}^k$  und eine lineare Projektion  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow E_1$  (d.h. eine lineare Abbildung, die auf  $E_1$  mit der Identität übereinstimmt). Dann definieren wir  $\Phi : U \rightarrow E_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{R}^n$  durch  $\Phi(y) = (p(y - x), F(y))$ . Dann können wir  $D\Phi(x)$  als lineare Abbildung mit Werten in  $E_1 \times \mathbb{R}^{n-k}$  betrachten und weil  $p$  linear ist, gilt offensichtlich  $D\Phi(x)(v) = (p(v), DF(x)(v))$ . Damit ist  $D\Phi(x)(v) = 0$  äquivalent zu  $DF(x)(v) = 0$  und  $p(v) = 0$ . Die erste Bedingung impliziert aber  $v \in E_1$  und damit  $p(v) = v$ . Damit ist  $D\Phi(x)$  injektiv und daher ein linearer Isomorphismus. Also finden wir offene Teilmengen  $\tilde{U} \subset U$  und  $\tilde{V} \subset E_1 \times \mathbb{R}^{n-k}$ , sodass sich  $\Phi$  zu einem Diffeomorphismus  $\tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  einschränkt. Aber nach Konstruktion gilt  $y \in U \cap M$  genau dann, wenn  $F(y) = 0$  und damit wenn  $\Phi(y) \in E_1 \subset E_1 \times \mathbb{R}^{n-k}$  gilt. Damit definiert  $\Phi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  eine lokale Trivialisierung und offensichtlich ist  $\Phi$  eine  $C^r$ -Funktion.

Ist  $c : I \rightarrow M$  eine glatte Kurve durch  $y \in M \cap U$  wie in Definition 2.2, dann können  $c(I) \subset \tilde{U}$  annehmen und nach Konstruktion ist  $(F \circ c)(t) = 0$  für alle  $t \in I$ . Damit ist  $(F \circ c)'(0) = 0$ , also  $c'(0) \in \text{Ker}(DF(y))$ . Damit sehen wir, dass  $T_y M \subset \text{Ker}(DF(y))$  gilt und da beides  $k$ -dimensionale Teilräume von  $\mathbb{R}^n$  sind, müssen Sie übereinstimmen.

(3) $\Rightarrow$ (1): Der Beweis ist ähnlich, nur konstruiert man die Inverse zu  $\Phi$  und der topologische Teil macht etwas Mühe. Wir fixieren wieder  $x \in M$ , nehmen  $U, \tilde{V}$  und  $u : U \rightarrow \tilde{V}$  wie in (3) und betrachten den eindeutigen Punkt  $z_0 \in U$ , sodass  $u(z_0) = x$  gilt. Dann ist  $\text{Im}(Du(z_0))$  ein  $k$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  und wir wählen einen dazu komplementären Teilraum  $E \subset \mathbb{R}^n$ , den wir mit  $\mathbb{R}^{n-k}$  identifizieren. Nun betrachten wir  $\Psi : U \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi(z, X) := u(z) + X$  und sehen sofort, dass  $D\Psi(z_0, 0) : \mathbb{R}^k \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein linearer Isomorphismus ist. Damit finden wir eine offene Umgebung  $W$  von  $(z_0, 0)$  in  $\mathbb{R}^k \times E$ , auf der sich  $\Psi$  zu einem  $C^r$ -Diffeomorphismus einschränkt. Wir können aber noch nicht sagen, wie der Schnitt von  $M$  mit dem Bild dieser offenen Teilmenge aussieht und hier kommt die topologische Bedingung in's Spiel.

Natürlich  $W \cap \mathbb{R}^k$  eine offene Umgebung von  $z_0$  in  $\mathbb{R}^k$ , also ist  $u(W \cap \mathbb{R}^k)$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $V = M \cap \tilde{V}$ . Damit finden wir eine offene Teilmenge  $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ , sodass  $u(W \cap \mathbb{R}^k) = M \cap \tilde{W}$  gilt. Betrachten wir nun die offenen Teilmengen  $\hat{U} := \tilde{W} \cap \Psi(W)$  und  $\hat{V} := \Psi^{-1}(\hat{U})$  von  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^k \times E$ . Dann ist  $\Psi : \hat{V} \rightarrow \hat{U}$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus und wenn  $\Psi(z, X) \in M \cap \hat{U}$  liegt, dann gibt es nach Konstruktion einen Punkt  $\tilde{z} \in W \cap \mathbb{R}^k$ , sodass  $\Psi(z, X) = u(\tilde{z}) = \Psi(\tilde{z}, 0)$  gilt. Wegen der Bijektivität von  $\Psi$  muss daher  $z = \tilde{z}$  und  $X = 0$  gelten, also ist  $\Psi^{-1} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$  eine lokale  $C^r$ -Trivialisierung für  $M$  um  $x$ .

Seien  $y \in V$  und  $z \in U$  mit  $u(z) = y$ . Für  $Y \in \mathbb{R}^k$  hat die Kurve  $t \mapsto z + tY$  auf einem Intervall  $I$ , das Null enthält Werte in  $U$ . Dann ist  $c(t) := u(z + tY)$  eine Kurve wie in Definition 2.2 und  $c'(0) = Du(z)(Y)$ . Damit ist aber  $\text{Im}(Du(z)) \subset T_y M$  und da beides  $k$ -dimensionale Teilräume von  $\mathbb{R}^n$  sind, folgt die Gleichheit.  $\square$

**KOROLLAR 2.3.** *Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Dann ist der topologische Raum  $M$  lokal bogenzusammenhängend.*

BEWEIS. Sei  $x \in M$  ein Punkt. Dann finden wir nach Bedingung (3) in Satz 2.3 Homöomorphismus  $u$  von einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^k$  auf eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  in  $M$ . Ist  $W$  eine beliebige Umgebung von  $x$  in  $M$ , dann ist  $W \cap V$  eine Umgebung von  $x$  in  $M$ , also  $u^{-1}(W \cap V)$  eine Umgebung von  $u^{-1}(x)$  in  $U$ . Damit gibt es eine  $\varepsilon$ -Kugel  $B_\varepsilon(u^{-1}(x))$ , die ganz in  $u^{-1}(W \cap V)$  liegt. Das Urbild dieser Kugel unter

der stetigen Funktion  $u^{-1}$  ist gerade  $u(B_\varepsilon(u^{-1}(x)))$  und das ist nach Konstruktion offen und bogenzusammenhängend, enthält  $x$  und ist in  $W$  enthalten.  $\square$

**2.4. Beispiele.** Die Charakterisierungen von Teilmannigfaltigkeiten aus Satz 2.3 können oft recht einfach verifiziert werden.

(1) Wählen wir  $a_1, \dots, a_n \in (0, \infty)$  und definieren wir  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  als  $F(x) = \sum_i a_i(x_i)^2 - 1$ . Dann ist  $DF(x)(v) = \sum_i 2a_i x_i v_i$  und damit insbesondere  $DF(x)(x) > 0$  für  $x \neq 0$ . Also ist  $F^{-1}(\{0\})$  eine Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ , die man als (höherdimensionales) Ellipsoid interpretieren kann. Insbesondere erhalten wir für  $a_1 = \dots = a_n = 1$  so wieder die Sphäre  $S^{n-1}$ .

(2) Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass die Menge  $SL(n, \mathbb{R})$  aller  $n \times n$ -Matrizen  $A \in M_n(\mathbb{R})$  für die  $\det(A) = 1$  gilt, eine  $C^\infty$ -Teilmannigfaltigkeit von  $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$  ist. Definiert man  $F(A) = \det(A) - 1$  dann ist offensichtlich  $SL(n, \mathbb{R}) = F^{-1}(\{0\})$ , also müssen wir nur noch  $DF(A) \neq 0$  für alle  $A \in SL(n, \mathbb{R})$  verifizieren. Dazu können wir aber einfach  $DF(A)(A)$  berechnen, was wir als  $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\det(A + tA) - 1)$  berechnen können. Nun ist aber  $\det(A + tA) = \det((1 + t)A) = (1 + t)^n \det(A)$  und differenziert man das bei  $t = 0$ , dann erhält man  $n \det(A) \neq 0$ .

(3) Ein substantielleres Beispiel für eine Beschreibung als reguläre Nullstellenmenge liefern die sogenannten *Stiefel-Mannigfaltigkeiten*  $V_k(\mathbb{R}^n)$ , eine Verallgemeinerung der Sphäre aus Beispiel (1). Wir fixieren  $n \geq 2$  und  $k \leq n$  und definieren  $V_k(\mathbb{R}^n)$  als die Menge aller  $k$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_k)$  von Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ , die orthonormal bezüglich des Standard inneren Produktes auf  $\mathbb{R}^n$  sind, also  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$  für alle  $i, j = 1, \dots, k$  erfüllen. Fasst man die Vektoren als Spalten einer Matrix auf, dann wird  $V_k(\mathbb{R}^n)$  eine Teilmenge des Raumes  $M_{n,k}(\mathbb{R}^n)$  der  $n \times k$ -Matrizen mit reellen Eintragungen, also von  $\mathbb{R}^{kn}$ . Für eine Matrix  $A \in M_{n,k}$  mit Spaltenvektoren  $a_1, \dots, a_k$  können wir die  $k \times k$ -Matrix  $A^t A$  betrachten, die nach Definition als  $i, j$ te Eintragung gerade  $\langle v_i, v_j \rangle$  hat. Bezeichnen wir mit  $\mathbb{I}$  die  $k \times k$ -Einheitsmatrix, dann sehen wir, dass die Funktion  $F(A) := A^t A - \mathbb{I}$ , die offensichtlich beliebig oft differenzierbar ist, als Nullstellenmenge genau  $V_k(\mathbb{R}^n)$  hat.

Die Frage der Regularität ist hier aber etwas heikler. Insbesondere ist  $F$  nicht regulär als Funktion nach  $M_k(\mathbb{R})$ . Das sieht man sofort, weil nach expliziten Formel von oben  $F(A)$  immer eine symmetrische Matrix ist. Das liefert aber auch die Lösung für unser Problem: Die symmetrischen Matrizen bilden einen linearen Teilraum  $S_k(\mathbb{R}) \subset M_k(\mathbb{R})$  der Dimension  $\frac{k(k+1)}{2}$  und wir können  $F$  als Funktion  $M_{n,k}(\mathbb{R}) \rightarrow S_k(\mathbb{R})$  betrachten und als solche differenzieren. Das geht wieder am leichtesten mit Richtungsableitungen via  $DF(A)(B) = \frac{d}{ds}|_{s=0} F(A + sB)$  und

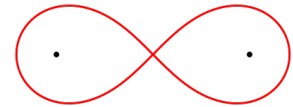
$$F(A + sB) = (A + sB)^t(A + sB) - \mathbb{I} = (A^t A - \mathbb{I}) + s(B^t A + A^t B) + s^2 B^t B.$$

Also erhalten wir  $DF(A)(B) = A^t B + B^t A$ . Für  $A \in V_k(\mathbb{R}^n)$  ist  $A^t A = \mathbb{I}$  und wir können für eine beliebige symmetrische Matrix  $C \in S_k(\mathbb{R})$  eine Matrix  $B \in M_{n,k}(\mathbb{R}^n)$  als  $B := \frac{1}{2}AC$  definieren. Dann ist  $A^t B = \frac{1}{2}A^t AC = \frac{1}{2}C$  und nach den üblichen Regeln der linearen Algebra ist  $B^t = \frac{1}{2}C^t A^t$  also  $B^t A = \frac{1}{2}C^t = \frac{1}{2}C$ . Damit erhalten wir  $DF(A)(B) = C$ , also ist  $f$  regulär und  $V_k(\mathbb{R}^n)$  eine  $C^\infty$ -Teilmannigfaltigkeit der Dimension  $kn - \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}k(2n - k - 1)$  von  $\mathbb{R}^{kn}$ .

Für  $k = n$  erhalten wir so die Menge  $O(n)$  aller orthogonalen Matrizen in  $M_n(\mathbb{R})$ . Aus bekannten Resultaten der linearen Algebra folgt sofort, dass  $O(n)$  (wie auch die Teilmenge  $SL(n, \mathbb{R})$  aus (3)) eine Untergruppen der Gruppe  $GL(n, \mathbb{R})$  aller invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen ist. Hier erhalten wir also Teilmannigfaltigkeiten, die zusätzlich

eine Gruppenstruktur tragen und man kann leicht sehen, dass die Gruppenoperationen  $C^\infty$ -Abbildungen sind. Damit sind  $SL(n, \mathbb{R})$  und  $O(n)$  Beispiele von *Lie Gruppen*.

(4) Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine regulär parametrisierte Kurve im Sinne von Abschnitt 1.5. Ist  $c$  eine topologische Einbettung, also  $c : I \rightarrow c(I)$  ein Homöomorphismus, dann definiert  $c$  natürlich eine globale reguläre  $C^1$ -Parametrisierung von  $c(I)$  im Sinne von Satz 2.3, also  $c(I)$  eine 1-dimensionale  $C^1$ -Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Analog funktioniert das für mehrmals differenzierbare Parametrisierungen. Für allgemeiner regulär parametrisierte Kurven ist aber nicht klar, ob die Bilder Teilmannigfaltigkeiten sind. Der Einheitskreis  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  ist natürlich eine  $C^\infty$ -Teilmannigfaltigkeit, die man als einfach geschlossene Kurve in  $\mathbb{R}^2$  betrachten kann. Betrachten wir andererseits die Lemniskate von Bernoulli, die die Form eine (liegenden) Acht hat. Man kann diese Kurve leicht durch eine reguläre  $C^\infty$ -Funktion auf einem passenden offenen Intervall bijektiv parametrisieren (sodass man das "Zentrum" im Ursprung nur ein mal trifft). Das Bild der Kurve kann aber keine Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$  sein. Betrachten wir nämlich eine beliebige kleine Umgebung  $U$  von 0, dann zerfällt  $(U \cap c(I)) \setminus \{0\}$  offensichtlich in vier Zusammenhangskomponenten. Damit kann es keinen Homöomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  auf eine offene Teilmengen  $V \subset \mathbb{R}^2$  geben, sodass  $\Phi(U \cap c(I)) = V \cap \mathbb{R}$  ist, weil  $(V \cap \mathbb{R}^2) \setminus \{\Phi(0)\}$  nur zwei Zusammenhangskomponenten haben kann.



(5) Auch in höheren Dimensionen finden sich leicht interessante Beispiele für lokale Parametrisierungen: Sei  $U \subset \mathbb{R}^k$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  eine  $C^r$ -Funktion. Dann betrachten wir die Teilmenge  $M := \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset U \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ , also den Graphen von  $f$ . Für diese Teilmenge definieren wir  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $u(x) := (x, f(x))$  und für  $v \in \mathbb{R}^k$  erhalten wir  $Du(x)(v) = (v, Df(x)(v))$ . Da die Projektion auf die ersten  $k$  Koordinaten sich auf  $M$  zu einer stetigen Inversen zu  $u$  einschränkt, ist  $u : U \rightarrow M$  ein Homöomorphismus. Somit ist  $u$  eine globale  $C^r$ -Parametrisierung für  $M$  und damit  $M$  eine  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ .

(6) Als weiteres Beispiel für lokale Parametrisierungen betrachten wir einen Torus in  $\mathbb{R}^3$ . Für  $R > r > 0$  betrachten wir einen Kreis vom Radius  $r$  in der  $(x, z)$ -Ebene, den wir um einen Kreis vom Radius  $R$  in der  $(x, y)$ -Ebene rotieren lassen. In Termen von 2 Koordinaten, die wir als Winkel interpretieren liefert das die  $C^\infty$ -Funktion

$$u(t, s) := ((R + r \cos s) \cos t, (R + r \cos s) \sin t, r \sin s).$$

Die Ableitung ist  $Du(t, s) = \begin{pmatrix} -(R+r \cos s) \sin t & -r \sin s \cos t \\ (R+r \cos s) \cos t & -r \sin s \sin t \\ 0 & r \cos s \end{pmatrix}$ . Wegen  $R > r$  ist die erste Spalte dieser Matrix immer ungleich 0 also können die Spalten höchstens dann linear abhängig sein, wenn  $\cos s = 0$  gilt. In diesem Fall ist aber  $\sin s = \pm 1$  und dann ist die Determinante des oberen  $2 \times 2$ -Blocks entweder  $R + r$  oder  $R - r$  also sind auch dann die Spalten linear unabhängig. Somit ist  $Du(t, s)$  injektiv für beliebiges  $t, s \in \mathbb{R}$  und natürlich ist  $u$  injektiv auf jedem Produkt von offenen Intervallen mit Länge kleiner  $2\pi$ . Es ist auch leicht einzusehen, dass  $\varphi$  auf solchen Produkten eine topologische Einbettung ist, also erhalten wir so lokale  $C^\infty$  Parametrisierungen des Torus.

Analog erhält man allgemeine Drehflächen in  $\mathbb{R}^3$  und viele ähnliche Beispiele.

**2.5. Diffeomorphismen und der inverse Funktionensatz.** Lokale Parametrisierungen liefern uns auch eine schöne Charakterisierung von  $C^r$ -Funktionen. Diese erlaubt uns insbesondere, über lokale Parametrisierungen lokal solche Funktionen auf einer Teilmannigfaltigkeit zu definieren. Außerdem können wir damit leicht den inversen Funktionensatz auf Teilmannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Der Begriff eines Diffeomorphismus verallgemeinert sich problemlos auf Teilmannigfaltigkeiten: Ein  $C^r$ -Diffeomorphismus von  $M$  nach  $N$  ist einfach eine bijektive  $C^r$ -Funktion  $\Phi : M \rightarrow N$ , sodass auch die inverse Funktion  $\Phi^{-1} : N \rightarrow M$  eine  $C^r$ -Funktion ist. Ist  $\Phi$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus, dann folgt aus der Kettenregel in Satz 2.2 sofort, dass die linearen Abbildungen  $T_x\Phi : T_xM \rightarrow T_{\Phi(x)}N$  und  $T_{\Phi(x)}\Phi^{-1} : T_{\Phi(x)}N \rightarrow T_xM$  invers zueinander sind. Da offene Teilmengen von Teilmannigfaltigkeiten selbst Teilmannigfaltigkeiten sind, macht es auch keine Probleme zu definieren, wann  $\Phi : M \rightarrow N$  lokal um einen Punkt  $x \in M$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus ist. Das bedeutet einfach, dass es offene Teilmengen  $U$  von  $M$  und  $V$  von  $N$  mit  $x \in U$  und  $\Phi(x) \in V$  gibt, sodass sich  $\Phi$  zu einem  $C^r$ -Diffeomorphismus von  $U$  nach  $V$  einschränkt. Schließlich nennt man  $\Phi : M \rightarrow N$  einen *lokalen Diffeomorphismus* wenn  $\Phi$  lokal um jeden Punkt  $x \in M$  ein Diffeomorphismus ist.

**PROPOSITION 2.5.** *Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeit. Dann gilt für jedes  $s$  mit  $1 \leq s \leq r$ :*

(1) *Ist  $u : U \rightarrow \tilde{V}$  eine lokale  $C^r$ -Parametrisierung für eine Teilmannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$ , dann ist  $u$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus von  $U$  auf die offene Teilmenge  $\tilde{V} \cap M$  von  $M$ . Umgekehrt definiert jeder solche Diffeomorphismus eine lokale  $C^r$ -Parametrisierung für  $M$ .*

(2) *Für eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- (i)  *$f$  ist eine  $C^s$ -Funktion.*
- (ii)  *$f$  ist stetig und für jeden Punkt  $x \in M$  gibt es eine lokale  $C^r$ -Parametrisierung  $u : U \rightarrow \tilde{V}$  für  $M$  mit  $x \in \tilde{V}$ , sodass  $f \circ u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$   $s$  mal stetig differenzierbar (im Sinne der Analysis) ist.*
- (iii)  *$f$  ist stetig und für jede lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \tilde{V}$  für  $M$  ist  $f \circ u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^s$ -Funktion (im Sinne der Analysis).*

**BEWEIS.** (1) Natürlich ist eine lokale Parametrisierung  $u$  eine  $C^r$ -Funktion  $U \rightarrow M$  und bijektiv als Funktion nach  $V := \tilde{V} \cap M$ . Also bleibt zu zeigen, dass  $u^{-1} : V \rightarrow U$  ebenfalls eine  $C^r$ -Funktion ist. Aber lokal um jeden Punkt in  $U$  finden wir wie im Beweis von Satz 2.3 einen  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Psi$  der  $u$  erweitert. Dann können wir die Inverse  $\Phi := \Psi^{-1}$  wieder in Komponenten  $(\Phi_1, \Phi_2)$  zerlegen. Aber dann ist  $\Phi_1$  eine Erweiterung von  $u^{-1}$ , die auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$   $r$  mal stetig differenzierbar ist.

Seien umgekehrt  $U \subset \mathbb{R}^k$  und  $V \subset M$  offene Teilmengen und  $u : U \rightarrow V$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus. Dann ist  $u$  ein Homöomorphismus und wir finden eine offene Teilmenge  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  mit  $V = M \cap \tilde{V}$ , also erfüllt  $u : U \rightarrow \tilde{V}$  alle Eigenschaften einer lokalen  $C^r$ -Parametrisierung.

(2) Offensichtlich folgt (iii) aus (i), weil die Komposition von  $C^s$ -Funktionen eine  $C^s$ -Funktion ist und klarerweise folgt (ii) aus (iii), also bleibt zu zeigen, dass (i) aus (ii) folgt. Aber aus Teil (1) wissen wir, dass für eine  $C^r$ -Parametrisierung  $u : U \rightarrow \tilde{V}$ , und  $V := \tilde{V} \cap M$  die Abbildung  $u^{-1} : V \rightarrow U$  eine  $C^r$ -Funktion ist. Ist  $f$  eine Funktion, sodass  $f \circ u$  eine  $C^s$ -Funktion ist, dann kann man  $f|_V$  als  $(f \circ u) \circ u^{-1}$  schreiben und das ist  $C^s$  als Komposition einer  $C^s$ -Funktion und einer  $C^r$ -Funktion. Für eine Funktion  $f$ , die die Bedingung aus (ii) erfüllt, finden wir somit eine Überdeckung von  $M$  mit offenen

Teilmengen, sodass die Einschränkung von  $f$  auf jede dieser Teilmengen  $C^s$  ist. Daraus folgt aber sofort, dass  $f$  selbst  $C^s$  ist.  $\square$

Daraus können wir nun leicht die allgemeine Version des inversen Funktionensatzes ableiten:

**SATZ 2.5.** *Seien  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $N \subset \mathbb{R}^m$   $k$ -dimensionale  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeiten mit  $r \geq 1$  und sei  $\Phi : M \rightarrow N$  eine  $C^s$ -Funktion mit  $1 \leq s \leq r$ . Ist  $x \in M$  ein Punkt, sodass die lineare Abbildung  $T_x\Phi : T_xM \rightarrow T_{\Phi(x)}N$  invertierbar ist, dann ist  $\Phi$  lokal um  $x$  ein  $C^s$ -Diffeomorphismus.*

**BEWEIS.** Nach Satz 2.3 finden wir lokale  $C^r$ -Parametrisierungen  $u : U \rightarrow \tilde{W}$  für  $M$  und  $v : V \rightarrow \tilde{Z}$  für  $N$  mit  $x \in \tilde{W} \cap M$  und  $\Phi(x) \in \tilde{Z} \cap N$ . Da  $\Phi$  und  $u$  stetig sind, sind  $\Phi^{-1}(\tilde{Z}) \subset M$  und  $\tilde{U} := u^{-1}(\Phi^{-1}(\tilde{Z})) \subset \mathbb{R}^k$  offen, und  $\Phi \circ u$  bildet  $\tilde{U}$  nach  $Z := \tilde{Z} \cap N$  ab. Damit ist aber  $v^{-1} \circ \Phi \circ u : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine  $C^s$ -Funktion (im Sinne der Analysis) und nach Konstruktion ist ihre Ableitung in  $u^{-1}(x)$  invertierbar. Nach dem inversen Funktionensatz für offene Teilmengen gibt es eine offene Teilmenge  $\hat{U} \subset \tilde{U}$  sodass  $v^{-1} \circ \Phi \circ u$  sich zu einem  $C^s$ -Diffeomorphismus von  $\hat{U}$  auf eine offene Teilmenge  $\hat{V} \subset V$  einschränkt. Nun sind aber auch  $u(\hat{U}) \subset \tilde{W} \cap M$  und  $v(\hat{V}) \subset \tilde{Z} \cap N$  offen und man kann  $\Phi|_{u(\hat{U})}$  als  $v \circ (v^{-1} \circ \Phi \circ u) \circ (u|_{\hat{U}})^{-1}$  schreiben. Das impliziert einerseits, dass  $\Phi(u(\hat{U})) \subset v(\hat{V})$  gilt und andererseits dass  $\Phi|_{u(\hat{U})}$  als Komposition von drei Diffeomorphismen der Klassen  $C^r$  und  $C^s$  selbst ein  $C^s$ -Diffeomorphismus ist.  $\square$

### Alternierende Multilinearformen

Wir haben im Fall von Kurvenintegralen schon gesehen, dass die Frage, welche Objekte man integriert, von entscheidender Bedeutung für die Invarianzeigenschaften des Integrals sind. Für Integrale über höherdimensionale Teilmannigfaltigkeiten trifft das noch in verstärktem Maße zu und die "richtigen" Objekte zum Integrieren sind komplizierter. Daher müssen wir uns etwas Zeit nehmen, um Hintergrund aus der multilinearen Algebra zu entwickeln. Damit werden wir dann relativ schnell und einfach einen invarianten Integralbegriff finden und danach erst die klassischen Beispiele von Volumina, Flächeninhalten und ähnlichen Größen besprechen.

**2.6. Grundlegende Definitionen.** Die Motivation für diese Überlegungen ist die aus der linearen Algebra bekannte Interpretation der Determinante als signiertes Volumen. Man betrachtet hier die Determinante als Abbildung, die  $n$  Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  (die man als die Spaltenvektoren einer Matrix betrachten kann aber nicht muss) eine reelle Zahl zuordnet. Dabei ist  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$  linear in jeder Eintragung und alternierend, in dem Sinne dass die Determinante verschwindet, wenn zwei ihrer Eintragungen gleich sind. Man zeigt dann, dass die letztere Eigenschaft äquivalent dazu ist, dass eine Vertauschung von zwei Einträgen ein Vorzeichenwechsel und eine Permutation der Einträge eine Multiplikation mit dem Signum der Permutation bewirkt. Funktionen mit diesen beiden Eigenschaften nennt man Determinantenfunktionen und man zeigt (siehe Satz 6.7 in [Linalg]) es bis auf konstante Vielfache nur eine Determinantenfunktion auf  $\mathbb{R}^n$  gibt. Die übliche Determinante ist dann dadurch bestimmt, dass für die Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  von  $\mathbb{R}^n$   $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$  gilt. Die angesprochene Interpretation ist nun, dass  $|\det(v_1, \dots, v_n)|$  als das Volumen des von den Vektoren aufgespannten Parallelepipeds interpretiert werden kann. Das motiviert die folgende Verallgemeinerung auf " $k$ -dimensionale signierte Volumina".



DEFINITION 2.6. Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale Vektorräume über  $\mathbb{R}$  und sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ .

(1) Eine  $W$ -wertige  $k$ -lineare Abbildung auf  $V$  ist eine Funktion  $\alpha : V^k \rightarrow W$ , die linear in jeder Variable ist. Explizit muss also für jedes  $i = 1, \dots, k$ , fixe Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in V$ ,  $v, \tilde{v} \in V$  und  $t \in \mathbb{R}$  immer

$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v + t\tilde{v}, v_{i+1}, \dots, v_k) = \alpha(v_1, \dots, v, \dots, v_k) + t\alpha(v_1, \dots, \tilde{v}, \dots, v_k)$$

gelten. Ist  $W = \mathbb{R}$ , dann spricht man von einer  $k$ -Linearform auf  $V$ .

(2) Eine  $k$ -lineare Abbildung heißt *alternierend* wenn  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$  gilt, falls  $v_i = v_j$  für Indizes  $i \neq j$  gilt.

(3) Die Menge aller  $k$ -Linearformen auf  $V$  wird mit  $\otimes^k V^*$ , die Menge der alternierenden  $k$ -Linearformen mit  $\Lambda^k V^*$  bezeichnet. Als Konvention legen wir außerdem  $\otimes^0 V^* = \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$  fest.

Für  $k = 1$  erhalten wir lineare Abbildungen und 1-Linearformen sind einfach Elemente des Dualraumes  $V^* = L(V, \mathbb{R})$  von  $V$ . Damit gilt also  $\otimes^1 V^* = \Lambda^1 V^* = V^*$ . Die Motivation für die Notationen  $\otimes^k V^*$  und  $\Lambda^k V^*$  wird später noch klarer werden. Wie für Determinantenfunktionen folgt für jede  $k$ -lineare Abbildung  $\alpha$  aus

$$\alpha(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_k) = 0$$

leicht, dass  $\alpha$  das Vorzeichen wechselt, wenn man zwei Einträge vertauscht. Daraus folgt dann, dass für jede Permutation  $\sigma$  der Menge  $\{1, \dots, k\}$  die Gleichung

$$\alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = \text{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k)$$

gilt (siehe Übungen). Wir können sofort einige einfache Eigenschaften abklären:

LEMMA 2.6. Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale Vektorräume und sei  $k \geq 1$ .

(1) Die  $k$ -linearen Abbildungen  $V^k \rightarrow W$  bilden einen Vektorraum bezüglich der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation. Die alternierenden  $k$ -linear Abbildungen bilden darin einen linearen Teilraum.

(2) Ist  $\{a_1, \dots, a_N\}$  eine Basis für  $V$ , dann ist eine  $k$ -lineare Abbildung  $\alpha : V^k \rightarrow W$  eindeutig durch die Elemente  $\alpha(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$  für Indizes  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$  bestimmt. Ist  $\alpha$  alternierend, dann sind schon die Werte mit  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$  ausreichend.

BEWEIS. (1) Punktweise Operationen bedeuten, dass wir für  $k$ -lineare Abbildungen  $\alpha, \beta : V^k \rightarrow W$  und  $t \in \mathbb{R}$ , die Funktion  $\alpha + t\beta$  durch

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \alpha(v_1, \dots, v_k) + t\beta(v_1, \dots, v_k)$$

definiert. Das ist aber offensichtlich wieder eine  $k$ -lineare Abbildung, die zusätzlich alternierend ist, falls  $\alpha$  und  $\beta$  alternierend sind. Damit folgen aber beide Behauptungen sofort aus bekannten Tatsachen der linearen Algebra.

(2) Sind  $v_1, \dots, v_k \in V$ , dann können wir diese Vektoren in der gegebenen Basis entwickeln und wir schreiben das als  $v_i = \sum_j v_i^j a_j$  mit  $v_i^j \in \mathbb{R}$ . Damit ist aber wegen der Linearität in der ersten Variable

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1} v_1^{i_1} \alpha(a_{i_1}, v_2, \dots, v_k).$$

Entwickeln wir dann in der zweiten Variable und so weiter, dann erhalten wir

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_k^{i_k} \alpha(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}).$$

Ist  $\alpha$  alternierend, dann ist  $\alpha(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = 0$  falls zwei der Indizes  $i_j$  gleich sind. Wenn aber die Indizes  $i_j$  alle verschieden sind, dann gibt es eine eindeutige Permutation  $\sigma$  der Menge  $\{1, \dots, k\}$  sodass  $i_{\sigma_1} < i_{\sigma_2} < \dots < i_{\sigma_k}$  gilt und dann ist  $\alpha(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = \text{sgn}(\sigma)\alpha(a_{i_{\sigma_1}}, \dots, a_{i_{\sigma_k}})$ .  $\square$

Man kann aus Elementen des Dualraumes einfach  $k$ -Linearformen konstruieren. Für  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in V^*$  können wir einfach die Abbildung  $(v_1, \dots, v_k) \mapsto \lambda_1(v_1) \dots \lambda_k(v_k)$  betrachten, die offensichtlich ein Element  $\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_k \in \otimes^k V^*$  definiert. Eine kleine Variation dieser Konstruktion liefert alternierende Multilinearformen und mit Hilfe dieser Konstruktion kann man den Raum  $\Lambda^k V^*$  gut verstehen.

**SATZ 2.6.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  und sei  $k \geq 1$ .

(1) Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in V^*$ , also  $\lambda_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Abbildung für jedes  $i$ . Dann definiert

$$(2.1) \quad (\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k)(v_1, \dots, v_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \lambda_1(v_{\sigma_1}) \dots \lambda_k(v_{\sigma_k})$$

ein Element  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k \in \Lambda^k V^*$ .

(2) Die Abbildung  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k$  definiert eine  $k$ -lineare, alternierende Abbildung  $(V^*)^k \rightarrow \Lambda^k V^*$ .

(3) Ist  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  eine Basis für  $V^*$ , dann bilden die Elemente  $\mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k}$  mit  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  eine Basis für  $\Lambda^k V^*$ . Insbesondere gilt  $\Lambda^k V^* = \{0\}$  für  $k > n$  und  $\dim(\Lambda^k V^*) = \binom{n}{k}$  für  $k \leq n$ .

**BEWEIS.** (1) Für  $v \in V$  definieren wir einen Vektor  $a(v) \in \mathbb{R}^k$  durch  $a(v) := (\lambda_1(v), \dots, \lambda_k(v))$ . Dann gilt natürlich  $a(v + tw) = a(v) + ta(w)$  und nach Definition ist  $(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k)(v_1, \dots, v_k) := \det(A)$ , wobei  $A$  die Matrix mit den Spalten  $a(v_1), \dots, a(v_k)$  ist. Fixieren wir die Vektoren  $v_j$  für  $j \neq i$  und ersetzen  $v_i$  durch  $v_i + tw_i$ , dann ändert sich die  $i$ te Spalte von  $A$  zu  $a(v_i + tw_i) = a(v_i) + ta(w_i)$  während die anderen Spalten gleich bleiben. Wegen der Linearität der Determinante in den Spalten der Matrix sehen wir, dass die Funktion  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k$  linear in der  $i$ ten Variable und damit  $k$ -linear ist. Ist  $v_i = v_j$  für  $i \neq j$  dann hat die entsprechende Matrix zwei gleiche Spalten und damit Determinante Null. Damit ist aber  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k$  alternierend.

(2) Fixieren wir Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in V$  und definieren wir für jedes  $\lambda \in V^*$  einen Vektor  $b(\lambda) \in \mathbb{R}^k$  durch  $b(\lambda) = (\lambda(v_1), \dots, \lambda(v_k))$ . Dann können wir genau wie oben  $(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(B)$  schreiben, wobei  $B$  als Spalten die Vektoren  $b(\lambda_1), \dots, b(\lambda_k)$  hat. Genau wie in Teil (1) folgt daraus nun, dass der Wert von

$$\lambda_1 \wedge \dots \wedge (\lambda_i + t\nu_i) \wedge \dots \wedge \lambda_k$$

auf  $(v_1, \dots, v_k)$  gerade die entsprechende Linearkombination der Werte von  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_i \wedge \dots \wedge \lambda_k$  und von  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \nu_i \wedge \dots \wedge \lambda_k$  ist. Da das aber für alle  $k$ -Tupel von Vektoren gilt, folgt für die entsprechenden Abbildungen

$$\lambda_1 \wedge \dots \wedge (\lambda_i + t\nu_i) \wedge \dots \wedge \lambda_k = \lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_i \wedge \dots \wedge \lambda_k + t(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \nu_i \wedge \dots \wedge \lambda_k).$$

Damit ist unsere Abbildung  $k$ -linear. Falls  $\lambda_i = \lambda_j$  für  $i \neq j$  gilt, dann hat die entsprechende Matrix  $B$  zwei gleiche Spalten und damit Determinante Null. Das gilt aber wieder für alle  $k$ -Tupel von Vektoren aus  $V$  und damit gilt in diesem Fall  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k = 0$ .

(3) Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die Basis  $\{\mu_i\}$  von  $V^*$  eine Basis  $\{a_i\}$  für  $V$  bestimmt, die durch  $\mu_i(a_j) = \delta_{ij}$  charakterisiert ist. Betrachten wir nun zwei

“Gruppen von Indizes”  $i_1, \dots, i_k$  und  $j_1, \dots, j_k$  mit  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  und  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ . Dann behaupten wir, dass

$$\mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k}(a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) = \delta_{i_1, j_1} \dots \delta_{i_k, j_k}$$

gilt, wir also 1 erhalten, wenn die beiden Tupel von Indizes gleich sind und 0, wenn sie verschieden sind. Betrachten wir zunächst  $i_1$  und  $j_1$ . Ist  $i_1 < j_1$ , dann folgt  $i_1 < j_\ell$  für alle  $\ell$  und damit  $\mu_{i_1}(a_{\sigma_1}) = 0$  für jede Permutation  $\sigma$ , also folgt  $\mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k}(a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) = 0$  nach Definition. Ist umgekehrt  $j_1 < i_1$ , dann ist  $j_1 < i_\ell$  und damit  $\mu_{i_\ell}(a_{j_1}) = 0$  für alle  $\ell$ . Damit folgt aber wieder  $\mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k}(a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) = 0$ , also können wir einen Wert ungleich Null nur dann erreichen, wenn  $i_1 = j_1$  gilt. Wir sehen auch, dass in der Definition in (2.1) nur Permutationen  $\sigma$  mit  $\sigma_1 = 1$  einen Wert  $\neq 0$  liefern können. Damit gilt aber auch  $i_2 > j_1$  und  $j_2 > i_1$  und wir können analog wie oben argumentieren, dass für  $i_2 < j_2$  und  $j_2 < i_2$  immer  $\mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k}(a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) = 0$  gelten muss. Damit folgt wieder, dass nur im Fall  $i_2 = j_2$  ein Wert  $\neq 0$  erreicht werden kann und in (2.1) nur Permutationen beitragen können, die auch  $\sigma_2 = 2$  erfüllen. Iteriert man dieses Argument, dann folgt, dass ein Wert  $\neq 0$  nur erreicht werden kann, wenn  $i_\ell = j_\ell$  für alle  $\ell$  gilt und dass in (2.1) nur die identische Permutation beiträgt. Daraus folgt aber dann natürlich auch  $\mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = 1$ .

Daraus folgt aber nun, dass für Koeffizienten  $\alpha_{i_1 \dots i_k}$  und eine Linearkombination

$$\alpha := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} \mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k}$$

immer  $\alpha_{i_1 \dots i_k} = \alpha(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$  gilt. Daraus folgt einerseits sofort, dass die Menge  $\{\mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$  linear unabhängig ist. Andererseits sieht man aber auch, dass für gegebenes  $\alpha \in \Lambda^k V^*$  die Abbildungen  $\alpha$  und

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k}$$

auf allen Tupeln  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$  mit  $i_1 < \dots < i_k$  übereinstimmen und damit nach Teil (2) von Lemma 2.6 gleich sind. Also folgt die Behauptung über die Basis und die Indexmenge für diese Element sind genau die  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ .  $\square$

Im Moment sollte man den Ausdruck  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k$  nur als Symbol interpretieren und nicht als Resultat einer Operation. Wir werden aber gleich beweisen, dass auch die Interpretation als Resultat einer Operation gerechtfertigt ist. Und es wird handlich sein, diese Tatsache schon jetzt in der Terminologie vorwegzunehmen: Wir sagen, dass ein Element  $\alpha \in \Lambda^k V^*$  ein *Hackprodukt von Linearformen* ist wenn es in der Form  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k$  geschrieben werden kann.

**BEISPIEL 2.6.** Betrachten wir den Fall  $V = \mathbb{R}^3$ . Die nichttrivialen Räume, die in diesem Fall auftreten sind  $\Lambda^k V^*$  für  $k = 0, 1, 2, 3$  und sie haben die Dimensionen 1, 3, 3 und 1. Nach Definition ist  $\Lambda^0 V = \mathbb{R}$  und aus der linearen Algebra ist bekannt, dass jedes Element von  $\Lambda^3 V^*$  ein Vielfaches der Determinante  $\det : (\mathbb{R}^3)^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Verwendet man die Determinante, dann kann man jedem Vektor  $w \in \mathbb{R}^3$  ein Element  $\alpha_w \in \Lambda^2 V^*$  zuordnen, das durch  $\alpha_w(v_1, v_2) := \det(w, v_1, v_2)$  definiert ist, was offensichtlich bilinear und alternierend ist. Wir können dann die Funktion  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$  betrachten, die durch  $w \mapsto \alpha_w$  gegeben ist. Weil die Determinantenfunktion trilinear ist, folgt sofort, dass  $\alpha_{w_1 + tw_2} = \alpha_{w_1} + t\alpha_{w_2}$  gilt, also ist unsere Funktion eine lineare Abbildung. Schließlich ist für  $w \neq 0$  offensichtlich  $\alpha_w \neq 0$ , also erhalten wir einen linearen Isomorphismus  $\mathbb{R}^3 \cong \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ .

Wenn wir auch noch das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\mathbb{R}^3$  benutzen können wir ähnlich wie in den Abschnitten 1.9 und 1.10 auch  $(\mathbb{R}^3)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*$  mit  $\mathbb{R}^3$  identifizieren. Hier bilden wir also  $w \in \mathbb{R}^3$  auf die lineare Abbildung  $\lambda_w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ab, die durch  $\lambda_w(v) = \langle v, w \rangle$  gegeben ist. Insbesondere können wir jetzt für  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$  das Element  $\lambda_{w_1} \wedge \lambda_{w_2} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$  bilden und wissen von oben, dass es einen eindeutigen Vektor  $w$  gibt, sodass  $\lambda_{w_1} \wedge \lambda_{w_2} = \alpha_w$  gilt. Man kann leicht direkt verifizieren, dass die Abbildung  $(w_1, w_2) \mapsto w$  genau das Kreuzprodukt auf  $\mathbb{R}^3$  liefert.

Diese Identifikationen werden uns später eine Verbindung zur klassischen Vektoranalysis liefern. Man kann sie zwar auf höhere Dimensionen ausdehnen, erhält aber so nur Beschreibungen von  $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$  und  $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$ . Aber schon in Dimension  $n = 4$  ist  $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$  ein Raum der Dimension 6, der keine einfache Beschreibung in Termen von  $\mathbb{R}^4$  erlaubt.

**2.7. Das Hackprodukt.** Die Konstruktion aus Satz 2.6 führt zu einer Idee, wie man alternierende Multilinearformen "kombinieren" kann. Betrachtet man  $\lambda_i, \mu_j \in V^*$  für  $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, \ell$ , dann kann man versuchen, ein Produkt von  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k \in \Lambda^k V^*$  und  $\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_\ell \in \Lambda^\ell V^*$  als  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k \wedge \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_\ell \in \Lambda^{k+\ell} V^*$  zu definieren. Das funktioniert tatsächlich und man kann dann leicht eine Beschreibung für allgemeine alternierende Multilinearformen ableiten, die wir hier als Definition verwenden.

**DEFINITION 2.7.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum und seinen  $k, \ell \geq 1$  dann definieren wir für  $\alpha \in \Lambda^k V^*$  und  $\beta \in \Lambda^\ell V^*$  eine Funktion  $\alpha \wedge \beta : V^{k+\ell} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$(2.2) \quad (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) := \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \beta(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+\ell}}).$$

Man nennt  $\alpha \wedge \beta$  das *Hackprodukt* oder *Keilprodukt* oder *Wedgeprodukt* von  $\alpha$  und  $\beta$ .

Abgesehen von dem Faktor  $\frac{1}{k!\ell!}$  ist diese Definition wohl nicht sehr überraschend. Die Notwendigkeit für diesen Vorfaktor ergibt sich unmittelbar aus Teil (3) des folgenden Resultats.

**PROPOSITION 2.7.** Sei  $\alpha \in \Lambda^k V^*$  und  $\beta \in \Lambda^\ell V^*$ . Dann gilt:

(1)  $\alpha \wedge \beta$  ist  $(k + \ell)$ -linear und alternierend, also  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+\ell} V^*$ . Außerdem ist das Hackprodukt bilinear, also es gilt  $(\alpha_1 + t\alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + t\alpha_2 \wedge \beta$  für  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^k V^*$  und  $t \in \mathbb{R}$  und analog in der zweiten Variable.

(2) Das Hackprodukt ist graduiert kommutativ, also es gilt  $\beta \wedge \alpha = (-1)^{k\ell} \alpha \wedge \beta$ .

(3) Das Hackprodukt ist assoziativ, also es gilt  $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$  für jedes  $\gamma \in \Lambda^r V^*$  mit  $r \geq 1$ .

**BEWEIS.** (1) Für die Multilinearität von  $\alpha \wedge \beta$  sowie für die Bilinearität des Hackprodukts genügt es eine Funktion der Form

$$(v_1, \dots, v_{k+\ell}) \mapsto \alpha(v_1, \dots, v_k) \beta(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell})$$

zu betrachten und für diese sind beide Eigenschaften offensichtlich. Damit gelten sie aber für jeden Summanden in der Definition in (2.2) und damit auch für die Summe.

Ist  $v_i = v_j$  für  $i \neq j$ , dann können wir für jede Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}$  die Komposition  $\hat{\sigma} = \sigma \circ (i, j)$  betrachten, wobei  $(i, j)$  die Transposition bezeichnet, die  $i$  und  $j$  vertauscht. Nach Konstruktion ist dann  $v_{\sigma_r} = v_{\hat{\sigma}_r}$  für alle  $r = 1, \dots, k + \ell$  aber  $\text{sgn}(\hat{\sigma}) = -\text{sgn}(\sigma)$ . Wenn  $\sigma$  einmal durch  $\mathfrak{S}_{k+\ell}$  läuft, dann läuft auch  $\hat{\sigma}$  genau einmal durch alle Elemente von  $\mathfrak{S}_{k+\ell}$ . Damit heben sich jeweils die beiden entsprechenden Summanden in der Definition in (2.2) weg und wir sehen, dass  $\alpha \wedge \beta$  alternierend ist.

(2) Das ist nur eine Überlegung zu Permutationen. Betrachten wir einen der Summanden in der Definition von  $\beta \wedge \alpha$ , sagen wir  $\beta(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_\ell})\alpha(v_{\tau_{\ell+1}}, \dots, v_{\tau_{\ell+k}})$  für eine Permutation  $\tau$ , dann ist dieser Summand gleich  $\alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k})\beta(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+\ell}})$ , für eine passende Permutation  $\sigma$ . Explizit gilt  $\sigma_i = \begin{cases} \tau_{\ell+i} & i \leq k \\ \tau_{i-k} & i > k \end{cases}$ . Das bedeutet aber gerade, dass man  $\sigma = \tau \circ \rho$  gilt, wobei  $\rho$  die Abbildung ist, die  $1, 2, \dots, k + \ell$  auf  $\ell + 1, \dots, \ell + k, 1, \dots, \ell$  abbildet. Damit ist aber  $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\tau)(-1)^{k\ell}$ , weil man für  $\rho$  jede der ersten  $\ell$  Zahlen durch die letzten  $k$  Zahlen “durchtauschen” muss. Durch Summieren über alle Permutationen folgt die Behauptung.

(3) Wir behaupten zunächst, dass für  $\alpha = \lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k \in \Lambda^k V^*$  und  $\beta = \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_\ell \in \Lambda^\ell V^*$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_\ell \in V^*$  das Produkt  $\alpha \wedge \beta$  durch

$$\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k \wedge \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_\ell$$

gegeben ist.

Dazu betrachten wir  $\alpha(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = (\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k)(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k})$ , Um das auszuwerten müssen wir nochmals über alle Permutationen der  $k$  Eintragungen  $v_{\sigma_i}$  summieren. Analog gilt das für  $\beta$ , wo wir  $\ell$  Eintragungen permutieren müssen. Für fixe Permutationen dieser  $k$  bzw.  $\ell$  Vektoren erhalten wir aber einen Ausdruck der Form  $\lambda_1(v_{\tau_1}) \dots \lambda_k(v_{\tau_k})\mu_1(v_{\tau_{k+1}}) \dots \mu_\ell(v_{\tau_{k+\ell}})$  für eine Permutation  $\tau$ , die von  $\sigma$  und den gewählten Permutationen von  $k$  bzw.  $\ell$  Elementen abhängt. Wenn man über alle Möglichkeiten summiert, dann tritt dabei aber jede fixe Permutation  $\tau$  genau  $k!\ell!$  mal auf (entsprechend der Wahlen der Permutationen von  $k$  bzw.  $\ell$  Elementen, die man jeweils durch passende Wahl von  $\sigma$  “kompensieren” kann). Das ist aber genau der Faktor durch den in der Definition in (2.2) dividiert wird, und daraus folgt die Behauptung.

Damit folgt aber sofort, dass  $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$  gilt, wenn  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  Hackprodukte von Linearformen sind. Weil wir aber aus (1) wissen, dass das Hackprodukt bilinear ist, erweitert sich dieses Resultat auf den Fall dass  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  Linearkombinationen von Hackprodukten von Linearformen sind. Nach Satz 2.6 kann aber jede alternierende Multilinearform als so eine Linearkombination geschrieben werden, also ist der Beweis vollständig.  $\square$

**BEMERKUNG 2.7.** (1) Damit können wir nun tatsächlich  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k$  als Hackprodukt der Elemente  $\lambda_i \in V^* = \Lambda^1 V^*$  interpretieren und wegen der Assoziativität des Hackprodukts macht dieser Ausdruck ohne Klammern Sinn.

(2) Man erweitert das Hackprodukt auf Elemente von  $\Lambda^0 V^*$ , indem man es einfach als Skalarmultiplikation definiert, wenn mindestens einer der beiden Faktoren in  $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$  liegt. Man erhält also die gewöhnliche Multiplikation  $a \wedge b := ab$  für  $a, b \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$  und  $a \wedge \alpha = a\alpha = \alpha \wedge a$  für  $a \in \Lambda^0 V^*$  und  $\alpha \in \Lambda^k V^*$  mit  $k > 0$ . Dann bleiben alle Eigenschaften aus Satz 2.7 erhalten.

(3) Man kann die Räume  $\Lambda^k V^*$  zu einem einzelnen Vektorraum  $\Lambda^* V^*$  zusammenfassen, den man üblicherweise als  $\Lambda^* V^* := \bigoplus_{k=0}^{\dim(V)} \Lambda^k V^*$  definiert. Hier ist die direkte Summe einfach das Produkt der Räume mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Das ist aber mehr eine Schreibweise als tatsächlicher Inhalt. Man betrachtet dann  $\Lambda^* V^*$  als *graduerten Vektorraum*, wobei der Teilraum  $\Lambda^k V^*$  gerade den Elementen mit Grad  $k$  entspricht. Der Vorteil ist, dass man dann das Hackprodukt als bilineare Operation  $\wedge : \Lambda^* V^* \times \Lambda^* V^* \rightarrow \Lambda^* V^*$  auffassen kann. Die Eigenschaften aus Satz 2.7 sagen dann gerade, dass diese Operation  $\Lambda^* V^*$  zu einer *graduirt kommutativen, assoziativen Algebra* macht. Aber auch das ist mehr effiziente Sprechweise als tatsächlicher Inhalt.

### 2.8. Exkurs: Bemerkungen zu Tensorprodukten und äußeren Potenzen.

Wir wollen hier nur kurz verschiedene Notationen erklären, die oben aufgetaucht sind und die Überlegungen über Multilinearformen in einen etwas allgemeineren Rahmen stellen. Das sollte aber zum Verständnis der weiteren Entwicklungen nicht notwendig sein. Für Vektorräume  $V$ ,  $W$  und  $Z$  kann man bilineare Abbildungen  $\varphi : V \times W \rightarrow Z$  betrachten und diese bilden einen Vektorraum unter den punktweisen Operationen. Wie in Satz 2.5 sind bilineare Abbildung immer durch ihre Werte auf Paaren von Basiselementen bestimmt, also ist die Dimension dieses Raumes  $\dim(V) \dim(W) \dim(Z)$ . Ist  $\varphi : V \times W \rightarrow Z$  bilinear und  $f : Z \rightarrow \tilde{Z}$  linear, dann ist natürlich auch die Abbildung  $f \circ \varphi : V \times W \rightarrow \tilde{Z}$  bilinear. Damit kann man sich fragen, ob man auf diese Weise alle bilinearen Abbildungen (in beliebige Vektorräume) durch diese Konstruktion aus einer einzigen (“universellen”) bilinearen Abbildung gewinnen kann. In unserem konkreten Fall kann man relativ leicht direkte Lösungen für dieses Problem finden.

Man kann zum Beispiel den Raum  $L(V^*, W)$  der linearen Abbildungen vom Dualraum von  $V$  nach  $W$  betrachten. Wählt man Vektoren  $v \in V$  und  $w \in W$ , dann bestimmen diese eine lineare Abbildung  $f_{v,w} : V^* \rightarrow W$  via  $f_{v,w}(\lambda) = \lambda(v)w$ . Damit definiert  $F(v, w) := f_{v,w}$  eine Funktion  $F : V \times W \rightarrow L(V^*, W)$  und man verifiziert sofort, dass  $F$  bilinear ist. Man verifiziert auch leicht, dass für Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  für  $V$  und  $\{w_1, \dots, w_m\}$  für  $W$  die Funktionen  $f_{v_i, w_j}$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq m$  eine Basis für  $L(V^*, W)$  bilden. Ist nun  $Z$  ein beliebiger Vektorraum und  $\varphi : V \times W \rightarrow Z$  eine beliebige bilineare Abbildung, dann ist aus der linearen Algebra bekannt, dass es eine eindeutige lineare Abbildung  $\tilde{\varphi} : L(V^*, W) \rightarrow Z$  gibt, die  $\tilde{\varphi}(f_{v_i, w_j}) = \varphi(v_i, w_j)$  für alle  $i, j$  erfüllt. Damit stimmen aber die bilinearen Abbildungen  $\tilde{\varphi} \circ F$  und  $\varphi$  auf allen Paaren von Basiselementen überein und müssen damit gleich sein.

Alternativ kann man aber auch den Vektorraum  $B(V, W; \mathbb{R})$  aller bilinearen Abbildungen  $V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten und den Dualraum  $B(V, W; \mathbb{R})^*$  bilden. Für  $v \in V$  und  $w \in W$  finden wir ein offensichtliches Element  $g_{v,w} \in B(V, W; \mathbb{R})^*$ , nämlich  $g_{v,w}(\psi) := \psi(v, w) \in \mathbb{R}$  für  $\psi : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear. Also definiert  $G(v, w) := g_{v,w}$  eine Funktion  $G : V \times W \rightarrow B(V, W; \mathbb{R})^*$  und aus der Konstruktion folgt leicht, dass diese Abbildung bilinear ist. Für Basen  $\{v_j\}$  und  $\{w_j\}$  wie oben sieht man wieder leicht, dass die Elemente  $\lambda_{v_i, w_j}$  eine Basis für  $B(V, W; \mathbb{R})^*$  bilden. Damit erhält man aber wie oben für jeden Vektorraum  $Z$  und eine bilineare Abbildung  $\varphi : V \times W \rightarrow Z$  eine eindeutige lineare Abbildung  $\hat{\varphi} : B(V, W; \mathbb{R})^* \rightarrow Z$ , die  $\hat{\varphi}(\lambda_{v_i, w_j}) = \varphi(v_i, w_j)$  für alle  $i, j$  und damit muss wie oben  $\hat{\varphi} \circ G = \varphi$  gelten. Insbesondere kann man das auf die bilineare Abbildung  $F : V \times W \rightarrow L(V^*, W)$  und erhält eine lineare Abbildung  $\hat{F} : B(V, W; \mathbb{R})^* \rightarrow L(V^*, W)$ . Umgekehrt liefert die Konstruktion von oben angewandt auf  $G : V \times W \rightarrow B(V, W; \mathbb{R})^*$  eine lineare Abbildung  $\tilde{G} : L(V^*, W) \rightarrow B(V, W; \mathbb{R})^*$ . Mit Hilfe von Basen wie oben verifiziert man sofort, dass  $\hat{F}$  und  $\tilde{G}$  invers zueinander und damit insbesondere lineare Isomorphismen sind.

Nun haben wir zwar “unterwegs” Basen verwendet, aber die Abbildungen  $F$  und  $G$  und die Zuordnungen  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  und  $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$  wurden ohne jegliche Wahl von Basen definiert. Damit sind auch die Isomorphismen  $\hat{F}$  und  $\tilde{G}$  *natürliche Isomorphismen*, die nicht von der Wahl einer Basis abhängen. Damit hat man für das Problem der universellen bilinearen Abbildung mehrere Lösungen, die auf den ersten Blick recht verschieden aussehen und es gibt keinen Grund, eine dieser (oder auch andere) Lösungen zu bevorzugen. Das löst man, indem man abstrakt *ein Tensorprodukt* von  $V$  und  $W$  als einen Vektorraum  $V \otimes W$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung  $V \times W \rightarrow V \otimes W$  definiert, die man als  $(v, w) \mapsto v \otimes w$  schreibt, sodass es für jeden Vektorraum  $Z$  und jede bilineare Abbildung  $\varphi : V \times W \rightarrow Z$  eine eindeutige lineare Abbildung  $\tilde{\varphi} : V \otimes W \rightarrow Z$  gibt,

sodass  $\varphi(v, w) = \tilde{\varphi}(v \otimes w)$  für alle  $v \in V$  und  $w \in W$  gilt. Analog wie oben zeigt man, dass es für ein weiteres Tensorprodukt  $V \hat{\otimes} W$  einen eindeutigen linearen Isomorphismus  $V \otimes W \rightarrow V \hat{\otimes} W$  gibt, der für  $v \in V$  und  $w \in W$  das Element  $v \otimes w$  auf  $v \hat{\otimes} w$  abbildet. Damit braucht man sich nicht mehr darum zu kümmern, wie die Lösung konstruiert wurde sondern kann einfach mit der “universellen Eigenschaft” (nämlich, dass es zu jedem  $\varphi$  ein eindeutiges  $\tilde{\varphi}$  gibt) arbeiten.

Man kann dann problemlos Tensorprodukte von mehreren Vektorräumen bilden und stellt fest, dass man  $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$  und  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  in natürlicher Weise identifizieren kann und daher keine Klammern setzen muss. Insbesondere kann man für einen Vektorraum  $V$  die *Tensorpotenzen*  $V \otimes V =: \otimes^2 V$ ,  $V \otimes V \otimes V =: \otimes^3 V$  und allgemein  $\otimes^k V$  für  $k \in \mathbb{N}$  bilden. Dabei legt man als Konvention  $\otimes^0 V = \mathbb{R}$  und  $\otimes^1 V = V$  fest.

Betrachten wir nun  $V \otimes V$ . Dann können wir die Abbildung  $V \times V \rightarrow V \otimes V$  betrachten, die durch  $(v_1, v_2) \mapsto v_2 \otimes v_1$  gegeben ist. Nach der universellen Eigenschaft finden wir eine lineare Abbildung  $\tau : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ , die  $\tau(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$  für alle  $v_1, v_2 \in V$  erfüllt. Offensichtlich bildet  $\tau \circ \tau$  jedes Element der Form  $v_1 \otimes v_2$  auf sich selbst ab, also folgt aus der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft  $\tau \circ \tau = \text{id}$ . Wir nennen dann  $x \in V \otimes V$  *symmetrisch*, wenn  $\tau(x) = x$  gilt und *alternierend*, wenn  $\tau(x) = -x$  gilt. Diese symmetrischen Elemente bilden einen Teilraum  $S^2 V \subset \otimes^2 V$ , die alternierenden Elemente einen Teilraum  $\Lambda^2 V \subset \otimes^2 V$ . Man kann aber ein beliebiges Element  $x \in V \otimes V$  als  $x = \frac{1}{2}(x + \tau(x)) + \frac{1}{2}(x - \tau(x))$  schreiben und die Summanden liegen in  $S^2 V$  bzw. in  $\Lambda^2 V$ . Damit ist  $\otimes^2 V = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$  und durch projizieren auf die beiden Summanden erhält man Abbildungen

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) &\mapsto v_1 \vee v_2 := \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1) \in S^2 V \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 \wedge v_2 := \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1) \in \Lambda^2 V \end{aligned}$$

Dann zeigt man leicht, dass  $S^2 V$  eine universelle Eigenschaft für symmetrische bilineare Abbildungen hat: Sei  $Z$  ein Vektorraum und  $\varphi : V \times V \rightarrow Z$  eine bilineare Abbildung sodass  $\varphi(v_1, v_2) = \varphi(v_2, v_1)$  für alle  $v_1, v_2 \in V$  gilt. Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung  $\tilde{\varphi} : S^2 V \rightarrow Z$  sodass  $\tilde{\varphi}(v_1 \vee v_2) = \varphi(v_1, v_2)$  gilt. Analog hat  $\Lambda^2 V$  eine universelle Eigenschaft für bilineare Abbildungen, die alternierend im Sinne von Definition 2.6 sind.

Mit kleinen Änderungen erweitert sich das auf multilineare Abbildungen. Man betrachtet  $\otimes^k V$  für  $k \geq 3$  und beobachtet zunächst, dass es für jede Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$  eine eindeutige lineare Abbildung  $\tau_\sigma : \otimes^k V \rightarrow \otimes^k V$  gibt, sodass  $\tau_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_k}$  gilt. Man kann nun einen Teilraum  $S^k V \subset \otimes^k V$  durch  $\{x : \forall \sigma : \tau_\sigma(x) = x\}$  und einen Teilraum  $\Lambda^k V \subset \otimes^k V$  durch  $\{x : \forall \sigma : \tau_\sigma(x) = \text{sgn}(\sigma)x\}$  definieren, diese beiden Teilräume spannen aber  $\otimes^k V$  nicht mehr auf. Besser ist es hier die beiden Räume als Quotienten von  $\otimes^k V$  zu betrachten. Für  $\Lambda^k V$  kann man hier einfach den Teilraum  $\mathcal{S}$  von  $\otimes^k V$  betrachten, der von allen Tensoren der Form  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$  mit  $v_\ell \in V$  und  $v_i = v_j$  für ein  $i \neq j$  aufgespannt wird und die *kte äußere Potenz*  $\Lambda^k V$  von  $V$  als  $(\otimes^k V)/\mathcal{S}$  definieren. Dann definiert man eine Abbildung  $V^k \rightarrow \Lambda^k V$  durch

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k := (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \text{ mod } \mathcal{S}$$

und verifiziert leicht, dass diese Abbildung  $k$ -linear und alternierend ist. Außerdem hat  $\Lambda^k V$  eine universelle Eigenschaft für  $k$ -lineare, alternierende Abbildungen: Ist  $Z$  ein Vektorraum und  $\varphi : V^k \rightarrow Z$  eine  $k$ -lineare, alternierende Abbildung, dann gibt es genau eine lineare Abbildung  $\tilde{\varphi} : \Lambda^k V \rightarrow Z$ , sodass  $\tilde{\varphi}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \varphi(v_1, \dots, v_k)$  gilt. Wendet man das auf  $Z = \mathbb{R}$  an, dann sieht man, dass der Raum der alternierenden  $k$ -Linearformen auf  $V$  genau durch  $L(\Lambda^k V, \mathbb{R}) = (\Lambda^k V)^*$  gegeben ist und man kann

wieder leicht direkt zeigen, dass man diesen Raum auch mit  $\Lambda^k V^*$  (also mit der  $k$ ten äußeren Potenz des Dualraumes  $V^*$  von  $V$ ) identifizieren kann und zwar genau über die Konstruktion aus Satz 2.6. Ähnlich definiert man die  $k$ te symmetrische Potenz  $S^k V$  von  $V$  als Quotient von  $\otimes^k V$  und zeigt, dass sie eine universelle Eigenschaft für  $k$ -lineare symmetrische Abbildungen hat.

## Differentialformen

Nachdem wir jetzt den Hintergrund entwickelt haben, können wir uns den Analoga von 1-Formen widmen.

**2.9. Definition und Hackprodukt.** Wir definieren Differentialformen höheren Grades parallel zur Definition von 1-Formen aus Abschnitt 1.10. Man kann die Definition dort so interpretieren, dass wir jedem Punkt  $x$  in einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  eine Linearform, also eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , zuordnen. Es ist hilfreich sich diese lineare Abbildung als “im Punkt  $x$  angehängt” vorzustellen. Hier machen wir das gleiche mit alternierenden Multilinearformen statt mit Linearformen.

Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, dann können wir einfach Funktionen  $\varphi : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  betrachten, die jedem Punkt  $x \in U$  eine  $k$ -lineare alternierende Abbildung  $\varphi(x) : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnen. Natürlich können wir so eine Funktion äquivalent als eine Funktion  $\varphi : U \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$  mit  $k$  Kopien von  $\mathbb{R}^n$  betrachten, die in den letzten  $k$  Variablen  $k$ -linear und alternierend ist. Wir verlangen also, dass für jedes  $x \in U$ , jedes  $i$  und fixe Vektoren  $v_j$  die Funktion  $v \mapsto \varphi(x, v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k)$  linear ist und dass  $\varphi(x, v_1, \dots, v_k) = 0$  gilt, wenn  $v_i = v_j$  für  $i \neq j$  gilt. Aus der letzten Bedingung folgt dann, dass für jedes  $x$ , alle  $v_j$  und jede Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$  die Gleichung  $\varphi(x, v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) = \text{sgn}(\sigma)\varphi(x, v_1, \dots, v_k)$  gilt.

DEFINITION 2.9. Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen.

(1) Eine stetige *Differentialform vom Grad  $k$*  oder eine stetige  *$k$ -Form* auf  $U$  ist eine Funktion  $\varphi : U \rightarrow (\Lambda^k \mathbb{R}^n)^*$  sodass für beliebige fixe Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  die Funktion  $x \mapsto \varphi(x, v_1, \dots, v_k)$  stetig ist. Für  $r \geq 1$  sagen wir, dass  $\varphi$  Differenzierbarkeitsklasse  $C^r$  hat, wenn alle diese Funktionen  $C^r$ -Funktionen sind.

(2) Der Raum der stetigen  $k$ -Formen auf  $U$  wird mit  $\Omega^k(U)$  bezeichnet.

(3) Für  $\varphi, \psi \in \Omega^k(U)$  und  $f \in C(U, \mathbb{R})$  definieren wir  $\varphi + f\psi : U \rightarrow \Lambda^k \mathbb{R}^n$  durch

$$(2.3) \quad (\varphi + f\psi)(x, v_1, \dots, v_k) = \varphi(x, v_1, \dots, v_k) + f(x)\psi(x, v_1, \dots, v_k).$$

(4) Für  $\varphi \in \Omega^k(U)$  und  $\psi \in \Omega^\ell(U)$  definieren wir  $\varphi \wedge \psi : U \rightarrow \Lambda^{k+\ell}(\mathbb{R}^n)^*$  durch

$$(2.4) \quad (\varphi \wedge \psi)(x) := (\varphi(x)) \wedge (\psi(x)),$$

wobei wir auf der rechten Seite das Hackprodukt  $\wedge : \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \times \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \Lambda^{k+\ell}(\mathbb{R}^n)^*$  aus Abschnitt 2.7 benutzen.

Die grundlegenden Eigenschaften all dieser Operationen sind leicht abzuklären:

SATZ 2.9. Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, seien  $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ , sei  $f \in C(U, \mathbb{R})$  und  $r \geq 1$ .

(1) Für  $\varphi, \psi \in \Omega^k(U)$  ist  $\varphi + f\psi \in \Omega^k(U)$ . Haben  $\varphi, \psi$  und  $f$  alle Differenzierbarkeitsklasse  $C^r$ , dann ist auch  $\varphi + f\psi$  ein  $C^r$ -Form.

(2) Für  $\varphi \in \Omega^k(U)$  und  $\psi \in \Omega^\ell(U)$  ist  $\varphi \wedge \psi \in \Omega^{k+\ell}(U)$ . Haben  $\varphi$  und  $\psi$  Differenzierbarkeitsklasse  $C^r$ , dann gilt das auch für  $\varphi \wedge \psi$ .

(3) Das Hackprodukt von Differentialformen ist bilinear, assoziativ und graduiert kommutativ, also gilt  $\psi \wedge \varphi = (-1)^{k\ell} \varphi \wedge \psi$ . Zusätzlich gilt  $(f\varphi) \wedge \psi = f(\varphi \wedge \psi) = \varphi \wedge (f\psi)$ .



BEWEIS. (1) folgt direkt aus der Definition in (2.3) und bekannten Resultaten der Analysis.

(2) Aus Formel (2.2) in Definition 2.7 folgt sofort, dass Teil (3) von Definition 2.9 für fixe Vektoren  $v_1, \dots, v_{k+\ell} \in \mathbb{R}$

$$(\varphi \wedge \psi)(x, v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \varphi(x, v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \psi(x, v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+\ell}})$$

gilt. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Summe von Produkten stetiger Funktionen (bzw. von  $C^r$ -Funktionen) also selbst stetig (bzw.  $C^r$ ).

(3) Bilinearität, Assoziativität und graduierte Kommutativität folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften in jedem Punkt  $x \in U$ , die wir in Satz 2.7 bewiesen haben. Für die letzte Eigenschaft setzen wir einfach in die Definition ein:  $((f\varphi) \wedge \psi)(x) = (f(x)\varphi(x)) \wedge \psi(x)$  und wegen der Bilinearität aus Satz 2.7 ist das gleich  $f(x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$  und gleich  $\varphi(x) \wedge (f(x)\psi(x))$  und die Behauptung folgt.  $\square$

Mit Hilfe des Hackprodukts erhalten wir Verallgemeinerungen der Koordinaten-1-Formen  $dx_i$  aus Abschnitt 1.10. Für Indizes  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  erhalten wir  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$  für eine beliebige offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Explizit bedeutet das nach Definition

$$(2.5) \quad dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(x, v_1, \dots, v_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) (v_{\sigma_1})_{i_1} \dots (v_{\sigma_k})_{i_k},$$

wobei  $(v_i)_j$  die  $j$ te Komponente von  $v_i$  bezeichnet. Nach Teil (2) von Satz 2.9 sind alle dieser *Koordinaten- $k$ -Formen* beliebig oft differenzierbar. Außerdem erhalten wir sofort, dass  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0$  gilt, falls zwei der Indizes gleich sind und dass für eine Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$  die Gleichung

$$dx_{i_{\sigma_1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{\sigma_k}} = \text{sgn}(\sigma) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

gilt. Damit genügt es wieder, die Ausdrücke aus (2.5) mit  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  zu betrachten. Analog zu den Entwicklungen in Abschnitt 2.6 können wir beliebige  $k$ -Formen in Termen dieser *Koordinatenformen* expandieren und so  $k$ -Formen durch Tupel von  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen beschreiben.

PROPOSITION 2.9. Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $\varphi \in \Omega^k(U)$  eine stetige  $k$ -Form mit  $1 \leq k \leq n$  und  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis für  $\mathbb{R}^n$ . Dann definiert für Indizes  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  die Vorschrift

$$\varphi_{i_1 \dots i_k}(x) := \varphi(x, e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

eine stetige Funktion  $\varphi_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$  und es gilt

$$(2.6) \quad \varphi = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \varphi_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Insbesondere hat für  $r \geq 1$ , die Form  $\varphi$  genau dann die Differenzierbarkeitsklasse  $C^r$ , wenn für alle Tupel  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i_1 < \dots < i_k$  immer  $\varphi_{i_1 \dots i_k} \in C^r(U, \mathbb{R})$  gilt.

BEWEIS. Die Stetigkeit der Funktionen  $\varphi_{i_1 \dots i_k}$  folgt sofort aus der Definition. Offensichtlich bilden für jedes  $x \in U$  die linearen Abbildungen  $dx_1(x), \dots, dx_n(x)$  eine Basis für  $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  und es gilt  $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$ . Damit folgt aber aus dem Beweis von Teil (3) von Satz 2.6, dass in einem fixen Punkt  $x$  die Gleichung

$$\varphi(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \varphi_{i_1 \dots i_k}(x) (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(x)$$

gilt. Aber nach der Definition der Operationen mit Differentialformen bedeutet das genau, dass (2.6) gilt.

Ist  $\varphi$  eine  $C^r$ -Form, dann folgt nach Definition, dass jede der Funktionen  $\varphi_{i_1 \dots i_k}$  eine  $C^r$ -Funktion ist. Umgekehrt haben wir ja schon bemerkt, dass jede der Formen  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  Klasse  $C^\infty$  hat. Damit folgt die Umkehrung aber direkt aus Teil (1) von Satz 2.9.  $\square$

**BEISPIEL 2.9.** Auf jeder offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  erhalten wir einfach eine  $n$ -Form  $\text{vol} \in \Omega^n(U)$ . Wir definieren einfach  $\text{vol}(x)(v_1, \dots, v_n) := \det(v_1, \dots, v_n)$ , was sofort impliziert, dass  $\text{vol}$  beliebig oft differenzierbar ist. Aus Proposition 2.9 folgt sofort, dass  $\text{vol} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  gilt.

Mit den Ideen aus Beispiel 2.6 können wir nun jedem stetigen Vektorfeld  $Z$  auf  $U$  eine  $n - 1$ -Form  $\tilde{Z} \in \Omega^{n-1}(U)$  zuordnen. Dazu definieren wir einfach

$$\tilde{Z}(x, v_1, \dots, v_{n-1}) := \det(Z(x), v_1, \dots, v_{n-1}),$$

was offensichtlich stetig ist. Mit Hilfe von Proposition 2.9 können wir  $\tilde{Z}$  leicht explizit beschreiben. Im Grad  $n - 1$  müssen wir Indizes  $i_1, \dots, i_{n-1}$  mit  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n$  betrachten, also kommt unter diesen Indizes genau eine der Zahlen  $1, \dots, n$  nicht vor. Wir schreiben die entsprechende Komponente einer Form  $\varphi$  als  $\varphi_i$  also

$$\varphi = \sum_i \varphi_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Nach Definition gilt  $\tilde{Z}_i(x) = \det(Z(x), e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$ . Schreiben wir die Komponenten von  $Z$  als  $Z_i$ , dann gilt  $Z(x) = \sum_i Z_i(x) e_i$  und setzen wir das in die Formel ein, dann erhalten wir sofort  $\tilde{Z}_i(x) = (-1)^{i-1} Z_i(x)$ . Damit sehen wir insbesondere, dass  $\tilde{Z}$  die gleiche Differenzierbarkeitsklasse wie  $Z$  hat.

**2.10. Pullback von Differentialformen.** Der Pullback für 1-Formen aus Abschnitt 1.10 hat ein offensichtliches Analogon für  $k$ -Formen.

**DEFINITION 2.10.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -Funktion und  $V \subset \mathbb{R}^m$  eine offene Teilmenge mit  $F(U) \subset V$ .

Für  $\varphi \in \Omega^k(V)$  definieren wir den *Pullback*  $(F^*\varphi) : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  von  $\varphi$  längs  $F$  durch

$$(2.7) \quad (F^*\varphi)(x, v_1, \dots, v_k) := \varphi(F(x), DF(x)(v_1), \dots, DF(x)(v_k)).$$

Wir bemerken, dass für  $f \in \Omega^0(U) = C(U, \mathbb{R})$ , diese Definition einfach  $F^*f = f \circ F$  liefert. Die grundlegenden Eigenschaften dieser Operation sind wieder leicht abzuklären:

**PROPOSITION 2.10.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -Funktion und  $V \subset \mathbb{R}^m$  eine offene Teilmenge mit  $F(U) \subset V$ .

(1) Für  $\varphi \in \Omega^k(V)$  ist  $F^*\varphi \in \Omega^k(U)$ . Ist  $\varphi$  eine  $C^r$ - $k$ -Form und  $F$  eine  $C^{r+1}$ -Funktion, dann ist  $F^*\varphi$  eine  $C^r$ - $k$ -Form.

(2) Für  $\varphi, \psi \in \Omega^k(V)$  und  $f \in C(V, \mathbb{R})$  gilt  $F^*(\varphi + f\psi) = (F^*\varphi) + (F^*f)(F^*\psi)$ .

(3) Für  $\varphi \in \Omega^k(V)$  und  $\psi \in \Omega^\ell(V)$  gilt  $F^*(\varphi \wedge \psi) = (F^*\varphi) \wedge (F^*\psi)$ .

(4) Sei  $G : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine weitere  $C^1$ -Funktion und  $W \subset \mathbb{R}^p$  offen mit  $G(V) \subset W$ . Dann gilt für jede Form  $\omega \in \Omega^k(W)$  die Gleichung  $(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega) \in \Omega^k(U)$ .

**BEWEIS.** (1) Schreiben wir  $F$  in Komponenten als  $F = (F_1, \dots, F_m)$  und betrachten wir die Standardbasen von  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ , deren Elemente wir mit  $e_i$  bezeichnen. Dann

gilt  $DF(x)(e_i) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_i} e_j$ . Damit folgt aber

$$(F^*\varphi)(x, e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^m \frac{\partial F_{j_1}}{\partial x_{i_1}}(x) \dots \frac{\partial F_{j_k}}{\partial x_{i_k}}(x) \varphi(F(x), e_{j_1}, \dots, e_{j_k}).$$

Weil  $F$  eine  $C^1$ -Funktion ist, sind die partiellen Ableitungen alle stetig und nach Definition ist der letzte Term  $\varphi_{j_1 \dots j_k} \circ F$  und damit ebenfalls stetig. Somit ist aber  $(F^*\varphi)_{i_1 \dots i_k}$  eine Summe von Produkten stetiger Funktionen und damit selbst stetig. Ist  $F$  eine  $C^{r+1}$ -Funktion und  $\varphi$  eine  $C^r$ - $k$ -Form, dann sind alle beteiligten Funktionen  $C^r$ . Damit folgen beide Behauptungen aus Proposition 2.9.

(2) und (3) folgen wieder direkt aus den (punktweisen) Definitionen der Operationen. (4) folgt genau wie im Beweis von Satz 1.10 aus der Kettenregel.  $\square$

## Die äußere Ableitung

In Beispiel 1.10 haben wir gesehen, dass wir einer  $C^1$ -Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige 1-Form  $df \in \Omega^1(U)$  zuordnen können, die im wesentlichen nur die Ableitung von  $f$  ist. Diese Operation kann man auf Formen höheren Grades verallgemeinern und sie liefert eines der wichtigsten Werkzeuge der Analysis. Das liegt vor allem an den sehr starken Invarianzeigenschaften, die aus der (relativ einfachen) Definition nicht offensichtlich sind.

**2.11. Idee und Definition.** Die Idee zur Definition der äußeren Ableitung ist relativ einfach. Für eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  ist eine  $k$ -Form  $\varphi$  ja als Funktion  $\varphi : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  definiert. Ist  $\varphi$  stetig differenzierbar, dann kann man diese Funktion differenzieren und erhält für  $x \in U$  eine lineare Abbildung  $D\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ . Damit ist für  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $D\varphi(x)(v) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ , also eine  $k$ -lineare Abbildung  $(\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$ , also können wir  $D\varphi(x)(v)(v_1, \dots, v_k)$  für  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  bilden. Betrachten wir nun  $v$  und die  $v_i$  gleichzeitig als Variable, dann ist

$$(v, v_1, \dots, v_k) \mapsto D\varphi(x)(v)(v_1, \dots, v_k)$$

eine  $(k+1)$ -lineare Abbildung. Man kann diese alternierend machen, indem man über Permutationen der Eintragungen summiert, so wie wir das schon kennen gelernt haben.

Diese Idee kann man jetzt noch in zwei Punkten etwas vereinfachen. Einerseits können wir beobachten, dass wir  $\varphi$  nicht als Funktion in den Vektorraum  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  differenzieren müssen, sondern erst Vektoren einsetzen und dann differenzieren können. (Das funktioniert, weil die Auswertung in einem fixen Tupel von Vektoren eine lineare Abbildung ist, später werden wir da aber vorsichtiger sein müssen.) Andererseits, kann man (wie wir in den Beweisen sehen werden) eine  $(k+1)$ -lineare Abbildung, die schon in  $k$  Variablen alternierend ist, auf einfachere Art alternierend machen. Das motiviert dann folgende Definition.

**DEFINITION 2.11.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $k \in \{0, \dots, n\}$  und  $\varphi \in \Omega^k(U)$  eine stetig differenzierbare  $k$ -Form. Dann definieren wir die *äußere Ableitung*  $d\varphi$  von  $\varphi$  als Funktion von  $U$  in den Raum der Funktionen  $(\mathbb{R}^n)^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$(2.8) \quad d\varphi(x)(v_0, \dots, v_k) := \sum_{i=0}^k (-1)^i D(\varphi(\_, v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k))(x)(v_i).$$

Man setzt also im  $i$ ten Summanden alle Vektoren außer  $v_i$  (in der "richtigen" Reihenfolge) in  $\varphi$  ein, betrachtet die Funktion  $y \mapsto \varphi(y, v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k)$ , die nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist, und differenziert sie im Punkt  $x$  in Richtung  $v_i$ . Wir bemerken auch, dass für  $k=0$  die Funktion  $\varphi$  einfach reellwertig und  $d\varphi \in \Omega^1(U)$

genau die 1-Form ist, die wir in Beispiel 1.10 konstruiert haben. Die grundlegendsten Eigenschaften dieser Operation sind nun leicht zu verifizieren:

LEMMA 2.11. Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $k \in \{0, \dots, n\}$  und  $\varphi, \psi \in \Omega^k(U)$  stetig differenzierbare  $k$ -Formen  $t \in \mathbb{R}$  und  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ . Dann gilt

- (1)  $d\varphi \in \Omega^{k+1}(U)$ . Ist  $\varphi$  eine  $C^r$ - $k$ -Form für  $r \geq 2$ , dann ist  $d\varphi$  eine  $C^{r-1}$ -Form.
- (2)  $d(\varphi + t\psi) = d\varphi + td\psi$ , also ist  $d$  eine lineare Abbildung.
- (3)  $d(f\varphi) = df \wedge \varphi + fd\varphi$

BEWEIS. (1) Setzen wir in der Definition in (2.8) in der  $j$ ten Variable statt  $v_j$  eine Linearkombination  $v_j + t\tilde{v}_j$  ein. Dann erhalten wir in allen Summanden mit  $i \neq j$  einfach

$$\varphi(-, \dots, v_j + t\tilde{v}_j, \dots) = \varphi(-, \dots, v_j, \dots) + t\varphi(-, \dots, \tilde{v}_j, \dots)$$

und damit

$$D(\varphi(-, \dots, v_j + t\tilde{v}_j, \dots))(x)(v_i) = D(\varphi(-, \dots, v_j, \dots))(x)(v_i) + tD(\varphi(-, \dots, \tilde{v}_j, \dots))(x)(v_i).$$

Im Term mit  $i = j$  erhalten wir

$$D(\varphi(\dots))(x)(v_j + t\tilde{v}_j) = D(\varphi(\dots))(x)(v_j) + tD(\varphi(\dots))(x)(\tilde{v}_j)$$

Damit ist  $d\varphi(x)$  eine  $(k+1)$ -lineare Abbildung für jedes  $x \in U$ . Nehmen wir an, dass  $v_j = v_\ell = v$  für  $j < \ell$  gilt. Dann ist  $\varphi(-, v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{\ell-1}, v, v_{\ell+1}, \dots, v_k) = 0$  wenn  $i \neq j$  und  $i \neq \ell$  gilt, weil dann zwei gleiche Vektoren in  $\varphi$  eingesetzt werden. In den Termen für  $i = j$  und  $i = \ell$  erhalten wir

$$\begin{aligned} & (-1)^j D(\varphi(-, v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{\ell-1}, v, v_{\ell+1}, \dots, v_k))(x)(v) \\ & (-1)^\ell D(\varphi(-, v_0, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \dots, v_k))(x)(v). \end{aligned}$$

Tauscht man aber im oberen Eintrag den Vektor  $v$  durch die  $\ell - j - 1$  Einträge  $v_{j+1}, \dots, v_{\ell-1}$  durch, dann liefert das ein Vorzeichen  $(-1)^{\ell-j-1}$ , also sehen wir, dass sich die beiden Terme wegheben. Damit ist  $d\varphi(x)$  alternierend. Weil  $\varphi$  eine  $C^1$ - $k$ -Form ist, ist jeder der Summanden in der Definition von  $d\varphi(v_0, \dots, v_k)$  in (2.8) eine stetige Funktion in  $x$ . Hat  $\varphi$  Differenzierbarkeitsklasse  $C^r$ , dann liegen alle diese Funktionen in  $C^{r-1}(U, \mathbb{R})$ , also ist der Beweis von (1) vollständig.

(2) Nach Definition gilt für  $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}^n$  und  $y \in U$  immer

$$(\varphi + t\psi)(y, w_1, \dots, w_k) = \varphi(y, w_1, \dots, w_k) + t\psi(y, w_1, \dots, w_k).$$

Wendet man das auf die Summanden in (2.8) an und benutzt dann  $D(g+th) = D(g) + tD(h)$  für Funktionen  $g, h$ , dann folgt die Behauptung analog wie in (1).

(3) Für  $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}^n$  und  $y \in U$  erhalten wir

$$(f\varphi)(y, w_1, \dots, w_k) = f(y)\varphi(y, w_1, \dots, w_k)$$

und differenzieren liefert nach der Produktregel

$$D(f\varphi(-, w_1, \dots, w_k))(x)(v) = Df(x)(v)\varphi(x, w_1, \dots, w_k) + f(x)D(\varphi(-, w_1, \dots, w_k))(x)(v).$$

Wendet man das auf die einzelnen Summanden in (2.8) an, dann addieren sich die Terme zweiten Terme einfach zu  $(fd\varphi)(x)(v_0, \dots, v_k)$  auf. In den ersten Termen können wir  $Df(x)(v) = df(x, v)$  einsetzen und damit bleibt zu zeigen, dass

$$(df \wedge \varphi)(x, v_0, \dots, v_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i df(x, v_i)\varphi(x, v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

gilt. Nach Definition ist die linke Seite gerade

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \text{sgn}(\sigma) df(x, v_{\sigma_0})\varphi(x, v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}).$$

Aber für eine Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}$  mit  $\sigma_0 = i$  kann man, weil  $\varphi$  alternierend ist, die Eintragungen von  $\varphi$  umordnen um  $\varphi(x, v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k)$  zu erhalten. Das liefert ein Vorzeichen  $a = \pm 1$  sodass  $\text{sgn}(\sigma) = a(-1)^i$  gilt. Und natürlich gibt es genau  $k!$  Permutationen  $\sigma$  von  $\{0, \dots, k\}$ , die  $\sigma_0 = i$  erfüllen, was den Vorfaktor  $\frac{1}{k!}$  eliminiert.  $\square$

**2.12. Eigenschaften der äußeren Ableitung.** Bevor wir die weiteren Eigenschaften abklären, vereinfachen wir unsere Notation etwas vereinfachen. Wir bezeichnen mit  $I$  eine Multi-Index  $(i_1, \dots, i_k)$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  und setzen dann  $|I| = k$ . Dann definieren wir  $dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  und für  $\varphi \in \Omega^k(U)$  setzen wir  $\varphi_I := \varphi_{i_1 \dots i_k}$ . Schließlich schreiben wir  $\sum_{|I|=k}$  für  $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ . Damit wird die Darstellung für  $k$ -Formen aus Formel (2.6) aus Proposition 2.9 einfach zu  $\varphi = \sum_{|I|=k} \varphi_I dx_I$ . Damit können wir nun die wichtigsten Eigenschaften der äußeren Ableitung beweisen und eine explizite Formel angeben.

**SATZ 2.12.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und seien  $\varphi \in \Omega^k(U)$ ,  $\psi \in \Omega^\ell(U)$   $C^r$ -Differentialformen mit  $r \geq 1$ . Dann gilt*

- (1)  *$d$  erfüllt die Produktregel  $d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge d\psi$ .*
- (2) *Ist  $r \geq 2$  und damit  $d(d\varphi)$  definiert, dann gilt  $d(d\varphi) = 0$ .*
- (3) *Für  $\varphi = \sum_{|I|=k} \varphi_I dx_I$  gilt*

$$d\varphi = \sum_{|I|=k} ((d\varphi_I) \wedge dx_I) = \sum_{|I|=k} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \right).$$

- (4) *Ist  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^2$ -Funktion mit  $F(V) \subset U$  dann gilt  $d(F^*\varphi) = F^*(d\varphi) \in \Omega^k(V)$ .*

**BEWEIS.** (3) Betrachten wir zunächst die Form  $dx_I$  für einen Multi-Index  $I$  mit  $|I| = k$ . Dann ist nach Definition die Funktion  $dx_I(x, v_1, \dots, v_k)$  für beliebige Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  konstant in  $x$ . Damit folgt aber  $d(dx_I) = 0$  sofort aus Definition 2.11. Nach Teil (3) von Lemma 2.11 folgt daraus aber  $d(\varphi_I dx_I) = d\varphi_I \wedge dx_I$  und wegen Teil (2) dieses Lemmas folgt daraus die erste Formel für  $d\varphi$ . Die zweite Formel folgt dann direkt indem man  $d\varphi_I$  mit Hilfe von Formel (1.5) aus Abschnitt 1.10 berechnet.

(1) Betrachten wir zunächst den Fall, dass  $\varphi = f dx_I$  und  $\psi = g dx_J$  für fixe Multi-Indices  $I$  und  $J$  gilt. Dann ist einerseits  $\varphi \wedge \psi = f g dx_I \wedge dx_J$ . Andererseits gilt nach Teil (3)  $d\varphi = df \wedge dx_I$  und  $d\psi = dg \wedge dx_J$ , also

$$d\varphi \wedge \psi = df \wedge dx_I \wedge g dx_J = g df \wedge dx_I \wedge dx_J$$

und  $\varphi \wedge d\psi = f dx_I \wedge dg \wedge dx_J = (-1)^k f dg \wedge dx_I \wedge dx_J$ . Kommt ein Index  $i$  sowohl in  $I$  als auch in  $J$  vor, dann ist  $dx_I \wedge dx_J = 0$  und damit sind alle Terme in der behaupteten Formel gleich 0. Enthalten  $I$  und  $J$  keinen gemeinsamen Index, dann sei  $K$  der Multi-Index, indem die Indizes von  $I$  und  $J$  in der richtigen Reihenfolge vorkommen. Natürlich ist dann  $|K| = k + \ell$  und  $dx_I \wedge dx_J = \pm dx_K$ . Damit folgt aber  $\varphi \wedge \psi = \pm f g dx_K$  und somit  $d(\varphi \wedge \psi) = \pm d(fg) \wedge dx_K$  nach Teil (3). Nach der Produktregel für reellwertige Funktionen gilt  $d(fg) = g df + f dg$  also erhalten wir

$$d(\varphi \wedge \psi) = (g df + f dg) \wedge dx_I \wedge dx_J.$$

Damit gilt die behauptete Formel in diesem Fall. Wegen der Bilinearität des Hackprodukts (Teil (3) von Satz 2.9) und der Linearität von  $d$  (Teil (2) von Lemma 2.11) folgt damit die Formel auch für  $\varphi = \sum_I \varphi_I dx_I$  und  $\psi = \sum_J \psi_J dx_J$ , also für beliebige Formen.

(2) Schreiben wir  $\varphi = \sum_I \varphi_I dx_I$ , dann gilt nach Teil (3)  $d\varphi = \sum_I d\varphi_I \wedge dx_I$ . Wenden wir darauf noch einmal  $d$  an, dann erhalten wir  $\sum_I d(d\varphi_I \wedge dx_I)$  und wir können in jedem

Summanden (1) anwenden. Nachdem wir schon wissen, dass  $d(dx_I) = 0$  ist, genügt es also zu zeigen, dass  $d(df) = 0$  für jedes  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$  gilt. Hier erhalten wir aber  $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  und damit nach der zweiten Formel in Teil (3)

$$d(df) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i$$

Für  $i = j$  ist  $dx_j \wedge dx_i = 0$ , also fallen diese Terme weg, für  $i \neq j$  ist  $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$  also heben sich die entsprechenden Terme wegen der Symmetrie der zweiten partiellen Ableitung weg und die Behauptung folgt.

(4) Für  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  sagt Teil (1) von Proposition 1.10 genau, dass  $F^*df = d(F^*f)$  gilt. Betrachten wir die Koordinatenfunktionen  $x_i$ , dann sehen wir, dass  $F^*dx_i = d(F^*x_i) = d(x_i \circ F)$  gilt, also erhalten wir insbesondere  $0 = d(F^*dx_i)$  aus Teil (2). Nach Teil (3) von Proposition 2.10 ist für jeden Multi-Index  $I$  der Pullback  $F^*dx_I$  ein Hackprodukt solcher Formen, also folgt  $d(F^*dx_I) = 0$  aus Teil (1). Für  $\varphi = \sum_I \varphi_I dx_I$  erhalten wir dann  $F^*\varphi = \sum_I (F^*\varphi_I)(F^*dx_I)$  und damit nach Teil (3) von Lemma 2.11  $d(F^*\varphi) = \sum_I d(F^*\varphi_I) \wedge (F^*dx_I) = \sum_I (F^*d\varphi_i) \wedge F^*dx_I = F^*(\sum_I d\varphi_i \wedge dx_I) = F^*(d\varphi)$ , wobei wir für die letzte Gleichheit wieder Proposition 2.10 benutzt haben.  $\square$

**BEISPIEL 2.12.** (1) In dem Beweis hat sich schon ein Zusammenhang mit dem Begriff von geschlossenen 1-Formen aus Abschnitt 1.15 abgezeichnet. Für eine stetig differenzierbare 1-Form  $\alpha \in \Omega^1(U)$ , die wir als  $\sum_i \alpha_i dx_i$  schreiben, können wir die äußere Ableitung leicht explizit ausrechnen:

$$d\alpha = \sum_i d\alpha_i \wedge dx_i = \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i < j} \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Insbesondere sehen wir, dass  $\alpha$  genau dann geschlossen im Sinne von Definition 1.16 ist, wenn  $d\alpha = 0$  gilt. Und natürlich ist das wegen Teil (2) von Satz 2.12 eine notwendige Bedingung dafür, dass  $\alpha = df$  für eine  $C^2$ -Funktion  $f$  gelten kann.

Im Spezialfall  $n = 3$  können wir sowohl Elemente von  $\Omega^1(U)$  als auch Elemente von  $\Omega^2(U)$  mit Vektorfeldern identifizieren. Für ein Vektorfeld  $Z$  mit Komponenten  $Z_i$  ist die zugehörige 1-Form einfach durch  $\alpha_Z(x, v) = \langle Z(x), v \rangle$  definiert, siehe Abschnitt 1.10 und Beispiel 2.6. Damit erhält man einfach  $\alpha_Z = \sum_i Z_i dx_i$ . Für die 2-Formen kann man die Identifikation aus Beispiel 2.9 benutzen. Damit erhält man aber sofort, dass  $d\alpha_Z = \text{rot}(Z)$  gilt, also entspricht die äußere Ableitung  $d : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U)$  genau der Rotation von Vektorfeldern. Die Gleichung  $d \circ d = 0$  sagt in diesem Bild genau, dass  $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$  für jede  $C^2$ -Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  gilt, also dass Gradientenfelder wirbelfrei sind.

(2) Für  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen betrachten wir  $\Omega^{n-1}(U)$ . Ein Multi-Index  $I$  mit  $|I| = n - 1$  ist von der Form  $I = \hat{i} := (1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n)$  für genau eine der Zahlen  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Schreiben wir dementsprechend  $dx_{\hat{i}}$  für die Koordinaten  $(n - 1)$ -Formen, dann können wir  $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i dx_{\hat{i}}$  schreiben. Für die äußere Ableitung erhalten wir damit

$$d\varphi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{\hat{i}}.$$

Das Hackprodukt ist aber dann für  $i \neq j$  gleich Null und für  $i = j$  gerade  $(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Damit erhalten wir insgesamt

$$d\varphi = \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Mit Hilfe von Beispiel 2.9 erlaubt diese Operation eine Interpretation in Termen der Vektoranalysis. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $Z$  auf  $U$  betrachten wir die Form  $\tilde{Z} \in \Omega^{n-1}(U)$  aus Beispiel 2.9. Dann zeigt unsere Rechnung sofort, dass  $d\tilde{Z} = \operatorname{div}(Z) \operatorname{vol}$  gilt, wobei  $\operatorname{div}(Z) = \sum_i \frac{\partial Z_i}{\partial x_i}$  die *Divergenz* von  $Z$  ist, die klassisch einfach als Funktion interpretiert wird.

Im Fall  $n = 3$  erhalten wir so genau  $d : \Omega^2(U) \rightarrow \Omega^3(U)$  und  $d \circ d = 0$  sagt in diesem Fall, dass für jedes  $C^2$ -Vektorfeld  $Z$  die Gleichung  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(Z)) = 0$  gilt.

**2.13. Das Lemma von Poincaré.** Zum Abschluss unserer Diskussion der äußeren Ableitung besprechen wir eine Verallgemeinerung von Proposition 1.16, was einen der entscheidenden Schritte in Richtung auf die topologische Bedeutung der hier entwickelten Konzepte darstellt.

**DEFINITION 2.13.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $\varphi \in \Omega^k(U)$  eine  $C^1$ -Form. Dann heißt  $\varphi$  *geschlossen*, wenn  $d\varphi = 0$  gilt und *exakt* wenn es eine Form  $\psi \in \Omega^{k-1}(U)$  der Klasse  $C^1$  gibt, sodass  $\varphi = d\psi$  gilt.

Teil (2) von Satz 2.12 sagt somit gerade, dass viele exakte Formen geschlossen sind und das Lemma von Poincaré studiert die Umkehrung, also ob geschlossene Formen exakt sind. Wir beginnen mit einem technischen Hilfssatz der schon Erinnerungen an Homotopie und ähnliche Konzepte wecken sollte.

**LEMMA 2.13.** *Betrachten wir  $\mathbb{R}^{n+1}$  als  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  offen, sodass  $U \times [0, 1] \subset V$  gilt und für  $t \in [0, 1]$  sei  $i_t : U \rightarrow V$  definiert durch  $i_t(x) = (x, t)$ . Dann gibt es für jede geschlossene  $C^1$ -Form  $\varphi \in \Omega^k(V)$  eine  $C^1$ -Form  $\psi \in \Omega^{k-1}(U)$ , sodass  $(i_1)^*\varphi - (i_0)^*\varphi = d\psi \in \Omega^k(U)$  gilt.*

**BEWEIS.** Offensichtlich spielt in unseren Überlegungen die letzte Koordinate auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  eine besondere Rolle, also bezeichnen wir die Koordinaten mit  $x_1, \dots, x_n, t$ . Dementsprechend werden wir in diesem Beweis nur Multi-Indizes verwenden, die Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  sind (und die  $t$ -Koordinate extra behandeln). In dieser Notation können wir die Koordinatenformen in  $\Omega^k(V)$  als  $dx_I$  mit  $|I| = k$  und als  $dx_J \wedge dt$  mit  $|J| = k - 1$  schreiben. Offensichtlich gilt für die Ableitung  $Di_t(x)(v) = (v, 0)$  für alle  $x, v \in \mathbb{R}^n$  und daraus folgt sofort, dass  $(i_t)^*dx_i = dx_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $(i_t)^*dt = 0$  gilt. Schreiben wir unsere Form als  $\varphi = \sum_{|I|=k} f_I dx_I + \sum_{|J|=k-1} g_J dx_J \wedge dt$ , dann gilt folglich  $(i_t)^*\varphi(x) = \sum_{|I|=k} f_I(x, t) dx_I$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

Nun können wir die Bedingung  $d\varphi = 0$  mit Hilfe von Teil (3) von Satz 2.12 analysieren, wobei die partiellen Ableitungen von  $f_I$  und  $g_J$  auftreten. Und natürlich können wir wieder die Teile sammeln, die einen Faktor  $dt$  enthalten. Das liefert

$$0 = \sum_{|I|=k} \left( \frac{\partial f_I}{\partial t} dt \wedge dx_I + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \right) + \sum_{|J|=k-1} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial g_J}{\partial x_\ell} dx_\ell \wedge dx_J \wedge dt =$$

$$\left( \sum_{|I|=k} (-1)^k \frac{\partial f_I}{\partial t} dx_I + \sum_{|J|=k-1} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial g_J}{\partial x_\ell} dx_\ell \wedge dx_J \right) \wedge dt + \text{Terme ohne } dt.$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung einer Differentialform in Termen von Koordinatenformen folgt damit, dass

$$(2.9) \quad \sum_{|I|=k} \frac{\partial f_I}{\partial t} dx_I = (-1)^{k-1} \sum_{|J|=k-1} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial g_J}{\partial x_\ell} dx_\ell \wedge dx_J$$

gelten muss. Für die Terme  $dx_\ell \wedge dx_J$  gibt es zwei Möglichkeiten: Kommt  $\ell$  in  $J$  vor, dann ist  $dx_\ell \wedge dx_J = 0$ . Wenn nicht, dann definieren wir  $L := \ell \cup J$  als den Multi-Index, der alle Indizes aus  $J$  und  $\ell$  in aufsteigender Reihenfolge enthält. Dann muss  $dx_\ell \wedge dx_J = \pm dx_L$  gelten (je nachdem wo  $\ell$  in  $J$  "hineinpasst") und wir bezeichnen das Vorzeichen mit  $\varepsilon_{\ell,J} \in \{1, -1\}$ . Damit kann man nun die rechte Seite in (2.9) auch als Linearkombination der Koordinatenformen schreiben und die Eindeutigkeit dieser Darstellung liefert für jedes  $I$  mit  $|I| = k$  die Gleichung

$$(2.10) \quad \frac{\partial f_I}{\partial t} = (-1)^{k-1} \sum_{J, \ell: \ell \cup J = I} \varepsilon_{\ell,J} \frac{\partial g_J}{\partial x_\ell}.$$

Nun definieren wir  $\psi \in \Omega^{k-1}(U)$  durch

$$h_J(x) := (-1)^{k-1} \int_0^1 g_J(x, t) dt \quad \psi = \sum_{|J|=k-1} h_J dx_J.$$

Nach Voraussetzung ist jedes  $g_J$  eine  $C^1$ -Funktion, also ist auch  $h$  als Parameterintegral eine  $C^1$ -Funktion mit partiellen Ableitung

$$(2.11) \quad \frac{\partial h_J}{\partial x_\ell} = (-1)^{k-1} \int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_\ell}(x, t) dt.$$

Schreiben wir nun  $d\psi = \sum_{J, \ell} \frac{\partial h_J}{\partial x_\ell} dx_\ell \wedge dx_J$ , dann kann man für die partiellen Ableitungen einsetzen. Wie oben ist dann der Koeffizient von  $dx_I$  in dieser Darstellung genau  $\sum_{J, \ell: \ell \cup J = I} \varepsilon_{\ell,J} \frac{\partial h_J}{\partial x_\ell}$ . Setzt man aus (2.11) ein, dann kann man die Summe in das Integral ziehen und erhält dann für den Koeffizienten von  $dx_I$  in  $d\psi$ :

$$(-1)^{k-1} \int_0^1 \sum_{J, \ell: \ell \cup J = I} \varepsilon_{\ell,J} \frac{\partial g_J}{\partial x_\ell}(x, t) dt = \int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t}(x, t) dt = f_I(x, 1) - f_I(x, 0),$$

wobei wir im vorletzten Schritt (2.10) benutzt haben. Das liefert aber genau die behauptete Gleichung  $d\psi = (i_1)^*\varphi - (i_0)^*\varphi$ .  $\square$

Damit können wir nun das Lemma von Poincaré beweisen.

**SATZ 2.13** (Lemma von Poincaré). *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, die sternförmig um einen Punkt  $x_0 \in U$  ist und sei  $\varphi \in \Omega^k(U)$  eine geschlossene  $C^1$ -Form. Dann ist  $\varphi$  exakt.*

**BEWEIS.** Sei  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben durch  $F(x, t) := tx + (1-t)x_0$ . Dann ist  $F$  offensichtlich eine  $C^\infty$ -Funktion und damit stetig, also ist  $V := F^{-1}(U)$  offen in  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Natürlich ist dann auch  $F : V \rightarrow U$  eine  $C^\infty$ -Funktion. Für  $x \in U$  und  $t \in [0, 1]$  liegt  $F(x, t)$  auf der Verbindungsstrecke zwischen  $x_0$  und  $x$  und damit in  $U$ , also ist  $U \times [0, 1] \subset V$ . Nach Definition gilt  $F(x, 0) = x_0$  und  $F(x, 1) = x$ , also erfüllen die Funktion  $i_t : U \rightarrow V$  aus Lemma 2.13  $F \circ i_1 = \text{id}_U$  und  $F \circ i_0 = x_0$ , die konstante Funktion. Betrachten wir nun  $F^*\varphi \in \Omega^k(V)$  dann ist nach Satz 2.12  $dF^*\varphi = F^*d\varphi = 0$ , also ist  $F^*\varphi$  geschlossen. Nach Lemma 2.13 gibt es somit eine  $C^1$ -Form  $\psi \in \Omega^{k-1}(U)$ , sodass  $(i_1)^*F^*\varphi - (i_0)^*F^*\varphi = d\psi$  gilt. Aber nach Proposition 2.10 ist  $(i_t)^*F^*\varphi = (F \circ i_t)^*\varphi$  und damit  $(i_1)^*F^*\varphi = (\text{id}_U)^*\varphi = \varphi$ , während  $(i_0)^*F^*\varphi = (F \circ i_0)^*\varphi = 0$  gilt, weil die konstante Funktion  $F \circ i_0$  Ableitung 0 hat. Also erhalten wir  $\varphi = d\psi$  wie behauptet.  $\square$



## Integration über Teilmannigfaltigkeiten und Satz von Stokes

Wir kommen nun zur Frage der Integration über  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$ . Es zeigt sich recht schnell, dass  $k$ -Formen schon fast die richtigen Objekte für einen Integrationsbegriff sind, der invariant unter Diffeomorphismen ist. Man muss allerdings noch ein technisches Problem lösen, indem man einen Begriff von orientierten Teilmannigfaltigkeiten einführt. In diesem Setting erhält man dann eine erste Version des Satzes von Stokes, nämlich dass Integrale über exakte Differentialformen automatisch verschwinden. Zusammen mit dem Lemma von Poincaré aus Abschnitt 2.13 führt das zu ersten topologischen Anwendungen der Integration.

Für eine bessere Version des Satzes von Stokes muss man den Begriffsapparat noch etwas erweitern, nämlich zu Teilmannigfaltigkeiten mit Rand. Das ist technisch nicht sehr aufwändig und konzeptuell eigentlich recht naheliegend. Insbesondere ist der Rand einer Teilmannigfaltigkeit mit Rand selbst eine Teilmannigfaltigkeit (ohne Rand). Die allgemeine Version des Satzes von Stokes sagt dann, dass man ein Integral einer exakten Form auf einer Mannigfaltigkeit mit Rand als ein Integral über den Rand berechnen kann. Diese Version des Satzes hat breite Anwendungen, sowohl in der Physik als auch auf geometrische und topologische Fragen.

### Integration von Differentialformen

**3.1. Motivation.** Wir bemerken zunächst, dass auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  nur eine Koordinaten  $n$ -Form gibt, nämlich  $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ . Dementsprechend ist eine stetige  $n$ -Form  $\varphi \in \Omega^n(U)$  durch eine einzelne stetige Funktion  $f = \varphi_{1\dots n} : U \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt, also  $\varphi = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ . Nach Konstruktion ist  $f(x) = \varphi(x)(e_1, \dots, e_n)$  und  $\varphi(x)(v_1, \dots, v_n) = f(x) \det(v_1, \dots, v_n)$ , was es auch leicht macht, das Verhalten dieser Funktion unter Diffeomorphismen zu bestimmen: Ist  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : V \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus dann gilt

$$\begin{aligned} (\Phi^* \varphi)(y)(v_1, \dots, v_n) &= \varphi(\Phi(y))(D\Phi(y)(v_1), \dots, D\Phi(y)(v_n)) = \\ &f(\Phi(y)) \det(D\Phi(y)(v_1), \dots, D\Phi(y)(v_n)) = f(\Phi(y)) \det(D\Phi(y)) \det(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der linearen Algebra bekannt ist. Damit ist aber die Funktion zu  $\Phi^* \varphi$  einfach  $(f \circ \Phi) \det(D\Phi)$  gegeben. Für eine kompakte Teilmenge  $K \subset V$  ist auch  $\Phi(K) \subset U$  kompakt und nach dem Transformationssatz für Mehrfachintegrale gilt  $\int_{\Phi(K)} f dy = \int_K (f \circ \Phi) |\det(D\Phi)| dx$ .

Da  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $D\Phi(y)$  invertierbar und damit  $\det(D\Phi(y)) \neq 0$  für alle  $y \in V$  und natürlich kann die stetige Funktion  $\det(D\Phi(y))$  auf zusammenhängenden Teilmengen von  $V$  das Vorzeichen nicht wechseln. Wenn wir also annehmen, dass  $U$  (und damit auch  $V$ ) zusammenhängend ist, dann gilt  $|\det(D\Phi)| = \pm \det(D\Phi)$ . Wenn wir also in diesem Fall für eine kompakte Teilmenge  $\tilde{K} \subset U$  das Integral einer  $n$ -Form durch  $\int_{\tilde{K}} \varphi := \int_{\tilde{K}} f(x) dx$  definieren, dann erhalten wir  $\int_K \Phi^* \varphi = \pm \int_{\Phi(K)} \varphi$ . Wenn man also das übliche Integral für Funktionen als ein Integral über  $n$ -Formen interpretiert, dann

ist es schon beinahe invariant unter Diffeomorphismen. Es bleibt nur das Problem mit dem Vorzeichen, das man über den Begriff von Orientierungen in den Griff bekommt.

Teile dieser Ideen übertragen sich leicht auf Teilmannigfaltigkeiten. Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit,  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge mit  $M \subset U$  und  $\varphi \in \Omega^k(U)$  eine stetige  $k$ -Form auf  $U$ . Dann ist für jeden Punkt  $x \in M$  der Tangentialraum  $T_x M$  ein  $k$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  und wir können die  $k$ -lineare Abbildung  $\varphi(x) : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  zu einer Abbildung  $(T_x M)^k \rightarrow \mathbb{R}$  einschränken, die natürlich  $k$ -linear und alternierend ist. Diese Abbildung ist somit durch ihre Werte auf einer Basis von  $T_x M$  vollständig bestimmt und wir wissen schon, dass jede lokale Parametrisierung für  $M$  so eine Basis liefert. Daraus folgt dann leicht, dass im Bereich so einer Parametrisierung die Form  $\varphi$  durch eine einzelne Funktion beschrieben wird. Aus der linearen Algebra ist bekannt, was bei einem Basiswechsel passiert und das kann man verwendet, um die Funktionen zu verschiedenen Parametrisierungen miteinander zu vergleichen. Damit ist man schon sehr nahe an einem wohldefinierten Integral über kompakte Teilmengen, die im Bild einer solchen Parametrisierung liegen. Neben der Frage des Vorzeichens bleibt dann noch die Frage, wie man über ganz  $M$  integrieren kann. Diese löst man, indem man die Form  $\varphi$  in "kleine Teile" zerlegt.

**3.2. Orientierbarkeit und Orientierungen.** Aus der linearen Algebra ist der Begriff einer Orientierung auf einem reellen  $k$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  bekannt. Man betrachtet dazu geordnete Basen von  $V$ . Sind  $v_1, \dots, v_k$  und  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k$  solche Basen, dann erhält man eine  $k \times k$ -Matrix  $A = (a_{ij})$ , die durch  $\tilde{v}_i = \sum_j a_{ij} v_j$  charakterisiert ist. Diese Matrix ist invertierbar, also ist  $\det(A) \neq 0$  und man nennt die Basen *gleich orientiert*, wenn  $\det(A) > 0$  ist und *entgegengesetzt orientiert*, wenn  $\det(A) < 0$  gilt. Gleich orientiert zu sein definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geordneten Basen von  $V$  mit zwei Äquivalenzklassen und eine *Orientierung* auf  $V$  ist durch die Wahl einer dieser beiden Äquivalenzklassen gegeben. Die Basen in dieser Klasse heißen dann *positiv orientiert*, die in der anderen Klasse *negativ orientiert*. Die *Standard-Orientierung* auf  $\mathbb{R}^k$  ist durch die Äquivalenzklasse der Standardbasis  $e_1, \dots, e_k$  gegeben.

Seien nun  $V$  und  $W$  zwei orientierte Vektorräume der gleichen Dimension  $k$  und sei  $f : V \rightarrow W$  ein linearer Isomorphismus. Dann ist für jede Basis  $v_1, \dots, v_k$  für  $V$ ,  $f(v_1), \dots, f(v_k)$  eine Basis für  $W$ . Beginnt man mit gleich orientierten Basen für  $V$ , dann erhält man gleich orientierte Basen für  $W$ . Also sind für positiv orientierte Basen von  $V$  die Bilder unter  $f$  entweder alle positiv orientiert oder alle negativ orientiert. Im ersten Fall nennen wir  $f$  *orientierungstreu* oder *orientierungserhaltend*, im zweiten Fall *orientierungsvertauschend*.

Ist nun  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit, dann wollen wir versuchen, die Tangentialräume  $T_x M$  von  $M$  so zu orientieren, dass die Orientierungen in "nahen" Punkten miteinander verträglich sind. Das lässt sich leicht mit lokalen Parametrisierungen präzise machen. Aus Satz 2.3 wissen wir, dass es rund um jeden Punkt  $x \in M$  lokale Parametrisierungen gibt, also eine offene Teilmenge  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \in V := \tilde{V} \cap M$ , eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^k$  und eine  $C^r$ -Abbildung  $u : U \rightarrow \tilde{V}$ , sodass  $u$  einen Homöomorphismus  $U \rightarrow V$  definiert und  $Du(z) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  für alle  $z \in U$  injektiv ist. Wir wissen auch, dass das Bild  $\text{Im}(Du(z))$  genau der Tangentialraum  $T_{u(z)} M \subset \mathbb{R}^n$  ist. Damit bilden aber die Vektoren  $Du(z)(e_i)$  für  $i = 1, \dots, k$  eine Basis für den Tangentialraum  $T_{u(z)} M$ . Diese Bilder sind aber genau die Werte der partiellen Ableitungen von  $u$ , die wir mit  $\partial_1 u, \dots, \partial_k u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezeichnen. Wir sehen also, dass für jeden Punkt  $z \in U$  die Vektoren  $\partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z) \in \mathbb{R}^n$  eine Basis für den Teilraum  $T_{u(z)} M \subset \mathbb{R}^n$  bilden.

DEFINITION 3.2. Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Eine *Orientierung* von  $M$  ist durch eine Wahl einer Orientierung auf jedem der Tangentialräume  $T_x M$  an  $M$  gegeben, die *konsistent* in folgendem Sinne ist: Für jeden Punkt  $x \in M$  gibt es eine lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  mit  $x \in u(U)$ , sodass die Basen  $\partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z)$  für alle  $z \in U$  die gleiche Orientierung haben, also entweder alle positiv orientiert oder alle negativ orientiert sind.

(2) Die Teilmannigfaltigkeit  $M$  heißt *orientierbar*, wenn Sie eine Orientierung besitzt und *orientiert*, wenn man eine Orientierung gewählt hat.

(3) Ist  $M$  orientiert, dann nennt man eine lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  *positiv orientiert*, wenn für jedes  $z \in U$  die Basis  $\partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z)$  von  $T_{u(z)} M$  positiv orientiert ist.

(4) Sind  $M$  und  $N$  orientierte Teilmannigfaltigkeiten der gleichen Dimension  $k$ , dann nennen wir einen Diffeomorphismus  $\Phi : M \rightarrow N$  *orientierungstreu* genau dann, wenn für jedes  $x \in M$  die lineare Abbildung  $T_x \Phi : T_x M \rightarrow T_{\Phi(x)} N$  orientierungstreu ist und *orientierungsvertauschend*, wenn alle diese Tangentialabbildungen orientierungsvertauschend sind.

Einige grundlegende Eigenschaften lassen sich nun leicht abklären. Dazu erinnern wir uns daran, dass eine offene Teilmenge einer Teilmannigfaltigkeit selbst eine Teilmannigfaltigkeit ist. Damit ist es kein Problem über Orientierbarkeit und Orientierungen auf offenen Teilmengen einer Teilmannigfaltigkeit zu sprechen.

PROPOSITION 3.2. Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit.

(1) Ist  $x \in M$  ein Punkt, dann gibt es eine offene Teilmenge  $V \subset M$  mit  $x \in V$ , die orientierbar ist.

(2) Ist  $V \subset M$  offen, zusammenhängend und orientierbar, dann gibt es genau zwei konsistente Orientierungen auf  $V$ .

(3) Sei  $M$  zusammenhängend und orientierbar und  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung für  $M$ , sodass  $U$  zusammenhängend ist. Dann ist  $u$  entweder positiv oder negativ orientiert.

(4) Ein Diffeomorphismus  $\Phi : M \rightarrow N$  zwischen zusammenhängenden orientierten Teilmannigfaltigkeiten ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsvertauschend.

BEWEIS. (1) Nach Satz 2.3 finden wir eine lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  mit  $x \in u(U) =: V \subset M$ . Nach Definition ist  $V$  offen in  $M$  und wir können eine konsistente Orientierung auf  $V$  definieren, indem wir festlegen, dass für jedes  $z \in U$  die Basis  $\partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z)$  für  $T_{u(z)} M$  positiv orientiert ist.

(2) Betrachten wir zwei konsistente Orientierungen auf  $V$  und sei  $x \in V$  ein Punkt. Dann finden wir für  $i = 1, 2$  lokale Parametrisierungen  $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $V$ , sodass die Basen  $\partial_1 u_i(z_i), \dots, \partial_k u_i(z_i)$  bezüglich der  $i$ ten Orientierung für alle  $z_i \in U_i$  gleich orientiert sind. Nach Konstruktion ist  $V := u_1(U_1) \cap u_2(U_2)$  offen in  $M$  und  $x \in V$ , also ist auch  $u_i^{-1}(V) \subset U_i$  offen für  $i = 1, 2$ . Also gibt es einen  $\varepsilon$ -Ball  $W_2$  um  $u_2^{-1}(x)$ , der ganz in  $u_2^{-1}(V)$  liegt und wir betrachten  $W := u_2(W_2)$  und  $W_1 := u_1^{-1}(W)$ . Nach Proposition 2.5 sind  $u_i|_{W_i} : W_i \rightarrow W$  Diffeomorphismen für  $i = 1, 2$  also erhalten wir einen Diffeomorphismus  $\Phi := (u_1|_{W_1})^{-1} \circ u_2|_{W_2} : W_2 \rightarrow W_1$ . Nach Konstruktion ist  $u_2|_{W_2} = u_1|_{W_1} \circ \Phi$  und  $\det(D\Phi(w)) \neq 0$  für alle  $w \in W_2$ . Weil  $W_2$  zusammenhängend ist, ist entweder  $\det(D\Phi(w)) > 0$  für alle  $w \in W_2$  oder  $\det(D\Phi(w)) < 0$  für alle  $w \in W_2$ .

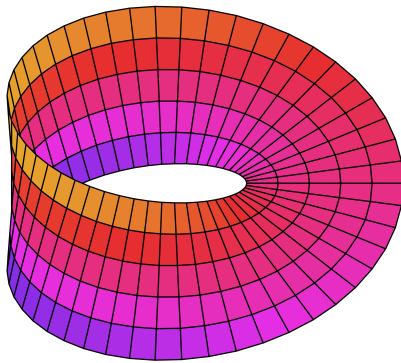
Nach Konstruktion ist aber  $\partial_i u_2(w) = Du_2(w)(e_i) = Du_1(\Phi(w))(D\Phi(w)(e_i))$ . Daraus folgt aber, dass die Basen  $\partial_1 u_2(w), \dots, \partial_k u_2(w)$  und  $\partial_1 u_1(\Phi(w)), \dots, \partial_k u_1(\Phi(w))$  gleich orientiert sind, wenn  $\det(D\Phi(w)) > 0$  gilt und entgegengesetzt orientiert sind,

wenn  $\det(D\Phi(w)) < 0$  gilt. Falls die beiden Orientierungen in  $x$  übereinstimmen, impliziert das sofort, dass sie auf ganz  $W$  übereinstimmen. Analog folgt aber, dass die Orientierungen auf ganz  $W$  verschieden sein müssen, wenn sie in  $x$  verschieden sind. Damit ist die Menge, auf der zwei Orientierungen übereinstimmen offen in  $V$  und ihr Komplement ist ebenfalls offen. Da  $V$  zusammenhängend ist, stimmen somit zwei Orientierungen, die in einem Punkt übereinstimmen, auf ganz  $V$  überein. Stimmen die beiden Orientierungen in keinem Punkt überein, dann kann man eine (in offensichtlichem Sinn) umkehren und erhält damit die andere Orientierung.

(3) Nach Voraussetzung ist  $V := u(U)$  zusammenhängend und erbt eine Orientierung von  $M$ . Andererseits erhalten wir eine konsistente Orientierung auf  $V$ , indem wir jeweils die Basis  $\partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z)$  für  $T_{u(z)}M$  für positiv oder für negativ orientiert erklären. Nach Teil (2) muss eine dieser beiden Orientierungen mit der von  $M$  induzierten übereinstimmen. Im ersten Fall ist  $u$  positiv orientiert, im zweiten Fall negativ orientiert.

(4) Sei  $x \in M$  und  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale positiv orientierte Parametrisierung für  $M$  mit  $x \in u(U)$  und  $U$  zusammenhängend. Nach Satz 2.5 ist dann  $\Phi \circ u : U \rightarrow \Phi(u(U))$  eine lokale Parametrisierung für  $N$  um  $\Phi(x)$ . Nach Teil (3) ist  $\Phi \circ u$  entweder positive oder negativ orientiert und dass ist genau dann der Fall, wenn  $T_x\Phi$  orientierungserhaltend bzw. orientierungsvertauschend ist. Daraus folgt, dass die Mengen auf denen  $T_y\Phi$  orientierungstreu bzw. orientierungsvertauschend ist, beide offen sind. Nachdem  $M$  die Vereinigung dieser beiden Mengen ist, muss eine davon leer sein.  $\square$

Aus dem Beweis ist klar, dass wir mit einer Orientierung eines Tangentialraumes  $T_xM$  von  $M$  beginnen und diese dann konsistent auf eine offene Umgebung von  $x$  ausdehnen kann. Das kann man iterieren und die Orientierung immer weiter ausdehnen. Was aber passieren kann ist, dass man irgendwann zum Punkt  $x$  zurückkehrt und dann die



andere Orientierung auf  $T_xM$  induziert. Dadurch kann es passieren, dass Teilmannigfaltigkeiten nicht orientierbar sind. Das klassische Beispiel einer nicht orientierbaren Teilmannigfaltigkeit ist das Möbiusband in  $\mathbb{R}^3$ . Man erhält es, indem man ein Ende eines Streifens an das andere Ende verklebt, ihn aber davor “verdreh”. Wenn man überlegt, wie man eine Orientierung eines Tangentialraumes zu einer Orientierung des Streifens ausdehnt, dann sieht man, dass die Verdrehung genau dazu führt, dass man mit der umgekehrten Orientierung “zurück kommt”.

**BEISPIEL 3.2.** (1) Wie wir schon im Beweis von Proposition 3.2 festgestellt haben, erbt jede offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine Orientierung von  $\mathbb{R}^n$  und ist somit eine orientierbare Teilmannigfaltigkeit (der Dimension  $n$ ).

(2) Betrachten wir  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ , dann wissen wir aus Beispiel 2.4, dass  $S^1$  eine Teilmannigfaltigkeit ist und dass  $T_x S^1 = x^\perp \subset \mathbb{R}^2$  gilt. Bezeichnen wir mit  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Drehung um  $90^\circ$  dann können wir eine Orientierung auf  $S^1$  definieren, indem wir verlangen, dass für  $x \in S^1$  der Vektor  $0 \neq \rho(x) \in T_x S^1$  positiv orientiert ist. Betrachten wir eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  für  $S^1$ , dann ist  $u$  eine regulär parametrisierte Kurve im Sinne von Abschnitt 1.5. Differenziert man  $\langle u(t), u(t) \rangle = 1$ , dann erhält man  $0 = \langle u(t), u'(t) \rangle$ , also ist  $u'(t)$  proportional zu  $\rho(u(t))$ . Damit ist die Funktion  $t \mapsto \langle u'(t), \rho(u(t)) \rangle$  stetig und nirgends null, also immer positiv oder negativ. Damit ist diese Orientierung konsistent.

**3.3. Der Fall von Hyperflächen.** Eine *Hyperfläche* in  $\mathbb{R}^n$  ist eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$ . Für eine Hyperfläche  $M \subset \mathbb{R}^n$  und einen Punkt  $x \in M$  ist dann  $T_x M \subset \mathbb{R}^n$  ein Teilraum der Dimension  $n - 1$ . Damit gibt es aber genau zwei Einheitsnormalen auf  $T_x M$ , also Vektoren  $v \in \mathbb{R}^n$ , für die  $\|v\| = 1$  und  $v \perp T_x M$  gilt. Man kann sich nun fragen, ob man solche Einheitsnormalvektoren stetig von  $x$  abhängig wählen kann. Das fassen wir im Begriff eines Einheitsnormalenfeldes.

**DEFINITION 3.3.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Hyperfläche. Ein *Einheitsnormalenfeld* auf  $M$  ist eine stetige Funktion  $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $\|\mathbf{n}(x)\| = 1$  und  $\mathbf{n}(x) \perp T_x M$  für alle  $x \in M$  gelten. Ein *lokales Einheitsnormalenfeld* ist eine Funktion mit diesen Eigenschaften, die aber nur auf einer offenen Teilmenge  $V \subset M$  definiert ist.

**SATZ 3.3.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^r$ -Hyperfläche für  $r \geq 1$ .

(1) Für jeden Punkt  $x \in M$  gibt es ein lokales Einheitsnormalenfeld, das auf einer offenen Umgebung  $V$  von  $x$  in  $M$  definiert und eine  $C^{r-1}$ -Funktion ist.

(2) Es gibt ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf ganz  $M$ , genau dann wenn  $M$  orientierbar ist und jedes solche Einheitsnormalenfeld ist eine  $C^{r-1}$ -Funktion. In diesem Fall ist die Wahl eines Einheitsnormalenfeldes äquivalent zur Wahl einer Orientierung auf  $M$ .

**BEWEIS.** (1) Nach Satz 2.3 können wir  $M$  lokal um  $x$  als reguläre Nullstellenmenge realisieren. Also finden wir eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und eine  $C^r$ -Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $V := M \cap U = F^{-1}(\{0\})$  gilt und sodass  $DF(z) \neq 0$  für alle  $z \in V$  gilt. Weil  $DF$  stetig ist, ist  $DF(z) \neq 0$  auf einer offenen Umgebung von  $V$  in  $\mathbb{R}^n$ , also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $DF(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$  gilt. Dann können wir den Gradienten  $\nabla F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  aus Abschnitt 1.10 bilden und normieren, also  $\mathbf{n}(z) = \frac{\nabla F(z)}{\|\nabla F(z)\|}$  für  $z \in U$  definieren. Da  $\nabla F(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$  gilt, ist  $\mathbf{n} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^{r-1}$ -Funktion. Für  $y \in V$  ist  $T_y M = \text{Ker}(DF(y)) = (\nabla F(y))^\perp$ , also ist  $\mathbf{n}|_V$  ein lokales Einheitsnormalenfeld auf  $V$ .

(2) Für zwei lokale Einheitsnormalenfelder  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einer offenen Teilmenge  $V \subset M$ , muss natürlich  $\mathbf{n}_2(x) = \varepsilon(x)\mathbf{n}_1(x)$  für jedes  $x \in V$  gelten, wobei  $\varepsilon(x) = \pm 1$  ist. Andererseits muss  $\varepsilon$  aber stetig sein, also ist für zusammenhängendes  $V$  nur  $\mathbf{n}_2 = \pm \mathbf{n}_1$  möglich. Sei nun  $\mathbf{n}$  ein Einheitsnormalenfeld auf  $M$ . Für einen Punkt  $x \in M$  können wir dann ein lokales Einheitsnormalenfeld  $\tilde{\mathbf{n}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie in (1) konstruieren und wir können annehmen, dass  $V$  zusammenhängend ist. Dann muss aber  $\mathbf{n}|_V = \pm \tilde{\mathbf{n}}$  gelten, also ist  $\mathbf{n}$  auf  $V$  eine  $C^{r-1}$ -Funktion und da  $x$  beliebig war ist  $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^{r-1}$ -Funktion.

( $\Rightarrow$ ) Ist  $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Einheitsnormalenfeld, dann definieren wir eine Orientierung auf  $T_x M$  wie folgt: Wir nennen eine geordnete Basis  $v_1, \dots, v_{n-1}$  von  $T_x M$  positiv orientiert, wenn die Basis  $\mathbf{n}(x), v_1, \dots, v_{n-1}$  von  $\mathbb{R}^n$  positiv orientiert ist. Das ist offensichtlich wohldefiniert und wir müssen nur zeigen, dass diese Orientierung konsistent ist. Sei dazu  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung für  $M$ , sodass  $U$  zusammenhängend ist. Dann ist  $z \mapsto \det(\mathbf{n}(u(z)), \partial_1 u(z), \dots, \partial_{n-1} u(z))$  eine stetige Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}$ , die nach Voraussetzung keine Nullstellen hat. Damit muss diese Funktion entweder immer positiv oder immer negativ sein, also sind die Basen  $\partial_1 u(z), \dots, \partial_{n-1} u(z)$  immer gleich orientiert.

( $\Leftarrow$ ) Ist  $M$  orientierbar dann wählen wir eine Orientierung auf  $M$ . Für einen Punkt  $x \in M$  wählen wir eine positiv orientierte Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  mit  $x \in u(U)$ . Für ein lokales Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{n}$  auf einer zusammenhängenden Umgebung  $V$  von  $x$  wie in (1) können wir dann eines der beiden Einheitsnormalenfelder auswählen, indem wir verlangen, dass  $\det(\mathbf{n}(u(z)), \partial_1 u(z), \dots, \partial_{n-1} u(z)) > 0$  für alle

$z \in u^{-1}(V)$  gilt. Damit erhalten wir eine Überdeckung von  $M$  durch offenen Teilmengen auf denen wir jeweils ein stetiges Einheitsnormalenfeld definiert ist. Nach Konstruktion müssen diese Einheitsnormalenfelder aber auf dem Durchschnitt zweier solcher Teilmengen übereinstimmen, also definieren sie gemeinsam ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf  $M$ .  $\square$

**BEISPIEL 3.3.** Mit diesen Überlegungen sehen wir sofort, dass die Sphäre  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  für jedes  $n > 1$  eine orientierbare Teilmannigfaltigkeit ist. Wir können nämlich ein globales Einheitsnormalenfeld durch  $\mathbf{n}(x) = x$  für alle  $x \in S^{n-1}$  definieren. Der Beweis von Satz 3.3 zeigt uns auch, wie wir positiv orientierte lokale Parametrisierungen für dies Orientierung erkennen können. Betrachten wir etwa den Fall  $n = 3$ , also  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Dann können wir die Teilmenge  $\{x \in S^2 : x_3 > 0\}$  als Funktionsgraph parametrisieren. Wir setzen  $U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1\}$  und definieren  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch  $u(x_1, x_2) := (x_1, x_2, \sqrt{1 - (x_1)^2 - (x_2)^2})$ . Dann sind die partiellen Ableitungen von  $u$  gegeben durch  $\partial_1 u(x_1, x_2) = (1, 0, \frac{-x_1}{\sqrt{1 - (x_1)^2 - (x_2)^2}})$  und  $\partial_2 u(x_1, x_2) = (0, 1, \frac{-x_2}{\sqrt{1 - (x_1)^2 - (x_2)^2}})$ . Mit  $\mathbf{n}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$  erhalten wir für  $\det(\mathbf{n} \circ u, \partial_1 u, \partial_2 u)$  den Ausdruck

$$\sqrt{1 - (x_1)^2 - (x_2)^2} + \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2}{\sqrt{1 - (x_1)^2 - (x_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x_1)^2 - (x_2)^2}} > 0,$$

also ist diese lokale Parametrisierung positiv orientiert.

Alternativ erhalten wir eine lokale Parametrisierung durch die Einschränkung von Kugelkoordinaten (siehe Übungen). Hier setzen wir  $V := (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und definieren  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch  $v(\varphi, \theta) := (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta)$ . Das liefert die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_1 v(\varphi, \theta) &= (-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0) \\ \partial_2 v(\varphi, \theta) &= (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta). \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung liefert dann für  $\det(\mathbf{n} \circ v, \partial_1 v, \partial_2 v)$  den Ausdruck

$$\sin^2 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta = \cos \theta > 0,$$

also ist auch diese lokale Parametrisierung positiv orientiert.

**3.4. Integration von Differentialformen – Schritt 1.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit,  $W \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge mit  $M \subset W$  und  $\omega \in \Omega^k(W)$  eine stetige  $k$ -Form. Sei  $u : U \rightarrow W$  eine lokale  $C^1$ -Parametrisierung für  $M$  und  $V := u(U) \subset M$ . Dann wissen wir aus Abschnitt 3.2 schon, dass für jedes  $z \in U$  die Vektoren  $\partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z) \in T_{u(z)}M$  eine Basis bilden. Damit können wir aber der Form  $\omega$  eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnen, die durch  $f(z) := \omega(u(z), \partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z))$  definiert ist. Durch diese Funktion ist für alle  $x \in V$ , die Einschränkung der  $k$ -linearen Abbildung  $\omega(x) : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $(T_x M)^k$  vollständig bestimmt. Man kann das auch noch einfacher deuten, indem man den Pullback  $u^* \omega \in \Omega^k(U)$  verwendet. Nach Definition gilt nämlich  $u^* \omega = f dz_1 \wedge \dots \wedge dz_k$ , wobei wir die Koordinaten auf  $\mathbb{R}^k$  mit  $z_1, \dots, z_k$  bezeichnen um sie von den Koordinaten  $x_i$  auf  $\mathbb{R}^n$  zu unterscheiden.

In Anbetracht von Abschnitt 3.1 liegt es nahe, ein Integral von  $\omega$  über  $V$  als Integral von  $f$  über  $U$  zu definieren, was aber im Allgemeinen keinen endlichen Wert liefern wird. Um sicherzustellen, dass wir ein endliches Integral erhalten, schränken wir uns auf eine kompakte Teilmenge  $K \subset V$  ein. Wegen der Stetigkeit von  $u^{-1}$  ist dann auch  $u^{-1}(K) \subset U \subset \mathbb{R}^k$  kompakt, also können wir  $f$  tatsächlich über diese Teilmenge integrieren und erhalten einen endlichen Wert. Das stellt den ersten Schritt für die Integration von Differentialformen dar.

**DEFINITION 3.4.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit und  $K \subset M$  eine kompakte Teilmenge, sodass es eine lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  mit  $K \subset V := u(U)$  gibt. Sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, die  $M$  enthält. Dann definieren wir  $\int_K \Omega^k(W) \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt:

Wir wählen eine positiv orientierte lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow V$  wie oben und definieren  $\int_K \omega := \int_{u^{-1}(K)} f$  wobei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(z) := \omega(u(z), \partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z))$$

gegeben ist.

Das fundamentale (aber mit unserer Vorbereitung einfache) Resultat ist nun, dass dieses Integral unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierung ist.

**PROPOSITION 3.4.** *Das Integral aus Definition 3.4 ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierung  $u : U \rightarrow V$  für  $M$ .*

**BEWEIS.** Seien  $u : U \rightarrow V$  und  $\tilde{u} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  zwei positiv orientierte lokale Parametrisierungen für  $M$ , sodass  $K \subset V$  und  $K \subset \tilde{V}$  gilt. Dann ist  $V \cap \tilde{V}$  offen in  $M$ , also ist auch  $u^{-1}(V \cap \tilde{V}) \subset \mathbb{R}^k$  offen und die Einschränkung von  $u$  auf diese Teilmenge ist eine lokale Parametrisierung. Offensichtlich liefert diese Parametrisierung das gleiche Integral wie  $u : U \rightarrow V$ . Indem wir analog  $\tilde{U}$  durch  $\tilde{u}^{-1}(V \cap \tilde{V})$  ersetzen und  $\tilde{u}$  darauf einschränken, können wir somit ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $V = \tilde{V}$  annehmen.

Nach Proposition 2.5 sind  $u : U \rightarrow V$  und  $\tilde{u} : \tilde{U} \rightarrow V$  Diffeomorphismen, also ist auch  $\Phi := \tilde{u}^{-1} \circ u : U \rightarrow \tilde{U}$  ein Diffeomorphismus. Natürlich gilt  $\Phi(u^{-1}(K)) = \tilde{u}^{-1}(K)$  und differenzieren der Gleichung  $u = \tilde{u} \circ \Phi$  liefert  $Du(z) = D\tilde{u}(\Phi(z)) \circ D\Phi(z)$ . Schreiben wir  $a_i^j(z) := \frac{\partial \Phi_j}{\partial z_i}$  für die partiellen Ableitungen von  $\Phi$ , dann bedeutet das gerade  $\partial_i u(z) = \sum_j a_i^j(z) \partial_j \tilde{u}(\Phi(z))$ . Damit ist aber  $(a_i^j(z))$  gerade die Matrix zum Basiswechsel zwischen den beiden Basen und da beiden Basen nach Voraussetzung gleich orientiert sind, ist  $\det(D\Phi(z)) > 0$  für alle  $z \in U$ . Andererseits liefert diese Gleichung für  $x = u(z) = \tilde{u}(\tilde{z})$  (also  $\tilde{z} = \Phi(z)$ ) auch direkt

$$\omega(u(z))(\partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z)) = \det(a_i^j(z)) \omega(\tilde{u}(\tilde{z}), \partial_1 \tilde{u}(\tilde{z}), \dots, \partial_k \tilde{u}(\tilde{z})).$$

Für die Funktionen  $f$  und  $\tilde{f}$  aus Definition 3.4 bedeutet das aber genau, dass  $f = (\tilde{f} \circ \Phi) \det(D\Phi)$  gilt. Damit folgt  $\int_{\tilde{u}^{-1}(K)} \tilde{f} = \int_{\Phi(u^{-1}(K))} \tilde{f} = \int_{u^{-1}(K)} f$  direkt aus dem Transformationssatz für Mehrfachintegrale.  $\square$

In der oben begonnenen Interpretation über Pullbacks bedeutet Definition 3.4 gerade  $\int_K \omega := \int_{u^{-1}(K)} u^* \omega$ , wobei wir auf der rechten Seite das Integral über  $k$ -Formen auf offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^k$  aus Abschnitt 3.1 verwenden. Die Abbildung  $\Phi$  aus dem Beweis ist ein orientierungstreuer Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow \tilde{U}$ . Aus  $u = \tilde{u} \circ \Phi$  folgt nun mit Proposition 2.10  $u^* \omega = \Phi^*(\tilde{u}^* \omega)$  und mit  $\Phi(u^{-1}(K)) = \tilde{u}^{-1}(K)$  folgt  $\int_{u^{-1}(K)} u^* \omega = \int_{\tilde{u}^{-1}(K)} \tilde{u}^* \omega$  direkt aus der Invarianz dieses Integrals, die wir in Abschnitt 3.1 bewiesen haben.

**3.5. Partitionen der Eins.** Um den Übergang auf allgemeine kompakte Teilmengen zu bewerkstelligen, benutzen wir spezielle glatte Funktionen. Für eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir den *Träger* (englisch “support”)  $\text{supp}(f)$  von  $f$  als den Abschluss der Menge  $\{x : f(x) \neq 0\}$ . Das bedeutet, dass das Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus \text{supp}(f)$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist auf der  $f$  identisch Null ist. Insbesondere macht es Sinn, von “Funktionen mit kompaktem Träger” zu sprechen, die also außerhalb einer

kompakten Teilmenge identisch verschwinden. Der Schlüssel wird nun sein, dass man solche Funktionen mit wünschenswerten Eigenschaften konstruieren kann.

**SATZ 3.5.** *Seien  $W_1, \dots, W_N \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt mit  $K \subset \bigcup_{i=1}^N W_i$ . Dann gibt es  $C^\infty$ -Funktionen  $\chi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  mit Werten in  $[0, 1]$  für  $i = 1, \dots, N$  und eine offene Teilmenge  $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$  mit  $K \subset \tilde{W}$  sodass*

- $\text{supp}(\chi_i) \subset W_i$  für  $i = 1, \dots, N$
- $\sum_{i=1}^N \chi_i(x) = 1$  für alle  $x \in \tilde{W}$

**BEWEIS.** Zunächst zeigen wir, dass es eine  $C^\infty$ -Funktion  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Werten in  $[0, \infty]$  gibt, sodass  $\alpha(t) \neq 0$  genau für  $t > 0$  gilt. Dazu bemerken wir, dass  $\alpha(t) := e^{-1/t}$  offensichtlich eine  $C^\infty$ -Funktion  $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit positiven Werten definiert. Definieren wir  $\alpha(t) = 0$  für  $t \leq 0$ , ist das natürlich  $C^\infty$  auf  $(-\infty, 0)$  also bleibt nur noch zu zeigen, dass die Ableitungen  $\alpha^{(k)}(t)$  von  $\alpha$  auf  $(0, \infty)$  für  $t \rightarrow 0$  alle gegen 0 gehen. Für  $\alpha(t)$  selbst ist das klar, dann zeigt man Induktiv, dass  $\alpha^{(k)}(t)$  jeweils als  $p(1/t)e^{-1/t}$  für ein Polynom  $p$  schreiben kann, was die Behauptung impliziert (siehe Übungen).

Als nächste wählen wir  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  mit  $0 < r_1 < r_2$ . Dann ist  $\alpha(r_2 - t) + \alpha(t - r_1) > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und damit definiert  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(t) := \frac{\alpha(r_2 - t)}{\alpha(r_2 - t) + \alpha(t - r_1)}$  eine  $C^\infty$ -Funktion. Nach Konstruktion gilt  $\alpha(r_2 - t), \alpha(t - r_1) \geq 0$ , also hat  $h$  Werte in  $[0, 1]$ . Für  $t \leq r_1$  ist  $\alpha(t - r_1) = 0$ , also  $h(t) = 1$  und für  $t \geq r_2$  ist  $\alpha(r_2 - t) = 0$  also  $h(t) = 0$ .

Betrachten wir zunächst den Fall  $N = 1$  also  $K \subset W_1$ . Für  $x \in K$  definiert  $y \mapsto \langle y - x, y - x \rangle$  eine  $C^\infty$ -Funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Da  $W_1$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass der Ball  $B_{2\varepsilon}(x)$  mit Radius  $2\varepsilon$  ganz in  $W_1$  liegt. Für eine Funktion  $h$  wie oben mit  $r_1 = \varepsilon^2$  und  $r_2 = 2\varepsilon^2$  setzen wir  $\varphi_x(y) := h(\langle y - x, y - x \rangle)$ . Dann ist  $\varphi_x$  offensichtlich  $C^\infty$ ,  $\varphi_x(x) = 1$  und  $\text{supp}(\varphi_x) \subset \overline{B}_{\sqrt{2\varepsilon}}(x) \subset W_1$ . Nun ist  $V_x := \{y : \varphi_x(y) > 1/2\}$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $x \in V_x$ . Damit bilden die Mengen  $V_x$  eine offene Überdeckung von  $K$  und wir finden endlich viele Punkte  $x_1, \dots, x_\ell$  mit  $K \subset \bigcup_{i=1}^\ell V_{x_i} =: \tilde{W}$ . Dann ist  $\tilde{\varphi} := \sum_{i=1}^\ell \varphi_{x_i}$  eine  $C^\infty$ -Funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit Werten in  $[0, \infty)$ . Für eine Funktion  $h$  wie oben mit  $r_1 = 1/2$  und  $r_2 = 3/4$  setzen wir dann  $\chi_1(y) := h(1 - \tilde{\varphi}(y))$ . Das ist natürlich  $C^\infty$  mit Werten in  $[0, 1]$  und für  $x \in \tilde{W}$  gibt es ein  $i$  mit  $x \in V_{x_i}$ , also ist  $\tilde{\varphi}(x) \geq \varphi_{x_i}(x) > 1/2$  und damit  $\chi_1(x) = 1$ . Andererseits kann  $\chi_1(y) > 0$  nur dann gelten, wenn  $\tilde{\varphi}(y) > 1/4$  gilt, also folgt sofort  $\text{supp}(\chi_1) \subset \bigcup_{i=1}^\ell \text{supp}(\varphi_{x_i}) \subset W_1$ .

Im allgemeinen Fall  $N > 1$  finden wir für gegebenes  $i \in \{1, \dots, N\}$  und  $x \in W_i \cap K$  wie oben eine  $C^\infty$ -Funktion  $\varphi_{x,i}$  mit Werten in  $[0, 1]$  sodass  $\varphi_{x,i}(x) = 1$  und  $\text{supp}(\varphi_{x,i}) \subset W_i$  gilt. Wir setzen wieder  $V_{x,i} := \{y \in \mathbb{R}^n : \varphi_{x,i}(y) > \frac{1}{2}\}$  und erhalten eine offene Überdeckung von  $K$ . Also finden wir endlich viele Paare  $(x_a, i_a)$  sodass  $K \subset \bigcup_a \tilde{W}_{x_a, i_a} =: \hat{W}$  gilt. Für  $j = 1, \dots, N$  setzen wir  $\psi_j := \sum_{a: i_a = j} \varphi_{x_a, i_a}$ . Als endliche Summe von  $C^\infty$ -Funktionen ist das  $C^\infty$ , nach Konstruktion liegen die Werte in  $[0, \infty)$  und nachdem alle beteiligten Funktionen Träger in  $W_j$  haben gilt  $\text{supp}(\psi_j) \subset W_j$ . Nach dem Fall  $N = 1$  finden wir eine  $C^\infty$ -Funktion  $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit Werten in  $[0, 1]$  und  $\text{supp}(\tilde{\psi}) \subset \hat{W}$ , sodass  $\tilde{\psi}(x) = 1$  für alle  $x$  in einer offenen Teilmenge  $\tilde{W}$  mit  $K \subset \tilde{W}$  gilt. Dann ist  $\psi := (1 - \tilde{\psi}) + \sum_{j=1}^N \psi_j$  eine  $C^\infty$ -Funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und nach Konstruktion ist  $\psi(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Damit ist aber für jedes  $i = 1, \dots, N$  auch  $\chi_i := \frac{\psi_i}{\psi}$  eine  $C^\infty$ -Funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit Werten in  $[0, \infty)$  und wegen  $0 \leq \psi_i(x) \leq \psi(x)$  liegen die Werte sogar in  $[0, 1]$ . Andererseits gilt nach Konstruktion  $\text{supp}(\chi_i) = \text{supp}(\psi_i) \subset W_i$ . Schließlich ist

$$\sum_{i=1}^N \chi_i = \frac{\psi - (1 - \tilde{\psi})}{\psi} = 1 - \frac{1 - \tilde{\psi}}{\psi},$$

und nach Konstruktion ist  $1 - \tilde{\psi}$  identisch 0 auf  $\tilde{W}$ . □



Der Name Partition der Eins stammt daher, dass man die konstante Funktion Eins in eine (in diesem Fall endliche) Summe von Funktionen zerlegt hat, für deren Träger man passende Einschränkungen vorgeben kann. Es gibt allgemeinere Resultate zu Partitionen der Eins, bei denen abzählbar viele Funktionen auftreten.

Damit erhalten wir sofort die für die Integrationstheorie notwendigen Funktionen. Dazu beobachten wir zunächst, dass wir für eine kompakte Teilmenge  $K$  einer Teilmannigfaltigkeit  $M$  endlich viele lokale Parametrisierungen  $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$ ,  $i = 1, \dots, N$  finden, sodass  $K \subset \cup_{i=1}^N u_i(U_i)$  gilt.

**KOROLLAR 3.5.** *Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit und  $K \subset M$  eine kompakte Teilmenge und  $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $i = 1, \dots, N$  lokale Parametrisierungen mit  $K \subset \cup_{i=1}^N u_i(U_i)$ . Dann finden gibt es  $C^\infty$ -Funktionen  $\chi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, N$  mit Werten in  $[0, 1]$ , sodass*

- (a) Für jedes  $i$  gilt  $\text{supp}(\chi_i) \cap M \subset u_i(U_i)$ .
- (b) Für  $x \in K$  gilt  $\sum \chi_i(x) = 1$ .

**BEWEIS.** Da  $u_i(U_i)$  offen in  $M$  ist, finden wir eine offene Teilmenge  $W_i \subset \mathbb{R}^n$ , sodass  $W_i \cap M = u_i(U_i)$  ist, und natürlich gilt dann  $K \subset \cup_{i=1}^N W_i$ . Wenden wir darauf Satz 3.5 an, dann erhalten wir natürlich  $\text{supp}(\chi_i) \cap M \subset W_i \cap M = u_i(U_i)$ .  $\square$

**3.6. Integration von Differentialformen – Schritt 2.** Mit Hilfe von Partitionen der Eins können wir nun das Integral einer stetige  $k$ -Form über eine beliebige kompakte Teilmenge einer orientierten  $k$ -dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  definieren.

**DEFINITION 3.6.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit und  $K \subset M$  eine kompakte Teilmenge. Sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, die  $M$  enthält. Dann definieren wir  $\int_K : \Omega^k(W) \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt:

Wir wählen endlich viele positiv orientierte lokale Parametrisierungen  $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $K \subset \cup_{i=1}^N u_i(U_i)$  gilt und Funktionen  $\chi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit Werten in  $[0, 1]$  wie in Korollar 3.5. Dann setzen wir  $K_i := \text{supp}(\chi_i) \cap K$  und definieren  $\int_K \omega := \sum_{i=1}^N \int_{K_i} \chi_i \omega$ , wobei wir in der rechten Seite das Integral aus Definition 3.4 verwenden.

**PROPOSITION 3.6.** (1) *Das Integral aus Definition 3.6 ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierungen  $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  und der Partition  $\{\chi_i\}$  der Eins. Insbesondere stimmt es mit dem Integral aus Definition 3.4 überein, wenn die Voraussetzungen dieser Definition erfüllt sind.*

(2) *Für eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$ , kompakte Teilmengen  $K, \tilde{K} \subset M$ , eine offene Teilmenge  $W \subset \mathbb{R}^n$  mit  $M \subset W$  und  $\omega \in \Omega^k(W)$  gilt*

$$\int_{K \cup \tilde{K}} \omega = \int_K \omega + \int_{\tilde{K}} \omega - \int_{K \cap \tilde{K}} \omega.$$

**BEWEIS.** (1) Betrachten wir eine zweite mögliche Wahl  $\tilde{u}_j : \tilde{U}_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  von Parametrisierungen und eine passende Partition  $\{\tilde{\chi}_j\}$  der Eins und setzen  $\tilde{K}_j := K \cap \text{supp}(\tilde{\chi}_j)$ . Für einen fixen Index  $i_0$  ist dann  $\chi_{i_0} \omega = \sum_j \tilde{\chi}_j \chi_{i_0} \omega$ , also  $\int_{K_{i_0}} \chi_{i_0} \omega = \sum_j \int_{K_{i_0}} \tilde{\chi}_j \chi_{i_0} \omega$ . Weil  $\tilde{\chi}_j \chi_{i_0} \omega$  außerhalb von  $\tilde{K}_j \cap K_{i_0}$  identisch Null ist, kann man den Integrationsbereich durch  $K_{i_0} \cap \tilde{K}_j$  ersetzen. (Falls der Durchschnitt leer ist, dann ist die Form identisch Null, also macht das keine Probleme.) Setzen wir das ein, dann sehen wir, dass

$$\sum_i \int_{K_i} \chi_i \omega = \sum_{i,j} \int_{K_i \cap \tilde{K}_j} \tilde{\chi}_j \chi_i \omega$$

gilt. Formal müsste man hier das Integral jeweils mit der lokalen Parametrisierung  $u_i$  berechnen, wir wissen aber schon aus Proposition 3.4, dass sich das Integral nicht ändert, wenn man stattdessen die lokale Parametrisierung  $\tilde{u}_j$  benutzt. Damit können

wir aber natürlich umgekehrt genau so vorgehen und sehen, dass die gleiche Summe mit  $\sum_j \int_{\tilde{K}_j} \tilde{\chi}_j \omega$  übereinstimmt.

Die letzte Behauptung in (1) folgt sofort, weil wir in der Situation von Definition 3.4 mit nur einer Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  und einer einzelnen Funktion  $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  arbeiten können, die natürlich  $\chi\omega|_K = \omega|_K$  erfüllt.

(2) Wählen wir lokale Parametrisierungen  $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  mit  $K \cup \tilde{K} \subset \cup_{i=1}^N u_i(U_i)$  und eine passende Partition der Eins  $\chi_i$ , also  $\sum_{i=1}^N \chi_i(x) = 1$  für alle  $x \in K \cup \tilde{K}$ . Nach Teil (1) können wir diese Daten benutzen um alle 4 Integrale als Summe von Integralen über  $\chi_i \omega$  zu berechnen. Dabei sind die relevanten Integrationsbereiche  $L := \text{supp}(\chi_i) \cap K$ ,  $\tilde{L} := \text{supp}(\chi_i) \cap \tilde{K}$ ,  $\text{supp}(\chi_i) \cap (K \cup \tilde{K}) = L \cup \tilde{L}$  und  $\text{supp}(\chi_i) \cap (K \cap \tilde{K}) = L \cap \tilde{L}$  und  $L \cup \tilde{L} \subset u_i(U_i)$ . Aber für die entsprechende Funktion  $f : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  gilt natürlich

$$\int_{u^{-1}(L \cup \tilde{L})} f = \int_{u^{-1}(L)} f + \int_{u^{-1}(\tilde{L})} f - \int_{u^{-1}(L \cap \tilde{L})} f.$$

Mit  $u^{-1}(L \cup \tilde{L}) = u^{-1}(L) \cup u^{-1}(\tilde{L})$  und dem analogen Resultat für den Durchschnitt folgt die Behauptung für  $\chi_i \omega$  und durch Summieren erhalten wir das Resultat für  $\omega$ .  $\square$

Aus der Konstruktion folgt leicht, dass wir mit dieser Methode einen Integralbegriff erhalten, der mit Diffeomorphismen verträglich ist (sofern man die Orientierung richtig behandelt).

**SATZ 3.6.** *Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit,  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $M \subset W$  und  $\Phi : W \rightarrow \tilde{W}$  ein Diffeomorphismus auf eine offenen Teilmenge  $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $\Phi(M) \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit, die man kanonisch so orientieren kann, dass  $\Phi$  orientierungstreu ist. Mit dieser Orientierung gilt für jede kompakte Teilmenge  $K \subset M$  und jede stetige  $k$ -Form  $\omega \in \Omega^k(\tilde{W})$  die Gleichung  $\int_K \Phi^* \omega = \int_{\Phi(K)} \omega$ .*

**BEWEIS.** Aus Abschnitt 2.1 wissen wir, dass  $\tilde{M} := \Phi(M) \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit ist. Für  $x \in M$  ist dann  $T_x \Phi : T_x M \rightarrow T_{\Phi(x)} \tilde{M}$  ein linearer Isomorphismus und mit diesem können wir die Orientierung von  $T_x M$  auf  $T_{\Phi(x)} \tilde{M}$  übertragen. Der Schlüssel zum Beweis ist nun, dass für jede lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  die Komposition  $\Phi \circ u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung für  $\tilde{M}$  ist, siehe Abschnitt 2.5. Das impliziert sofort, dass die Orientierung, die wir auf  $\tilde{M}$  definiert haben, konsistent ist, also ist  $\tilde{M}$  eine orientierte Teilmannigfaltigkeit.

Es zeigt aber auch, dass für lokale Parametrisierungen  $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $K \subset \cup_{i=1}^N u_i(U_i)$  die Parametrisierungen  $\Phi \circ u_i$  natürlich  $\Phi(K) \subset \cup_{i=1}^N (\Phi \circ u_i)(U_i)$  erfüllt. Wählen wir eine passende Partition der Eins  $\{\tilde{\chi}_i\}$  auf  $\tilde{M}$ , dann bilden die Funktionen  $\chi_i := \tilde{\chi}_i \circ \Phi$  eine passende Partition der Eins auf  $M$ . Und nach Konstruktion gilt für  $K_i := K \cap \text{supp}(\chi_i)$ , dass  $\Phi(K_i) = \Phi(K) \cap \text{supp}(\tilde{\chi}_i)$  ist. Damit ist aber  $\int_{\Phi(K)} \omega = \sum_i \int_{\Phi(K_i)} \tilde{\chi}_i \omega$ . Andererseits ist nach Proposition 2.10  $\Phi^*(\tilde{\chi}_i \omega) = \chi_i \Phi^* \omega$  also nach Definition  $\sum_i \int_{K_i} \chi_i \omega = \int_K \Phi^* \omega$ . Aber nach Definition ist

$$\int_{K_i} \chi_i \Phi^* \omega = \int_{(u_i)^{-1}(K_i)} (u_i)^* \Phi^* \tilde{\chi}_i \omega = \int_{(\Phi \circ u_i)^{-1}(\Phi(K_i))} (\Phi \circ u_i)^* \tilde{\chi}_i \omega = \int_{\Phi(K_i)} \tilde{\chi}_i \omega$$

und damit folgt die Behauptung.  $\square$

Wir haben jetzt also ein diffeomorphismeninvariantes Integral über kompakte Teilmengen für Differentialformen gefunden. Insbesondere können wir für eine kompakte orientierte Teilmannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  Differentialformen über  $M$  integrieren. Möchte

man das Integral über ganz  $M$  auf nicht-kompakte Teilmannigfaltigkeiten erweitern, dann kann man sich auf eine Teilklasse von Differentialformen einschränken. Dazu bemerken wir zunächst, dass der Begriff des Trägers sich problemlos auf Vektorfelder und Differentialformen erweitert, wir können einfach  $\text{supp}(\omega)$  als den Abschluss der Teilmenge  $\{x : \omega(x) \neq 0\}$  definieren. Der natürliche Begriff, der sich hier anbietet ist, dass  $\omega$  auf  $M$  kompakten Träger hat, also  $\text{supp}(\omega) \cap M$  kompakt ist. Dann können wir einfach  $\int_M \omega := \int_{\text{supp}(\omega) \cap M} \omega$  definieren.

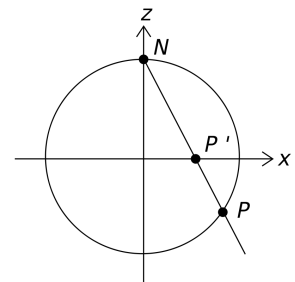
Für die kommenden Beispiele müssen wir noch eine nützliche Bemerkung machen: Für den Integralbegriff, den wir hier entwickelt haben, ist es nicht wirklich wichtig, dass die  $k$ -Form, die wir integrieren wollen, auf einer offenen Umgebung von  $M$  definiert ist. Analog zu den Vektorfeldern längs Kurven aus Abschnitt 1.7 genügt es vollkommen, wenn wir eine stetige Funktion  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k \mathbb{R}^{n*}$  gegeben haben. Dabei kann man Stetigkeit analog wie in Definition 2.9 definieren.

**3.7. Beispiele.** Ein klassisches Beispiel für  $k$ -Formen liefern Volumsformen für Teilmannigfaltigkeiten. Wir besprechen hauptsächlich den Fall einer orientierten Hyperfläche  $M$ , also einer orientierten  $k$ -dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Nach Satz 3.3 erhalten wir ein stetiges Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ , dass sich lokal um jeden Punkt  $x \in M$  auf eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{k+1}$  ausdehnen lässt. Wir definieren die *Volumsform*  $\text{vol}$  auf  $M$  durch  $\text{vol}(x, v_1, \dots, v_k) := \det(\mathbf{n}(x), v_1, \dots, v_k)$ . Für fixe Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  ist das eine stetige Funktion  $M \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Motivation für diese Definition ist einsichtig: Interpretieren wir die Determinante als orientiertes Volumen, dann sollte für Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in T_x M = \mathbf{n}(x)^\perp$  der Betrag von  $\text{vol}(x, v_1, \dots, v_k)$  genau das Volumen des von  $v_1, \dots, v_k$  aufgespannten Parallelepipeds sein. Außerdem wissen wir aus Abschnitt 3.3, dass  $\mathbf{n}$  so gewählt ist, dass  $\det(\mathbf{n}(x), v_1, \dots, v_k) > 0$  gilt, wenn  $v_1, \dots, v_k$  eine positiv orientierte Basis von  $T_x M$  ist.

Diese Volumsform ist im Allgemeinen *nicht* invariant unter Diffeomorphismen, das Verhalten unter allgemeinen Diffeomorphismen ist sehr kompliziert. Es ist allerdings invariant unter Euklidischen Bewegungen (siehe Übungen).

Wie am Ende des letzten Abschnitts bemerkt, können wir somit für eine kompakte Teilmenge  $K \subset M$  problemlos  $\int_K \text{vol}$  bilden und das definiert das ( $k$ -dimensionale) *Volumen* von  $K$ . Wenn  $K$  nichtleeres Inneres in  $M$  hat, dann ist diese Volumen  $> 0$ . (Wir bemerken hier, dass  $K$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{k+1}$  eine Nullmenge ist, also triviales Volumen hat.) Insbesondere können wir für eine kompakte orientierte Hyperfläche  $M \subset \mathbb{R}^{k+1}$  das Volumen von  $M$  definieren und dieses ist immer positiv. Legt man die Volumsform fest, dann kann man natürlich für stetige Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  das Integral  $\int_K f \text{vol}$  bzw. für kompaktes  $M$  oder  $f$  mit kompaktem Träger auch das Integral  $\int_M f \text{vol}$  bilden.

Betrachten wir als konkretes Beispiel die Einheitssphäre  $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ . Wir beginnen mit einer speziellen lokalen Parametrisierung mit großem Bild, der *stereographischen Projektion*. Betrachten wir  $\mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_k, 0) : x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$  und den "Nordpol"  $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^k$ . Dann definieren wir  $u : \mathbb{R}^k \rightarrow S^k$ , indem wir den Punkt  $y \in \mathbb{R}^k$  auf den Schnittpunkt des Strahles von  $N$  durch  $y$  mit  $S^k$  abbilden. Aus dieser Beschreibung ist es leicht, sowohl für  $u : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$  als auch für eine Inverse  $v : S^k \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine explizite Formel anzugeben:



$$u(y) = \left( \frac{2y}{1 + \|y\|^2}, \frac{-1 + \|y\|^2}{1 + \|y\|^2} \right) \quad v(x) = \left( \frac{x_1}{1 - x_{k+1}}, \dots, \frac{x_k}{1 - x_{k+1}} \right).$$

Offensichtlich sind diese Funktionen  $C^\infty$  auf  $\mathbb{R}^k$  bzw. auf  $\{x : x_{k+1} < 1\}$  und man rechnet leicht nach, dass  $u$  Werte in  $S^k \setminus \{N\}$  hat und  $v$  auf dieser Teilmenge invers zu  $u$  ist. Also haben wir eine lokale Parametrisierung für  $S^k$  gefunden, sodass  $u(U) = S^k \setminus N$  gilt. Insbesondere können wir in dieser Parametrisierung über die kompakte Teilmenge  $K := \{x \in S^n : x_{k+1} \leq 0\}$  also über die abgeschlossene untere Hemisphäre integrieren und wir sehen sofort, dass  $u^{-1}(K)$  genau der abgeschlossene Einheitsball  $B := \{y : \|y\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^k$  ist.

Der nächste Schritt in der Rechnung ist etwas raffiniert: Man berechnet explizit die partiellen Ableitungen von  $u$ :

$$\partial_i u(y) = \frac{-4y_i}{(1 + \|y\|^2)^2} y + \frac{2}{1 + \|y\|^2} e_i + \frac{4y_i}{(1 + \|y\|^2)^2} e_{n+1}.$$

Daraus folgt aber leicht, dass für  $i \neq j$ , die Vektoren  $\partial_i u(y)$  und  $\partial_j u(y)$  aufeinander normal stehen und dass  $\|\partial_i u(y)\| = \frac{2}{1 + \|y\|^2}$  für alle  $i = 1, \dots, k$  gilt. Damit erhalten wir aber sofort

$$\text{vol}(u(y), \partial_1 u(y), \dots, \partial_k u(y)) = 2^k (1 + \|y\|^2)^{-k},$$

und somit  $\int_K \text{vol} = 2^k \int_B (1 + \|y\|^2)^{-k} dy$  und  $\int_K f \text{vol} = 2^k \int_B f(u(y)) (1 + \|y\|^2)^{-k} dy$  für jede stetige Funktion  $f : S^k \rightarrow \mathbb{R}$ .

Damit können wir aber auch Integrale über die ganze Sphäre berechnen. Sei nämlich  $A : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$  die Antipodalabbildung  $A(x) = -x$ . Dann ist  $A(K)$  die abgeschlossene obere Hemisphäre und  $K \cap A(K)$  ist der Äquator, also ist  $u^{-1}(K \cap A(K))$  die Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^k$ . Daraus folgt aber sofort, dass  $\int_{K \cap A(K)} \omega = 0$  für jede Form  $\omega$  gilt, also erhalten wir aus Teil (2) von Proposition 3.6  $\int_{S^k} \omega = \int_K \omega + \int_{A(K)} \omega$ . Den zweiten Summanden können wir mit Hilfe von Satz 3.6 berechnen, wobei wir aber auf die Orientierungen aufpassen müssen. Für  $x \in S^k$  gilt  $\mathbf{n}(x) = x$  und für  $v \in T_x S^k$  ist  $T_x A(v) = -v$ . Damit ist

$$(3.1) \quad \det(\mathbf{n}(A(x)), T_x A(v_1), \dots, T_x A(v_k)) = (-1)^{k+1} \det(x, v_1, \dots, v_k).$$

Also ist die Orientierung auf  $A(S^k) = S^k$  im Sinne von Satz 3.6 für ungerades  $k$  die gleiche Orientierung wie die ursprüngliche und für gerades  $k$  die umgekehrte Orientierung, also  $\int_{A(K)} \omega = (-1)^{k+1} \int_K A^* \omega$ . Andererseits zeigt (3.1) aber auch, dass  $A^* \text{vol} = (-1)^{k+1} \text{vol}$  also folgt (wie erwartet), dass  $\int_{A(K)} \text{vol} = \int_K \text{vol}$  gilt. Insgesamt erhalten wir  $\int_{S^k} \text{vol} = 2^{k+1} \int_B (1 + \|y\|^2)^{-k} dy$  und  $\int_{S^k} f \text{vol} = 2^k \int_B (f(u(y)) + f(-u(y))) (1 + \|y\|^2)^{-k} dy$ .

Damit kann man induktiv die Volumina  $A_k$  der  $k$ -dimensionalen Sphären berechnen. Dazu berechnet man das Integral der Funktion  $(1 + \|y\|^2)^{-k}$ , die nur von der Norm des Punktes  $y$  abhängt, als  $\int_0^1 (1 + r^2)^{-k} a_{k-1}(r) dr$  berechnet. Hier ist  $a_{k-1}(r)$  das Volumen der  $k - 1$ -Sphäre vom Radius  $r$ , also  $r^{k-1} A_{k-1}$ . Damit erhält man iterativ  $A_k = 2^{k+1} A_{k-1} \int_0^1 \frac{r^{k-1}}{(1+r^2)^k} dr$ .

In der klassischen Vektoranalysis werden die Volumsformen für Flächen in  $\mathbb{R}^3$  in Termen von Vektorfeldern interpretiert. Wir betrachten hier also eine orientierte 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^3$ , eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^3$  und ein stetiges Vektorfeld  $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf  $U$ . Aus Beispiel 2.9 kennen wir die 2-Form  $\tilde{Z} \in \Omega^2(U)$ , die durch  $\tilde{Z}(x, v_1, v_2) = \det(Z(x), v_1, v_2)$  gegeben ist. Auf  $M$  und für  $v_1, v_2 \in T_x M$  können wir das direkt mit der Volumsform in Beziehung setzen. Ist  $\mathbf{n}$  das Einheitsnormalenfeld auf  $M$ , dann können wir  $Z(x) = \langle Z(x), \mathbf{n}(x) \rangle \mathbf{n}(x) + w$  für  $w \in \mathbf{n}(x)^\perp = T_x M$  schreiben. Damit müssen aber die drei Vektoren  $w, v_1, v_2$  linear abhängig sein und wir

erhalten

$$\tilde{Z}(x, v_1, v_2) = \langle Z(x), \mathbf{n}(x) \rangle \det(\mathbf{n}(x), v_1, v_2) = \langle Z(x), \mathbf{n}(x) \rangle \operatorname{vol}(x, v_1, v_2),$$

also gilt auf  $M$  die Gleichung  $\tilde{Z} = \langle Z, \mathbf{n} \rangle \operatorname{vol}$  und wir erhalten  $\int_K \tilde{Z} = \int_K \langle Z, \mathbf{n} \rangle \operatorname{vol}$ . Physikalisch ist das sehr ansprechend, weil man das innere Produkt  $\langle Z(x), \mathbf{n}(x) \rangle$  als den “infinitesimalen Fluss von  $Z$  durch die Fläche  $M$  im Punkt  $x$ ” interpretieren kann. (Hier denkt man am besten an ein Strömungsfeld, das zum Beispiel die Geschwindigkeitsverteilung einer Flüssigkeitsströmung beschreibt.) Damit kann man das Integral als den “Fluss” des Vektorfelds durch die kompakte Teilmenge  $K \subset M$  betrachten.

Oft geht man noch einen Schritt weiter und betrachtet direkt die resultierende Funktion unter einer positiven lokalen Parametrisierung  $u : U \rightarrow M$ . Betrachten wir für  $y \in U$  die partiellen Ableitungen  $\partial_1 u(y)$  und  $\partial_2 u(y)$  dann können wir das Kreuzprodukt  $\nu(y) := \partial_1 u(y) \times \partial_2 u(y)$  bilden und natürlich definiert das eine stetige Funktion  $\nu : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Nun steht  $\nu(y)$  normal auf  $\partial_1 u(y)$  und  $\partial_2 u(y)$ , also ist  $\nu(y) = \lambda(y)\mathbf{n}(u(y))$  für einen reellen Faktor  $\lambda(y) \neq 0$ . Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass  $\|\partial_1 u(y) \times \partial_2 u(y)\|$  die Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms ist und wegen der positiven Orientierung stimmt das mit  $\det(\mathbf{n}(u(y)), \partial_1 u(y), \partial_2 u(y))$  überein. Damit sehen wir, dass

$$\langle Z(u(y)), \nu(y) \rangle = \langle Z(u(y)), \mathbf{n}(u(y)) \rangle \det(\mathbf{n}(u(y)), \partial_1 u(y), \partial_2 u(y)),$$

also sind die Funktionen, die man im Bereich einer lokalen Parametrisierung integrieren muss, gerade die Funktionen  $\langle Z(u(y)), \nu(y) \rangle$ . Daher interpretiert man  $\nu : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  als “Oberflächenelement im Bereich der Parametrisierung”.

Es gibt auch eine Version der Volumensform für allgemeine orientierte  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeiten  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Diese hat ähnliche Eigenschaften wie im Fall von Hyperflächen, insbesondere ist sie *nicht* invariant unter Diffeomorphismen, aber invariant unter Euklidischen Bewegungen. Für eine kompakte Teilmenge  $K \subset M$  kann man dann wieder das ( $k$ -dimensionale) Volumen von  $K$  als  $\int_K \operatorname{vol}$  definieren. Die Idee für diese Form ist einfach, dass man verlangt, dass für eine positiv orientierte Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_k$  für  $T_x M$  immer  $\operatorname{vol}(x, v_1, \dots, v_k) = 1$  gelten soll. Man zeigt leicht (siehe Übungen), dass das wohldefiniert ist. Man kann auch in diesem Fall im Bereich einer positiv orientierten lokalen Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  leicht die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  angeben, für die  $u^* \operatorname{vol} = f dz_1 \wedge \dots \wedge dz_k$  gilt. Für  $z \in U$  betrachtet man die  $k \times k$ -Matrix  $G(z) = (g_{ij}(z))$ , die durch  $g_{ij}(z) := \langle \partial_i u(z), \partial_j u(z) \rangle$  gegeben ist. Dann gilt (siehe Übungen)  $f(z) = \sqrt{\det(G(z))}$ .

**3.8. Der Satz von Stokes ohne Rand.** Betrachten wir eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  und eine stetige differenzierbare  $k - 1$ -Form  $\tau \in \Omega^{k-1}(U)$  und die äußere Ableitung  $d\tau \in \Omega^k(M)$ . Für einen Punkt  $x \in U \setminus \operatorname{supp}(\tau)$  gibt es eine offene Umgebung  $W$  von  $x$  auf der  $\tau$  identisch Null ist, also folgt aus der expliziten Formel aus Teil (4) von Satz 2.12 sofort, dass  $d\tau(x) = 0$  gilt. Damit ist aber  $d\tau$  identisch Null auf  $U \setminus \operatorname{supp}(\tau)$  und damit folgt  $\operatorname{supp}(d\tau) \subset \operatorname{supp}(\tau)$ . Ist also  $M \subset U$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit, sodass  $\tau$  kompakten Träger auf  $M$  hat, dann gilt das auch für  $d\tau$ , also können wir  $\int_M d\tau$  bilden. In seiner einfachsten Form sagt der Satz von Stokes dass solcher Integrale immer gleich Null sind und wir werden sehen, dass das direkt zu topologischen Anwendungen führt. Insbesondere können wir das auf beliebige exakte  $k$ -Formen anwenden, wenn  $M$  kompakt ist.

Das klingt vielleicht überraschend, ist es aber nicht unbedingt. Betrachten wir den einfachen Fall  $M = \mathbb{R}$  und  $k = 1$ . Dann müssen wir mit einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger beginnen und dann die 1-Form  $df = f' dx$  betrachten. Nun ist

aber  $\int_{\mathbb{R}} f'(x)dx = \int_a^b f'(x)dx$ , wobei wir  $a < b$  so wählen können, dass  $\text{supp}(f) \subset (a, b)$  gilt. Aber nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist dieses Integral durch  $f(b) - f(a) = 0 - 0 = 0$  gegeben. Tatsächlich ist das auch schon der wesentliche Input für den Beweis dieser Version des Satzes von Stokes.

**SATZ 3.8.** *Sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $M \subset U$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit und  $\tau \in \Omega^{k-1}(W)$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form, die kompakten Träger auf  $M$  hat. Dann ist  $\int_M d\tau = 0$ .*

**BEWEIS.** Wir finden endlich viele lokale Parametrisierungen  $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$ , sodass  $\text{supp}(\tau) \cap M \subset \cup_{i=1}^N u_i(U_i)$  und eine untergeordnete Partition der Eins  $\{\chi_i\}$ . Dann ist  $\tau = \sum_{i=1}^N \chi_i \tau$ ,  $\text{supp}(\chi_i \tau) \subset u_i(U_i)$  und weil  $d$  linear ist, gilt  $d\tau = \sum_{i=1}^N d(\chi_i \tau)$ . Wegen der Linearität des Integrals folgt  $\int_M d\tau = \sum_{i=1}^N \int_M d(\chi_i \tau)$ , also genügt es, den Satz für jede der Formen  $\chi_i \tau$  zu beweisen. Also dürfen wir oBdA annehmen, dass es eine lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, sodass  $\text{supp}(\tau) \subset u(U)$  und damit  $\text{supp}(d\tau) \subset u(U)$  gilt.

Wie wir in Abschnitt 3.4 bemerkt haben, gilt dann  $\int_M d\tau = \int_U u^* d\tau$  mit dem Integral über  $k$ -Formen auf  $\mathbb{R}^k$  auf der rechten Seite. Nach Satz 2.12 ist  $u^* d\tau = du^* \tau$  und  $u^* \tau$  und  $du^* \tau$  haben kompakten Träger, der in  $U$  enthalten ist. Damit kann man den Integrationsbereich auf  $\mathbb{R}^k$  ausdehnen, ohne das Integral zu ändern. Also genügt es zu zeigen, dass für eine  $C^1$ -Form  $\sigma \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^k)$  mit kompaktem Träger immer  $\int_{\mathbb{R}^k} d\sigma = 0$  gilt. Wie in Beispiel 2.11 benutzen wir die Multi-Indizes  $\hat{i} = (1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, k)$  für  $1 \leq i \leq k$  und schreiben  $\sigma = \sum_i \sigma_i dx_{\hat{i}}$  und von dort wissen wir, dass  $d\sigma = \sum_{i=1}^k (-1)^i \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$  gilt. Wegen der Linearität des Integrals genügt es wieder, einen der Summanden zu integrieren. Nach dem Satz von Fubini können wir das Integral über  $\mathbb{R}^k$  als iterierte Integrale über die einzelnen Variablen berechnen, wobei wir die Reihenfolge der Integrale beliebig wählen dürfen. Damit können wir aber in dem Summanden der  $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}$  enthält, als erstes über die Variable  $x_i$  integrieren, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) dx_i$$

bilden. Da  $\sigma$  kompakten Träger hat, hat für fixe  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  auch die Funktion  $x_i \mapsto \sigma_i(x_1, \dots, x_k)$  kompakten Träger also verschwindet dieses Integral nach dem 1-dimensionalen Spezialfall, den wir oben besprochen haben.  $\square$

**3.9. Eine topologische Anwendung.** Wir beweisen hier den sogenannten “Satz vom Igel” (englisch: “hairy ball theorem”), der besagt dass es für gerades  $k$  jedes Vektorfeld auf  $S^k$  mindestens eine Nullstelle hat. Wir beweisen das für  $C^1$ -Funktionen, die Erweiterung auf stetige Funktionen benötigt etwas mehr Topologie. Das ist überraschend, weil es auf Sphären ungerader Dimension problemlos ist, Vektorfelder ohne Nullstellen zu konstruieren (siehe Übungen). Der Beweis baut Lemma 2.13 auf, dass zusammen mit Satz 3.8 einen Zusammenhang zwischen Homotopie und Integration liefert. Zunächst benötigen wir ein Lemma über die Volumensform auf  $S^k$ :

**LEMMA 3.9.** *Sei  $W := \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$  und  $A : W \rightarrow W$  die Antipodalabbildung  $A(x) = -x$ . Dann gibt es eine  $C^\infty$ -Form  $\omega \in \Omega^k(W)$ , sodass  $\omega$  auf  $S^k$  die Volumensform aus Abschnitt 3.8 induziert und die  $d\omega = 0$  und  $A^* \omega = (-1)^{k+1} \omega$  erfüllt.*

**BEWEIS.** Natürlich ist  $\tilde{\omega}(x, v_1, \dots, v_k) := \det(x, v_1, \dots, v_k)$  eine  $C^\infty$ -Form in  $\Omega^k(W)$ , die auf  $S^k$  mit der Volumensform übereinstimmt und  $A^* \tilde{\omega} = (-1)^{k+1} \tilde{\omega}$  erfüllt. Andererseits definiert  $p(x) := \frac{1}{\|x\|} x$  eine  $C^\infty$ -Funktion  $p : W \rightarrow W$  mit Werten in  $S^k$ , sodass  $p|_{S^k} =$

$\text{id}_{S^k}$  gilt. Damit ist  $\omega := p^*\tilde{\omega} \in \Omega^k(W)$  ebenfalls eine  $C^\infty$ -Form. Nach Konstruktion ist  $p \circ A = A \circ p$  und damit  $A^*\omega = A^*p^*\tilde{\omega} = p^*A^*\tilde{\omega} = (-1)^{k+1}\omega$ . Wegen  $p|_{S^k} = \text{id}_{S^k}$  erhalten wir für  $x \in S^k$  nicht nur  $p(x) = x$  sondern auch  $Dp(x)(v) = v$  für alle  $v \in T_x S^k$ . Damit erhalten wir aber für  $x \in S^k$  und  $v_1, \dots, v_k \in T_x S^k$  sofort  $\omega(x, v_1, \dots, v_k) = \tilde{\omega}(x, v_1, \dots, v_k)$  und das stimmt mit der Volumensform überein. Schließlich ist nach Satz 2.12  $d\omega = p^*d\tilde{\omega}$ , also

$$d\omega(x, v_1, \dots, v_{k+1}) = d\tilde{\omega}(p(x), Dp(x)(v_1), \dots, Dp(x)(v_{k+1})).$$

Nun ist aber offensichtlich  $Dp(x)(x) = 0$ , also ist  $Dp(x)$  nicht injektiv und kann damit auch nicht surjektiv sein. Also sind die Vektoren  $Dp(x)(v_1), \dots, Dp(x)(v_{k+1})$  immer linear abhängig und damit folgt  $d\omega = 0$ .  $\square$

Damit können wir nun unser Resultat beweisen:

**SATZ 3.9.** *Sei  $k$  gerade. Dann gibt es keine  $C^1$ -Funktion  $Z : S^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$  sodass  $Z(x) \neq 0$  und  $Z(x) \perp x$  für alle  $x \in S^k$  gilt.*

**BEWEIS.** Wir nehmen indirekt an, dass so eine  $C^1$ -Funktion existiert. Wie im Lemma setzen wir  $W := \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ , definieren  $p(x) := \frac{1}{\|x\|}x$  und definieren  $\varphi : W \rightarrow W$  durch  $\varphi(x) := x + Z(p(x)) \neq 0$ . Sei nun  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion mit  $h(t) = 1$  für alle  $t < 1/3$  und  $h(t) = 0$  für alle  $t > 2/3$ , siehe den Beweis von Satz 3.5. Dann ist  $H_1 : W \times \mathbb{R} \rightarrow W$ ,  $H_1(x, t) := x + h(t)Z(p(x))$  offensichtlich eine  $C^1$ -Funktion mit  $H_1(x, 0) = \varphi(x)$  und  $H_1(x, 1) = x$ . In der Sprache von Lemma 2.13 bedeutet das  $H_1 \circ i_0 = \varphi$  und  $H_1 \circ i_1 = \text{id}_W$ . Für die Form  $\omega$  aus Lemma 3.9 betrachten wir  $(H_1)^*\omega \in \Omega^k(W \times \mathbb{R})$  was nach Konstruktion eine  $C^1$ -Form ist und erhalten  $d(H_1)^*\omega = (H_1)^*d\omega = 0$ . Damit können wir Lemma 2.13 anwenden und erhalten eine  $C^1$ -Form  $\tau \in \Omega^{k-1}(W)$ , sodass

$$(i_1)^*(H_1)^*\omega - (i_0)^*(H_1)^*\omega = \varphi^*\omega - \omega = d\tau$$

gilt. Nach Satz 3.8 ist  $\int_{S^k} d\tau = 0$ , also  $\int_{S^k} \varphi^*\omega = \int_{S^k} \omega$  und das liefert das Volumen von  $S^k$  und ist daher  $> 0$ .

Andererseits betrachten wir  $H_2 : W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ ,

$$H_2(x, t) := h(t)\varphi(x) + (1 - h(t))A(x).$$

Auch diese Funktion ist offensichtlich  $C^1$  und explizit ist

$$H_2(x, t) = (2h(t) - 1)x + h(t)Z(p(x)).$$

Nach Voraussetzung sind  $x$  und  $Z(p(x))$  ungleich Null und orthogonal zueinander, also hat  $H_2$  Werte in  $W$ . Natürlich ist  $H_2(x, 0) = \varphi(x)$  und  $H_2(x, 1) = A(x)$ . Damit schließen wir aber genau wie zuvor, dass  $\int_{S^k} \varphi^*\omega = \int_{S^k} A^*\omega = (-1)^{k+1} \int_{S^k} \omega$  und da  $k$  gerade ist, ist  $(-1)^{k+1} = -1$ , was einen Widerspruch liefert.  $\square$

## Teilmannigfaltigkeiten mit Rand

Ähnlich wie im Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung wird in der allgemeinen Version des Satzes von Stokes ein Integral über eine äußere Ableitung durch einen Randterm beschrieben. Dazu müssen wir eine Theorie von Mannigfaltigkeiten mit Rand entwickeln, was aber relativ einfach geht. Analog zu Teilmannigfaltigkeiten, die lokal um jeden Punkt aussehen, wie eine offene Teilmenge in  $\mathbb{R}^k$ , sehen Teilmannigfaltigkeiten mit Rand lokal so aus wie eine offene Teilmenge in einem Halbraum. Damit müssen wir zunächst wieder einiges an Begriffen zu Halbräumen einführen.

**3.10. Halbräume.** Die folgenden Begriffe sollten an dieser Stelle grundsätzlich nicht überraschend sein. Die Konventionen sind so gewählt, dass sich später schöne Formeln ergeben.

**DEFINITION 3.10.** (1) Für  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$  definieren wir den *Halbraum*  $\mathcal{H}^k := \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 \leq 0\}$  den *Rand*  $\partial\mathcal{H}^k := \{x \in \mathcal{H}^k : x_1 = 0\}$  und das Innere von  $\mathcal{H}^k$  als  $\mathcal{H}^k \setminus \partial\mathcal{H}^k$ . Analog definieren wir für eine Teilmenge  $U \subset \mathcal{H}^k$  den Rand als  $\partial U := U \cap \partial\mathcal{H}^k$  und das Innere als  $U \setminus \partial U$ .

(2) Sei  $k$  wie oben,  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathcal{H}^k$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und  $r \geq 1$ . Dann nennen wir Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^r$ -Funktion, wenn es für jeden Punkt  $x \in U$  eine offene Teilmenge  $W \subset \mathbb{R}^k$  mit  $x \in W$  und eine  $C^r$ -Funktion (im Sinne der Analysis)  $\tilde{F} : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, sodass  $F|_{W \cap U} = \tilde{F}|_{W \cap U}$  gilt.

Mit diesen Definitionen ist auch klar, was wir mit einem  $C^r$ -Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen  $U$  und  $V$  von  $\mathcal{H}^k$  meinen. Das ist eine injektive  $C^r$ -Funktion  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ , sodass  $\Phi(U) = V$  gilt und sodass auch die inverse Funktion  $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$  eine  $C^r$ -Funktion (nach  $\mathbb{R}^k$ ) ist.

**LEMMA 3.10.** Sei  $U \subset \mathcal{H}^k$  eine offene Teilmenge mit Rand  $\partial U$  und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^r$ -Funktion.

(1)  $U \setminus \partial U$  ist offen in  $\mathbb{R}^k$  und  $\partial U$  ist eine offene Teilmenge von  $\partial\mathcal{H}^k \cong \mathbb{R}^{k-1}$ .

(2) Die Einschränkung  $F|_{U \setminus \partial U}$  ist  $C^r$  im Sinne der Analysis. Für  $x \in \partial\mathcal{H}^k$  und eine  $C^r$ -Erweiterung  $\tilde{F}$  von  $F$  auf eine offene Umgebung  $W$  von  $x$  in  $\mathbb{R}^k$  wie in Definition 3.10 hängt  $D\tilde{F}(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  nur von  $F$  ab.

(3) Ist  $K \subset U$  kompakt, dann gibt es eine offene Teilmenge  $W \subset \mathbb{R}^k$  mit  $K \subset W \cap U$  und eine  $C^r$ -Funktion  $\tilde{F} : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ , sodass  $\tilde{F}|_{W \cap U} = F|_{W \cap U}$  für eine (in  $\mathcal{H}^k$ ) offene Teilmenge  $V \subset \mathcal{H}^k$  mit  $K \subset V$  gilt.

(4) Sei  $V \subset \mathcal{H}^k$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Dann schränkt sich  $\Phi$  zu Diffeomorphismen  $\partial U \rightarrow \partial V$  und  $(U \setminus \partial U) \rightarrow (V \setminus \partial V)$  ein.

**BEWEIS.** (1) Nach Definition gibt es eine offene Teilmenge  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$ , sodass  $U = \tilde{U} \cap \mathcal{H}^k$  gilt. Offensichtlich ist  $\mathcal{H}^k \setminus \partial\mathcal{H}^k$  offen in  $\mathbb{R}^k$  und nach Definition ist  $U \setminus \partial U = \tilde{U} \cap (\mathcal{H}^k \setminus \partial\mathcal{H}^k)$  und damit offen in  $\mathbb{R}^k$ . Andererseits finden wir für  $x \in \partial U = U \cap \partial\mathcal{H}^k$  einen  $\varepsilon$ -Ball um  $x$ , der ganz in  $\tilde{U}$  liegt. Der Schnitt dieses Balles mit  $\partial\mathcal{H}^k$  ist ein  $\varepsilon$ -Ball in  $\mathbb{R}^{k-1}$ , der ganz in  $\partial U$  liegt und damit folgt die zweite Behauptung.

(2) Die erste Behauptung folgt sofort, weil  $C^r$  im Sinne der Analysis zu sein eine lokale Eigenschaft ist. Für die zweite Behauptung sei  $x \in \partial U$  und  $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$ . Dann können wir  $D\tilde{F}(x)(v)$  als  $(\tilde{F} \circ c)'(0)$  für  $c(t) = x + tv$  berechnen. Ist  $v_1 \leq 0$ , dann liegt  $c(t)$  für  $t \in [0, \varepsilon)$  in  $U$ , für  $v_1 \geq 0$  gilt das für  $t \in (-\varepsilon, 0]$ . Auf  $U$  stimmt aber  $\tilde{F}$  mit  $F$  überein man kann in beiden Fällen  $(\tilde{F} \circ c)'(0)$  aus den Werten von  $\tilde{F} \circ c$  auf dem angegebenen Intervall berechnen.

(3) Zu jedem  $x \in K \cap \partial\mathcal{H}^k$  finden wir eine offene Teilmenge  $W_x \subset \mathbb{R}^k$  und eine  $C^r$ -Funktion  $\tilde{F}_x : W_x \rightarrow \mathbb{R}^m$ , sodass  $\tilde{F}_x|_{W_x \cap U} = F|_{W_x \cap U}$  gilt. Das liefert eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge  $K \cap \partial\mathcal{H}^k$  also finden wir  $x_1, \dots, x_n$  sodass  $K \cap \partial\mathcal{H}^k \subset \cup_{i=1}^n W_{x_i}$  für  $W_{x_i} := W_{x_i}$  gilt. Setzen wir  $W_0 := U \setminus \partial U$ , dann ist  $K \subset W := \cup_{i=0}^n W_{x_i}$ . Satz 3.5 liefert  $C^\infty$ -Funktionen  $\chi_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  mit Werten in  $[0, 1]$  mit  $\text{supp}(\chi_i) \subset W_{x_i}$  und eine offene Teilmenge  $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^k$  mit  $K \subset \tilde{W}$ , sodass  $\sum \chi_i(x) = 1$  für alle  $x \in \tilde{W}$  gilt. Nach Teil (2) ist  $\chi_0 F : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^r$ -Funktion und man kann für alle  $i = 0, \dots, n$  die Funktion  $\chi_i \tilde{F}_{x_i}$  durch 0 zu einer  $C^r$ -Funktion auf ganz  $W$  fortsetzen. Damit hat aber  $\tilde{F} := \chi_0 F + \sum_{i=1}^n \chi_i \tilde{F}_{x_i}$  alle behaupteten Eigenschaften, wobei wir  $V := \tilde{W} \cap U$  setzen.



(4) Nehmen wir indirekt an, dass  $x \in \partial U$  ein Punkt ist, sodass  $\Phi(x) \in V \setminus \partial V$  gilt. Sei  $W \subset \mathbb{R}^k$  offen mit  $x \in W$ , sodass es eine  $C^1$ -Erweiterung  $\tilde{\Phi} : W \rightarrow \mathbb{R}^k$  von  $\Phi$  auf  $W$  gibt. Weil  $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$  stetig und  $W \cap U$  offen in  $U$  ist, finden wir einen offenen Ball  $B$  um  $\Phi(x)$  in  $\mathbb{R}^k$ , sodass  $B \subset V$  und  $\Phi^{-1}(B) \subset U \cap W$  gilt. Auf  $B$  gilt dann aber  $\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1} = \Phi \circ \Phi^{-1} = \text{id}_B$ , also sind die linearen Abbildungen  $D\Phi^{-1}(\Phi(x))$  und  $D\tilde{\Phi}^{-1}(x)$  invers zu einander und damit ist  $D\Phi^{-1}(\Phi(x))$  ein linearer Isomorphismus. Nach dem inversen Funktionensatz für offene Teilmengen gibt es eine offene Teilmenge  $O \subset \mathbb{R}^k$  sodass  $\Phi^{-1}(O)$  offen in  $\mathbb{R}^k$  ist. Dann ist aber  $\Phi^{-1}(O \cap B)$  eine offene Teilmenge in  $\mathbb{R}^k$ , mit  $x \in \Phi^{-1}(O \cap B) \subset U$ , ein Widerspruch zu  $x \in \partial U$ . Angewandt auf  $\Phi^{-1}$  zeigt dieses Argument auch, dass  $x \in U \setminus \partial U$  und  $\Phi(x) \in \partial V$  zu einem Widerspruch führt.

Damit sehen wir, dass sich  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  zu inversen Bijektionen zwischen  $\partial U$  und  $\partial V$  sowie zwischen  $U \setminus \partial U$  und  $V \setminus \partial V$  einschränken. Aus der Definition folgt aber sofort, dass es sich bei diesen Einschränkungen um  $C^1$ -Funktionen zwischen offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^{k-1}$  bzw. von  $\mathbb{R}^k$  handelt und damit folgt die Behauptung.  $\square$

Der zweite Teil des Lemmas zeigt insbesondere, dass man für eine  $C^1$ -Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathcal{H}^k$  und einen Punkt  $x \in \partial U$  sinnvoll eine Ableitung  $DF(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  definieren kann. Man setzt einfach  $DF(x) := D\tilde{F}(x)$  für eine beliebige lokale Ausdehnung  $\tilde{F}$  von  $F$  um  $x$ . Wir werden das im weiteren verwenden, ohne speziell darauf hinzuweisen.

**3.11. Grundlegende Definitionen.** So wie wir  $\mathbb{R}^k$  als Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  betrachtet haben, können wir natürlich auch  $\mathcal{H}^k$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  für  $n \geq k$  betrachten. Damit können wir nun die grundlegenden Definitionen ganz analog wie im Fall gewöhnlicher Teilmannigfaltigkeiten formulieren.

**DEFINITION 3.11.** Sei  $k \leq n$  und betrachten wir  $\mathcal{H}^k$  als die Teilmenge  $\{x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) : x_1 \leq 0\}$  von  $\mathbb{R}^n$ . Seien  $r, s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  mit  $r, s \geq 1$ .

(1) Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt eine *k-dimensionale  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeit mit Rand*, wenn es für jeden Punkt  $x \in M$  offene Teilmengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und einen  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  gibt, sodass  $\Phi(U \cap M) = V \cap \mathcal{H}^k$  gilt. Der Diffeomorphismus  $\Phi$  heißt dann eine *lokale Trivialisierung* für  $M$ .

(2) Ein Punkt  $x \in M$  heißt *Randpunkt* von  $M$ , wenn es einen Diffeomorphismus  $\Phi$  wie in (1) gibt, sodass  $\Phi(x) \in V \cap \partial \mathcal{H}^k$  gilt. Die Menge der Randpunkte wird mit  $\partial M$  bezeichnet. Punkte in  $M \setminus \partial M$  bezeichnet man als *innere Punkte* von  $M$ .

(3) Für eine  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  mit Rand,  $m \in \mathbb{N}$  und  $s \leq r$  definieren wir  $C^s$ -Funktionen von  $M$  nach  $\mathbb{R}^m$  analog wie in Teil (2) von Definition 2.1 über lokale Ausdehnungen.  $C^s$ -Funktionen zwischen Teilmannigfaltigkeiten mit Rand definieren wir dann analog wie in Teil (3) von Definition 2.1.

Natürlich ist  $\mathcal{H}^k \subset \mathbb{R}^n$  für jedes  $n \geq k$  eine  $C^\infty$ -Teilmannigfaltigkeit mit Rand. Aus der Definition folgt wieder sofort, dass offene Teilmengen von Teilmannigfaltigkeiten mit Rand selbst Teilmannigfaltigkeiten mit Rand sind. Außerdem können wir die Abbildung  $\Xi(x_1, \dots, x_n) := (-e^{x_1}, x_2, \dots, x_n)$  benutzen um  $\mathbb{R}^n$  mit  $\{(x_1, \dots, x_n) : x_1 < 0\}$  zu identifizieren. Damit können wir aber für eine gewöhnliche Teilmannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  und einen Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  wie in Definition 2.10 die Komposition  $\Xi \circ \Phi$  betrachten, die  $U \cap M$  auf  $\Xi(V) \cap (\mathcal{H}^k \setminus \partial \mathcal{H}^k)$  abbildet. Das macht  $M$  zu einer Teilmannigfaltigkeit mit Rand, für die aber  $\partial M = \emptyset$  gilt. Also erhalten wir eine Verallgemeinerung des Konzepts von Teilmannigfaltigkeiten und klarerweise führt der "neue" Begriff zu den gleichen  $C^s$ -Funktionen. Analog wie in Abschnitt 2.1 sieht man auch leicht, dass

das Bild einer Teilmannigfaltigkeit mit Rand unter einem Diffeomorphismus ebenfalls eine Teilmannigfaltigkeit mit Rand ist.

**BEISPIEL 3.11.** Sei  $M = B^n := \{x : \|x\| \leq 1\}$  der abgeschlossene Einheitsball in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Rand. Dazu verwenden wir einerseits  $U_0 := \{x : \|x\| < 1\}$  und  $\Phi = \text{id}_{U_0}$  als lokale Trivialisierung auf dem offenen Einheitsball. Für  $x \in S^{n-1}$ , also  $\|x\| = 1$  haben wir in Beispiel 2.1 lokale Trivialisierungen  $\Phi : U \rightarrow V$  für  $S^{n-1}$  konstruiert, wobei  $V = (-1, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$  war. Aus der Formel dort sieht man aber sofort, dass für  $y \in U$  die erste Komponente von  $\Phi(y)$  durch  $\|y\| - 1$  gegeben ist. Damit ist aber  $\Phi(U \cap B^n) = V \cap \mathcal{H}^n$ . Damit folgt die Behauptung, sowie  $S^{n-1} = \partial B^n$ .

In diesem Beispiel ist der Rand  $\partial B^n = S^{n-1}$  eine Teilmannigfaltigkeit, während die inneren Punkte eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und damit eine  $n$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit bilden. Diese beiden Tatsachen gelten ganz allgemein:

**PROPOSITION 3.11.** *Sei  $n \geq k$  und  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale  $C^1$ -Teilmannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(1) *Ist  $x \in \partial M$ , dann gilt für jede lokale Trivialisierung  $\Phi : U \rightarrow V$  für  $M$  mit  $x \in U$ , dass  $\Phi(x)$  in  $V \cap \partial \mathcal{H}^k$  liegt.*

(2)  *$M \setminus \partial M$  ist eine offene Teilmenge von  $M$  und eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit (ohne Rand) von  $\mathbb{R}^n$ . Damit ist  $\partial M$  abgeschlossen in  $M$ , also ist für kompaktes  $M$  auch  $\partial M$  kompakt.*

(3) *Ist  $\partial M \neq \emptyset$ , dann ist  $\partial M$  eine  $(k-1)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit (ohne Rand) von  $\mathbb{R}^n$ .*

**BEWEIS.** (1) Nehmen wir an, dass  $\Phi : U \rightarrow V$  eine lokale Trivialisierung mit  $\Phi(x) \in V \cap \partial \mathcal{H}^k$  ist und sei  $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  eine weitere lokale Trivialisierung mit  $x \in \tilde{U}$ . Indem wir  $U$  und  $\tilde{U}$  durch  $U \cap \tilde{U}$ ,  $V$  durch  $\Phi(U \cap \tilde{U})$  und  $\tilde{V}$  durch  $\tilde{\Phi}(U \cap \tilde{U})$  ersetzen können wir oBdA annehmen, dass  $U = \tilde{U}$  gilt. Zerlegen wir den Zielraum (in dem  $V$  und  $\tilde{V}$  sitzen) als  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  und entsprechend  $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2)$ . Außerdem können wir  $\Psi := \Phi^{-1}$  auf  $V \cap \mathcal{H}^k$  einschränken und dann ist  $\tilde{\Phi}_2 \circ (\Psi_{V \cap \mathcal{H}^k})$  eine bijektive stetige Funktion  $V \cap \mathcal{H}^k \rightarrow \tilde{V} \cap \mathcal{H}^k$  zwischen offenen Teilmengen von  $\mathcal{H}^k$ . Außerdem ist die Ausdehnung  $\tilde{\Phi}_1 \circ (\Psi_{V \cap \mathcal{H}^k})$  eine  $C^1$ -Funktion im Sinne der Analysis, also erhalten wir eine  $C^1$ -Funktion zwischen offenen Teilmengen von  $\mathcal{H}^k$ . Für die inverse Funktion können wir aber genauso argumentieren, also ist

$$\tilde{\Phi}_1 \circ (\Psi_{V \cap \mathcal{H}^k}) : V \cap \mathcal{H}^k \rightarrow \tilde{V} \cap \mathcal{H}^k$$

ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Nach Teil (3) von Lemma 2.9 bildet dieser Diffeomorphismus  $V \cap \partial \mathcal{H}^k$  nach  $\tilde{V} \cap \partial \mathcal{H}^k$  ab, also liegt  $\tilde{\Phi}(x)$  in  $\tilde{V} \cap \partial \mathcal{H}^k$ .

(2) Ist  $x \in M \setminus \partial M$  und  $\Phi : U \rightarrow V$  eine lokale Trivialisierung mit  $x \in U$ , dann ist  $\Phi(x) \in \tilde{V} := V \cap (\mathcal{H}^k \setminus \partial \mathcal{H}^k)$ . Nun ist  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  offen, also ist auch  $\tilde{U} := \Phi^{-1}(\tilde{V})$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und nach Teil (1) ist  $\tilde{U} \cap M \subset M \setminus \partial M$ . Damit definiert aber  $\Phi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  eine lokale Trivialisierung im Sinne von Definition 2.1 für  $M \setminus \partial M$  mit  $x \in \tilde{U}$ .

(3) Für  $x \in \partial M$  finden wir eine lokale Trivialisierung  $\Phi : U \rightarrow V$  mit  $\Phi(x) \in \mathbb{R}^{k-1} = \{x : x_1 = x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Natürlich ist  $V \cap \mathbb{R}^{k-1}$  offen in  $\mathbb{R}^{k-1}$  und nach Teil (1) ist  $\Phi(U \cap \partial M) = V \cap \mathbb{R}^{k-1}$ , also erhalten wir eine lokale Trivialisierung für  $\partial M$  um  $x$ .  $\square$

Im Beweis von Proposition 3.11 ist klar erkennbar, wie das Konzept von lokalen Parametrisierungen für Teilmannigfaltigkeiten mit Rand aussieht: Man betrachtet eine

offene Teilmenge  $U \subset \mathcal{H}^k$  und eine  $C^r$ -Funktion  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Man verlangt, dass  $u(U) =: V$  eine offene Teilmenge von  $M$  und  $u : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus ist und dass für alle  $z \in U$  die Ableitung  $Du(z) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist. (Siehe Abschnitt 3.10 für die Definition von  $Du(z)$  für  $z \in \partial U$ .) Aus dem Beweis von Teil (1) von Proposition 3.11 folgt leicht, dass für eine lokale Trivialisierung  $\Phi : U \rightarrow V$  für  $M$  um  $x$  mit Inverser  $\Psi : V \rightarrow U$  die Einschränkung  $\Psi|_{V \cap \mathcal{H}^k}$  eine lokale Parametrisierung in diesem Sinn (und auch gleich ihre glatte Ausdehnung auf  $V \cap \mathbb{R}^k$ ) liefert. Insbesondere sehen wir, dass Teilmannigfaltigkeiten mit Rand immer lokale Parametrisierungen besitzen.

Umgekehrt zeigt man analog zu Satz 2.3, dass solche lokale Parametrisierungen eine äquivalenten Definition von Teilmannigfaltigkeiten mit Rand liefern. Man kann nämlich so eine Parametrisierung rund um einen Punkt  $z \in U$  zur einer Inversen einer lokalen Trivialisierung ausdehnen. In diesem Bild liegt ein Punkt  $x \in M$  genau dann in  $\partial M$ , wenn für eine (oder äquivalent jede) lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $x \in u(U)$  sogar  $x \in u(\partial U)$  gilt. Der Beweis von Proposition 3.11 zeigt auch direkt, dass für eine lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  die Einschränkung von  $u$  auf die Menge  $\partial U$ , die wir als offene Teilmenge von  $\partial \mathcal{H}^k \cong \mathbb{R}^{k-1}$  betrachten können eine lokale Parametrisierung für  $\partial M$  liefert.

Die Äquivalenz der Beschreibungen impliziert dann auch die Verallgemeinerung von Proposition 2.5 auf Teilmannigfaltigkeiten mit Rand: Die lokale Parametrisierung einer Teilmannigfaltigkeit  $M$  mit Rand sind genau die Diffeomorphismen von offenen Teilmengen von  $\mathcal{H}^k$  auf offenen Teilmengen von  $M$ . Insbesondere können wir dann lokale Parametrisierungen  $u : U \rightarrow V$  und  $\tilde{u} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  mit  $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$  betrachten. Für diese sind  $u^{-1}(V \cap \tilde{V}) \subset U$  und  $\tilde{u}^{-1}(V \cap \tilde{V}) \subset \tilde{U}$  offen und  $\tilde{u}^{-1} \circ u : u^{-1}(V \cap \tilde{V}) \rightarrow \tilde{u}^{-1}(V \cap \tilde{V})$  ist ein Diffeomorphismus. Für  $C^r$ -Teilmannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  mit Rand und  $1 \leq s \leq r$  ist eine stetige Funktion  $F : M \rightarrow N$  genau dann eine  $C^s$ -Funktion, wenn es für jeden Punkt  $x \in M$  lokale Parametrisierungen  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  mit  $x \in u(U)$  und  $\tilde{u} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $N$  mit  $F(x) \in \tilde{u}(\tilde{U})$  gibt, sodass die Funktion  $\tilde{u}^{-1} \circ F \circ u$  auf der offenen Teilmenge  $u^{-1}(F^{-1}(\tilde{u}(\tilde{U})) \cap U) \subset \mathcal{H}^k$  eine  $C^s$ -Funktion im Sinn von Definition 3.10 ist.

**3.12. Tangentialräume und Orientierungen.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Rand und  $x \in M$  ein Punkt. Dann definiert man  $T_x M$  auch analog zu Abschnitt 2.2 über Ableitungen von Kurven definieren, muss dazu aber dann (zumindest in Randpunkten) allgemeinere Kurven zulassen. Für ein offenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $0 \in I$  setzen wir  $I_+ := \{t \in I : t \geq 0\}$  und  $I_- := \{t \in I : t \leq 0\}$  und betrachten  $C^1$ -Kurven  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $c(I_+) \subset M$  oder  $c(I_-) \subset M$  gilt. Wir werden in der folgenden Proposition beweisen, dass  $T_x M$  immer ein  $k$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  ist und dass für eine lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $x \in u(U)$  immer  $T_x M = \text{Im}(Du(z))$  gilt, wobei  $z \in U$  der eindeutige Punkt mit  $u(z) = x$  ist.

Damit kann man die Definitionen von Orientierungen und Orientierbarkeit aus Definition 3.2 wortwörtlich auf den Fall von Teilmannigfaltigkeiten mit Rand erweitern. Eine Orientierung von  $M$  ist durch eine Wahl einer Orientierung auf jedem Tangentialraum  $T_x M$  gegeben und Konsistenz dieser Orientierungen ist über lokale Parametrisierungen definiert. Falls  $M$  orientierbar ist, also eine Orientierung besitzt, dann gibt es lokal um jeden Punkt  $x \in M$  positiv orientierte lokale Parametrisierungen  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$ , bei denen für jeden Punkt  $z \in U$  die Basis  $\partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z)$  für  $T_{u(z)} M$  positiv orientiert ist. Das bedeutet wieder, dass  $u : U \rightarrow u(U)$  ein orientierungstreuer Diffeomorphismus ist. Im Fall von Hyperflächen mit Rand, also von  $k$ -dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^{k+1}$  mit Rand kann man Orientierungen wie in Abschnitt 3.3 durch Einheitsnormalenfelder beschreiben.

Für innere Punkte  $x \in M \setminus \partial M$  erhält man den gleichen Tangentialraum wie in Abschnitt 2.2 und hier genügt es, Kurven mit  $c(I) \subset M$  zu betrachten. Für Randpunkte ist die Situation interessanter, was den ersten Teil der folgenden Proposition darstellt. Der zweite Teil ist ein entscheidendes Resultat für die Integrationstheorie, nämlich dass eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit mit Rand eine natürliche Orientierung des Randes liefert.

**SATZ 3.12.** *Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Rand.*

(1) *Für  $x \in M$  ist  $T_x M$  ein  $k$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ . Für  $x \in \partial M$  ist  $T_x \partial M$  ein Teilraum von  $T_x M$  der Dimension  $k-1$  und für Tangentialvektoren in  $T_x M \setminus T_x \partial M$  kann man in natürlicher Weise zwischen nach innen weisenden Vektoren und nach außen weisenden Vektoren unterscheiden.*

(2) *Ist  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung für  $M$  und  $x = u(z)$ , dann ist  $T_x M = Du(z)(\mathbb{R}^k)$ . Für  $z \in \partial U$  (und somit  $x \in \partial M$ ) ist  $T_x \partial M = Du(z)(\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1})$  und nach außen (innen) weisende Tangentialvektoren haben die Form  $Du(z)(v)$  mit  $v_1 > 0$  ( $v_1 < 0$ ).*

(3) *Eine Orientierung von  $M$  induziert eine natürliche Orientierung der Teilmannigfaltigkeit  $\partial M$ . Diese hat die Eigenschaft, dass für eine positiv orientierte lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  die Einschränkung  $u|_{\partial U} : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine positiv orientierte lokale Parametrisierung für  $\partial M$  ist.*

**BEWEIS.** (1) Sei  $\Phi : U \rightarrow V$  eine lokale Trivialisierung für  $M$  mit  $x \in U$ . Dann betrachten wir wie in Satz 2.2 den linearen Isomorphismus  $D\Phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für eine Kurve  $c : I \rightarrow M$  mit  $c(0) = x$  wie in der Definition von  $T_x M$  bildet  $\Phi \circ c$  entweder  $I_+$  oder  $I_-$  nach  $\mathcal{H}^k \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  ab. Damit folgt jedenfalls  $D\Phi(x)(c'(0)) = (\Phi \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^k$ . Damit schließen wir dann wie in Satz 2.2 dass sich  $D\Phi(x)$  zu einer Bijektion zwischen  $T_x M$  und  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  einschränkt, also folgt die erste Behauptung.

Für  $x \in \partial M$  ist nach Definition ist klar, dass  $T_x \partial M \subset T_x M$  gilt und nach Satz 2.2 ist  $T_x \partial M$  ein  $k-1$ -dimensionaler Teilraum. Natürlich identifiziert  $D\Phi(x)$  den Teilraum  $T_x \partial M$  mit  $\{v \in \mathbb{R}^k : v_1 = 0\}$ . Für eine Kurve  $c$  wie oben ist  $(\Phi \circ c)'(0) \in \partial H^k$  und hat damit erste Komponente gleich 0. Setzen wir  $v := (\Phi \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^k$ , dann kann offensichtlich  $c(I_+) \subset M$  nur dann gelten, wenn  $v_1 \leq 0$  ist und analog erfordert  $c(I_-) \subset M$  natürlich  $v_1 \geq 0$ . Ist  $c'(0) \notin T_x \partial M$ , dann muss  $v_1 \neq 0$  gelten, also folgt die letzte Behauptung, wobei  $c(I_+) \subset M$  bzw.  $v_1 < 0$  den nach innen weisenden Vektoren entspricht.

(2) Für lokale Parametrisierungen, die man als Einschränkungen der Inversen von lokalen Trivialisierungen erhält, folgen die Behauptungen direkt aus Teil (1). Wie in Abschnitt 3.11 bemerkt kann man aber jede lokale Parametrisierung (eventuell auf einer kleineren Menge) zu so einer Inversen ausdehnen, also erhalten wir das Resultat für beliebige lokale Parametrisierungen.

(3) Sei  $v \in \mathbb{R}^k$  mit positiver erster Komponente und  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^k$  ein Vektor, dessen erste Komponente  $\neq 0$  ist. Dann gibt es einen Vektor  $w \in \partial H^k$ , sodass  $\tilde{v} = av + w$  gilt und  $a$  hat das gleiche Vorzeichen die erste Komponente von  $\tilde{v}$ . Wählen wir eine Basis  $v_2, \dots, v_k$  für  $\partial H^k$ , dann sind die Basen  $v, v_2, \dots, v_k$  und  $\tilde{v}, v_2, \dots, v_k$  genau dann gleich orientiert, wenn  $a > 0$  gilt. Für  $x \in \partial M$  überträgt sich das mittels  $D\Phi(x)$  für eine lokale Trivialisierung  $\Phi$  um  $x$  auf  $T_x M$ : Wählen wir eine Basis  $w_2, \dots, w_k$  für  $T_x \partial M$ , dann ist für einen Vektor  $w \in T_x M$ ,  $w, w_2, \dots, w_k$  genau dann eine Basis für  $T_x M$ , wenn die erste Komponente von  $D\Phi(x)(w)$  ungleich 0 ist, also  $w \in T_x M \setminus T_x \partial M$  gilt. Sind  $w$  und  $\tilde{w}$  zwei solche Vektoren, dann sind die Basen  $w, w_2, \dots, w_k$  und  $\tilde{w}, w_2, \dots, w_k$  genau dann gleich orientiert, wenn die ersten Komponenten von  $D\Phi(x)(w)$  und  $D\Phi(x)(\tilde{w})$  gleiches

Vorzeichen haben, also die Vektoren  $v$  und  $\tilde{v}$  entweder beide nach außen oder beiden nach innen weisen.

Damit können wir eine Orientierung auf  $T_x\partial M$  definieren, indem wir eine Basis  $w_2, \dots, w_k$  als positiv orientiert erklären, wenn für jeden nach außen weisenden Vektor  $w_1 \in T_xM \setminus T_x\partial M$  die Basis  $w_1, \dots, w_k$  für  $T_xM$  in der gegebenen Orientierung für  $M$  positiv orientiert ist.

Sei nun  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine positiv orientierte lokale Parametrisierung für  $M$  mit  $x \in u(U)$ . Dann ist  $u|_{\partial U} : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung für  $\partial M$ , die für  $z \in \partial U$  die Basis  $\partial_2 u(z), \dots, \partial_k u(z)$  für  $T_{u(z)}\partial M$  liefert. Aber nach Konstruktion bildet die Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c(t) := u(z + te_1)$ , die auf einem passenden Intervall  $I$  definiert ist  $I_-$  nach  $M$  ab. Damit weist  $\partial_1 u(z) \in T_{u(z)}M \setminus T_{u(z)}\partial M$  nach außen, also ist nach Definition die Basis  $\partial_2 u(z), \dots, \partial_k u(z)$  immer positiv orientiert. Das beweist, dass wir eine konsistente Orientierung auf  $\partial M$  definiert haben und die Behauptung über positiv orientierte lokale Parametrisierungen.  $\square$

**3.13. Integration und der allgemeine Satz von Stokes.** Die Integration von  $k$ -Formen über kompakte Teilmengen erweitert sich vollkommen problemlos auf orientierte Teilmannigfaltigkeiten mit Rand. Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte Teilmannigfaltigkeit mit Rand,  $K \subset M$  kompakt und  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $M \subset W$ . Falls es eine lokale Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, sodass  $K \subset u(U)$  gilt, dann wählt man eine positiv orientierte Parametrisierung mit dieser Eigenschaft und definiert  $\int_K : \Omega^k(W) \rightarrow \mathbb{R}$  einfach durch

$$(3.2) \quad \int_K \omega := \int_{u^{-1}(K)} \omega(u(z), \partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z)) dz.$$

Wie in Abschnitt 3.4 folgt aus dem Transformationssatz für Mehrfachintegrale mit den Beobachtungen aus Abschnitt 3.10 sofort, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Parametrisierung  $u$  ist. Klarerweise ist  $u^{-1}(K) \subset U$  kompakt, also finden wir nach Teil (3) von Lemma 3.10 eine offene Teilmenge  $W \subset \mathbb{R}^k$  mit  $u^{-1}(K) \subset W$  und eine  $C^1$ -Funktion  $\tilde{u} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die auf einer offenen Umgebung von  $u^{-1}(K)$  in  $U$  mit  $u$  übereinstimmt. Damit erhalten wir offensichtlich  $\int_K \omega = \int_{u^{-1}(K)} \tilde{u}^* \omega$  mit dem Integral aus Abschnitt 3.1 auf der rechten Seite.

Für allgemeines  $K$  finden wir endlich viele positiv orientierte lokale Parametrisierungen  $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$ ,  $i = 1, \dots, N$  sodass  $K \subset \cup_i V_i$  gilt wobei  $V_i := u_i(U_i) \subset M$  ist. Der Beweis von Korollar 3.5 gilt ohne Änderungen auch in dem Fall, dass  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, also finden wir  $C^\infty$ -Funktion  $\chi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit Werten in  $[0, 1]$  sodass  $\text{supp}(\chi_i) \cap M \subset V_i$  und  $\sum_{i=1}^N \chi_i(x) = 1$  für alle  $x \in K$  gilt. Dann setzen wir  $K_i := \text{supp}(\chi_i) \cap K$  und definieren  $\int_K : \Omega^k(W) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\int_K \omega = \sum_{i=1}^N \int_{K_i} \chi_i \omega$ , mit Integralen aus Formel (3.2) auf der rechten Seite. Genau wie in Proposition 3.6 zeigt man, dass diese Definition unabhängig von allen Wahlen ist und auch Satz 3.6 gilt für Teilmannigfaltigkeiten mit Rand.

Falls  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte orientierte Teilmannigfaltigkeit mit Rand ist, erhalten wir damit ein Integral  $\int_M : \Omega^k(W) \rightarrow \mathbb{R}$  für beliebige stetige  $k$ -Formen auf  $W$ . Ist  $M$  nicht kompakt, dann können wir in Abschnitt 3.6 ein Integral über  $M$  für  $k$ -Formen mit kompaktem Träger auf  $M$  definieren, also für  $\omega \in \Omega^k(M)$ , sodass  $\text{supp}(\omega) \cap M$  kompakt ist, indem wir  $\int_M \omega = \int_{\text{supp}(\omega) \cap M} \omega$  definieren. Das ist auch das Setting, das wir für den allgemeinen Satz von Stokes benötigen, für den wir nun alle Zutaten bei der Hand haben: Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Rand,  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $M \subset W$  und  $\omega \in \Omega^{k-1}(W)$  eine  $k-1$ -Form mit kompaktem Träger

auf  $M$ . Nach Proposition 3.11 ist  $\partial M$  eine  $(k-1)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und nach Proposition 3.12 erhalten wir eine Orientierung auf  $\partial M$ . Natürlich ist  $\text{supp}(\omega) \cap \partial M$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\text{supp}(\omega) \cap M$  und damit kompakt, also hat  $\omega$  kompakten Träger auf  $\partial M$  und wir können  $\int_{\partial M} \omega$  bilden. Unter der Annahme, dass  $\omega$  stetig differenzierbar ist, können wir andererseits die äußere Ableitung  $d\omega \in \Omega^k(W)$  bilden. Nun ist  $W \setminus \text{supp}(\omega)$  eine offene Teilmenge von  $W$  auf der  $\omega \equiv 0$  gilt und damit folgt nach Definition  $d\omega(y) = 0$  für alle  $y \in W \setminus \text{supp}(\omega)$ . Damit folgt aber  $\text{supp}(d\omega) \subset \text{supp}(\omega)$ , also hat auch  $d\omega$  kompakten Träger auf  $M$  und damit können wir auch  $\int_M d\omega$  bilden.

**SATZ 3.13** (Satz von Stokes). *Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte  $C^1$ -Teilmannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M$  und sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $M \subset W$ . Dann gilt für jede stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\tau \in \Omega^{k-1}(W)$  mit kompaktem Träger auf  $M$  und für die induzierte Orientierung auf  $\partial M$  die Gleichung*

$$\int_M d\tau = \int_{\partial M} \tau.$$

**BEWEIS.** Wie im Beweis von Satz 3.8 können wir uns auf den Fall einschränken, dass es eine positive orientierte Parametrisierung  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $M$  mit  $K := \text{supp}(\tau) \cap M \subset u(U)$  einschränken. Wie wir oben gesehen haben, gilt dann auch  $\text{supp}(d\tau) \cap M \subset K \subset u(U)$  und wir können eine offene Teilmenge  $W \subset \mathbb{R}^k$  mit  $u^{-1}(K) \subset W$  und eine  $C^1$ -Erweiterung  $\tilde{u} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $u$  finden. Damit erhalten wir aber

$$\int_K d\tau = \int_{u^{-1}(K)} \tilde{u}^* d\tau = \int_{u^{-1}(K)} d\tilde{u}^* \tau = \int_{\mathcal{H}^k} d\tilde{u}^* \tau.$$

Andererseits ist für  $\underline{U} := U \cap \partial H^k$  die Einschränkung  $\underline{u} := u|_{\underline{U}} : \underline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  nach Satz 3.12 eine positiv orientierte Parametrisierung für  $\partial M$  mit  $\text{supp}(\tau) \cap \partial M \subset \underline{u}(\underline{U})$ . Natürlich ist  $\underline{u}^{-1}(K \cap \partial M) = u^{-1}(K) \cap \partial H^k$  und damit erhalten wir

$$(3.3) \quad \int_{\partial M} \tau = \int_{u^{-1}(K) \cap \partial \mathcal{H}^k} \tau(\underline{u}(z), \partial_2 \underline{u}(z), \dots, \partial_k \underline{u}(z)),$$

und wir können den Integrationsbereich durch  $\partial \mathcal{H}^k$  ersetzen. Wie im Beweis von Satz 3.8 schreiben wir  $\tilde{u}^* \tau = \sum_i \sigma_i dz_i$  mit

$$\sigma_i(z) = \tau(u(z), \partial_1 u(z), \dots, \partial_{i-1} u(z), \partial_{i+1} u(z), \dots, \partial_k u(z)).$$

Für  $z \in \partial U$  und  $i = 2, \dots, k$  gilt nach Konstruktion  $\underline{u}(z) = u(z)$  und  $\partial_i \underline{u}(z) = \partial_i u(z)$ , also kann man (3.3) als  $\int_{\partial \mathcal{H}^k} \sigma_1|_{\partial \mathcal{H}^k}$  schreiben. Andererseits erhalten wir sofort  $d\tilde{u}^* \tau = \sum_i (-1)^i \frac{\partial \sigma_i}{\partial z_i} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_k$ .

Nach dem Satz von Fubini können wir Integrale über  $\mathcal{H}^k$  in iterierte Integrale über die einzelnen Variablen zerlegen, wobei die Reihenfolge der Integrationen keine Rolle spielt. Damit können wir für den  $i$ ten Summanden in der Formel für  $d\tilde{u}^* \tau$  wieder zuerst über die Variable  $z_i$  integrieren. Für  $i > 1$  erhalten wir wie in Satz 3.8  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \sigma_i}{\partial z_i} dz_i = 0$ , also spielen diese Summanden im Integral keine Rolle. Aber für  $i = 1$  erhalten wir

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \sigma_1}{\partial z_1}(z_1, z_2, \dots, z_k) dz_1 = \sigma_1(0, z_2, \dots, z_k),$$

und nach dem Satz von Fubini und den obigen Überlegungen liefert das Integral davon über die restlichen Variablen genau  $\int_{\partial M} \tau$ .  $\square$

**3.14. Anwendungen.** Betrachten wir den abgeschlossenen Einheitsball  $M := B^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit Rand  $\partial M = S^{n-1}$  aus Beispiel 3.11. Aus Beispiel 3.7 wissen wir, dass sich die  $(n-1)$ -Form  $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\omega(x, v_1, \dots, v_n) := \det(x, v_1, \dots, v_{n-1})$  auf  $S^{n-1}$  zur Volumensform einschränkt. Setzen wir für  $v_1, \dots, v_{n-1}$  alle Einheitsvektoren außer  $e_i$  in aufsteigender Reihenfolge ein, dann liefert die Determinante  $(-1)^{i-1}x_i$ , also gilt  $\omega = \sum_i (-1)^{i-1}x_i dx_i$ . Damit folgt aber sofort  $d\omega = ndx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  also zeigt der Satz von Stokes sofort, dass für die Volumina von  $B^n$  und  $S^{n-1}$  immer  $\text{vol}(B^n) = \frac{1}{n} \text{vol}(S^{n-1})$  gilt. Betrachtet man statt des Einheitsballes und der Einheitssphäre den Ball  $B_r^n$  und die Sphäre  $S_r^{n-1}$  mit Radius  $r$ , dann muss man die Volumina mit  $r^n$  bzw.  $r^{n-1}$  skalieren und erhält  $\text{vol}(B_r^n) = \frac{r^n}{n} \text{vol}(S_r^{n-1})$ . (Für  $n=2$  vergleicht das gerade die Kreisfläche  $r^2\pi$  mit dem Kreisumfang  $2r\pi$ .) Bezeichnen wir mit  $V_n$  das ( $n$ -dimensionale) Volumen von  $B^n$  und mit  $A_{n-1}$  das ( $(n-1)$ -dimensionale) Volumen von  $S^{n-1}$ , dann bedeutet das  $A_{n-1} = \frac{1}{n}V_n$ . Für die Volumina  $V_n$  kann man durch eine einfache Integrationsformel die Rekursion  $V_n = \frac{2\pi}{n}V_{n-2}$  herleiten, die zusammen mit den offensichtlichen Anfangswerten  $V_1 = 2$  und  $V_2 = \pi$  leicht die Werte für  $V_n$  und damit für  $A_{n-1}$  liefern.

Als nächstes können wir die höherdimensionalen Versionen des Brouwerschen Fixpunktsatzes aus Satz 1.14 beweisen, zumindest im Fall von  $C^1$ -Funktionen. Man kann den Satz auf stetige Funktionen zu erweitern, indem man Resultate der Differentialtopologie (Approximation stetiger Funktionen durch  $C^1$ -Funktionen) benutzt. Alternativ liefert die algebraische Topologie Invarianten (singuläre Homologiegruppen) auf denen auch stetige Funktionen wirken, die ebenfalls zu einer Erweiterung des Resultats auf den stetigen Fall führen.

**PROPOSITION 3.14.** (1) (“ $S^{n-1}$  ist kein Retrakt von  $B^n$ ”) Es gibt keine  $C^1$ -Funktion  $F : B^n \rightarrow S^{n-1}$  mit  $F|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ .

(2) (“Brouwerscher Fixpunktsatz”) Sei  $F : B^n \rightarrow B^n$  eine  $C^1$ -Funktion. Dann gibt es einen Punkt  $x_0 \in B^n$  mit  $F(x_0) = x_0$ .

**BEWEIS.** (1) Betrachten wir  $F$  als Funktion mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ , dann liefert Teil (3) von Lemma 3.10 eine offene Teilmenge  $W \subset \mathbb{R}^n$  mit  $B^n \subset W$  und eine  $C^1$ -Funktion  $\tilde{F} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\tilde{F}|_{B^n} = F$ . Wir können  $W$  durch  $\tilde{F}^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  ersetzen und damit annehmen, dass  $\tilde{F}$  Werte in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  hat. Aus Lemma 3.9 wissen wir, dass es eine Form  $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  gibt, die auf  $S^{n-1}$  die Volumensform induziert und  $d\omega = 0$  erfüllt. Da  $\tilde{F}|_{S^{n-1}} = F|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$  gilt, induziert auch  $\tilde{F}^*\omega$  die Volumensform auf  $S^{n-1}$ , also ist  $\int_{S^{n-1}} \tilde{F}^*\omega$  das Volumen von  $S^{n-1}$  und damit insbesondere  $\neq 0$ . Aber nach Satz 3.13 ist  $\int_{S^{n-1}} \tilde{F}^*\omega = \int_{B^n} d\tilde{F}^*\omega = \int_{B^n} \tilde{F}^*d\omega = 0$ , ein Widerspruch.

(2) Der Beweis von Satz 1.14 überträgt sich ohne Änderungen auf  $C^1$ -Funktionen und auf höhere Dimensionen.  $\square$

**Klassische Integralsätze der Vektoranalysis.** Die Integralsätze der Vektoranalysis sind Versionen des allgemeinen Satzes von Stokes in den Dimensionen 2 und 3 und für orientierte Teilmannigfaltigkeiten mit Rand der Dimension 2 und 3. Sie werden üblicherweise nicht in Termen von Differentialformen sondern in Termen von Vektorfeldern und Funktionen formuliert und wir werden hier die nötigen Übersetzungen vornehmen.

Die einfacheren dieser klassischen Sätze sind der Satz von Green und der Satz von Gauß, die für kompakte  $n$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeiten mit Rand in  $\mathbb{R}^n$  mit  $n=2$  bzw. mit  $n=3$  gelten. Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte  $n$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Rand, dann ist  $M$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$ . Für jeden Punkt  $x \in M \setminus \partial M$  gibt es eine offene Umgebung von  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ , die ganz in  $M$  liegt, also ist  $M \setminus \partial M$  offen in  $\mathbb{R}^n$ . Schließlich ist nach Proposition 3.11 der Rand  $\partial M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale

Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Man stellt sich also so eine Teilmannigfaltigkeit am besten als eine abgeschlossene Teilmenge mit nichtleerem Inneren und mit  $C^1$ -Rand vor. In diesem Fall stimmen alle Tangentialräume  $T_x M$  mit  $\mathbb{R}^n$  überein, also liefert die übliche Orientierung von  $\mathbb{R}^n$  eine Orientierung auf  $M$  und damit auch auf  $\partial M$  und wir können Satz 3.13 anwenden.

Dazu betrachten wir eine stetige differenzierbare  $(n-1)$ -Form auf einer offenen Menge  $W \subset \mathbb{R}^n$  mit  $M \subset W$ . Für  $n=2$  können wir einfach wie in Abschnitt 1.10 einem Vektorfeld  $Z$  eine 1-Form  $\alpha$  zuzuordnen, indem wir  $\alpha(x, v) = \langle Z(x), v \rangle$  setzen. Hier hat  $\partial M$  Dimension 1, also ist  $\int_{\partial M} \alpha$  gerade das Kurvenintegral aus Abschnitt 1.10 und diese stimmt mit dem Kurvenintegral über  $Z$  aus Abschnitt 1.7 überein. Für  $Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x))$  liefert das  $\alpha = Z_1 dx_1 + Z_2 dx_2$  und damit

$$d\alpha = \left( \frac{\partial Z_2}{\partial x_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2.$$

In Analogie zu Beispiel 2.12 (1) wird die Funktion  $\frac{\partial Z_2}{\partial x_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial x_2}$  oft als  $\text{rot}(Z)$  bezeichnet. Satz 3.13 liefert dann sofort den klassischen Satz von Green, nämlich  $\int_{\partial M} Z = \int_M \text{rot}(Z) \text{ vol}$ .

Für  $n=3$  ordnen wir dem Vektorfeld  $Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), Z_3(x))$  wie in Beispiel 2.9 die 2-Form  $\tilde{Z} \in \Omega^2(U)$  zu, die wieder durch  $\tilde{Z}(x, v_1, v_2) = \det(Z(x), v_1, v_2)$  gegeben ist. Das liefert sofort  $\tilde{Z} = -Z_1 dx_2 \wedge dx_3 + Z_2 dx_1 \wedge dx_3 - Z_3 dx_1 \wedge dx_2$ . Mit  $\text{div}(Z) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Z_i}{\partial x_i}$  folgt daraus direkt  $d\tilde{Z} = \text{div}(Z) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ . Die Interpretation des Oberflächenintegrals  $\int_{\partial M} \tilde{Z}$  in Termen von  $Z$  haben wir in Abschnitt 3.7 besprochen: Mit Hilfe eines nach außen weisenden Einheitsnormalenfeldes  $\mathbf{n}$  auf  $\partial M$  kann man  $\tilde{Z} = \langle Z, \mathbf{n} \rangle \text{ vol}$  schreiben, wobei  $\text{vol}$  die (2-dimensionale) Volumensform für die orientierte Teilmannigfaltigkeit  $\partial M \subset \mathbb{R}^3$  bezeichnet. Das liefert die Interpretation von  $\int_{\partial M} \tilde{Z}$  als den Fluss des Vektorfeldes  $Z$  durch die (geschlossene) Fläche  $\partial M$ . In diesem Fall liefert Satz 3.13 sofort den Satz von Gauß, der besagt, dass man diesen Fluss als das Integral der Funktion  $\text{div}(Z)$  über  $M$  (bezüglich der 3-dimensionalen Volumensform auf  $M$ ) berechnen kann.

Das führt zu einer physikalischen Interpretation der Divergenz  $\text{div}(Z)$  als "infinitesimale Quellenstärke" des Vektorfeldes  $Z$ . Das Integral über  $M$  entspricht dann die Quellenstärke des Feldes innerhalb von  $M$ , die dem Fluss durch den Rand  $\partial M$  entsprechen muss. Insbesondere nennt man ein Vektorfeld  $Z$  mit  $\text{div}(Z) = 0$  *quellenfrei*. Ein wichtiger Spezialfall ist, dass  $Z$  ein Gradientenfeld ist, also  $Z = \nabla F$  für eine  $C^2$ -Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  gilt, siehe Abschnitt 1.10. In diesem Fall erhält man sofort

$$\text{div}(\nabla F) = \Delta(F) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{(\partial x_i)^2},$$

der *Laplace Operator* angewandt auf  $F$ .

Man kann auch in Dimension 2 eine analoge Version von Satz 3.13 finden. Dazu betrachten wir zu einem Vektorfeld  $Z = (Z_1, Z_2)$  auf  $U$  das um  $\frac{\pi}{2}$  rotierte Vektorfeld  $Z^\perp = (-Z_2, Z_1)$ . Mit der Definition von oben folgt dann sofort, dass  $\text{rot}(Z^\perp) = \text{div}(Z)$  gilt, also liefert der Satz von Green sofort, dass  $\int_{\partial M} Z^\perp = \int_M \text{div}(Z) \text{ vol}$  gilt. Und natürlich erhält man  $\langle Z^\perp(x), v \rangle = \langle Z, v^\perp \rangle$  also kann man das Kurvenintegral  $\int_{\partial M} Z^\perp$  wieder als Fluss von  $Z$  durch die Randkurve  $\partial M$  interpretieren. Damit ist die Interpretation der Divergenz als infinitesimale Quellenstärke auch in Dimension zwei passend.

Eine einfache Möglichkeit,  $n$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeiten mit Rand in  $\mathbb{R}^n$  zu erhalten, liefern passende  $C^1$ -Funktionen  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  auf offenen Teilmengen  $U \subset$



$\mathbb{R}^n$ . Wir nehmen an, dass  $DF(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$  mit  $F(x) = 0$  gilt und setzen  $M := \{x \in U : F(x) \leq 0\}$ . Sei  $x \in M$  ein Punkt mit  $F(x) = 0$ . Dann erfüllt  $F$  die Voraussetzungen von Satz 2.3 also finden wir nach dem Beweis dieses Satzes eine offene Umgebung  $\tilde{U}$  von  $x$  in  $U$  und einen Diffeomorphismus  $\Phi$  von  $\tilde{U}$  auf eine offene Teilmenge  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  die  $F$  als erste Komponente hat. Nach Definition bedeutet das aber genau, dass  $\Phi(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap \mathcal{H}^n$  gilt, also erhalten wir eine lokale Trivialisierung für  $M$  um  $x$  im Sinne von Definition 3.11 sodass  $x$  in Randpunkt wird. Andererseits ist  $\{x \in U : F(x) < 0\}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , die wir problemlos mit einer offenen Teilmenge von  $\mathcal{H}^n$  identifizieren können. Damit sehen wir aber, dass  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Teilmannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M = \{x \in U : F(x) = 0\}$ . Wie in Abschnitt 3.3 können wir den Gradienten von  $F$  normieren und damit ein (nach außen weisendes) stetiges Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{n}$  für  $\partial M$  zu erhalten, das auf einer offenen Umgebung von  $\partial M$  in  $U$  definiert ist.

Der dritte klassische Integralsatz der Vektoranalysis behandelt kompakte orientierte 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten mit Rand in  $\mathbb{R}^3$  und wird klassisch als Satz von Stokes bezeichnet. Sei also  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine 2-dimensionale orientierte Teilmannigfaltigkeit mit Rand die man sich einfach als "Fläche mit Rand" vorstellen kann. Dann betrachten wir eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^3$  mit  $M \subset U$  und eine 1-Form  $\alpha \in \Omega^1(U)$ . In der klassischen Version wird  $\alpha$  wieder durch ein  $C^1$ -Vektorfeld  $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschrieben, also  $\alpha(x, v) = \langle Z(x), v \rangle$ , was wieder  $\alpha = \sum_i Z_i dx_i$  liefert. Der Rand  $\partial M$  ist 1-dimensional also eine Kurve in  $\mathbb{R}^3$  und damit ist  $\int_{\partial M} \alpha$  wieder das Kurvenintegral aus Abschnitt 1.10, dass mit dem Kurvenintegral über das Vektorfeld  $Z$  aus Abschnitt 1.7 übereinstimmt. Die Interpretation der äußeren Ableitung  $d\alpha$  kennen wir schon aus Beispiel 2.12, nämlich  $d\alpha(x, v_1, v_2) = \det(\text{rot}(Z), v_1, v_2)$ . In Beispiel 3.7 haben wir gesehen, dass wir in Termen des Einheitsnormalenfeldes  $\mathbf{n}$  zur gewählten Orientierung von  $V$  und der (2-dimensionalen) Volumsform  $\text{vol}$  für  $M$   $d\alpha = \langle \text{rot}(Z), \mathbf{n} \rangle \text{vol}$  erhalten. Damit liefert Satz 3.13 den klassischen Satz von Stokes,  $\int_{\partial M} Z = \int_M \langle Z, \mathbf{n} \rangle \text{vol}$  und wir können die rechte Seite als Fluss von  $\text{rot}(Z)$  durch die Fläche  $M$  interpretieren.

In diesem Fall ergeben sich interessante zusätzliche Interpretationen des Resultats. Man kann ja mit einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^3$  und einer geschlossenen Kurve  $c : [a, b] \rightarrow U$  beginnen und versuchen diese Kurve mit einer Fläche zu "füllen", also kompakte orientierte zweidimensionale Teilmannigfaltigkeiten  $M$  in  $U$  zu finden, die das Bild von  $c$  als Rand haben. Wenn es eine solche Fläche gibt, dann gibt es natürlich viele. (Man denke etwa an das Beispiel eines Kreises.) Der Satz von Stokes sagt uns dann, dass für jedes  $C^1$ -Vektorfeld  $Z$  auf  $U$  die Integrale von  $\text{rot}(Z)$  über alle diese Flächen den gleichen Wert haben (nämlich  $\int_c Z$ ).



## Literaturverzeichnis

- [Linalg] A. Čap, *Lineare Algebra und Geometrie*, Skriptum zum 3-semesterigen Vorlesungszyklus Version WS14/15-15/16, online unter <https://www.mat.univie.ac.at/~cap/lectnotes.html> .
- [Hö:Ana2] G. Hörmann, *Analysis 2*, Skriptum, Wintersemester 2007, online unter <https://www.mat.univie.ac.at/gue/lehre/0708an2/analysis2.pdf> .

## Abbildungsverzeichnis

- p.6: Topologists sine curve, from Wikimedia commons  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Topologists\\_\(warsaw\)\\_sine\\_curve.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Topologists_(warsaw)_sine_curve.png)  
Krb19, CC BY-SA 4.0  
(<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>), via Wikimedia Commons
- p.7: Koch-Kurve, from Wikipedia  
[https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:How\\_to\\_make\\_Koch\\_curve.svg](https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:How_to_make_Koch_curve.svg)  
Kkairri (original made by Solkoll commonswiki), Public domain, via Wikimedia Commons
- p. 15: Covering, from nLab <https://ncatlab.org/nlab/show/topology>
- p. 40: Lemniskate, from Wikipedia,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Lemniscate#/media/File:Lemniscate\\_of\\_Bernoulli.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Lemniscate#/media/File:Lemniscate_of_Bernoulli.svg)  
By Zorgit - Own work, Public Domain,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4285176>
- p. 62: Möbius, from Wikipedia:  
[https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Moebius\\_strip.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Moebius_strip.svg)  
Krishnavedala, CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>), via Wikimedia Commons
- p. 69: stereographic, from Wikipedia:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic\\_projection#/media/File:Stereoprojzero.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection#/media/File:Stereoprojzero.svg)  
By Joshuardavis - Own work, CC BY-SA 3.0,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2012657>