ASPEKTE DER MATHEMATIK
(TEIL 1)

ANDREAS ČAP

Der folgende Text ist als Ergänzung zu dem ersten drei Einheiten der Ringvorlesung "Aspekte der Mathematik" im Wintersemester 2017/18 gedacht. Neben allgemeinen Erläuterungen zu dieser Vorlesung werden wir uns in diesen Einheiten vor allem mit der Mathematik als Wissenschaft beschäftigen. Das betrifft einerseits Überlegungen zum "disziplinären Charakter" der Mathematik, der sich von allen anderen Wissenschaften unterscheidet. Wichtig ist hier vor allem, dass dieser spezielle Charakter bestimmt, wie Mathematik gelehrt wird, was unmittelbare Konsequenzen für das Studium und für den Umgang mit dem Vorwissen aus der Schule hat. Andererseits möchte ich einige allgemeine Aspekte der mathematischen Forschung diskutieren.

Warum so eine Vorlesung und warum jetzt?

Die Ringvorlesung "Aspekte der Mathematik" soll eine Einstimmung in das Studium des Unterrichtsfachs Mathematik bieten. Im Gegensatz zur StEOP–Vorlesung "Einführung in die Mathematik", in der mathematische Inhalte im Mittelpunkt stehen, werden Sie in dieser Vorlesung auch einiges über Mathematik als Wissenschaft, als Unterrichtsfach und als Sammlung von Kulturtechniken hören. Diese Informationen sollten Ihnen einerseits den Übergang von der Schul– zur Universitätsmathematik erleichtern. Zwar werden im Studium viele Inhalte behandelt, die zu einem gewissen Grad schon aus der Schule bekannt sind, der Stil und die Herangehensweise an diese Inhalte sind aber ganz anders als in der Schule.

Andererseits möchten wir bei unseren Studierenden ein Bewusstsein dafür wecken, dass die expliziten Inhalte des Studiums im Unterrichtsfach Mathematik nur einen winzigen Bruchteil des mathematischen Wissens ausmachen und dass es gerade für MathematiklehrerInnen essentiell ist, sich weiterzubilden. Die Grundlagen an mathematischem Wissen, die für dieser Weiterbildung notwendig sind, müssen im Studium erworben werden.

- Im Schulunterricht wird neben dem eigentlichen Schulstoff natürlich auch ein allgemeines Bild von Mathematik vermittelt. Dadurch stellen die LehrerInnen in der Sekundarstufe zentrale RepräsentantInnen für die Mathematik als Ganzes dar.

- Das stellt für die Mathematik eine große Chance dar, sowohl in ihrer Rolle als eigenständige Wissenschaft mit hochaktiver Forschung und schneller Weiterentwicklung, als auch als zentrales Hilfsmittel für weite Bereiche der Wissenschaften, das in viele Bereiche des täglichen Lebens hineinspielt, wahrgenommen zu werden.
- Gerade wegen der schnellen Weiterentwicklung und der breiten Anwendungsmöglichkeiten macht es nicht wirklich Sinn, das "richtige" Bild der Mathematik den zukünftigen LehrerInnen als fertiges Paket während des Studiums zu präsentieren. Die heute aktuellen Entwicklungen sind eben nur eine Zeit lang "aktuell".
- Das Ziel kann also einerseits nur sein, den zukünftigen LehrerInnen dieses Problem bewusst zu machen. Andererseits ist das Ziel auch, ihnen die nötigen Grundlagen zu vermitteln, um sowohl während des Studiums als auch danach ein angemessenes Bild der Mathematik für sich selbst zu erwerben, das dann auch weitergegeben werden kann.

Der letzte Punkt klingt vielleicht nicht gerade nach einem ambitionierten Ziel und man sollte meinen, dass das im Verlaufe eines Studiums problemlos hinzubekommen sein sollte. Das ist aber leider nicht so, was zu einem guten Teil im speziellen disziplinären Charakter der Mathematik begründet ist, über den wir in Kürze noch ausgiebiger sprechen werden. Die Ringvorlesung "Aspekte der Mathematik" stellt jedenfalls einen ersten Schritt in Richtung dieser Ziele dar.

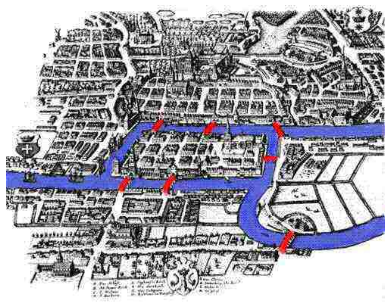
Dass diese Vorlesung ganz am Anfang des Studiums angeboten wird hat sowohl inhaltliche als auch organisatorische Gründe. Problembewusstsein wird ohnehin am besten so bald wie möglich geweckt. Außerdem erklärt die Beschäftigung mit den Eigenheiten der Mathematik als Wissenschaftsdisziplin einige der Besonderheiten mathematischer Lehrveranstaltungen, die StudienanfängerInnen oft Schwierigkeiten bereiten.

Natürlich wäre es in manchen Teilen einfacher, wenn man beim Zeichnen des Bildes der Mathematik etwas mehr an mathematischem Wissen voraussetzen könnte. Das trifft aber genauso auf all die mathematischen Inhalte des Studiums zu, in denen der aufbauende Charakter noch viel stärker zum Tragen kommt. Dazu kam noch das Ziel, den Studierenden im ersten Semester den Erwerb von ECTS Punkten außerhalb der StEOP zu ermöglichen, was gar nicht so einfach zu realisieren war.

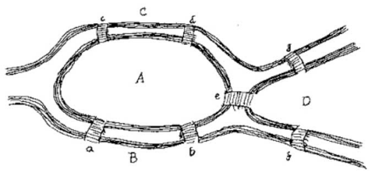
Eine mathematische Geschichte

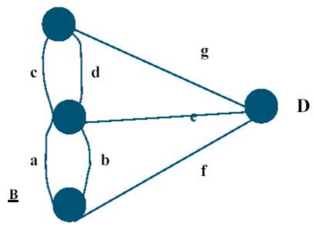
Bevor ich mit der Besprechung der Mathematik als Wissenschaft beginne, möchte ich eine Episode aus der Geschichte der Mathematik präsentieren, die aus meiner Sicht viele der folgenden Überlegungen verdeutlicht:

Im 18. Jahrhundert war die preußische Stadt Königsberg (heute Kaliningrad in Russland) berühmt für ihre Lage am Fluss Pregel und die 7 Brücken die Teile der Stadt miteinander und mit Inseln im Fluss verbanden. Eine zu dieser Zeit offensichtlich populäre Frage war, ob man einen Spaziergang durch Königsberg machen kann, bei dem man jede Brücke genau ein mal überquert. Der historische Stadtplan[1] (links original, rechts mit verdeutlichten Brücken) sieht wie folgt aus:



Diese Frage wurde an den berühmten Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) herangetragen, der sie zunächst als uninteressant empfand, weil sie keinen Bezug zu Mathematik zu haben schien. Offensichtlich hat ihn aber gerade der scheinbar fehlende Bezug zur Mathematik fasziniert, sodass er sich weiter mit dem Problem beschäftigte. Der Schlüssel zur Lösung liegt zunächst in einem kräftigen Schuss Abstraktion, die durch Eulers Skizze[2] (links) und eine heutige üblich Darstellung[3] (rechts) verdeutlicht wird.





Die rechte Darstellung ist mathematisch ausgedrückt ein *Graph*, der aus *Knoten* und *Kanten* besteht. In diesem Bild ist die Frage, ob es einen Weg durch diesen Graphen gibt, der jede Kante genau ein Mal benutzt (in heutiger Terminologie ein *Eulerscher Weg*). Nun ist leicht einzusehen, dass es durch diesen speziellen Graphen keinen Eulerschen Weg geben kann. Dazu betrachten wir die *Grade* der vier Knoten, also die Anzahl der Kanten, die am jeweiligen Knoten enden. Für drei der Knoten ist der Grad 3, für einen der Knoten 5. Gäbe es einen Eulerschen Weg durch den Graphen, dann würde dieser an einem Knoten beginnen und an einem Knoten (möglicherweise dem gleichen) enden.

[1] Quelle: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Konigsberg.html
[2] Quelle: https://www.kidscodecs.com/7-bridges-konigsberg/
[3] Quelle: http://photonics.cusat.edu/Article4.html

Von allen anderen Knoten muss man aber jedes mal wenn man hinkommt auch wieder weggehen können (was zwei Kanten aufbraucht), also muss für jeden dieser anderen Knoten der Grad eine gerade Zahl sein. Nachdem in unserem Graphen alle 4 Knoten ungeraden Grad haben, gibt es keinen Eulerschen Weg. Dieses Argument funktioniert aber ganz allgemein, also sehen wir
In einem Graphen, der einen Eulerschen Weg besitzt, gibt es höchsten zwei Knoten mit ungeradem Grad.

Was wir hier getan haben, war schon eine ganz typisch mathematische Vorgehensweise: Statt sich nur für den spezifischen Graphen der Königsberger Brücken zu interessieren, haben wir eine ganz allgemein gültige Bedingung gefunden.

Betrachtet man den Graphen für die Königsberger Brücken, dann sieht man, dass man durch Einfügen einer zusätzlichen Kante (die zwei verschiedene Knoten verbindet) erreichen kann, dass es nur noch zwei Konten mit ungeradem Grad gibt. Mit etwas Probieren sieht man dann leicht, dass es mit einer zusätzlichen Kante in diesem speziellen Graphen immer einen Eulerschen Weg gibt. Leonhard Euler ist aber (vor fast 300 Jahren!) noch viel weiter gegangen. Er hat nämlich ganz allgemein bewiesen, dass die obige Bedingung die einzige wesentliche Einschränkung ist, nämlich:
Wenn es durch einen Graphen überhaupt einen Weg gibt und zusätzlich höchstens zwei der Knoten des Graphen ungeraden Grad haben, dann besitzt der Graph einen Eulerschen Weg.

Rückblickend wird das als eine der Geburtsstunden der Graphentheorie betrachtet.

Ich möchte gleich an dieser Stelle die Rolle der Abstraktion anhand dieser Geschichte kurz thematisieren. Der Übergang vom Stadtplan zur Skizze und weiter zum Graphen ist eigentlich leicht nachzuvollziehen und dann ist auch leicht einzusehen, dass es keinen Eulerschen Weg geben kann. Es ist aber gar nicht leicht zu erklären, was die Knoten des Graphen eigentlich genau symbolisieren und wenn man versucht, die Ergebnisse im Bild der Brücken zu formulieren, dann ist auch das nicht so einfach. Man sieht somit, dass die Abstraktion im wesentlich im "Weglassen von Irrelevantem" besteht und dabei hilft, den "Kern des Problems" herauszuarbeiten.

Außerdem ist leicht einzusehen, dass der resultierende Begriff des Graphen und Fragen über Wege in Graphen sehr flexibel sind und damit (oder mit kleinen Abwandlungen) viele interessante Situationen modelliert (also mathematisch beschrieben) werden können. Man denke zum Beispiel an ein Modell des Internets oder eines Teils davon, indem die Knoten einzelne Computer und die Kanten Verbindungen zwischen Computern darstellen. Eulersche Wege werden in so einer Situation wohl keine wichtige Rolle spielen, aber Fragen wie ob es auch nach Entfernen einiger Kanten noch Wege zwischen zwei vorgegebenen Knoten gibt, sind von offensichtlicher Relevanz für das Design von Netzwerken. Ähnlich kann man an einen Plan des öffentlichen Verkehrsnetzes von Wien denken, in dem die Stationen Knoten und die Verbindungen zwischen den Stationen durch verschiedene Verkehrsmittel Kanten darstellen. Gibt man nun noch zu jeder Kante die entsprechende Fahrzeit als Information dazu ("gewichteter Graph") dann wird klar, dass das Finden von Wegen (und vor allem von "kurzen" Wegen) zwischen zwei gegebenen Knoten in so einem Graphen ein sehr interessantes Anwendungsproblem ist.

Eine andere kleine Variation sind gerichtete Graphen, in denen Kanten nicht einfach nur zwei Knoten verbinden sondern einen spezifizierten Anfang und ein Ende haben und nur in dieser Richtung "durchgängig" sind. In dieser Situation können wir eine Anwendung von Graphen beschreiben, die die Grundlage des Erfolgs von Google als Suchmaschine ist. Gibt man etwa "Leonhard Euler" in Google ein, dann stellt sich die Frage, welche 10 der etwa 522000 gefundenen Webseiten auf der ersten Seite als Suchergebnisse ausgegeben werden sollen. (Alle 52200 Seiten an Ergebnissen durchzublättern wäre ziemlich mühsam ...) Was Google im Hintergrund tut ist, die gefundenen Seiten als Knoten eines gerichteten Graphen zu betrachten, dessen Kanten durch die Verlinkungen von einer Seite zu einer anderen gebildet werden. Seiten zu denen viele Links führen, werden als wichtig betrachtet. Ein Algorithmus, der die entsprechenden Knoten in dem gerichteten Graphen effizient findet (PageRank, benannt nach Larry Page, einem der Gründer von Google), war eine wichtige Zutat zum Erfolg von Google.

Mathematik als Wissenschaft

Nach diesem Einstieg machen wir uns Gedanken über den *disziplinären Charakter* der Mathematik, der sich deutlich von dem fast aller anderen Wissenschaften unterscheidet. Im Schulunterricht entsteht vielleicht der Eindruck, dass der Hauptteil der Mathematik im "Rechnen von Beispielen" besteht. Während der Studiums wird dieser Eindruck sehr schnell (und zum Teil vermutlich schmerzlich) korrigiert werden, und Sie werden feststellen, dass der Kern der Mathematik in den **Beweisen** liegt.

Etwas vereinfacht kann man sagen:

- Die Mathematik beschäftigt sich mit Aussagen, die im Prinzip als "wahr" oder "falsch" klassifiziert werden können (auch wenn man vielleicht noch nicht weiß, welche der beiden Möglichkeiten zutrifft).
- In einem **Beweis** wird ein Satz (also eine "neue" Aussage) als wahr erkannt, indem er, gewissen Regeln folgend, aus bereits als wahr erkannten Sätzen abgeleitet wird.

Um das mit einem konkreten Beispiel zu hinterlegen, betrachten wir den ersten Satz, dessen Beweis Sie in der Vorlesung "Einführung in das mathematische Arbeiten" kennengelernt haben. Die Aussage lautet in diesem Fall "Das Quadrat einer geraden Zahl ist ebenfalls gerade". Es ist wohl kein Problem einzusehen, dass man diese Aussage prinzipiell als wahr oder falsch klassifizieren kann (entweder sind die Quadrate aller geraden Zahlen gerade, oder eben nicht). Wenn man einmal verstanden hat, wie man ordentlich mit dem Begriff "gerade Zahl" umgehen kann, dann kann man die Aussage relativ leicht durch "nachrechnen" verifizieren. Man steckt in diese Verifikation natürlich solche Dinge wie Rechenregeln für ganze Zahlen hinein, das sind die "bereits als wahr erkannten Sätze".

Diese Vorgehensweise hat mehrere wichtige Konsequenzen:

Begriffliche Strenge und sorgfältiges Argumentieren sind Eckpfeiler der Mathematik. Bei mathematischen Aussagen gibt es nur die Möglichkeiten "wahr" oder "falsch" und nichts dazwischen. Natürlich kann man über den Wahrheitsgehalt eines Satzes nur dann vernünftig nachdenken, wenn man genau weiß, was die in der Aussage vorkommenden Begriffe bedeuten. Diese Bedeutungen werden in der Mathematik in **Definitionen** erklärt. Diese Definition muss man genau kennen (und bei Prüfungen genau reproduzieren können), schon eine kleine begriffliche Ungenauigkeit kann einen wahren Satz falsch machen.

Das Ableiten einer Aussage aus bereits als wahr erkannten Sätzen folgt gewissen Regeln und muss mit großer Sorgfalt erfolgen, weil die gewonnen Sätze im nächsten Schritt weiter verwendet werden. In einem Beweis muss man für jeden einzelnen Schritt eine Begründung angeben können. Außerdem ist es natürlich wichtig, die Regeln der Aussagenlogik zu kennen, die sagen, wie man überhaupt Aussagen aus anderen Aussagen ableiten kann.

In der Mathematik wird nichts falsch. Wenn ein mathematischer Satz einmal bewiesen wurde, dann bleibt er richtig und vergrößert das vorhandene mathematische Wissen. Natürlich haben sich im Lauf der Zeit auch in der Mathematik die üblichen Ansprüche an Formalisierung und Exaktheit geändert, genauso wie der Geschmack der MathematikerInnen. Das hat dazu geführt, dass Resultate präzisiert oder Beweise verbessert oder vereinfacht wurden, aber der allgemeine Wissensstand wächst kontinuierlich. Das Resultat über Eulersche Wege in Graphen, das wir in unserer mathematischen Geschichte besprochen haben, ist durch effiziente Begriffsbildungen jetzt natürlich einfacher zu verstehen und zu beweisen als bei seiner Entdeckung, aber ganz leicht ist es immer noch nicht. (Und es kommt auch tatsächlich immer wieder vor, dass bei aktuellen Entwicklungen Resultate aus vergangenen Jahrhunderten, die inzwischen mehr oder weniger vergessen waren, wieder entdeckt werden und sich als sehr nützlich erweisen.) Zugleich entwickelt sich die Mathematik (sowohl als eigenständige Wissenschaft als auch als Werkzeug für verschiedenste Anwendungen), wie wir später noch ausführlicher besprechen werden, rasend schnell weiter.

Das stellt die mathematische Ausbildung auf allen Niveaus vor große Herausforderungen. Auch für Studierende, die bis zum Doktorat "durchhalten", ist es sehr schwierig, in den wenigen Jahren des Studiums auch nur auf einem sehr kleinen Teilgebiet der Mathematik auf das Niveau der aktuellen Forschung zu kommen. In der Mathematikausbildung der Sekundarstufe ist die Situation noch wesentlich seltsamer. Themen wie Differential- und Integralrechnung, stammen in der Form, in der sie in der Schule präsentiert werden, etwa aus der Zeit zwischen 1750 und 1800. (Man stelle sich ähnliches in anderen Fächern vor.)

Die Mathematik ist sehr strukturiert, sie hat einen stark aufbauenden Charakter und tendiert zur Abstraktion. Auch das wird Ihnen im Verlauf des Studiums ziemlich bald (und vermutlich manchmal auf etwas schmerzliche Weise) vor Augen geführt werden. Um das rasch wachsende Wissen in irgend einer Weise zugänglich machen zu können, ist das Ordnen und Strukturieren ein ganz wichtiger Schritt. Gute Konzepte und Begriffe zu finden ist ein wichtiger Teil der mathematischen Weiterentwicklung. Durch Abstraktion werden Begriffe und Resultate geschärft und in einer breiteren Vielfalt von Situationen anwendbar gemacht, sowohl innermathematisch als auch in Anwendungsgebieten der Mathematik. Zum Teil liegt der Erfolg der Mathematik eben daran, dass man nicht über Spaziergänge in Königsberg, Computernetzwerke oder Verkehrsnetzpläne nachdenkt, sondern die zugehörigen Fragen erst in die Sprache der Graphentheorie übersetzt. Diese stellt nicht nur gemeinsame Werkzeuge für alle diese Fragen zur Verfügung, sondern erlaubt auch die Nutzung der Antworten auf eines der Anwendungsprobleme für andere Probleme.

Das bedeutet aber, dass man im Verlauf der mathematischen Ausbildung ständig mit Informationen konfrontiert wird, die schon eine lange Geschichte von Organisation und (mehrfacher) Aufbereitung hinter sich haben. Damit sehen die Präsentationen oft sehr stromlinienförmig aus und es ist nicht unmittelbar einsichtig, warum die Begriffe so gewählt wurden, wie sie präsentiert werden und ob "man das alles nicht auch ein bisschen anders machen könnte". Meist ist es so, dass die alternativen Ideen schon versucht wurden und sich als weniger günstig herausgestellt haben, bzw. dass sie Probleme aufwerfen würden, die an dieser Stelle noch nicht sichtbar sind. Andererseits kann in den Vorlesungen, nicht zuletzt aus Zeitgründen, nicht immer auf die Hintergründe und Motivationen und/oder auf die möglichen Anwendungen der besprochenen Mathematik eingegangen werden und die Inhalte können damit manchmal trocken oder "zu abstrakt" erscheinen. Hier kann ich nur dazu anregen, sich auch außerhalb der Lehrveranstaltungen Informationen zu besorgen und die vielen Quellen zu diesen Themen dem eigenen Geschmack folgend zu konsultieren.

Zu diesem Themenkreis gehört auch der stark aufbauende Charakter der Mathematik. Es ist ganz typisch, dass in Vorlesungen neue Begriffe eingeführt und dann mehr oder weniger sofort verwendet und weiterentwickelt werden. Wenn Sie versuchen, in eine höhersemestrige Lehrveranstaltung hineinzuhören oder ein fortgeschrittenes Buch über Mathematik anzusehen, dann werden Sie feststellen, dass Sie in vielen Fällen keine Chance haben, der Präsentation zu folgen, schon alleine weil Sie einen Großteil der vorkommenden Begriffe nicht kennen. Es ist wichtig, die Fähigkeiten im Absorbieren von Begriffen (bis zu dem Punkt, wo man sie selbst gut verwenden kann) von Beginn des Studiums an intensiv zu üben und sich so lange um ein Verständnis zu bemühen, bis es erreicht ist. (Lücken im Verständnis rächen sich fast unvermeidlicherweise im weiteren Verlauf des Studiums.) In diesem Bereich ist die Fähigkeit zur kritischen Selbstbeobachtung besonders wichtig. Einer Vorlesung folgen zu können bedeutet noch lange nicht, dass man die vorkommenden Begriffe auch tatsächlich verwenden kann. Das zeigt sich meist erst, wenn man versucht, selbständig Übungsbeispiele zu lösen oder einfache Beweise zu führen, was man deswegen möglichst oft versuchen sollte.

Der aufbauende Charakter ist auch der Grund, warum man Themen wie Differential– und Integralrechnung im Schulunterricht nicht einfach weglassen und stattdessen aktuellere Themen behandeln kann. Diese Themen sind die Fundamente für große Teile der Mathematik.

Ohne Begründung ist es keine Mathematik. Das ist ein ziemlich vielschichtiger Aspekt. Einerseits muss man in der Mathematik nichts glauben oder hinnehmen. Zumindest theoretisch kann man alles in der Mathematik überprüfen und verifizieren und eine Aussage ohne Begründung ist nicht viel wert. Im Prinzip darf und soll man in einem mathematischen Diskurs (also auch in Lehrveranstaltungen) Begründungen oder Erklärungen verlangen. Praktisch gesehen ist es meist so, dass etwa im Rahmen einer Lehrveranstaltung ein gewisser Grundstock an Fakten als Ausgangspunkt angenommen wird, auf den die Resultate zurückgeführt werden. Außerhalb dieses Grundstocks sollte man unbedingt versuchen, Resultate nicht einfach zu glauben, sondern ihre Beweise zu verstehen und nachzuvollziehen. Auch damit muss man wegen des aufbauenden Charakters der Mathematik so schnell wie möglich beginnen.

Umgekehrt gilt aber die Notwendigkeit der Begründung auch für das eigene mathematische Tun. Die (in Mathematik–Übungen bei vielen Studierenden leider sehr populäre) Frage, ob man an dieser Stelle eines Beispiels dieses oder jenes "tun darf" macht keinen Sinn. Einerseits geht es ja bei der Frage von "richtig" oder "falsch" nicht um die Erlaubnis des Übungsleiters. Viel wichtiger ist aber, dass auch die (bei Studierenden sehr beliebte) Antwort "ja" auf eine derartige Frage, eigentlich nutzlos ist. Wichtig ist ja, *warum* die geplante Aktion an dieser Stelle richtig oder falsch ist.

Bei der Bearbeitung von Übungsbeispielen sollte man sich daran gewöhnen, für jeden Schritt auch eine Begründung zu überlegen. Diese Begründung kann entweder sein, dass man eine Regel (etwa das Distributivgesetz) anwendet. Dabei muss man die Regeln und ihren Gültigkeitsbereich genau kennen, die Hoffnung, dass eine gewisse Regel gültig sein sollte ist zu wenig. Die andere Möglichkeit ist, dass man "nachdenkt", also eigene Begründungen für die Schritte findet, was dann natürlich jeden einzelnen Schritt betreffen muss. In beiden Fällen ist es sehr wichtig, die eigenen Argumente kritisch zu hinterfragen.

Ein ganz wichtiger Punkt in diesem Bereich ist der Umgang mit dem Vorwissen über Mathematik, das Sie aus der Schule mitbringen. Das ist ein schwieriges Thema, das vielen Studierenden Probleme bereitet. Während die Vertrautheit mit gewissen mathematischen Begriffen, die Sie aus der Schule mitbringen, im Rahmen des Studiums grundsätzlich positiv ist, müssen Sie lernen, Ihr Schulwissen konsequent zu hinterfragen. Üblicherweise ist nämlich das Schulwissen nur zu einem sehr geringen Teil mit Begründungen "unterfüttert", vieles wird im Schulunterricht einfach als Tatsache festgestellt und hingenommen. Ein Teil des Studiums des Unterrichtsfachs Mathematik besteht darin, die Begründungen für Ihr Schulwissen aufzuarbeiten. Dazu müssen Sie natürlich lernen zu unterscheiden, was sie "wirklich wissen" und was Sie nur "schon einmal gehört haben" (etwa in der Schule). Also ist auch hier die kritische Selbstbeobachtung von zentraler Bedeutung.

Die Grundlagenfrage. Das "Zurückführen auf bereits als wahr erkannte Sätze" wirft ein offensichtliches philosophisches Problem auf, nämlich wie man einen derartigen Prozess beginnen kann. Beim ersten Satz, den man behandeln möchte, gibt es ja nichts, worauf man ihn zurückführen könnte. In den Fällen, die wir bis jetzt besprochen haben (Quadrate ganzer Zahlen und der Satz über Eulersche Wege) ist das nicht so kritisch. In einem Fall landet man bei elementaren Rechenregeln für ganze Zahlen, im anderen Fall geht es im wesentlichen darum zu erklären, wie man einen Eulerschen Weg finden kann. Aber selbst in Situationen, die Ihnen vermutlich vertraut erscheinen, wird dieses Problem schon schwierig. Denken Sie etwa an die Aussage, dass es eine reelle Zahl gibt, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt. (Natürlich "kennen" Sie $\sqrt{2}$ aus der Schule, aber kennen Sie auch eine Begründung für die Existenz einer solchen Zahl? Bedenken Sie dabei vor allem, dass es, wie in der “Einführung in die Mathematik” bewiesen wird, keinen Bruch gibt, der quadriert 2 ergibt.)

Man kann dieses Problem auch nicht wirklich loswerden, daher wird ein anderer Weg gewählt. Man beginnt mit einer Sammlung von Sätzen (sogenannten *Axiomen*), die als wahr angenommen werden. Alles weitere wird darauf zurückgeführt, und “in Wirklichkeit” sagen alle mathematische Aussagen nur so etwas wie “wenn die Axiome ... wahr sind, dann ist auch folgende Aussage wahr”. Für die Mathematik als ganzes gibt es etablierte Systeme von Axiomen der Mengenlehre (die im wesentlichen sagen, dass man mit Mengen gewisse Operationen durchführen kann, die bestimmte Eigenschaften haben). Den Wahrheitsgehalt der Axiome selbst kann man mathematisch nicht untersuchen (außer man beginnt mit anderen Axiomensystemen und führt sie darauf zurück).

In der praktischen Arbeit als MathematikerIn und auch im Studium muss man üblicherweise nicht so weit zurückgehen (und das ganze Problem spielt praktisch gesehen überraschenderweise nur eine ziemlich untergeordnete Rolle). Hier ist der Ausgangspunkt meist so etwas wie die grundlegenden Eigenschaften eines gewissen Zahlbereiches (etwa der natürlichen Zahlen oder der reellen Zahlen), also Rechenregeln und Ähnliches. Diese sind üblicherweise so gewählt, dass man aus den Axiomen der Mengenlehre ableiten kann, dass es eindeutige Zahlenmengen mit diesen Eigenschaften gibt, und man kümmert sich nicht so sehr darum, wie diese “aussehen”. Ausgehend von diesen Grundeigenschaften beweist man dann Tatsachen über die untersuchten Objekte, etwa die eindeutige Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen oder die Existenz einer Dezimaldarstellung von reellen Zahlen. Es ist aber wichtig, sich immer wieder klar zu machen, was jeweils als Voraussetzung angenommen wurde und was bewiesen wurde bzw. bewiesen werden muss.

Auch wenn dieser grundlegende Zugang vielleicht philosophisch etwas bedenklich klingt, muss man sich vor Augen halten, dass die üblichen Axiomensysteme ziemlich plausibel und thematisch relativ weit weg von den meisten Gebieten der mathematischen Forschung sind. Außerdem sind sie schon seit relativ langer Zeit etabliert und werden nicht nach Gutdünken verändert (um “erwünschte” Sätze beweisen zu können).

Einige Bemerkungen zur Philosophie der Mathematik

Als nächstes wollen wir uns etwas ausgiebiger mit den philosophischen Aspekten beschäftigen, die sich aus dem deduktive Charakter der Mathematik ergeben. Wie schon besprochen, steht am Ende des Erkenntnisgewinns in der Mathematik normalerweise ein Beweis, indem ein Satz als wahr erkannt wird, indem er aus wahren Sätzen abgeleitet wird. Auf dem Weg dorthin spielen aber natürlich Vermutungen, Intuition, Versuch und Irrtum und gerade in den letzten Jahren stark zunehmend auch Computerexperimente eine große Rolle. Über diese Aspekte werden wir uns im nächsten Abschnitt bei der Besprechung der mathematischen Forschung noch Gedanken machen, zunächst bleiben wir aber noch bei den philosophischen Fragen zur Grundlegung der Mathematik.

Wie schon kurz angesprochen, ist für einen deduktiven Zugang die Verwendung von *Axiomen* kaum vermeidbar. Die Axiome legen sozusagen den Ausgangspunkt fest, von dem aus alles aufgebaut wird. Das ist auf vielen verschiedenen Niveaus möglich. So gibt es etwa ein einfaches System von 5 Axiomen, den sogenannten Peano-Axiomen, das die natürlichen Zahlen eindeutig beschreibt. (Sie werden diese Axiome in der Vorlesung "Einführung in die Mathematik" kennenlernen.) Von diesem System ausgehend kann man dann zum Beispiel die ganzen Zahlen konstruieren und die grundlegende Zahlentheorie entwickeln. Analog kann man auch die reellen Zahlen eindeutig durch einige Anforderungen an die Rechenoperationen und die Ordnungsrelation eindeutig charakterisieren. So eine Charakterisierung ist meist (ausgesprochen oder unausgesprochen) der Ausgangspunkt für eine Grundvorlesung über Analysis (also Differential- und Integralrechnung).

Die Rechtfertigung für diese Vorgehensweise ist, dass man alle diese Systeme auf die grundlegenden Axiome der Mengenlehre zurückführen kann, die, wie bereits angesprochen, als Grundlage für die gesamte Mathematik verwendet werden können. Im Rahmen der Mengenlehre kann man zum Beispiel beweisen, dass es eine (in einem passenden Sinn) eindeutige Menge gibt, welche die Peano-Axiome erfüllt und daher als Menge der natürlichen Zahlen verwendet werden kann. Analog kann man in der Mengenlehre eine eindeutige Menge reeller Zahlen konstruieren und so weiter. Wie das genau funktioniert muss man nicht wissen, um diesen Zugang verwenden zu können. Wichtig ist aber, sich klar zu machen, was jeweils vorausgesetzt wird, und was bewiesen werden muss.

Neben der Tatsache, dass die ursprünglichen Axiome natürlich nicht auf ihren Wahrheitsgehalt hin überprüft werden können, hat der formale, axiomatische Zugang unvermeidlicherweise auch andere Grenzen. Das folgt vor allem aus den bahnbrechenden Arbeiten des Logikers Kurt Gödel, der längere Zeit in Wien wirkte, aus den 1930er Jahren. Gödel konnte einerseits beweisen, dass es in jedem formalen System, das stark genug ist, um die natürlichen Zahlen hervorzubringen, Sätze geben muss, die weder beweisbar noch widerlegbar (d.h. als falsch nachweisbar) sind. Es muss also immer wahre Sätze geben, die nicht beweisbar sind. Natürlich ist a priori nicht klar, dass solche unbeweisbaren Sätze auch tatsächlich interessant sind. Allerdings konnte Gödel auch zeigen, dass es einen sehr interessanten und relevanten unbeweisbaren Satz in jedem solchen formalen System gibt. Mann kann nämlich innerhalb eines widerspruchsfreien, formalen Systems die eigene Widerspruchsfreiheit niemals formal nachweisen.

Fall es Sie wundert warum in diesen Sätzen der Teil "stark genug, um die natürlichen Zahlen hervorzubringen" vorkommt, hier eine kurze Erklärung. Sobald man die natürlichen Zahlen zur Verfügung hat, kann man in einem System auch viele andere Dinge codieren. Denken Sie nur daran, dass jede in einem Computer gespeicherte Datei eigentlich nur eine (sehr große) natürliche Zahl ist. Insbesondere, kann man dann beginnen, innerhalb des Systems Aussagen über das System selbst zu treffen. Die Möglichkeit der Selbstbezüglichkeit ist der Schlüssel zu den Resultaten von Gödel, man muss es dann nur noch raffiniert genug anstellen um einen Satz zu konstruieren der als Aussage "*ich bin ein unbeweisbarer Satz*" hat. Ist dieser Satz wahr, dann ist er ein wahrer, unbweisbarer Satz, ist er falsch, dann ist er ein falscher Satz, der beweisbar ist, also ist das System widersprüchlich.

Diese intellektuell faszinierenden Erkenntnisse spielen überraschenderweise für die meisten MathematikerInnen (die nicht auf dem Gebiet der Logik oder Mengenlehre arbeiten) praktisch keine Rolle "im täglichen (mathematischen) Leben". Die grundlegenden Axiome der Mengenlehre sind seit langem allgemein akzeptiert und es gibt kaum Bedarf an Erweiterungen oder Ähnlichem. Wie schon erwähnt liegt das vermutlich daran, das die Axiome nur benötigt werden um die grundlegenden Konstruktionen mit Mengen zu ermöglichen, sind diese einmal vorhanden, dann muss kaum mehr auf die Axiome zurückgegriffen werden.

Es wurden zwar, vor allem im Bereich der Mengenlehre, interessante Beispiele für unentscheidbare Sätze (im Sinne des Resultats von Gödel) gefunden, diese spielen aber in Bereichen außerhalb der reinen Mengenlehre kaum eine Rolle. Und die Unbeweisbarkeit der Widerspruchsfreiheit kann man ohnehin nur zur Kenntnis nehmen.

MATHEMATISCHE FORSCHUNG

Zum Abschluss der Betrachtung von Mathematik als Wissenschaft werden wir uns mit verschiedenen Aspekten der mathematischen Forschung beschäftigen. Für Außenstehende ist oft überraschend, dass in der Mathematik "noch immer nicht alles bekannt ist" und es aktive mathematische Forschung gibt. Tatsächlich entwickelt sich die Mathematik mit unglaublicher Geschwindigkeit weiter. Um das in Zahlen zu fassen: Die American Mathematical Society betreibt eine Publikationsdatenbank (MathSciNet), in der neben Büchern vor allem die Artikel aus Fachzeitschriften, die entweder der Mathematik oder stark mathematisch orientierten Teilen von Anwendungswissenschaften gewidmet sind, erfasst und teilweise zusammengefasst. Derzeit handelt es sich dabei um etwa 2000 Fachzeitschriften sowie knapp 120.000 wissenschaftliche Arbeiten pro Jahr! Jede dieser Arbeiten wird einem Fachgebiet zugeordnet und wenn man sich auf Fachgebiete wie wie "Zahlentheorie" oder "Differentialgeometrie" beschränkt, finden sich immer noch mindestens 2000 bis 3000 wissenschaftliche Arbeiten jährlich. Dabei ist zu bedenken, dass es grundsätzlich nicht wirklich Sinn macht, in der Mathematik etwas mehrmals zu publizieren, also enthalten diese Arbeiten (mit gewissen Abstrichen) alle etwas "Neues". Angesichts dieser Mengen ist wohl offensichtlich, dass man nur auf ganz engen Teilgebieten der Mathematik eine Chance hat, die aktuellen Entwicklungen zu verfolgen. Das hat zu einer sehr starken Spezialisierung geführt. Selbst innerhalb von Gebieten wie "Differentialgeometrie" kann man nur in relativ engen Nischen wirkliche Expertise haben. ForscherInnen aus anderen Teilgebieten der Mathematik verstehen auch die wichtigsten aktuellen Entwicklungen eines Gebiets bestenfalls oberflächlich.

Wie schon erwähnt spielt für praktisch forschende MathematikerInnen der axiomatische Zugang kaum eine Rolle und für die meisten von ihnen hat die mathematische Forschung viel mehr den Charakter des "Entdeckens" von vorhandenen Wahrheiten als des "Erfindens" von Neuem. Der Aspekt des "Erfindens" äußert sich wohl am stärksten in den Teilen, die mit Strukturierung und Begriffsbildung zu tun haben. Wie man die Erkenntnisse einordnet und in ein System bringt ist natürlich auch eine Frage des persönlichen Geschmacks. Außerdem können neue Erkenntnisse auch zu neuen und veränderten Interpretationen vorhandenen Wissens führen, sodass die Strukturierung ein dynamischer Prozess ist.

Während am Ende einer mathematischen Entdeckung üblicherweise ein Beweis steht, sind die Wege dorthin und der "praktische Ablauf" der Forschung so verschieden, wie die daran beteiligten Personen. Ob man lieber erst in groben Zügen spekuliert oder sich einzelne Teilschritte genauer ansieht und dort überprüft, ob eine neue Idee erfolgversprechend aussieht, hängt ganz vom persönlichen Geschmack ab. Ebenso gibt es ForscherInnen, die am liebsten alleine über ein Problem brüten, während für andere Diskussionen zu zweit oder in Gruppen ein Schlüssel zum Fortschritt sind. Auch der Charakter der Fragen, die die Forschung lenken und antreiben ist bei verschiedenen MathematikerInnen sehr verschieden. Manche brauchen konkrete Probleme als Antrieb, für andere sind die Weiterentwicklung einer Theorie oder von Werkzeugen ohne unmittelbares "konkretes" Ziel die zentrale Motivation.

Ganz wichtig ist es hier zu erwähnen, dass sowohl innerhalb von mathematischen Gebieten als auch zwischen den einzelnen Gebieten sehr oft überraschende Verbindungen und Wechselwirkungen gibt. Dadurch kommt es oft vor, dass die in einem Bereich "auf Vorrat" entwickelten Werkzeuge plötzlich zu schnellen und unerwarteten Fortschritten bei konkreten Problemen in einem anderen Bereich führen. Die verbesserten Kommunikationsmöglichkeiten tragen natürlich zu dieser Entwicklung stark bei. Im Endeffekt reicht das bis hin zu überraschenden Anwendungsmöglichkeiten von Mathematik in anderen Wissenschaften, die oft auch erst durch den breiten, bereits vorhandenen mathematischen Apparat wirklich schlagend werden.

Die Vielzahl an möglichen Forschungsthemen hat einerseits damit zu tun, dass mit jeder Weiterentwicklung auf einem Forschungsgebiet automatisch auch neue Fragen auftauchen. Das trifft auch auf die Anwendungsgebiete der Mathematik zu, die viele Fragestellungen für die mathematische Forschung liefern. Das klassische Beispiel ist hier die Physik, deren Entwicklung in einigen Bereichen schon seit Jahrhunderten eng mit mathematischen Gebieten verbunden ist. In den letzten Jahren liefern aber auch Gebiete wie Biologie, Medizin oder Wirtschaftswissenschaften viele interessante Fragestellungen für die Mathematik. Die schnelle Weiterentwicklung ist auch im Bereich der Forschungsthemen stark spürbar. Viele der Gebiete mit intensiver aktueller Forschung sind erste in den letzten Jahrzehnten entstanden und die "internen" Fragen auf diesen Gebieten sind nur mit entsprechender Vorbildung verständlich.

Andererseits gibt es aber auch Fragen, die ganz elementar formuliert werden können und die seit Jahrhunderten studiert werden, ohne dass bisher eine Lösung gefunden werden konnte. Ein schönes Beispiel für so eine Frage ist die sogenannte *Goldbach–Vermutung*, die besagt, dass jede gerade Zahl ≥ 4 als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden kann. Für die ersten Zahlen kann man sofort überprüfen, dass das stimmt, denn $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 5+3$, $10 = 5+5 = 7+3$, und so weiter. Ob das allgemein stimmt, ist nicht bekannt. Es hat also noch niemand eine gerade Zahl gefunden, bei der das nicht geht. Andererseits sagt die Tatsache, dass man für viele gerade Zahlen überprüfen kann, dass sie als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden können, wenig über den Wahrheitsgehalt der allgemeinen Aussage aus, die ja unendlich viele Zahlen betrifft. Und einen Beweis dafür, dass das allgemein geht, hat bis jetzt eben noch niemand gefunden.

Das bedeutet aber nicht, dass keine Hoffnung besteht, die Frage zu beantworten. Es gibt nämlich das leichtere Problem, ob man jede ungerade Zahl ≥ 7 als Summe von drei Primzahlen schreiben kann. (Das ist leichter, denn eine Lösung der Goldbach–Vermutung erlaubt einem, für eine ungerade Zahl n, die gerade Zahl $n-3$ als Summe von zwei Primzahlen zu schreiben und aus $n-3 = p_1 + p_2$ folgt natürlich $n = p_1 + p_2 + 3$.) Und in diesem Fall wurde schon 1937 bewiesen, dass das für alle Zahlen ab einer gewissen Größe funktioniert. Die "gewisse Größe" in diesem Resultat war allerdings so hoch, dass die (theoretisch vorhandene) Möglichkeit, die verbleibenden endlich vielen Zahlen "durchzuprobieren" praktisch (auch mit Computerhilfe) völlig unrealistisch war. Im Laufe der Jahre ist es gelungen, die Schranke, ab der der allgemeine Beweis funktioniert, so weit herunter zu drücken (auf etwa 10^{27}) und die Methoden zu Überprüfung der endlich vielen verbleibenden Fälle so weit zu verbessern, dass der Satz vor wenigen Jahren von H. Helfgott endgültig bewiesen werden konnte.

Ein Problem ähnlichen Charakters ist die Frage der Primzahlzwillinge. Nachdem außer zwei alle Primzahlen ungerade sind, kann für eine Primzahl $n > 2$, die Zahl $n + 1$ nie eine Primzahl sein. Ein *Primzahlzwilling* ist nun ein Paar von Primzahlen, deren Differenz 2 ist. Auch hier finden sich leicht Beispiele, etwa 3 und 5, 5 und 7, 11 und 13, 29 und 31, und so weiter. Das Problem der Primzahlzwillinge ist nun, ob es unendlich viele solche Paare gibt, und auch auf diese Frage ist die Antwort nicht bekannt. Bei diesem Problem hat es in den letzten Jahren ebenfalls entscheidende Fortschritte gegeben. Das Grundproblem an der ganzen Frage ist, dass der durchschnittliche Abstand von einer Primzahl zur nächsten immer größer wird, je größer die Zahlen werden. Daher ist a priori für *keine* Zahl N klar, dass es beliebig große (und damit unendlich viele) Primzahlen gibt, für die sich unter den nächsten N Zahlen eine weitere Primzahl findet. Und tatsächlich war das bis vor wenigen Jahren auch für keine Zahl N bekannt. Deshalb wurde das erste Resultat in dieser Richtung von Y. Zhang im Jahr 2013 als absoluter Durchbruch gewertet, auch wenn die betreffende Zahl N noch recht groß war, nämlich ungefähr 70 Millionen. Tatsächlich wurden die Argumente in Zhangs Beweis schon so weit verfeinert, dass der Beweis inzwischen für N in der Größenordnung von 270 funktioniert. Die meisten Experten glauben zwar, dass für einen Beweis für $N = 2$ (also die ursprüngliche Frage der Primzahlzwillinge) neue Ideen nötig sein werden, aber ein bedeutender Schritt in Richtung auf die Lösung ist auf jeden Fall gelungen.

Zum Abschluss sei hier noch bemerkt, dass die Lösungen für klassische, einfach zu formulierende Probleme wie die oben genannten, oft auf Umwegen erhalten werden, die mit dem ursprünglichen Problem nur noch wenig zu tun haben. Als Beispiel dafür möchte ich kurz die Lösung der sogenannten Fermat'schen Vermutung durch Andrew Wiles erwähnen, die es in den 1990er Jahren bis in die Tageszeitungen geschafft hat. Der Ausgangspunkt dieser Vermutung hängt mit dem Satz von Pythagoras zusammen, dass die Seitenlängen a, b und c eines rechtwinkeligen Dreiecks die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$ erfüllen. Nun ist schon aus der Schule bekannt, dass es rechtwinkelige Dreiecke gibt, für die alle drei Seiten ganzzahlige Länge haben, mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$ als einfachstem Beispiel. Tatsächlich gibt es für die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$ unendlich viele wesentlich verschiedene Lösungen in denen alle drei Zahlen ganz sind. Das Fermat'sche Problem behandelt die analoge Frage für die Gleichung $c^n = a^n + b^n$ mit $n \geq 3$.

Ungefähr 1640 vermerkte Pierre de Fermat am Rand einer Übersetzung der "Arithmetica" von Diophant, dass die Gleichung $c^n = a^n + b^n$ mit $n \geq 3$ keine Lösungen besitzt in denen a, b und c alle ganze Zahlen ungleich Null sind, und dass er "für diese Tatsache einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt habe" für den aber am Seitenrand zu wenig Platz sei. Über die Jahrhunderte haben viele berühmte MathematikerInnen an diesem Satz gearbeitet und Spezialfälle davon bewiesen, das allgemeine Problem blieb aber bis ins Jahr 1995 ungelöst, wo der Satz in zwei Arbeiten von A. Wiles und R. Taylor endgültig bewiesen wurde.

Der wesentliche Punkt hier ist aber, dass die Arbeiten von Wiles und Taylor eigentlich kaum etwas mit dem Fermat'schen Problem zu tun haben. Es geht in diesen Arbeiten einerseits um ringtheoretische Eigenschaften von Hecke–Algebren (die als Hilfsmittel benötigt werden) und andererseits um Aussagen über elliptische Kurven (gewisse Kurven dritten Grades über den komplexen Zahlen). Hauptsächlich geht es darum, dass man solche Kurven durch gewisse Konstruktionen (aus sogenannten modularen Formen) gewinnen kann. Der Zusammenhang dieser Frage mit dem Fermat'schen Problem wurde schon einige Jahre davor entdeckt. Man kann nämlich eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $c^n = a^n + b^n$ mit $n \geq 3$ benutzen, um explizit eine einfache elliptische Kurve zu definieren, von der man beweisen kann, dass sie nicht über modulare Formen erhalten werden kann. Durch die Resultate von Wiles und Taylor wurde gezeigt, dass es so eine Kurve nicht geben kann, also kann es auch keine ganzzahlige Lösung der Gleichung $c^n = a^n + b^n$ mit $n \geq 3$ geben.