

Klassische Differentialgeometrie

Notizen zur Vorlesung

Wintersemester 2019/20

Andreas Čap

INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT WIEN, OSKAR-MORGENSTERN-PLATZ
1, A-1090 WIEN

E-mail address: `Andreas.Cap@esi.ac.at`

Hintergrund und Ziele

Etwas klassische Geometrie

1.1. Der Euklidische Raum. Geometrie findet nicht wirklich im Vektorraum \mathbb{R}^n statt, vor allem die ausgezeichnete Rolle des Nullpunkts passt nicht zu geometrischen Überlegungen. Formal kann man durch einen Übergang auf *affine Räume* beheben, wobei man für einen Vektorraum V über einem Körper \mathbb{K} einen affinen Raum A mit modellierendem Vektorraum V definiert. Das funktioniert auf Basis von 2 Operationen.

- Zu zwei Punkten in A bildet man den *Verbindungsvektor*, der in V liegt.
- Man “hängt einen Vektor in V an einen Punkt in A an” und erhält einen neuen Punkt in A .

Für einen affinen Raum A mit modellierendem Vektorraum V erhält man leicht:

- Die Wahl eines Punktes $\mathcal{O} \in A$ liefert eine Identifikation von A mit V . Je zwei solche unterscheiden sich um eine Translation.
- Affine Teilräume (hänge alle Elemente eines Teilraumes von V an einen Punkt von A an) insbesondere affine Geraden.
- Parallelität von affinen Geraden und Verallgemeinerungen.

Zu den affinen Räumen gibt es einen Begriff von affiner Geometrie, der über allgemeinen Körpern funktioniert. Um Euklidische Geometrie zu betreiben, in der man über Längen und Winkel sprechen will, benötigt man zusätzliche Strukturen und wir schränken uns dafür auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ein. Was man braucht ist ein inneres Produkt auf dem modellierenden Vektorraum V eines affinen Raumes, was dann den abstrakten Begriff eines Euklidischen Raumes liefert. Mit dem inneren Produkt und der dadurch definierten Norm erhält man

- Den Abstand zweier Punkte als die Länge des Verbindungsvektors und Verallgemeinerungen davon.
- Den Winkel zwischen zwei schneidenden Geraden als den Winkel zwischen den modellierenden Teilräumen in V und Verallgemeinerungen davon.

1.2. Euklidische Bewegungen. Wir werden den abstrakten Zugang nur im Hinterkopf behalten und den n -dimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{E}^n einfach als die Menge \mathbb{R}^n betrachten, diesen aber mit einer speziellen Menge von Morphismen ausstatten, die als *Euklidische Bewegungen* oder als *Kongruenzabbildungen* bezeichnet werden. Das Grundprinzip der Euklidischen Geometrie ist dann, dass alle Konzepte und Resultate in geeigneter Form mit Euklidischen Bewegungen verträglich sein müssen.

DEFINITION 1.2. Eine *Euklidische Bewegung* ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die Distanzen zwischen Punkten bewahrt, also $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Dabei bezeichnet $|\cdot|$ die übliche (Euklidische) Norm auf \mathbb{R}^n .

Das sieht sehr allgemein aus, tatsächlich gibt es aber nicht so viele Bewegungen und man kann Sie ganz explizit beschreiben:

SATZ 1.2. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Euklidische Bewegung.

(1) Es gibt eine orthogonale Matrix A und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$, sodass $f(x) = Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Umgekehrt ist jede Abbildung dieser Form eine Euklidische Bewegung.

(2) Ist $W \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum mit modellierendem Teilraum $V \subset \mathbb{R}^n$, dann ist $f(W)$ ein affiner Teilraum von \mathbb{R}^n mit modellierendem Teilraum $A(V) \subset \mathbb{R}^n$.

(3) Die Funktion f ist glatt (also beliebig oft differenzierbar) und für die Ableitung gilt $Df(x) = A$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere folgt $D^2f = 0$.

BEWEIS. Die erste Aussage in (1) wird in Satz 9.5 von [LA] bewiesen.

Der Verbindungsvektor zwischen $Ax + b$ und $Ay + b$ ist natürlich $Ay - Ax = A(y - x)$. Damit folgt sofort die zweite Aussage in (1) und Teil (2).

In Koordinaten sagt (1) gerade, dass $f_i(x) = \sum a_{ij}x_j + b_j$ gilt, woraus die Aussage sofort folgt. Alternativ kann man mit der Kettenregel wie folgt rechnen:

$$Df(x)(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x + tv) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (f(x) + Atv) = Av.$$

□

Aus diesem Satz kann man sofort die Verträglichkeit verschiedener geometrischer Größen mit Bewegungen ablesen. Er führt auch direkt zu Anwendungen von linearer Algebra auf Euklidische Geometrie. So kann man etwa leicht beweisen, dass es für Punkte $x, y, x', y' \in \mathbb{E}^n$ mit $|y' - x'| = |y - x|$ eine Bewegung f gibt, sodass $f(x) = x'$ und $f(y) = y'$ gilt (siehe Übungen). Die aus der Schule bekannten Kongruenzsätze der Euklidischen Geometrie liefern für $n = 2$ äquivalente Bedingungen dafür, dass es für Tripel (x, y, z) und (x', y', z') von Punkten in \mathbb{E}^2 eine Bewegung f gibt, die $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ und $f(z) = z'$ erfüllt.

Teil (2) des Satzes sagt insbesondere, dass Euklidische Bewegungen affine Gerade auf affine Geraden abbilden und dass Parallelität unter Euklidischen Bewegungen erhalten bleibt. Damit ist auch Kollinearität von Punkten (also die Tatsache, dass die Punkte auf einer affinen Gerade liegen) eine geometrische Eigenschaft.

BEMERKUNG 1.2. Zu andern Begriffen von Geometrie, die analog betrachtet werden können, affine, orientiert, äqui-affin. Affine Bewegungen und der Fundamentalsatz der affinen Geometrie.

Was studiert man in der klassischen Differentialgeometrie?

Wir betrachten “schöne” Teilmengen von \mathbb{R}^n (eigentlich von \mathbb{E}^n), primär Kurven in \mathbb{R}^2 und Flächen in \mathbb{R}^3 . Dabei verwenden wir Werkzeuge der Analysis um diese Teilmengen geometrisch zu verstehen. Zentraler Punkt sind verschiedene Begriffe von “Krümmung”.

1.3. Kurven. Anschaulich ist plausibel, was mit einer “glatten” Kurve gemeint ist, die keine “Ecken” oder “Lücken” hat. Das formalisiert man über die Bilder von hinreichend oft differenzierbaren Abbildungen. Wir werden mit dem notwendigen Grad an Differenzierbarkeit meist nicht vorsichtig sein und “glatt” als C^∞ , also beliebig oft differenzierbar, interpretieren. In den meisten Fällen würde C^2 oder C^3 als Voraussetzung ausreichen. Einfache Beispiele zeigen, dass man zu viel Information verliert, wenn man nur das Bild so einer Abbildung betrachtet. Daher ist es günstiger, eine etwas feinere Äquivalenzrelation zu betrachten.

DEFINITION 1.3. (1) Eine *glatt parametrisierte Kurve* in \mathbb{R}^n ist eine glatte Funktion $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei I ein Intervall in \mathbb{R} ist.

(2) Seien I und J Intervalle in \mathbb{R} . Dann ist ein *Diffeomorphismus* von J nach I eine bijektive, glatte Funktion $\varphi : J \rightarrow I$, sodass auch die inverse Funktion $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$ glatt ist.

(3) Seien $c_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt parametrisierte Kurven. Man sagt, dass c_2 eine *Reparametrisierung* von c_1 ist, wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$ gibt, sodass $c_2 = c_1 \circ \varphi$ gilt.

Für einen Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$ gilt natürlich $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Da J zusammenhängend ist, gilt entweder $\varphi'(t) > 0$ oder $\varphi'(t) < 0$ für alle t . Entsprechend nennt man φ und Reparametrisierungen durch φ *orientierungserhaltend* bzw. *orientierungsvertauschend*. Sei umgekehrt J ein Intervalle und $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ gilt. Dann ist φ streng monoton und damit injektiv, definiert also eine Bijektion $J \rightarrow \varphi(J)$. Nach dem inversen Funktionensatz ist auch φ^{-1} glatt also $\varphi : J \rightarrow \varphi(J)$ ein Diffeomorphismus.

Aus der Definition folgt leicht, dass (orientierungserhaltende) Reparametrisierung zu sein eine Äquivalenzrelation definiert. Die beste Definition einer (orientierten) geometrischen Kurve ist als eine Äquivalenzklasse dieser Relation. Zum Studium solcher Kurven benutzt man Parametrisierungen, studiert aber nur Größen und Eigenschaften, die mit Reparametrisierungen verträglich sind.

1.4. Reguläre Kurven. Leider sehen die Bilder von glatt parametrisierten Kurven im Allgemeinen nicht so schön aus, wie man hoffen würde. Ein Beispiel liefert die

Funktion $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, die durch $c(t) := \begin{cases} (t^N, 0) & t \leq 0 \\ (0, t^N) & t > 0 \end{cases}$ für ein $N \geq 2$, die C^{N-1}

ist, aber eine "Ecke" bei 0 hat. Analoge Beispiele für C^∞ erhält man leicht mit etwas mehr Analysis. Das Problem ist, dass c im Nullpunkt "stehen bleibt", was wir also nicht erlauben dürfen. Das motiviert folgende Definition.

DEFINITION 1.4. Eine *regulär parametrisierte Kurve* in \mathbb{R}^n ist eine glatte Funktion $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ für ein Intervall I in \mathbb{R} , sodass $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Eine Reparametrisierung einer regulären Kurve ist selbst regulär, also ist Regularität eine Eigenschaft geometrischer Kurven und es zeigt sich, dass man für reguläre Kurven die Freiheit der Reparametrisierung leicht in den Griff bekommen kann. Für $n = 2$ genügt diese Regularitätsbedingung für die Zwecke der Geometrie. Für $n > 2$ verlangt man zusätzliche Bedingungen, siehe Definition 2.10.

1.5. Flächen. Intuitiv ist wieder recht einsichtig, was eine glatte Fläche in \mathbb{R}^3 (oder eigentlich in \mathbb{E}^3) sein soll. Ein Beispiel wäre der Graph einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, also die Teilmenge $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Andere Beispiele, wie eine Sphäre oder ein Torus in \mathbb{R}^3 zeigen, dass man glatte Flächen im Allgemeinen nicht durch offene Teilmengen von \mathbb{R}^2 parametrisieren kann. Es macht aber keine Probleme, sie *lokal* durch solche Teilmengen zu parametrisieren. Zum Beispiel gibt es offensichtliche Parametrisierungen einer offenen Hemisphäre durch eine offene Scheibe in \mathbb{R}^2 .

Das Konzept von Diffeomorphismen aus Definition 1.3 macht ohne Probleme für offene Teilmengen von \mathbb{R}^n Sinn und die Ableitung eines Diffeomorphismus in jedem Punkt ist invertierbar. Nehmen wir umgekehrt an, dass $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive glatte Funktion ist, sodass $D\varphi(x)$ für jeden Punkt $x \in U$ invertierbar ist. Dann gibt es nach dem Inversen Funktionensatz offenen Umgebungen V von x und W von $\varphi(x)$, sodass sich φ zu einem Diffeomorphismus $V \rightarrow W$ einschränkt. Insbesondere ist $\varphi(U)$ offen in \mathbb{R}^n , weil $W \subset \varphi(U)$ gilt und natürlich definiert φ eine

glatte Bijektion $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$. Dann sagt aber der inverse Funktionensatz auch, dass die inverse Funktion $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ lokal um jeden Punkt glatt sein muss. Damit ist φ^{-1} glatt, also $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ein Diffeomorphismus.

Auch die Regularitätsbedingung für Parametrisierungen lässt sich leicht in höhere Dimensionen übertragen. Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine injektive glatte Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (mit $m > n$) verlangt man einfach, dass für jeden Punkt $x \in U$ die Ableitung $D\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ injektiv ist. Damit sind die grundlegenden Zutaten vorhanden um analog zu Kurven vorzugehen, man sieht aber gleich, dass sich einige neue Komplikationen ergeben. Da nur lokale Parametrisierungen vorhanden sind, genügt es nicht, verschiedene Parametrisierungen mit dem gleichen Bild zu vergleichen, man muss auch mit dem Fall umgehen können, dass sich die Bilder nur schneiden. Andererseits bedeutet bei einer Kurve eine Reparametrisierung nur, “die gleiche Kurve mit anderer Geschwindigkeit zu durchlaufen” was man sich leicht vorstellen kann. In höheren Dimensionen sind Diffeomorphismen viel flexibler und es ist viel schwieriger den Zusammenhang zwischen verschiedenen Parametrisierungen intuitiv zu verstehen.

Daher wird es wichtig werden, eine Sprache zu entwickeln in der man von Funktionen und allgemeineren geometrischen Objekten und Operationen *auf einer Fläche* sprechen kann. Dann kann man die Parametrisierungen zum Rechnen benutzen, aber die Ergebnisse immer auf der Fläche interpretieren. Dazu werden wir einige an Analysis auf passenden Teilmengen von \mathbb{R}^n , sogenannten *Teilmannigfaltigkeiten* entwickeln. Es ist hilfreich sich klar zu machen, dass die analytischen Konzepte *nicht* davon abhängen sollen, wie die Fläche in \mathbb{R}^n eingebettet ist, etwa als Sphäre oder als Ellipsoid. Daher ist der Fokus in diesen Aspekten ein anderer als im Studium der Geometrie von Teilmannigfaltigkeiten. Es wird nützlich sein, diesen Unterschied im Auge zu behalten um Verwirrung zu vermeiden.

Lokale Theorie von Kurven

2.1. Beispiele. siehe 2.1.2 bis 2.1.6 von [Bär].

2.2. Tangente und Tangentialraum. Definiert man die Ableitung einer Kurve c als $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h}$, dann sieht man dass hier der Verbindungsvektor von $c(t)$ nach $c(t+h)$ gebildet und mit dem Skalar $1/h$ multipliziert wird. Wenn man c als Kurve in \mathbb{E}^n betrachtet, dann definiert das einen Vektor in \mathbb{R}^n Sinn, wo man auch den Limes bilden kann. Damit kann man die Ableitung von c immer als Kurve in \mathbb{R}^n betrachten. Das passt auch zur natürlichen Interpretation von $c'(t)$ als (vektorielle) "Momentangeschwindigkeit" der Kurve c im Punkt $c(t)$. Für regulär parametrisierte Kurven motiviert das die Definition der Tangente als affiner Teilraum von \mathbb{E}^n .

DEFINITION 2.2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine regulär parametrisierte Kurve. Für $t \in I$ definieren wir die *Tangente an c im Punkt $c(t)$* als die affine Gerade $\tau_{c(t)} := \{c(t) + sc'(t) : s \in \mathbb{R}\}$ in \mathbb{E}^n . Der modellierende Teilraum $\mathbb{R} \cdot c'(t) \subset \mathbb{R}^n$ heißt der *Tangentialraum von c im Punkt $c(t)$* .

PROPOSITION 2.2. *Die Tangente ist ein geometrisches Konzept: Ist $\tilde{c} = c \circ \varphi$ eine Reparametrisierung von c , dann ist $\tau_{\tilde{c}(t)} = \tau_{c(\varphi(t))}$ und ist $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine Bewegung, dann ist $\tau_{(f \circ c)(t)} = f(\tau_{c(t)})$.*

BEWEIS. Nach der Kettenregel folgt sofort $\tilde{c}'(t) = c'(\varphi(t))\varphi'(t)$ und damit folgt die erste Behauptung. Nach Satz 1.2 gibt es eine orthogonale Matrix A und $b \in \mathbb{R}^n$, sodass $f(x) = Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Ebenfalls nach Satz 1.2 ist $f(\tau_{c(t)})$ eine affine Gerade mit Richtungsvektor $Ac'(t)$ und natürlich geht diese Gerade durch den Punkt $f(c(t))$. Wiederum nach der Kettenregel ist $(f \circ c)'(t) = Df(c(t))(c'(t)) = Ac'(t)$ und damit folgt die zweite Behauptung. \square

Der Beweis zeigt auch, dass für eine orientierte Kurve die Tangente als orientierte affine Gerade (mit der Richtung, die durch $c'(t)$ vorgegeben wird) ein geometrisches Konzept ist.

Der Tangentialraum erlaubt noch eine andere Interpretation, in der er unter einer viel größeren Klasse von Abbildungen invariant ist. Solche Interpretationen werden später für die Verallgemeinerung der Analysis wichtig sein.

- Interpretiere \mathbb{R}^n als Tangentialraum an \mathbb{E}^n bei x .
- Interpretiere die Ableitungen einer glatten Funktionen φ in x als lineare Abbildung vom Tangentialraum bei x in den Tangentialraum bei $\varphi(x)$.
- Das macht auch Sinn, wenn φ nur lokal um x definiert ist.

Betrachten wir nun eine glatt parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, dann ist auch $\Phi \circ c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine glatte Kurve. Nach der Kettenregel ist $(\Phi \circ c)'(t) = D\Phi(c(t))(c'(t))$. Damit bildet aber $D\Phi(c(t))$ den Tangentialraum an c in $c(t)$ auf den Tangentialraum an $\Phi \circ c$ in $\Phi(c(t))$ ab. Das funktioniert auch, wenn Φ nur lokal um $c(t)$ definiert ist. In diesem Sinn ist der Tangentialraum also mit beliebigen (lokalen) Diffeomorphismen verträglich.

2.3. Rektifizierbarkeit und Bogenlänge. Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ stetig. Dann betrachtet man eine Unterteilung \mathcal{Z} von $[a, b]$, also eine Familie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ reeller Zahlen. Dann läuft c "der Reihe nach" durch die Punkte $c(t_i) \in \mathbb{E}^n$ und betrachten die Summe der Abstände $\ell_{\mathcal{Z}}(c) := \sum_{i=1}^k |c(t_i) - c(t_{i-1})| \in \mathbb{R}$ dieser Punkte. Wählt man einen weiteren Punkt s mit $t_{i-1} < s < t_i$, dann ist nach der Dreiecksungleichung $|c(t_i) - c(t_{i-1})| \leq |c(t_i) - c(s)| + |c(s) - c(t_{i-1})|$. Induktiv folgt daraus sofort, dass für eine Verfeinerung \mathcal{Z}' von \mathcal{Z} (also einer Unterteilung, die aus \mathcal{Z} durch Einfügen weiterer Zwischenpunkte entsteht), immer $\ell_{\mathcal{Z}'}(c) \geq \ell_{\mathcal{Z}}(c)$ gilt.

DEFINITION 2.3. Eine stetige Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ heißt *rektifizierbar* wenn die Menge $\{\ell_{\mathcal{Z}}(c)\}$ für beliebige Unterteilungen \mathcal{Z} von $[a, b]$ nach oben beschränkt ist. Ist das der Fall, dann nennt man das Supremum dieser Menge die *Bogenlänge von c* und bezeichnet diese mit $L_a^b(c)$.

Die intuitive Rechtfertigung dieser Definition ist die Interpretation von $\ell_{\mathcal{Z}}(c)$ als Länge eines Polygonzugs mit den Ecken $c(t_0), \dots, c(t_k)$. Im Allgemeinen sind stetige Kurven nicht rektifizierbar und haben damit keine endliche Bogenlänge. Ein Beispiel liefert die bekannte Schneeflockenkurve. Stetig differenzierbare Kurven sind aber immer rektifizierbar und man kann die Bogenlänge als Integral berechnen.

SATZ 2.3. Sei $[a, b] \subset I$ ein kompaktes Intervall und $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit Ableitung $c' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist c rektifizierbar und $L_a^b(c) = \int_a^b |c'(t)| dt$.

BEWEIS. Wir bemerken zunächst, dass $\int_a^b |c'(t)| dt$ als Integral einer stetigen Funktion über ein kompaktes Intervall endlich ist. Sei nun $\mathcal{Z} = \{t_0, \dots, t_k\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $c(t_i) = c(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t) dt$ und daraus folgt

$$|c(t_i) - c(t_{i-1})| = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t) dt \right| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)| dt.$$

Durch Summieren folgt $\ell_{\mathcal{Z}}(c) \leq \int_a^b |c'(t)| dt$, also ist c rektifizierbar und die Bogenlänge kleiner gleich dem Integral.

Um die Gleichheit zu beweisen wählen wir $\epsilon > 0$. Als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist c' gleichmäßig stetig, also finden wir ein $\delta > 0$, sodass aus $|t - s| < \delta$ immer $|c'(t) - c'(s)| < \epsilon/2$ folgt. Betrachten wir nun eine Unterteilung \mathcal{Z} wie oben, sodass $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ für alle i gilt. Dann folgt $|c'(t) - c'(t_i)| < \epsilon/2$ für alle $t \in [t_{i-1}, t_i]$ und Integrieren liefert $|\int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t) dt - c'(t_i)(t_i - t_{i-1})| < (t_i - t_{i-1})\epsilon/2$. Insbesondere folgt daraus $|c(t_i) - c(t_{i-1})| \geq |c'(t_i)|(t_i - t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})\epsilon/2$ und aufsummieren liefert $\ell_{\mathcal{Z}}(c) \geq \sum_i |c'(t_i)|(t_i - t_{i-1}) - \epsilon/2$. Aber der erste Term ist eine Riemannsumme für $\int_a^b |c'(t)| dt$ und durch Verfeinern kann man erreichen, dass diese $\epsilon/2$ -nahe am Integral liegt. Bezeichnet man diese Unterteilung wieder mit \mathcal{Z} , dann folgt $\ell_{\mathcal{Z}}(c) \geq \int_a^b |c'(t)| dt - \epsilon$ und das vervollständigt den Beweis. \square

2.4. Bogenlängenparametrisierung. Aus Satz 2.3 folgt sofort, dass man für eine glatt parametrisierte Kurve die (signierte) Bogenlänge als Funktion mit guten analytischen Eigenschaften definieren kann. Das führt sofort zu einer ausgezeichneten Klasse von Parametrisierungen, die für den Fall von Kurven das Problem der Unabhängigkeit von der Parametrisierung weitgehend eliminieren.

DEFINITION 2.4. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatt parametrisierte Kurve. Man sagt, “ c ist nach der Bogenlänge parametrisiert” wenn $|c'(t)| = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

Nach Definition ist eine Kurve, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist, automatisch regulär parametrisiert. Für $a, b \in I$ mit $a < b$ kann man die Einschränkung $c|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten und nach Satz 2.3 hat diese Kurve Bogenlänge $b - a$, was die Terminologie motiviert.

SATZ 2.4. Jede regulär parametrisierte Kurve besitzt eine orientierungserhaltende Reparametrisierung, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Ist andererseits $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve und $\varphi : J \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus, sodass sowohl c als auch $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert sind, dann ist φ von der Form $\varphi(t) = t_0 \pm t$.

BEWEIS. Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Kurve, dann wählen wir einen Punkt $t_0 \in I$ und betrachten die Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $\varphi(t) := \int_{t_0}^t |c'(s)| ds$ definiert ist. Da $|c'(t)|$ stetig ist, ist φ differenzierbar mit Ableitung $\varphi'(t) = |c'(t)| > 0$ ist. Damit ist φ glatt und streng monoton wachsend, also wissen wir aus Abschnitt 1.3, dass $\varphi(I)$ ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und $\varphi : I \rightarrow J$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus ist. Nun betrachten wir die orientierungstreu reparametrisierte Kurve $\tilde{c} := c \circ \varphi^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ von c . Nach der Kettenregel gilt $\tilde{c}'(t) = c'(\varphi^{-1}(t)) \cdot (\varphi^{-1})'(t)$ und natürlich gilt $(\varphi^{-1})'(t) = 1/\varphi'(\varphi^{-1}(t))$. Damit folgt sofort $|\tilde{c}'(t)| = 1$ für alle t .

Sind andererseits sowohl c als auch $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert, dann folgt aus der Kettenregel sofort $|\varphi'(t)| = 1$ für alle $t \in J$. Da J zusammenhängend ist, folgt entweder $\varphi'(t) = 1$ für alle t oder $\varphi'(t) = -1$ für alle t . Wählen wir $s_0 \in J$ und setzen im ersten Fall $t_0 = \varphi(s_0) - s_0$ und im zweiten Fall $t_0 = \varphi(s_0) + s_0$, dann folgt die Behauptung sofort aus $\varphi(t) = \varphi(s_0) + \int_{s_0}^t \varphi'(s) ds$. \square

Vom theoretischen Standpunkt können wir also immer mit Bogenlängenparametrisierungen arbeiten. Schon für einfache Kurven (etwa für Ellipsen) kann man aber Bogenlängenparametrisierungen nicht mehr durch elementare Funktionen beschreiben. Die Inverse der Bogenlängenfunktion zu finden bedeutet ja im wesentlichen die Differentialgleichung $\varphi'(t) = 1/|c'(\varphi(t))|$ zu lösen und das ist oft nicht elementar möglich. Daher ist es hilfreich, mit allgemeinen Parametrisierungen zu rechnen.

Bogenlängenparametrisierungen haben auch physikalisch eine einsichtige Interpretation, wenn man $|c'(t)|$ als (Betrag der) Momentangeschwindigkeit zur Zeit t interpretiert. Man durchläuft die Kurve also mit (dem Betrag nach) “konstanter” Geschwindigkeit (konstante Geschwindigkeit als Vektor wäre nur für eine Gerade möglich). Das hat Auswirkungen auf die Beschleunigung, also die zweite Ableitung:

PROPOSITION 2.4. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve mit Ableitung $c'(t)$. Dann steht für jedes $t \in I$ die zweite Ableitung $c''(t)$ normal auf $c'(t)$, es gilt also $\langle c'(t), c''(t) \rangle = 0$.

BEWEIS. Natürlich ist $|c'(t)| = 1$ äquivalent zu $\langle c'(t), c'(t) \rangle = 1$. In Termen der Komponenten c'_i von c' bedeutet das $\sum_i (c'_i(t))^2 = 1$. Differenziert man das, dann erhält man $0 = 2 \sum_i c'_i(t) c''_i(t)$ und damit die Behauptung. Alternativ können wir auch die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(v) := \langle v, v \rangle$ differenzieren. Nach der Kettenregel können wir $Df(v)(w)$ als $\frac{d}{dt}|_{t=0} f(v + tw)$ berechnen. Nun ist aber $f(v + tw) = \langle v, v \rangle + 2t \langle v, w \rangle + t^2 \langle w, w \rangle$, also $Df(v)(w) = 2 \langle v, w \rangle$. Nach Voraussetzung ist $(f \circ c')(t) = 1$ für alle t und differenzieren liefert $0 = Df(c'(t))(c''(t)) = 2 \langle c'(t), c''(t) \rangle$. \square

In der physikalischen Interpretation von oben kann die Orthogonalität von c' und c'' so deuten, dass die Beschleunigungen nur nötig sind um auf der Kurve zu bleiben. Damit kann man aber hoffen, dass $c''(t)$ Informationen über die Form von c liefert.

Krümmung ebener Kurven

2.5. Ebene Kurven. Betrachten wir den Fall $n = 2$, dann wird die Situation relativ einfach. Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ und $t \in I$ ist $c'(t)$ ein Einheitsvektor in \mathbb{R}^2 . Damit bilden die zu $c'(t)$ normalen Vektoren einen eindimensionalen Teilraum von \mathbb{R}^2 , also ist $c''(t)$ im wesentlichen durch eine reelle Zahl bestimmt. Definieren wir $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ als Rotation um $\pi/2$, also $i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, dann ist nämlich $c''(t) = \lambda i c'(t)$ für ein eindeutiges $\lambda \in \mathbb{R}$.

Das entscheidende Beispiel für die Definition der Krümmung ebener Kurven liefern die Kreise. Eine Bogenlängenparametrisierung eines in positiver Richtung durchlaufenen Kreise mit Radius r ist durch $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (r \cos(t/r), r \sin(t/r))$ gegeben. Dafür erhält man nämlich $c'(t) = (-\sin(t/r), \cos(t/r))$, also $|c'(t)| = 1$ für alle t . Außerdem ist $c''(t) = (-\frac{1}{r} \cos(t/r), -\frac{1}{r} \sin(t/r)) = \frac{1}{r} i c'(t)$. Durchläuft man den Kreis in die Gegenrichtung, dann erhält man analog $c''(t) = \frac{-1}{r} i c'(t)$. Im Fall eines Kreises liefert also der Proportionalitätsfaktor genau den Reziprokwert des Radius, den man als Maß für die Krümmung betrachtet.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass für einen Einheitsvektor v und $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda = \langle iv, \lambda iv \rangle = \det(v, \lambda iv)$ gilt. Damit können wir die Krümmung für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ als die Funktion $\kappa = \kappa_c : I \rightarrow \mathbb{R}$ definieren, die durch $\kappa_c(t) = \det(c'(t), c''(t))$ gegeben ist.

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ glatt nach der Bogenlänge parametrisiert und $t_0 \in I$. Von oben folgern wir leicht, dass es für $\kappa(t_0) \neq 0$ einen eindeutigen bogenlängenparametrisierten Kreis durch den Punkt $c(t_0)$ gibt dessen erste und zweite Ableitung in diesem Punkt mit der ersten und zweiten Ableitung von c übereinstimmen. Dieser heißt der *Krümmungskreis an c in $c(t_0)$* und nach Konstruktion ist sein Radius gerade $1/|\kappa(t_0)|$. Ist $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, dann kann man die *Evolute* e von c dadurch definieren, dass $e(t)$ der Mittelpunkt des Krümmungskreises an c in $c(t)$ ist. Das liefert eine glatte aber im allgemeinen nicht regulär parametrisierte Kurve. Ist $\kappa(t_0) = 0$, dann hat die Tangente $\tau_{c(t_0)}$ (parametrisiert als $s \mapsto c(t_0) + s c'(t_0)$ die gleiche erste und zweite Ableitung in diesem Punkt wie c .

Eine kurze Rechnung zeigt, wie man die Krümmung bei allgemeiner Parametrisierung definieren muss. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre glatt parametrisierte Kurve und $\varphi : J \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus und betrachte $c \circ \varphi$. Dann ist $(c \circ \varphi)'(t) = c'(\varphi(t))\varphi'(t)$ und $(c \circ \varphi)''(t) = c''(\varphi(t))\varphi'(t)^2 + c'(\varphi(t))\varphi''(t)$ und somit

$$(2.1) \quad \det((c \circ \varphi)'(t), (c \circ \varphi)''(t)) = \varphi'(t)^3 \det(c'(\varphi(t)), c''(\varphi(t))).$$

Wenn φ so gewählt ist, dass $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, dann ist $\varphi'(t) = 1/|c'(\varphi(t))|$ und die linke Seite liefert die Krümmung der Reparametrisierung. Damit gibt es nur eine Möglichkeit, die Krümmung so zu definieren, dass sie mit Reparametrisierungen verträglich sein kann:

DEFINITION 2.5. Für eine regulär parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist die Krümmung κ_c von c die glatte Funktion $\kappa_c : I \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$\kappa_c(t) := \frac{\det(c'(t), c''(t))}{|c'(t)|^3}$$

gegeben ist.

Wir können nun leicht verifizieren, dass die Krümmung eine geometrische Größe für orientierte Kurven ist:

SATZ 2.5. *Sei $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve und $\varphi : J \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt $\kappa_{c \circ \varphi} = \kappa_c \circ \varphi$ falls φ orientierungstreu ist und $\kappa_{c \circ \varphi} = -\kappa_c \circ \varphi$ falls φ orientierungsvertauschend ist. Für eine Euklidische Bewegung $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ der Form $f(x) = A(x) + b$ gilt $\kappa_{f \circ c} = \det(A)\kappa_c = \pm\kappa_c$. Also ist die Krümmung eine geometrische Größe für orientierte Kurven.*

BEWEIS. Betrachten wir eine Reparametrisierung $c \circ \varphi$ von c , dann ist $|(c \circ \varphi)'(t)| = \varphi'(t)|c'(\varphi(t))|$ falls φ orientierungstreu ist und gleich $-\varphi'(t)|c'(\varphi(t))|$ falls φ orientierungsvertauschend ist. Damit folgt der erste Teil sofort aus Formel (2.1). Andererseits ist $(f \circ c)'(t) = Ac'(t)$ und da A linear ist, folgt $(f \circ c)''(t) = Ac''(t)$. Damit ist aber $\det((f \circ c)'(t), (f \circ c)''(t)) = \det(A)\det(c'(t), c''(t))$ und natürlich ist $|(f \circ c)'(t)| = |c'(t)|$. Damit folgt der zweite Teil aus der Definition der Krümmung. \square

Aus der Krümmung lassen sich nun verschiedene spezielle Punkte auf einer Kurve definieren. Nullstellen der Krümmung liefern *Flachpunkte*, wechselt die Krümmung tatsächlich das Vorzeichen, dann spricht man von *Wendepunkt*. Lokale Extrema der Krümmung liefern *Scheitel* der Kurve. Natürlich sind die Anzahlen der jeweiligen Punkte und auch die Werte der Krümmung in Scheiteln unabhängig von der Parametrisierung und damit (orientierte) geometrische Größen.

BEISPIEL 2.5. Betrachten wir eine Ellipse mit Hauptachsenlängen a und b , dann können wir diese durch $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) := (a \cos t, b \sin t)$ definieren. (Man sieht sofort, dass diese Punkte die Gleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ erfüllen.) Eine direkte Rechnung zeigt, dass $\det(c'(t), c''(t)) = ab$ und damit $\kappa(t) = ab/(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}$. Wie erwartet hat die Ellipse also keine Flachpunkte. Um die Scheitel zu bestimmen, differenzieren wir die Krümmung und erhalten im Zähler $-3ab(a^2 - b^2) \sin(2t)$. Für eine "echte" Ellipse ist $a \neq b$ also finden sich die Scheitel genau bei den Nullstellen von $\sin(2t)$, also bei $0, \pi/2, \pi$ und $3\pi/2$ was genau den "üblichen" Scheiteln der Ellipse entspricht. Die Werte der Krümmung in diesen Scheiteln sind a/b^2 und b/a^2 .

2.6. Polarkoordinaten. Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sind aus der Grundvorlesung über Analysis bekannt. Es gibt aber eine alternative Version, die in vielen Bereichen der Geometrie und Topologie nützlich ist. Der wesentliche Punkt hier ist, dass man zwar die offensichtlichen Probleme von Polarkoordinaten im Nullpunkt nicht vermeiden kann, aber die Uneindeutigkeit des Winkels als Vorteil nutzen kann.

SATZ 2.6. *Sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig parametrisierte Kurve, sodass $c(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Schreibe $c(t) = (x(t), y(t))$ und setze $r(t) := |c(t)|$. Dann ist $r : I \rightarrow (0, \infty)$ stetig und es gibt eine stetige Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $x(t) = r(t) \cos(\theta(t))$ und $y(t) = r(t) \sin(\theta(t))$ gilt. Jede andere Funktion $\tilde{\theta}$ mit dieser Eigenschaft hat die Form $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) + 2k\pi$ für eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$. Ist c glatt, dann sind auch r und θ glatt und umgekehrt.*

BEWEIS. Nach bekannten Resultaten aus der Analysis ist $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ glatt und hat positive Werte auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Damit ist die Funktion r stetig bzw. glatt und hat positive Werte, also ist auch $t \mapsto r(t)^{-1}$ eine stetige bzw. glatte Funktion. Indem wir c durch $t \mapsto r(t)^{-1}c(t)$ ersetzen sehen wir, dass es genügt den Satz für den Fall zu beweisen, dass $|c(t)| = 1$ für alle t gilt.

Die Funktion $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die durch $\Phi(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$ definiert ist, ist offensichtlich glatt. Die Ableitung von Φ ist gegeben durch $D\Phi(r, \theta) =$

$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ und die Determinante dieser Matrix ist $r > 0$, also kann man auf Φ den inversen Funktionensatz anwenden. Aus der Analysis ist auch bekannt, dass die Einschränkung von Φ auf Teilmengen U der Form $(0, \infty) \times (\alpha, \beta)$ injektiv ist, sofern $\beta - \alpha < 2\pi$ gilt. Dann definiert Φ eine glatte Bijektion $U \rightarrow \Phi(U)$ und besitzt lokal glatte inverse, also ist $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ ein Diffeomorphismus und damit insbesondere ein Homöomorphismus.

Sei nun $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig mit $|c(t)| = 1$ für alle t . Dann ist c gleichmäßig stetig, also finden wir eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ von $[a, b]$ sodass für jedes i und $t, s \in [t_i, t_{i+1}]$ immer $|c(t) - c(s)| < 2$ und damit $c(t) \neq -c(s)$ gilt. Wählen wir nun θ_0 sodass $c(t_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ gilt. Dann liegt $c([t_0, t_1])$ ganz in $\Phi((0, \infty) \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi))$ und $\Phi^{-1}(c(t)) = (1, \theta(t))$ für eine stetige Funktion $\theta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, die Werte in $(\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ hat. Setzen wir $\theta_1 := \theta(t_1)$, dann hat $c([t_1, t_2])$ Werte in $\Phi((0, \infty) \times (\theta_1 - \pi, \theta_1 + \pi))$ und wir erhalten eine stetige Funktion $\theta : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$. Gemeinsam mit der obigen Funktion definiert das eine stetige Funktion $\theta : [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$. Setzt man das fort, dann erreicht man in endlich vielen Schritten eine stetige Funktion $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Für zwei solche Funktionen ist die Differenz stetig und hat Werte in $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und muss daher konstant sein, also folgt die Behauptung über die Eindeutigkeit von θ .

Ist c glatt und $c(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$ dann gilt natürlich $c = \Phi \circ (r, \theta)$. Lokal um jeden Punkt $t \in I$ folgt $(r, \theta) = \Psi \circ c$ für eine lokale glatte Inverse Ψ zu Φ und damit sind r und θ lokal um jeden Punkt glatt. Umgekehrt folgt aus Glattheit von r und θ offensichtlich Glattheit von c . \square

Nun lässt sich die Krümmung (bei Bogenlängenparametrisierung) sehr einfach interpretieren, indem man die Ableitung von c in Polarkoordinaten schreibt.

PROPOSITION 2.6. *Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatt nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass $c'(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ gilt. Dann ist die Krümmung κ von c durch $\kappa(t) = \theta'(t)$ gegeben.*

BEWEIS. Wir rechnen einfach

$$c''(t) = (\sin(\theta(t))\theta'(t), \cos(\theta(t))\theta'(t)) = \theta'(t)ic'(t)$$

für die Abbildung i aus Abschnitt 2.5. Damit folgt die Behauptung aus der Definition der Krümmung. \square

2.7. 1-Formen und Kurvenintegrale. Es gibt eine alternative Methode, die Funktion θ zu erhalten, die wir über Polarkoordinaten definiert haben. Dies bietet einen ersten Einblick in das Konzept von Differentialformen, dass eine wichtige Rolle in der Differentialgeometrie und der Analysis spielt.

DEFINITION 2.7. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine *1-Form auf U* ist eine Funktion $\alpha : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, die glatt ist in dem Sinne, dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ die Vorschrift $x \mapsto \alpha(x)(v)$ eine glatte Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Die Menge der 1-Formen auf U wird mit $\Omega^1(U)$ bezeichnet.

Offensichtlich kann man 1-Formen punktweise addieren, also $\alpha + \beta$ durch $(\alpha + \beta)(x)(v) = \alpha(x)(v) + \beta(x)(v)$ definieren. Man kann 1-Formen auch mit Skalaren multiplizieren, die aber zusätzlich noch vom betrachteten Punkt abhängen können. Also kann man für $\alpha \in \Omega^1(U)$ und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ eine 1-Form $f\alpha$ durch $(f\alpha)(u)(v) := f(u)\alpha(u)(v)$ definieren. Damit ist $\Omega^1(U)$ ein Vektorraum und ein Modul über dem kommutativen Ring $C^\infty(U, \mathbb{R})$ mit Einselement.

Für eine glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ kann man die Ableitung als 1-Form $df \in \Omega^1(U)$ betrachten. Insbesondere kann man das auf die i te Koordinatenfunktion anwenden, die wir als x^i schreiben. Die Ableitung dieser Funktion ordnet natürlich jedem Vektor $v = (v^1, \dots, v^n)$ die i te Komponente v^i zu. Bezeichnen wir die Elemente der Standardbasis von \mathbb{R}^n mit e_i für $i = 1, \dots, n$, dann ist $v = \sum_i v^i e_i$. Für eine beliebige 1-Form $\alpha \in \Omega^1(U)$ definiert nach Voraussetzung $\alpha_i(x) := \alpha(x)(e_i)$ eine glatte Funktion $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Damit erhalten wir

$$\alpha(x)(v) = \alpha(x)\left(\sum_i v^i e_i\right) = \sum_i \alpha(x)(e_i)v^i = \sum_i \alpha_i(x)dx^i(x)(v) = \left(\sum_i \alpha_i dx^i\right)(x)(v),$$

und somit $\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i$. Wendet man das auf die 1-Form df zu einer glatten Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ an, dann ist natürlich $df(x)(e_i)$ gerade die i te partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ und somit $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Für unsere Zwecke ist wichtig, dass 1-Formen über geometrische Kurven integriert werden können. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatt parametrisierte Kurve mit Werten in einer offenen Teilmenge U und sei $\alpha \in \Omega^1(U)$ eine 1-Form. Dann definiert man das Kurvenintegral $\int_c \alpha$ von α über c als die reelle Zahl $\int_a^b \alpha(c(t))(c'(t))dt$. Sei $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ ein Diffeomorphismus und $\tilde{c} = c \circ \varphi : [a', b'] \rightarrow U$ die entsprechende Reparametrisierung von c . Dann ist $\tilde{c}'(t) = c'(\varphi(t))\varphi'(t)$, also

$$\int_{\tilde{c}} \alpha = \int_{a'}^{b'} \alpha(c(\varphi(t)))(c'(\varphi(t)))\varphi'(t)dt,$$

und aus der Substitutionsregel folgt sofort $\int_{\tilde{c}} \alpha = \int_c \alpha$. Damit ändert sich das Kurvenintegral bei Reparametrisierung nicht und man kann $\int_c \alpha$ als das Integral über die durch c definierte geometrische Kurve interpretieren.

2.8. Polarkoordinaten als Kurvenintegral. Betrachten wir nun den Spezialfall der offenen Teilmenge $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ von \mathbb{R}^2 und bezeichnen wir die Koordinaten mit x und y und die entsprechenden 1-Formen mit dx und dy . Dann ist die Funktion $1/(x^2 + y^2)$ glatt auf U , also definiert $\eta := \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ eine glatte 1-Form auf U . Insbesondere können wir für eine glatt parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow U$ und $t_0 \in I$ die Funktion $t \mapsto \int_{t_0}^t \eta(c(s))(c'(s))ds$ betrachten.

PROPOSITION 2.8. *Sei $c : I \rightarrow U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine glatt parametrisierte Kurve und $r : I \rightarrow (0, \infty)$ die glatte Funktion $r(t) := |c(t)|$. Für einen Punkt $t_0 \in I$ sei $\theta_0 \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $c(t_0) = (r(t_0) \cos \theta_0, r(t_0) \sin(\theta_0))$ gilt und definiere $\theta(t) := \theta_0 + \int_{t_0}^t \eta(c(s))(c'(s))ds$. Dann gilt $c(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$ für alle $t \in I$.*

BEWEIS. Schreiben wir $c(s) = r(s)\tilde{c}(s)$ für $s \in I$, sodass $|\tilde{c}(t)| = 1$ gilt. Schreibt man dann $\tilde{c}(s) = (x(s), y(s))$, dann folgt $c(s) = (r(s)x(s), r(s)y(s))$ und

$$c'(s) = (r'(s)x(s) + r(s)x'(s), r'(s)y(s) + r(s)y'(s)).$$

Die Nenner in der Definition von η sind dann gerade $r(s)^2$ also liefert Einsetzen direkt

$$\eta(c(s))(c'(s)) = -\frac{y(s)}{r(s)}(r'(s)x(s) + r(s)x'(s)) + \frac{x(s)}{r(s)}(r'(s)y(s) + r(s)y'(s)) = \eta(\tilde{c}(s))(\tilde{c}'(s)).$$

Damit können wir uns wieder auf den Fall einschränken, dass $|c(s)| = 1$ für alle $s \in I$ gilt. Für $t_0 < t$ können wir dann Satz 2.6 auf die Einschränkung von c auf $[t_0, t]$ anwenden und $c(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$ für eine glatte Funktion $\theta : [t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben, wobei wir noch annehmen dürfen, dass $\theta(t_0) = \theta_0$ gilt. Dann ist aber $c'(s) = (-\sin(\theta(s))\theta'(s), \cos(\theta(s))\theta'(s))$ und Einsetzen liefert

$$\eta(c(s))(c'(s)) = \sin^2(\theta(s))\theta'(s) + \cos^2(\theta(s))\theta'(s) = \theta'(s)$$

und damit $\int_{t_0}^t \eta(c(s))(c'(s))ds = \theta(t) - \theta(t_0)$. Den Fall $t < t_0$ behandelt man analog mit Hilfe der Einschränkung von c auf das Intervall $[t, t_0]$. \square

BEMERKUNG 2.8. (1) Damit kann die Darstellung regulär parametrisierter Kurven in Polarkoordinaten auf nicht abgeschlossene Intervalle erweitern.

(2) Man findet die Form η wie folgt. Betrachten wir wie in Abschnitt 2.6 die Funktion $\Phi(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$ und ihre Ableitung $D\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$. Nach bekannten Resultaten der linearen Algebra ist die inverse Matrix dazu gegeben als $\frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Die zweite Zeile dieser Matrix beschreibt dann gerade die Ableitung der zweiten Komponente jeder lokalen Inversen zu Φ und man kann diese zweite Zeile als $(\frac{-r \sin \theta}{r^2}, \frac{r \cos \theta}{r^2}) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ schreiben.

2.9. Der Fundamentalsatz der lokalen Kurventheorie in \mathbb{R}^2 . Wenn man zu einer gegebenen Krümmung eine passende Kurve finden möchte, dann ist aus der Definition klar, dass man eine gewöhnliche Differentialgleichung lösen muss. Durch die Beschreibung mit Polarkoordinaten haben wir das Problem so weit reduziert, dass man die Lösung einfach als Integral darstellen kann. Zusätzlich erhält man noch ein schönes Eindeutigkeitsresultat. Insgesamt zeigt das, dass die Krümmung die Geometrie von Kurven in \mathbb{R}^2 vollständig beschreibt.

SATZ 2.9. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ . Ist $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine weitere Kurve mit Krümmung κ , dann gibt es eine orientierungstreue Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodass $\tilde{c} = f \circ c$ gilt.

BEWEIS. Wir fixieren $t_0 \in I$ und konstruieren eine Kurve c mit $c(t_0) = 0$ und $c'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dazu definieren wir zunächst eine glatte Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\theta(t) := \int_{t_0}^t \kappa(s)ds$ und bemerken, dass $\theta(t_0) = 0$ gilt. Dann definieren wir eine glatt parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $c(t) := (\int_{t_0}^t \cos(\theta(s))ds, \int_{t_0}^t \sin(\theta(s))ds)$. Dann gilt offensichtlich $c'(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$, also $|c'(t)| = 1$ für alle t und $c'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Außerdem folgt nach Proposition 2.6 sofort, dass die Krümmung von c durch $\kappa_c(t) = \theta'(t) = \kappa(t)$ gegeben ist, also ist die Existenz bewiesen.

Ist \tilde{c} eine weitere bogenlängenparametrisierte Kurve mit Krümmung κ , dann setze $x_0 := \tilde{c}(t_0)$ und $v_0 := \tilde{c}'(t_0)$. Dann ist v_0 ein Einheitsvektor in \mathbb{R}^2 und damit ist die Matrix B mit den Spalten v_0 und iv_0 orthogonal mit $\det(B) = 1$. Dann gilt $B^t v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und wir betrachten wir die Euklidische Bewegung $g(x) := B^t x - B^t x_0$, die $g(x_0) = 0$ erfüllt. Dann ist $g \circ \tilde{c}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, die $(g \circ \tilde{c})(t_0) = 0$ und $(g \circ \tilde{c})'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt und Krümmung $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ hat. Nach Satz 2.6 finden wir eine glatte Funktion $\tilde{\theta} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\theta}(t_0) = 0$, sodass $(g \circ \tilde{c})'(t) = (\cos(\tilde{\theta}(t)), \sin(\tilde{\theta}(t)))$ gilt. Nach Proposition 2.6 ist $\kappa(t) = \tilde{\theta}'(t)$ und damit $\tilde{\theta}(t) = \int_{t_0}^t \kappa(s)ds = \theta(t)$, also folgt $(g \circ \tilde{c})'(t) = c'(t)$ für alle t . Wegen $(g \circ \tilde{c})(t_0) = c(t_0)$ impliziert das $g \circ \tilde{c} = c$ und damit $\tilde{c} = f \circ c$ für $f(x) = Bx + x_0$. \square

Insbesondere sehen wir aus diesem Resultat, dass die Kurven mit verschwindender Krümmung genau die (Teile von) affinen Gerade und die Kurven mit konstanter Krümmung genau die (Teile von) Kreisen sind.

Exkurs: Krümmung in höheren Dimensionen

2.10. Das Begleitbein. Um die notwendige zusätzliche Bedingung und die Definition der Krümmung in höheren Dimensionen zu motivieren, betrachten wir nochmals den Fall ebener Kurven in etwas anderer Interpretation. Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Dann kann man für jedes $t \in I$ eine “an c angepasste” Orthonormalbasis für \mathbb{R}^2 konstruieren. Dazu normieren wir zunächst die Momentangeschwindigkeit und definieren das (offensichtlich glatte) *Einheitstangentialfeld* $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\tau(t) := \frac{1}{|c'(t)|}c'(t)$. Für jedes t ist dann $\nu(t) := i\tau(t) \in \mathbb{R}^2$ der eindeutige Vektor, der $\tau(t)$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis ergänzt und das definiert das *Einheitsnormalenfeld* $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Für eine orientierungstreue Reparametrisierung $c \circ \varphi$ von c ist $(c \circ \varphi)'(t)$ ein positives Vielfaches von $c'(\varphi(t))$ also erhält man als Einheitstangentialfeld $\tau \circ \varphi$ und als Einheitsnormalenfeld $\nu \circ \varphi$. Also ist das *Begleitbein* $\{\tau(t), \nu(t)\}$ mit orientierungserhaltenden Reparametrisierungen verträglich. Für eine Bewegung $f(x) = Ax + b$ und die Kurve $f \circ c$ erhält man als Begleitbein natürlich $\{A\tau(t), A\nu(t)\}$, also ist das Begleitbein auch mit orientierungserhaltenden Bewegungen verträglich.

Ist c nach der Bogenlänge parametrisiert, dann ist natürlich $\tau(t) = c'(t)$ und $\nu(t) = ic'(t)$. Das liefert sofort die *Frenet'schen Ableitungsgleichungen* $\tau'(t) = c''(t) = \kappa(t)\nu(t)$ und $\nu'(t) = ic''(t) = \kappa(t)i\nu(t) = -\kappa(t)\tau(t)$, wobei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Krümmung von c ist.

Um die Idee des Begleitbeins in höhere Dimensionen zu verallgemeinern kann man das Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren verwenden, benötigt dazu aber eine zusätzliche Bedingung:

DEFINITION 2.10. Eine regulär parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ heißt *Frenet-Kurve*, wenn für jedes $t \in I$ die Ableitungen $c'(t), c''(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig in \mathbb{R}^n sind.

Mit Hilfe der Kettenregel verifiziert man leicht, dass jede Reparametrisierung einer Frenet-Kurve selbst eine Frenet-Kurve ist. Auch die Verträglichkeit des Begriffs mit Bewegungen ist leicht einzusehen, also ist Frenet-Kurve zu sein eine Eigenschaft von geometrischen Kurven.

Für $n = 2$ ist jede regulär parametrisierte Kurve eine Frenet-Kurve. Für $n > 2$ muss aber auch eine glatt nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve im Allgemeinen keine Frenet-Kurve sein. Betrachtet man etwa eine bogenlängenparametrisierte Kurve in \mathbb{R}^2 als Kurve in \mathbb{R}^4 , dann bilden $c'(t)$ und $c''(t)$ für jedes t eine Basis von \mathbb{R}^2 . Aber $c'''(t)$ liegt ebenfalls in $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$, also können die ersten drei Ableitungen nicht linear unabhängig sein.

Für eine Frenet-Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ und $t \in I$ kann man nun Gram-Schmidt auf die Vektoren $c'(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ anwenden. Man setzt also $\tau_1(t) := \frac{1}{|c'(t)|}c'(t)$, was offensichtlich eine glatte Funktion $\tau_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert. Dann setzt man

$$\tilde{\tau}_2(t) := c''(t) - \langle c''(t), \tau_1(t) \rangle \tau_1(t).$$

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $\tilde{\tau}_2(t) \neq 0$ gilt und offensichtlich ist $\tilde{\tau}_2$ glatt als Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Damit definiert auch $\tau_2(t) := \frac{1}{|\tilde{\tau}_2(t)|}\tilde{\tau}_2(t)$ eine glatte Funktion $\tau_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nach Konstruktion bilden $\tau_1(t)$ und $\tau_2(t)$ ein Orthonormalsystem und setzt man die Konstruktion iterativ fort, dann erhält man glatte Funktionen $\tau_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $i = 1, \dots, n-1$ sodass die Vektoren $\{\tau_1(t), \dots, \tau_{n-1}(t)\}$ für jedes t ein Orthonormalsystem bilden. Dann gibt es zu jedem t einen eindeutigen Einheitsvektor $\tau_n(t)$, der dieses zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis erweitert und auch $\tau_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert eine glatte Funktion. (Für $n = 3$ ist $\tau_3(t)$ einfach das Kreuzprodukt von $\tau_1(t)$ und

$\tau_2(t)$, für $n > 3$ braucht das etwas mehr lineare Algebra.) Das definiert das *Begleitbein* $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ zu c .

PROPOSITION 2.10. *Sei $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine Frenet-Kurve mit Begleitbein $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. Dann ist für eine orientierungstreue Reparametrisierung $c \circ \varphi$ das Begleitbein durch $\{\tau_1 \circ \varphi, \dots, \tau_n \circ \varphi\}$ gegeben. Für eine orientierungstreue Bewegung $f(x) = Ax + b$ erhält man als Begleitbein von $f \circ c$ gerade $\{A\tau_1, \dots, A\tau_n\}$.*

BEWEISSKIZZE. Das Gram-Schmidt Verfahren beinhaltet eine Eindeutigkeitsaussage, siehe Satz 8.8 von [LA]. Das Orthonormalsystem $\{\tau_1(t), \dots, \tau_{n-1}(t)\}$ ist eindeutig dadurch bestimmt, dass jedes $\tau_i(t)$ eine Linearkombination von $c'(t), \dots, c^{(i)}(t)$ ist, wobei der Koeffizient von $c^{(i)}(t)$ positiv ist. Aus der Kettenregel folgt induktiv leicht, dass für jedes k , $(c \circ \varphi)^{(k)}(t)$ die Summe von $c^{(k)}(\varphi(t))\varphi'(t)$ und einer Linearkombination der $c^{(j)}(t)$ mit $j < k$ ist. Damit sieht man aber, dass das Begleitbein zu $c \circ \varphi$ im Punkt t alle definierenden Eigenschaften für die Orthonormalisierung von $c'(\varphi(t)), \dots, c^{(n-1)}(\varphi(t))$ erfüllt und daraus folgt die erste Aussage.

Für die zweite Aussage bemerken wir, dass $(f \circ c)^{(k)}(t) = Ac^{(k)}(t)$ für alle k gilt. Damit hat wieder $\{A\tau_1(t), \dots, A\tau_n(t)\}$ alle definierenden Eigenschaften der Orthonormalisierung von $(f \circ c)'(t), \dots, (f \circ c)^{(n-1)}(t)$. \square

2.11. Krümmung in höheren Dimensionen. Sie $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine Frenet-Kurve mit Begleitbein $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. Dann können wir die Ableitungen $\tau'_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten und in der Basis $\{\tau_i\}$ entwickeln. Man erhält also $\tau'_i(t) = \sum_j a_{ij}(t)\tau_j(t)$ und weil $a_{ij}(t) = \langle \tau'_i(t), \tau_j(t) \rangle$ gilt, ist jedes $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Nun können wir die höherdimensionale Version der Frenet'schen Ableitungsgleichungen herleiten:

SATZ 2.11. *Sie $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine Frenet-Kurve, die glatt nach der Bogenlänge parametrisiert ist mit Begleitbein $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. Dann gibt es glatte Funktionen $\kappa_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n-1$, die für $i < n-1$ positive Werte haben, sodass für alle $t \in I$ folgende Gleichungen gelten:*

$$\begin{aligned}\tau'_1(t) &= \kappa_1(t)\tau_2(t), \\ \tau'_i(t) &= -\kappa_{i-1}(t)\tau_{i-1}(t) + \kappa_i(t)\tau_{i+1}(t) \quad \text{für } i = 2, \dots, n-1 \\ \tau'_n(t) &= -\kappa_{n-1}(t)\tau_{n-1}(t)\end{aligned}$$

BEWEISSKIZZE. Wir können $n \geq 3$ annehmen. Nach Konstruktion ist für beliebiges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $\langle \tau_i, \tau_j \rangle$ konstant. Differenziert man das, dann erhält man $0 = \langle \tau'_i, \tau_j \rangle + \langle \tau_i, \tau'_j \rangle$. In Termen der Matrix $(a_{ij}(t))$ von oben sagt das $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t)$ für alle t , also ist die Matrix für jedes t schiefssymmetrisch.

Für $i < n$ wissen wir auch, dass $\tau_i(t)$ eine Linearkombination von $c'(t), \dots, c^{(i)}(t)$ ist, in der der Koeffizient von $c^{(i)}(t)$ positiv ist und dass $\tau_1(t), \dots, \tau_i(t)$ den gleichen Teilraum aufspannen wie $c'(t), \dots, c^{(i)}(t)$. Insbesondere ist $\tau_1(t)$ ein positives Vielfaches von $c'(t)$. Also ist $\tau'_1(t)$ eine Linearkombination von $c'(t)$ und $c''(t)$, in der der Koeffizient von $c''(t)$ positiv ist. Damit liegt $\tau'_1(t)$ in der linearen Hülle von $\tau_1(t)$ und $\tau_2(t)$, und wir erhalten $a_{1i} = 0$ für alle $i > 2$ und $a_{12}(t) > 0$ und nach der Schiefssymmetrie ist $a_{11}(t) = 0$. Also ist $\tau'_1(t) = \kappa_1(t)\tau_2(t)$ mit $\kappa_1(t) > 0$.

Als nächstes setzen wir $\kappa_2(t) := a_{23}(t)$. Für $n = 3$ ist der Beweis damit vollständig: Wegen der Schiefssymmetrie folgt nämlich $a_{21}(t) = -\kappa_1(t)$, $\kappa_{32}(t) = -\kappa_2(t)$ und wir haben $a_{ii}(t) = 0$ und $a_{13}(t) = a_{31}(t) = 0$ bereits bewiesen. Für $n > 3$ sehen wir wie oben, dass $\tau'_2(t)$ in der linearen Hülle von $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ und $\tau_3(t)$ liegt, also ist $a_{2i} = 0$ für alle $i > 3$. Wegen der Schiefssymmetrie ist $a_{22}(t) = 0$, also erhält man die geforderte Darstellung von $\tau'_2(t)$ und die Positivität von $\kappa_2(t)$ folgt wieder indem man die Koeffizienten von

$c'''(t)$ in der Entwicklung von $\tau_2'(t)$ und $\tau_3(t)$ betrachtet. Für $n = 4$ müssen wir nur noch $\kappa_3(t) := a_{34}(t)$ setzen und sind fertig. Sonst macht man einfach induktiv weiter, bis die positive Funktion $\kappa_{n-2} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist und setzt dann $\kappa_{n-1}(t) := a_{n-1,n}(t)$. \square

Mit Hilfe von Proposition 2.10 folgt nun leicht, dass für eine orientierungstreue Bewegung f die Kurve $f \circ c$ die gleichen Krümmungen hat wie c selbst. Außerdem kann damit leicht die richtige Definition für die Krümmungen bei allgemeiner Parametrisierung ableiten, sodass die Krümmungen wieder orientierte geometrische Größen werden.

2.12. Kurven im Raum. Im Fall von Kurven in \mathbb{R}^3 ergeben sich einige Vereinfachungen. Für eine bogenlängenparametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ wissen wir aus Proposition 2.4, dass $c''(t)$ für alle $t \in I$ orthogonal auf $c'(t)$ steht. Damit ist c genau dann eine Frenet-Kurve, wenn $c''(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Wegen $|c'(t)| = 1$ für alle t erhalten wir $\tau_1(t) = c'(t)$ und damit $\tau_2(t) = \frac{1}{|c''(t)|}c''(t)$ und wie in Abschnitt 2.10 bemerkt ist $\tau_3(t) = \tau_1(t) \times \tau_2(t)$ (Kreuzprodukt in \mathbb{R}^3). Damit ist aber $\tau_1'(t) = c''(t) = |c''(t)|\tau_2(t)$, also $\kappa_1(t) = |c''(t)|$. Klassisch wird κ_1 als *Krümmung* von c und κ_2 als *Torsion* von c bezeichnet.

Die Torsion von c lässt sich auch relativ einfach interpretieren. Nach Definition ist $\kappa_2(t) = \langle \tau_2'(t), \tau_3(t) \rangle$. Schreiben wir $\tau_2 = \varphi c''$, dann ist $\tau_2'(t) = \varphi'(t)c''(t) + \varphi(t)c'''(t)$ und der erste Summand trägt zum inneren Produkt nicht bei. Benutzt man den Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Determinante, dann erhält man $\kappa_2(t) = \frac{1}{|c''(t)|^2} \det(c'(t), c''(t), c'''(t))$. Insbesondere bedeutet verschwindende Torsion genau, dass $c'''(t)$ immer in der von $c'(t)$ und $c''(t)$ erzeugten Ebene liegt. Liegt die Kurve c selbst in einer affinen Ebene, dann liegen natürlich alle Ableitungen von c in der modellierenden Ebene, also verschwindet die Torsion. Es gilt aber auch die Umkehrung: Wenn $\kappa_2(t) = 0$ für alle t gilt, dann ist nach Satz 2.11 $\tau_3'(t) = 0$ für alle t , also $\tau_3(t)$ ein konstanter Vektor v in \mathbb{R}^3 . Differenziert man nun $\langle c(t), v \rangle$, dann erhält man $\langle c'(t), v \rangle = \langle \tau_1(t), \tau_3(t) \rangle = 0$. Damit ist $\langle c(t), v \rangle$ konstant, also liegt c in einer affinen Ebene mit Normalvektor v .

Analog kann man Kurven charakterisieren, für die κ_1 und κ_2 konstant sind und Zusammenhänge mit Kugeln in \mathbb{E}^3 herstellen, siehe Abschnitt 2C von [Kühnel] und die Übungen.

2.13. Begleitbein und Bewegungsgruppe. Aus der Beschreibung von oben ist nicht klar, wie man auf die Idee kommen könnte ein Begleitbein für eine Kurve zu konstruieren. Das lässt sich aber gut motivieren und liefert eine Verbindung zur Gruppentheorie, genauer gesagt zu Matrixgruppen. Zunächst stellen wir fest, dass man Euklidische Bewegungen schön als Wirkung von Matrizen schreiben kann. Dazu realisiert man \mathbb{E}^n als die affine Hyperebene jener Punkte in \mathbb{R}^{n+1} , deren letzte Koordinate gleich 1 ist und schreibt Elemente darin als $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$. Betrachten wir nun $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen der Blockform $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit Blöcken der Größe n und 1, also $b \in \mathbb{R}^n$ und A eine $n \times n$ -Matrix, dann ist $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax+b \\ 1 \end{pmatrix}$. Verlangt man also, dass A orthogonal ist, dann erhält man so genau die Wirkung der Euklidischen Bewegungen auf \mathbb{E}^n . Schreiben wir die Gruppe der Bewegungen als $\text{Euc}(n)$, dann erhalten wir eine surjektive Abbildung $p : \text{Euc}(n) \rightarrow \mathbb{E}^n$, indem wir auf den "Basispunkt" $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wirken. Explizit ist $p \left(\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$. Aus der Konstruktion folgt sofort, dass für $g, h \in \text{Euc}(n)$ immer $p(gh) = g(p(h))$ gilt.

Nachdem die Matrizen einen Vektorraum bilden, macht es keine Probleme, von glatten Kurven mit Werten in $\text{Euc}(n)$ zu sprechen. Man betrachtet einfach Matrizen der Form $g(t) := \begin{pmatrix} A(t) & b(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sodass $A(t)$ für alle t orthogonal ist und alle Koeffizienten der Matrix glatt von t abhängen. Das funktioniert genauso für orientierungstreue Bewegungen, man muss nur zusätzlich $\det(A(t)) = 1$ für alle t verlangen. So eine Kurve kann

man auch problemlos differenzieren und erhält für jedes t eine $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix $g'(t) = \begin{pmatrix} A'(t) & b'(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Tatsache, dass $A(t)$ immer orthogonal ist hat Konsequenzen für die Ableitung $A'(t)$, die man analog wie im Beweis von Satz 2.11 analysieren kann. Die handlichste Formulierung erhält man indem man nicht einfach die Ableitung $g'(t)$ betrachtet, sondern diese noch zum neutralen Element der Gruppe “zurück transportiert”, also die Matrix $g(t)^{-1}g'(t)$ betrachtet. Hier kann man nämlich zeigen, dass diese von der Form $\begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist, wobei die Matrix X schiefsymmetrisch ist, also $X^t = -X$ erfüllt.

Für eine reguläre Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$, die glatt nach der Bogenlänge parametrisiert ist, kann man nun die Elemente des Begleitbeins als Spalten einer Matrix $A(t) = (\tau_1(t), \dots, \tau_n(t))$ betrachten und dann die Kurve $g(t) := \begin{pmatrix} A(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bilden, die natürlich $p \circ g = c$ erfüllt. Man nennt so eine Kurve einen *Lift* von c in die Gruppe $\text{Euc}(n)$. Nun ist $g(t)^{-1} = \begin{pmatrix} A(t)^{-1} & -A(t)^{-1}c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und daraus folgt sofort, dass $g(t)^{-1}g'(t) = \begin{pmatrix} A(t)^{-1}A'(t) & A(t)^{-1}c'(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt. Benutzt man, dass $A(t)^{-1}$ einfach die transponierte Matrix zu $A(t)$ ist, während $A'(t)$ als Spalten einfach die Vektoren $\tau'_i(t)$ hat, dann kann man Satz 2.11 als Beschreibung von $g(t)^{-1}g'(t)$ interpretieren. Es ist $A(t)^{-1}c'(t)$ konstant der erste Einheitsvektor, während $A(t)^{-1}A'(t)$ die schiefsymmetrische Matrix ist, die direkt über der Hauptdiagonale die Eintragungen $\kappa_1(t), \dots, \kappa_{n-1}(t)$, direkt unterhalb der Hauptdiagonale $-\kappa_1(t), \dots, -\kappa_{n-1}(t)$ und alle anderen Eintragungen 0 hat.

Man kann die Konstruktion des Begleitbeins auch von Anfang an in dieser Sprache formulieren und durchführen: Für gegebenes c sucht man eine Kurve $A(t)$ orthogonaler Matrizen mit $\det(A(t)) = 1$, sodass für den resultierenden Lift $g(t)$ möglichst viele Komponenten der Ableitung $g(t)^{-1}g'(t)$ fixiert werden. Man kann dann direkt verifizieren, dass man die Kurve so wählen kann, dass die obigen Bedingungen erfüllt sind und dass dann die Kurve $A(t)$ eindeutig festgelegt ist. Die verbleibenden Komponenten von $g(t)^{-1}g'(t)$ bilden dann Invarianten der Kurve c und der Vorteil des Zuganges ist, dass aus der Konstruktion die Verträglichkeit mit orientierungserhaltenden Bewegungen sofort folgt: Ist $g(t)$ eine Kurve mit $p(g(t)) = c(t)$ und f eine fixe orientierungstreue Bewegung, dann gilt $p(fg(t)) = f(p(g(t))) = f(c(t))$, also ist das Produkt $fg(t)$ ein Lift der Kurve $(f \circ c)(t)$. Nun ist aber $(fg(t))' = f(g'(t))$ und $(fg(t))^{-1} = g(t)^{-1}f^{-1}$, also $(fg(t))^{-1}(fg(t))' = g(t)^{-1}g'(t)$. Damit erhält man aus dem “richtigen” Lift von c sofort den richtigen Lift für $f \circ c$ und die gleichen Invarianten.

In diesem Bild kann man den Fundamentalsatz 2.9 in höhere Dimensionen verallgemeinern. Man benutzt dazu eine Version des Existenz und Eindeutigkeitssatzes für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, die dem gruppentheoretischen Bild angepasst ist. Für unsere Situation sagt dieser Satz, dass es zu einer glatten Kurve der Form $\begin{pmatrix} X(t) & v(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und einer gegebenen “Anfangsbedingung” immer lokal eine eindeutige glatte Kurve $g(t)$ in $\text{Euc}(n)$ gibt, die $g(t_0) = \text{id}$ erfüllt, sodass $g(t)^{-1}g'(t)$ genau die gegebene Kurve liefert. Diesen Satz wendet man dann in dem Fall an, dass $v(t) = e_1$ ist und $X(t)$ die “passende” schiefsymmetrische Matrix zu gegebenen Funktionen κ_i für $i = 1, \dots, n-1$, die für $i < n-1$ positiv sind an. Das liefert dann eine Kurve $g(t)$ die gerade aus $c(t) := p(g(t))$ und dem Begleitbein dieser Kurve besteht, also sind die Krümmungen von c gerade die Funktionen κ_i . Die wesentlichen Argumente dafür finden sich im Beweis von Satz 2.15 von [Kühnel].

Dieser Zugang lässt sich auf Kurven in allgemeinere Geometrien und auch auf höherdimensionale Objekte Verallgemeinern und bildet (unter anderem) einen allgemeinen Rahmen für die klassische Differentialgeometrie, siehe etwa das Buch [Ivey-Landsberg].

Globale Theorie von Kurven

Wir wenden uns nun Konzepten für Kurven zu, die von der Kurve “als Ganzes” abhängen und nicht jeweils nur von einem kleinen Teil der Kurve. Insbesondere liefert das einen Einblick in den Zusammenhang von Geometrie und Topologie, wobei sich “Topologie” hier auf Größen bezieht, die viel “robuster” sind, als etwa die Krümmung. Unter gewissen Bedingungen können nämlich die Integrale geometrischer Größen nur diskrete Werte annehmen und sich damit bei stetigen Deformationen nicht ändern.

3.1. Die Totalkrümmung. Wir betrachten die einfachste Situation in der wir ein Integral einer geometrischen Größe bilden können, nämlich den Fall einer regulär parametrisierten Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Hier können wir versuchen, ein Integral der Krümmung zu bilden, aber das ist nicht mit Reparametrisierungen verträglich. Deshalb verwendet man den folgenden Begriff:

DEFINITION 3.1. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve mit Krümmung $\kappa : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist die *Totalkrümmung* von c definiert durch

$$K(c) := \int_a^b \kappa(t) |c'(t)| dt \in \mathbb{R}.$$

Für eine Reparametrisierung $c \circ \varphi$ von c gilt $(c \circ \varphi)'(t) = c'(\varphi(t))\varphi'(t)$ und nach Satz 2.5 gilt $\kappa_{c \circ \varphi} = \kappa_c \circ \varphi$ für orientierungstreues φ . Damit folgt sofort, dass die Totalkrümmung invariant unter orientierungstreuen Reparametrisierungen ist und bei orientierungsvertauschenden Reparametrisierungen nur das Vorzeichen wechselt. Für theoretische Zwecke können wir uns also wieder auf Bogenlängenparametrisierungen einschränken.

Für allgemeine Kurven kann die Totalkrümmung offensichtlich beliebige Werte annehmen. Wir bekommen aber sofort eine interessante Interpretation aus Proposition 2.6. Nehmen wir an, dass $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ glatt nach der Bogenlänge parametrisiert ist, dann können wir $c'(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ für eine glatte Funktion $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben und die Krümmung ist durch $\kappa = \theta'$ gegeben. Damit ist aber $K(c) = \int_a^b \theta'(t) dt = \theta(b) - \theta(a)$. (Man beachte, dass θ nur bis auf Addition eines konstanten Vielfachen von 2π bestimmt ist, dieses hebt sich aber in der Differenz natürlich weg.) Damit sehen wir einerseits sofort, dass sich eine interessante Einschränkung ergibt, wenn $c'(b) = c'(a)$ gilt, denn dann muss natürlich $\theta(b) - \theta(a)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein. Daher liegt es nahe, geschlossene Kurven zu betrachten.

3.2. Geschlossene Kurven, Windungszahl und Umlaufzahl. Man nennt eine stetige Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ geschlossen, wenn $c(b) = c(a)$ gilt. Für glatte Kurven muss man auch die Ableitungen in den Endpunkten des Intervalls berücksichtigen. Das macht man am Einfachsten, indem man eine glatte Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann *geschlossen* nennt, wenn es eine glatte Funktion $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, die auf $[a, b]$ mit c übereinstimmt und periodisch mit Periode $(b - a)$ ist, also $\tilde{c}(t) = \tilde{c}(t + (b - a))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. (Natürlich ist dann \tilde{c} durch c eindeutig festgelegt.) Ist zusätzlich die

Einschränkung von c auf $[a, b]$ injektiv, dann nennt man c *einfach geschlossen*. Klarerweise ist eine Reparametrisierung einer (einfach) geschlossenen Kurve selbst (einfach) geschlossen und auch die Begriffen von regulären Parametrisierungen und Bogenlängenparametrisierungen machen in diesem Kontext keine Probleme.

Die Definition stellt nun sicher, dass für eine regulär parametrisierte geschlossene Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ auch die Ableitung $c' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine glatte geschlossene Kurve ist, also sind wir in der richtigen Situation für die Überlegungen am Ende von Abschnitt 3.1. Andererseits lassen sich diese Überlegungen natürlich auf geschlossenen stetige Kurven in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erweitern. Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ so eine Kurve, dann erhalten wir nach Satz 2.6 stetige Funktionen $r : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ und $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $c(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$ gilt. Da θ eindeutig bis auf Addition eines konstanten, ganzzahligen Vielfachen von 2π ist, ist die Differenz $\theta(b) - \theta(a)$ unabhängig von der Wahl von θ . Weil $c(b) = c(a)$ gilt, muss $\theta(b) - \theta(a)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein.

DEFINITION 3.2. (1) Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine geschlossenen stetige Kurve und seien $r : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ und $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen wie in Satz 2.6. Dann ist die *Windungszahl* $w_0(c)$ von c um 0 die eindeutige ganze Zahl, sodass $\theta(b) - \theta(a) = 2w_0(c)\pi$ gilt.

(2) Für eine glatte, regulär parametrisierte Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist die *Umlaufzahl* $U(c) \in \mathbb{Z}$ definiert durch $U(c) := w_0(c')$.

Aus der Definition folgt sofort, dass die Umlaufzahl invariant unter orientierungstreuen Reparametrisierungen ist und bei orientierungsvertauschenden Reparametrisierungen das Vorzeichen wechselt. Man beachte auch, dass man für geschlossene Kurven $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die zumindest C^1 also stetig differenzierbar sind, nach Proposition 2.8 die Windungszahl als Kurvenintegral berechnen kann: Es gilt $w_0(c) = \frac{1}{2\pi} \int_c \eta$ für die 1-Form $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ aus Abschnitt 2.8.

Die Überlegungen am Ende von Abschnitt 3.1 zeigen nun sofort:

PROPOSITION 3.2. *Für eine glatte, regulär parametrisierte Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ gilt $K(c) = 2\pi U(c)$, also ist die Totalkrümmung durch die Umlaufzahl bestimmt.*

3.3. Homotopie. Wir wollen nun die Idee der “stetigen Deformation” von Kurven präzise machen. Das ist eigentlich recht einfach, man muss nur darauf achten, dass man die relevante Klasse von Kurven nicht verlässt.

DEFINITION 3.3. Seien $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ geschlossene stetige Kurven. Dann sagt man c_0 und c_1 sind *homotop* und schreibt $c_0 \sim c_1$, wenn es eine stetige Funktion $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt, sodass $H(t, 0) = c_0(t)$, $H(t, 1) = c_1(t)$ für alle $t \in [a, b]$ und $H(a, s) = H(b, s)$ für alle $s \in [0, 1]$ gilt. Man nennt dann H eine *Homotopie* von c_0 nach c_1 .

Zunächst ist leicht einzusehen, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation ist (siehe Übungen). Die Interpretation von Homotopie ist, dass man $H : [a, b] \times [0, 1]$ als “stetige Familie” $\{c_s : s \in [0, 1]\}$ von Kurven betrachtet, wobei $c_s(t) = H(t, s)$. Die Definition stellt nur sicher, dass jedes c_s eine geschlossene stetige Kurve ist.

Wir können nun Homotopie geschlossener Kurven durch die Windungszahl charakterisieren:

SATZ 3.3. *Zwei stetige geschlossene Kurven $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sind genau dann homotop, wenn sie die gleiche Windungszahl um Null haben, also $w_0(c_0) = w_0(c_1)$ gilt.*

BEWEIS. Ist $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Homotopie von c_0 nach c_1 , dann konstruieren wir analog zum Beweis von Satz 2.6 stetige Funktion $r : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ und $\theta : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $H(t, s) = (r(t, s) \cos(\theta(t, s)), r(t, s) \sin(\theta(t, s)))$ für alle $t \in [a, b]$ und $s \in [0, 1]$ gilt. Wie dort können wir H durch $(t, s) \mapsto \frac{1}{|H(t, s)|} H(t, s)$ ersetzen um oBdA anzunehmen, dass $|H(t, s)| = 1$ für alle t und s gilt und müssen dann nur θ konstruieren.

Wegen der Kompaktheit von $[a, b] \times [0, 1]$ ist H wiederum gleichmäßig stetig und wir finden Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ und $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ der Intervalle, sodass $|H(t, s) - H(t', s')| < 2$ und damit $H(t, s) \neq -H(t', s')$ für $t, t' \in [t_i, t_{i+1}]$ und $s, s' \in [s_j, s_{j+1}]$ gilt. Wählen wir nun θ_0 passend für $H(a, 0) = c_0(a)$, dann erhalten wir wie im Beweis von Satz 2.6 eine stetige Funktion

$$\theta : [t_0, t_1] \times [s_0, s_1] \rightarrow (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$$

mit der passenden Eigenschaft. Nun setzt man $\theta_1 = \theta(t_1, 0)$ und benutzt das, um analog eine stetige Funktion $\hat{\theta} : [t_1, t_2] \times [s_0, s_1] \rightarrow (\theta_1 - \pi, \theta_1 + \pi)$ mit der gewünschten Eigenschaft zu konstruieren. Auf $\{t_1\} \times [s_0, s_1]$ haben sowohl θ als auch $\hat{\theta}$ die gewünschte Eigenschaft und in (t_1, s_0) stimmen die beiden Funktionen überein. Damit definieren sie gemeinsam eine stetige Funktion $[t_0, t_2] \times [s_0, s_1]$ mit der gewünschten Eigenschaft, die wir wieder mit θ bezeichnen. In endlich vielen Schritten erreicht man so eine stetige Funktion $\theta : [a, b] \times [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Nun verwendet man $\theta(t_0, s_1)$ als Anfangswert um die Funktion auf $[t_0, t_1] \times [s_1, s_2]$ zu konstruieren und verifiziert wie zuvor, dass das Resultat auf $[t_0, t_1] \times \{s_1\}$ mit θ übereinstimmt. In endlich vielen Schritten erreicht man eine stetige Funktion $[a, b] \times [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $[a, b] \times \{s_1\}$ mit θ zusammenpasst, sodass gemeinsam eine stetige Funktion $\theta : [a, b] \times [s_0, s_2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit der gewünschten Eigenschaft definiert wird. In endlich vielen Schritten findet man dann eine passende stetige Funktion $\theta : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Wegen $H(t, 0) = c_0(t)$ folgt, dass $2\pi w_0(c_0) = \theta(b, 0) - \theta(a, 0)$ gilt und analog folgt $2\pi w_0(c_1) = \theta(b, 1) - \theta(a, 1)$. Nun ist aber $s \mapsto \theta(b, s) - \theta(a, s)$ eine stetige Funktion $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und weil $H(a, s) = H(b, s)$ nach Definition gilt, müssen alle Werte dieser Funktion ganzzahlige Vielfache von 2π sein. Damit ist die Funktion konstant und insbesondere $w_0(c_0) = w_0(c_1)$.

Seien umgekehrt $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetige Kurven mit gleicher Windungszahl, dann benutzen wir Satz 2.6 um stetige Funktionen $r_0, r_1 : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ und $\theta_0, \theta_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zu erhalten, sodass $c_i(t) = (r_i(t) \cos(\theta_i(t)), r_i(t) \sin(\theta_i(t)))$ für $i = 0, 1$ gilt. Dann definieren wir für $t \in [a, b]$ und $s \in [0, 1]$ $r(t, s) := (1 - s)r_0(t) + sr_1(t)$, $\theta(t, s) := (1 - s)\theta_0(t) + s\theta_1(t)$ und $H(t, s) := (r(t, s) \cos(\theta(t, s)), r(t, s) \sin(\theta(t, s)))$. Nach Konstruktion sind diese Funktionen stetig und $r(t, s) > 0$ für alle t und s , also hat H Werte in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Konstruktion gilt auch $H(t, 0) = c_0(t)$ und $H(t, 1) = c_1(t)$. Schließlich ist

$$\theta(b, s) - \theta(a, s) = (1 - s)(\theta_0(b) - \theta_0(a)) + s(\theta_1(b) - \theta_1(a)) = (1 - s)2\pi w_0(c_0) + s2\pi w_0(c_1).$$

Wegen $w_0(c_0) = w_0(c_1)$ ist das konstant gleich $2\pi w_0(c)$. Damit ist aber $H(a, s) = H(b, s)$ für alle s und damit H eine Homotopie von c_0 nach c_1 . \square

BEMERKUNG 3.3. (1) Betrachtet man zwei glatte Kurven $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit gleicher Windungszahl, dann erhält man im zweiten Teil des Beweises glatte Funktionen r_i und θ_i und damit auch eine glatte Homotopie H . Insbesondere sind zwei glatte Kurven, die stetig homotop sind auch glatt homotop.

(2) Im Beweis haben wir gesehen, dass man nicht nur stetige Funktionen auf Intervallen sondern auch auf Rechtecken in der Form $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ für stetige Funktionen r und θ schreiben kann. Tatsächlich gilt das für stetige Funktionen $Y \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ für eine sehr allgemeine Klasse von topologischen Räumen Y . Im Rahmen der Überlagerungstheorie zeigt man in der algebraischen Topologie, dass als Voraussetzungen nur bogenzusammenhängend, lokal bogenzusammenhängend und “einfach zusammenhängend” notwendig sind. Die letzte Bedingung bedeutet, dass jede geschlossene stetige Kurve in Y homotop zu einer konstanten Kurve ist.

(3) Aus Satz 3.3 erhält man auch direkt Konsequenzen für die Umlaufzahl. Betrachten wir dazu zwei regulär und glatt parametrisierte geschlossene Kurven $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dann gibt es einen natürlichen Begriff von *regulärer Homotopie* von c_0 nach c_1 : Man betrachtet dafür eine Homotopie $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ von c_0 nach c_1 und verlangt zusätzlich, dass die erste partielle Ableitung $\frac{\partial H}{\partial t}$ in jedem Punkt existiert und eine stetige Funktion $[a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert, sodass $\frac{\partial H}{\partial t}(t, s) \neq 0$ für alle t, s und $\frac{\partial H}{\partial t}(a, s) = \frac{\partial H}{\partial t}(b, s)$ für alle s erfüllt. Man verlangt also, dass alle Zwischenkurven c_s geschlossene, regulär parametrisierte C^1 -Kurven sind. Wenn es so eine reguläre Homotopie gibt, dann nennt man c_0 und c_1 *regulär homotop*.

Klarerweise definiert in diesem Fall $\frac{\partial H}{\partial t}$ eine Homotopie von c'_0 nach c'_1 , also folgt $U(c_0) = w_0(c'_0) = w_0(c'_1) = U(c_1)$, also haben regulär homotope Kurven die gleiche Umlaufzahl. Nach dem sogenannten Satz von Whitney-Graustein (siehe [Whitney]) gilt auch die Umkehrung, also haben zwei Kurven genau dann die gleiche Umlaufzahl, wenn sie regulär homotop sind.

3.4. Der Umlaufsatz. Ein gutes Beispiel dafür, wie “starr” die Integrale geometrischer Größen sind, liefert der sogenannte Umlaufsatz von H. Hopf (1935). Da eine orientierungsvertauschende Reparametrisierung das Vorzeichen der Umlaufzahl ändert, sagt der Satz im wesentlichen, dass alle einfach geschlossenen Kurven die gleiche Umlaufzahl haben.

SATZ 3.4. *Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene regulär parametrisierte Kurve. Dann ist $U(c) = \pm 1$, also hat c Totalkrümmung $\pm 2\pi$.*

BEWEISSKIZZE. Wir wissen, dass die Totalkrümmung bis auf das Vorzeichen invariant unter Reparametrisierungen ist, also können wir annehmen, dass $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Schreiben wir $c(t) = (x(t), y(t))$, dann muss die Funktion $y(t)$ auf $[a, b]$ ein Minimum annehmen. In diesem Punkt muss $y'(t) = 0$ und damit $c'(t) = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gelten. Indem wir eine geeignete Translation anwenden, können wir annehmen, dass das Minimum von $y(t)$ gleich 0 ist und dass der Nullpunkt im Bild von c liegt. Da sich c periodisch zu einer glatten Kurve \tilde{c} auf \mathbb{R} ausdehnen lässt, liefert die Einschränkung auf \tilde{c} auf jedes Intervall $[t_0, t_0 + (b - a)]$ eine Bogenlängenparametrisierung unserer Kurve. Schließlich können wir den Parameter noch problemlos um eine Konstante verschieben.

Insgesamt sehen wir, dass wir oBdA folgendes annehmen können: $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist glatt nach der Bogenlänge parametrisiert mit $c(0) = 0$ und schreibt man $c(t) = (x(t), y(t))$, dann ist $y(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, L]$. Nun betrachtet man die Teilmenge

$$E := \{(s, t) : 0 \leq s \leq t \leq L\} \subset \mathbb{R}^2$$

und definiert $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $f(s, t) := \frac{1}{|c(t) - c(s)|} (c(t) - c(s))$ für $s < t$ und $(s, t) \neq (0, L)$, $f(t, t) := c'(t)$ und $f(0, L) := -c'(0)$. Das macht Sinn, weil wir vorausgesetzt haben, dass c einfach geschlossen ist und daher $c(t) - c(s) \neq 0$ für $s < t$ mit $(s, t) \neq$

$(0, L)$ gilt. Weil c stetig differenzierbar ist, ist der Limes von $\frac{t-s}{|c(t)-c(s)|} \frac{1}{t-s} (c(t) - c(s))$ für $s, t \rightarrow t_0$ gerade $\frac{1}{|c'(t_0)|} c'(t_0) = c'(t_0)$. Analog ist für $(s, t) \rightarrow (0, L)$ (in E) der Limes von $f(t, s)$ gleich $-c'(L) = -c'(0)$, also ist f stetig.

Analog zum Beweis von Satz 3.3 zeigt man, dass es eine stetige Funktion $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(t, s) = (\cos(\theta(t, s)), \sin(\theta(t, s)))$ gilt. (Siehe Bemerkung 3.3, ein direkter Beweis findet sich in Lemma 2.27 von [Kühnel] oder Lemma 2.2.12 von [Bär].) Nach Definition ist aber $f(t, t) = c'(t)$ für alle t , also $2\pi U(c) = \theta(L, L) - \theta(0, 0)$. Andererseits ist $f(0, 0) = c'(0)$, $f(0, t)$ hat immer positive y -Koordinate und $f(0, L) = -c'(0)$. Damit ist $\theta(0, L) - \theta(0, 0)$ gleich π falls $c'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und gleich $-\pi$ falls $c'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Analog betrachtet man $f(s, L)$ für $s \in [0, L]$ und sieht, dass $\theta(L, L) - \theta(0, L)$ gleich π ist, falls $c'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und gleich $-\pi$ ist, falls $c'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit folgt $\theta(L, L) - \theta(0, 0) = \pm 2\pi$ wie behauptet. \square

3.5. Konvexität. Aus Satz 2.2 wissen wir, dass für eine regulär parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $t \in I$, die Tangente $\tau_{c(t)}$ an c im Punkt $c(t)$ als affine Gerade in \mathbb{R}^2 Sinn macht. Diese Gerade teilt \mathbb{R}^2 in zwei Halbebenen, also liefert die folgende Definition ein geometrisches Konzept:

DEFINITION 3.5. Eine regulär parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn für jeden Punkt $t \in I$, das Bild $c(I)$ ganz in einer der beiden (abgeschlossenen) Halbebenen liegt, die durch $\tau_{c(t)}$ bestimmt werden.

Man kann diese Bedingung leicht explizit machen. Der Normalvektor von $\tau_{c(t_0)}$ ist ja gerade $ic'(t_0)$ und die Lage von $c(t)$ bezüglich $\tau_{c(t_0)}$ wird bestimmt durch $\langle c(t) - c(t_0), ic'(t_0) \rangle$. Die Kurve ist also genau dann konvex, wenn dieser Ausdruck entweder für alle t, t_0 nichtnegativ oder für alle t, t_0 nicht-positiv ist. Nun können wir zeigen, dass Konvexität eine Einschränkung an die Krümmung liefert, die für einfach geschlossene Kurven eine äquivalente Charakterisierung der Konvexität darstellt.

PROPOSITION 3.5. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär und glatt parametrisierte konvexe Kurve mit Krümmung κ . Dann gilt entweder $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in I$ oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t \in I$.

Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ zusätzlich einfach geschlossen, dann gilt auch die Umkehrung, d.h. wenn die Krümmung von c das Vorzeichen nicht wechselt, dann ist c konvex.

BEWEIS. Wir können annehmen, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Nehmen wir an, dass $\langle c(t) - c(t_0), ic'(t_0) \rangle \geq 0$ für alle $t, t_0 \in I$ gilt (der Fall mit ≤ 0 ist analog). Entwickeln wir c in t_0 bis zur dritten Ordnung in eine Taylorreihe

$$c(t) = c(t_0) + c'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}c''(t_0)(t - t_0)^2 + O(|t - t_0|^3)$$

und setzen das ins innere Produkt ein, dann erhalten wir

$$0 \leq \langle c(t) - c(t_0), ic'(t_0) \rangle = \frac{1}{2} \langle c''(t_0), ic'(t_0) \rangle (t - t_0)^2 + O(|t - t_0|^3).$$

Für $t \neq t_0$ können wir durch den positiven Faktor $(t - t_0)^2$ dividieren und erhalten $0 \leq \frac{1}{2}\kappa(t_0) + O(|t - t_0|)$ und für $t \rightarrow t_0$ liefert das $0 \leq \kappa(t_0)$.

Für die Umkehrung sei $I = [a, b]$ und c einfach geschlossen und glatt nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in I$. Wir nehmen indirekt an, dass es einen Punkt $t_0 \in I$ gibt, sodass $f(t) := \langle c(t) - c(t_0), ic'(t_0) \rangle$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Natürlich muss die Funktion f auf $[a, b]$ ein Minimum und ein Maximum annehmen und wir nennen die entsprechenden Punkte t_1, t_2 , sodass gilt $f(t_1) < 0 = f(t_0) < f(t_2)$. Nach Voraussetzung lässt sich c zu einer periodischen glatten Funktion auf \mathbb{R} fortsetzen, also gilt das auch für f , also muss $f'(t_i) = 0$ für

$i = 1, 2$ gelten. Das liefert aber sofort, dass $\langle c'(t_i), ic'(t_0) \rangle$ für $i = 1, 2$ gilt, also folgt $c'(t_i) = \pm c'(t_0)$ für $i = 1, 2$.

Damit hat c' in mindestens 2 der 3 Punkte $\{t_0, t_1, t_2\}$ den gleichen Wert also können wir $s_1, s_2 \in \{t_0, t_1, t_2\}$ wählen, sodass $s_1 < s_2$ und $c'(s_1) = c'(s_2)$ gilt. Indem wir von $[a, b]$ auf das Intervall $[s_1, s_1 + b - a]$ wechseln, dürfen wir annehmen, dass $s_1 = a$ gilt und wegen $f(s_2) \neq f(s_1)$ muss dann $s_2 < b$ gelten. Nun können wir $c'(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ für eine glatte Funktion $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben und es gilt $\theta'(t) = \kappa(t) \geq 0$, also ist θ monoton wachsend. Insbesondere gilt $\theta(b) \geq \theta(s_2) \geq \theta(s_1)$ und nach Konstruktion ist $c'(b) = c'(s_1) = c'(s_2)$, also folgt $\theta(s_2) = \theta(s_1) + 2k\pi$ und $\theta(b) = \theta(s_2) + 2\ell\pi$ mit $k, \ell \geq 0$. Nach dem Umlaufsatz ist aber $k + \ell = 1$, also muss $k = 0$ oder $\ell = 0$ gelten.

Ist $k = 0$, dann ist θ und damit c' konstant auf $[s_1, s_2] = [a, s_2]$, also ist c auf diesem Intervall eine affine Gerade. Damit gilt $c(s) = c(s_1) + (s - s_1)c'(s_1)$ für $s \in [s_1, s_2]$. Setzt man das ein, dann folgt wegen $c'(s_1) = \pm c'(t_0)$ sofort, dass f konstant auf $[s_1, s_2]$ ist, ein Widerspruch, weil dieses Intervall 2 der Punkte t_0, t_1, t_2 enthält. Analog schließt man für $\ell = 0$, dass f konstant auf $[s_2, b]$ ist, was in analoger Weise zu einem Widerspruch führt. \square

Einfache Beispiele zeigen, dass die Voraussetzung der einfachen Geschlossenheit wirklich notwendig ist, also die Umkehrung für allgemeine geschlossene Kurven nicht gilt.

Nach dem Jordan'schen Kurvensatz zerlegt das Bild einer einfach geschlossenen Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Ebene in zwei Teile. Das bedeutet, dass $\mathbb{R}^2 \setminus c([a, b])$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten besteht, wobei $c([a, b])$ der (topologische) Rand beider Komponenten ist. Eine dieser Komponenten muss beschränkt sein, die andere unbeschränkt und man nennt die beschränkte Komponente das "Innere der Kurve". Die Vereinigung des Inneren mit dem Bild der Kurve ist dann eine kompakte Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^2$. Es zeigt sich, dass c genau dann konvex ist, wenn diese Teilmenge C konvex ist in dem Sinne, dass für zwei Punkte $x, y \in C$ die ganze Verbindungsstrecke von x nach y in C enthalten ist, siehe Satz 2.31 von [Kühnel].

Für eine regulär parametrisierte geschlossene Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ muss die Krümmung κ auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ein Maximum und ein Minimum annehmen. Diese Punkte sind natürlich Scheitel von c . Es zeigt sich, dass eine einfach geschlossene Kurve in \mathbb{R}^2 aber nicht nur 2 Scheitel haben kann, sondern mindestens 4 Scheitel besitzen muss. Ein Beweis dieses als "Vierscheitelsatz" bekannten Resultats für konvexe Kurven findet sich in Satz 2.2.17 von [Bär] oder Satz 2.33 von [Kühnel], ein allgemeiner Beweis in [Vietoris].

3.6. Bemerkung zu Knoten. Die topologischen Konzepte wie Windungs- und Umlaufzahlen lassen sich (für Kurven) nicht unmittelbar in höhere Dimensionen verallgemeinern. Für einfach geschlossene Kurven im Raum \mathbb{R}^3 gibt es aber ein sehr interessantes Phänomen, dass in der Ebene nicht auftritt, nämlich dass solche Kurven "verknotet" sein können. Formal bedeutet das, dass sich eine Kurve nicht zu einem Kreis deformieren lässt. Als Deformationen betrachtet man hier einerseits Homotopien, für die alle Zwischenkurven glatt, einfach geschlossen und regulär sind. Andererseits kann man auch Isotopien des umgebenden Raumes \mathbb{R}^3 betrachten, also Homotopien, die bei der Identität beginnen, sodass alle Zwischenabbildungen Diffeomorphismen sind und verlangen, dass der Endwert das Bild der ersten Kurve auf das Bild der zweiten Kurve abbildet. Das Studium von Invarianten solcher Knoten ist ein sehr aktives Forschungsgebiet, in dem aber geometrische Methoden keine so große Rolle spielen.

Extrinsische Geometrie von Flächen

Wir wenden uns nun höherdimensionalen geometrischen Objekten zu. Hauptsächlich werden wir uns mit Flächen in \mathbb{R}^3 beschäftigen, einiges funktioniert aber für beliebige Dimensionen. Wie schon in Abschnitt 1.5 bemerkt, macht es die große Freiheit bei Reparametrisierungen handlicher, geometrische Objekte direkt auf den betrachteten Teilmengen zu definieren und die Parametrisierungen nur zum Rechnen zu benutzen. Daher entwickeln wir zunächst die Grundbegriffe für Teilmannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n .

4.1. Motivation, erste Fundamentalform. Man kann viele Elemente der Geometrie von Flächen entwickeln oder beobachten indem man mit Parametrisierungen zu rechnen beginnt. Ein Analogon von regulären Parametrisierungen für Kurven sind sogenannte *Immersionen* also glatte Funktionen $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, die auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ definiert sind, sodass für jedes $x \in U$ die Ableitung $Du(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist. Wir werden später noch einschränkende Annahmen machen, für's Erste ist das aber nicht notwendig.

Das Analogon des Tangentialraumes und der Tangente aus 2.2 in einem Punkt $u(x)$ ist gerade der k -dimensionale Teilraum $\text{im}(Du(x)) \subset \mathbb{R}^n$ beziehungsweise der davon erzeugte affine Teilraum durch $u(x)$ in \mathbb{E}^n . Natürlich kann man das innere Produkt von \mathbb{R}^n auf den Teilraum $\text{im}(Du(x))$ einschränken und dann "in der Parametrisierung" durch eine (symmetrische) Matrix beschreiben. Um das explizit auszudrücken schreiben wir die i te partielle Ableitung der glatten Funktion $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ als $\partial_i u$. Damit erhält man für $i, j = 1, \dots, k$ glatte Funktionen $g_{ij}^u : U \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$g_{ij}^u(x) := \langle \partial_i u(x), \partial_j u(x) \rangle$$

definiert sind. Man nennt diese Funktionen die Koeffizienten der *ersten Fundamentalform*. Nach Konstruktion gilt $g_{ij}^u(x) = g_{ji}^u(x)$ und man kann (g_{ij}) entweder als symmetrische Matrix glatter Funktionen auf U oder als glatte Funktion von U in den Raum der symmetrischen $k \times k$ -Matrizen betrachten. Schreibt man u in Komponenten als (u^1, \dots, u^n) dann ist die Jacobi-Matrix (Du) von u gerade die Matrix $(\partial_i u^j)$ mit $i = 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, n$ (n Zeilen, k Spalten) und man erhält $(g_{ij}^u) = (Du)^t(Du)$.

Es ist auch klar, was das Analogon von Reparametrisierungen in diesem Bild ist. Man betrachtet einen Diffeomorphismus $\varphi : V \rightarrow U$, wobei $V \subset \mathbb{R}^k$ noch eine offene Teilmenge ist und die glatte Funktion $v := u \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, die nach der Kettenregel ebenfalls eine Immersion ist. Explizit besagt die Kettenregel gerade, dass (Dv) das Produkt der $n \times k$ -Matrix (Du) und der $k \times k$ -Matrix $(D\varphi)$ ist. Damit erhält man

$$(g_{ij}^v) = (Dv)^t(Dv) = (D\varphi)^t(Du)^t(Du)(D\varphi) = (D\varphi)^t(g_{ij}^u)(D\varphi).$$

In Komponenten ausgeschrieben bedeutet das $g_{ij}^v = \sum_{r,s=1}^k \partial_i \varphi^r g_{rs}^u \partial_j \varphi^s$. Um sich die Summenzeichen zu ersparen benutzt man in der Differentialgeometrie oft die *Einstein Summenkonvention*, die besagt, dass in einer Formel in der ein oberer und ein unterer Index gleichen Namens vorkommen, automatisch über diese Indizes summiert wird (wobei der Bereich über den der Index summiert wird implizit klar sein muss). Unter Benutzung der Konvention schreibt man die Gleichung einfach als $g_{ij}^v = \partial_i \varphi^r g_{rs}^u \partial_j \varphi^s$.

Würden wir parallel zum Fall der Kurven vorgehen, dann würden wir versuchen, “geometrische Objekte” in dieser Form durch ihre Bilder in Parametrisierungen zu definieren und dann zu überprüfen, ob/wie das mit Reparametrisierungen verträglich ist. Dagegen ist prinzipiell nichts einzuwenden, das (relativ einfache) Beispiel der ersten Fundamentalform zeigt aber auch, dass die Dinge in diesem Bild recht schnell kompliziert werden. (Vor allem, wenn man sich vorstellt im nächsten Schritt Ableitungen der ersten Fundamentalform oder Ähnliches zu bilden.)

Wir werden einen anderen Zugang wählen, wobei die Unterschiede aber nicht fundamental sind, sondern eher in der Interpretation liegen. Wir werden nämlich zunächst die Sprache der Teilmannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n entwickeln, für die man wohldefinierte Begriffe von glatten Funktionen und allgemeineren geometrischen Objekten sowie für Ableitungen und allgemeinere Operationen auf der Teilmannigfaltigkeit erhält. Wie wir sehen werden, kann man Teilmannigfaltigkeiten durch lokale Parametrisierungen beschreiben und dann in Objekte in dieser Beschreibung interpretieren und mit ihnen rechnen. Dann kann man auch berechnen, wie sich Reparametrisierungen auf diese Objekte auswirken.

Teilmannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n

4.2. Definition von Teilmannigfaltigkeiten. Wir wollen versuchen, Analysis und insbesondere Differentialrechnung auf Teilmengen von \mathbb{R}^n zu betreiben, die nicht offen sind. Die Grundidee dafür ist einerseits, dass das für $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ natürlich problemlos funktioniert. Andererseits ist Differenzieren eine lokale Operation und man kann sich vorstellen, dass die Bilder “schöner” Teilmengen unter Diffeomorphismen ebenfalls schön sind. Dann kann man die Definition von glatten Funktionen auf solchen Teilmengen einfach auf die übliche Analysis zurückführen.

DEFINITION 4.2. (1) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine *k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit* wenn es für jeden Punkt $x \in M$ offene Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ gibt, sodass $\Phi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^k$ gilt. Hierbei betrachten wir \mathbb{R}^k als die Teilmenge jener Punkte von \mathbb{R}^n , deren letzte $n-k$ Koordinaten Null sind. Der Diffeomorphismus Φ heißt eine *lokale Trivialisierung* für M .

(2) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *glatt* wenn es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und eine Funktion $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, die glatt im Sinne der Analysis ist, sodass $\tilde{f}|_{U \cap M} = f|_U$ gilt.

(3) Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ und $N \subset \mathbb{R}^m$ Teilmannigfaltigkeiten. Dann nennt man eine Funktion $f : M \rightarrow N$ *glatt* wenn f glatt als Funktion nach \mathbb{R}^m ist.

Wir bemerken zunächst, dass man für die Teilmenge $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^k$ einfach $U = V = \mathbb{R}^n$ und $\Phi = \text{id}$ wählen kann um \mathbb{R}^k zu einer k dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n zu machen. Aus bekannten Resultaten der Analysis folgt leicht, dass Teil (2) der Definition genau die üblichen glatten Funktionen auf \mathbb{R}^k liefert (die man ja problemlos auf \mathbb{R}^n ausdehnen kann). Ähnlich kann man für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und jeden Punkt $x \in U$ einfach $V = U$ und $\Phi = \text{id}$ wählen und sieht, dass U eine n -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Wiederum liefert Teil (2) die üblichen glatten Funktionen, weil Glattheit ein lokales Konzept ist. Teil (3) der Definition sagt uns dann insbesondere was glatte Funktionen von offenen Teilmengen von \mathbb{R}^m in eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^n sind, nämlich einfach glatte Funktionen (im Sinne der Analysis) nach \mathbb{R}^n , die Werte in M haben. Insbesondere ist damit klar, was glatte Kurven in M sind.

Als Teilmenge von \mathbb{R}^n erbt jede Teilmannigfaltigkeit M eine Topologie. Nach Definition ist eine Teilmenge $W \subset M$ genau dann offen in M , wenn es eine offene Teilmenge $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $W = \tilde{W} \cap M$. Ist nun $x \in W$ und $\Phi : U \rightarrow V$ wie in Definition 4.2, dann ist $\tilde{U} := \tilde{W} \cap U$ offen in \mathbb{R}^n und nach dem inversen Funktionensatz ist auch $\Phi(\tilde{U}) := \tilde{V} \subset V$ offen in \mathbb{R}^n und $\Phi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ ein Diffeomorphismus. Nach Konstruktion ist $\tilde{U} \cap M = W \cap (U \cap M)$ und das Bild dieser Teilmenge ist genau $\tilde{V} \cap \mathbb{R}^k$. Damit sehen wir, dass offene Teilmengen von Teilmannigfaltigkeiten selbst Teilmannigfaltigkeiten (der gleichen Dimension) sind.

Schließlich liefert das offensichtlich ein Konzept, das invariant unter Diffeomorphismen ist: Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit, dann ist auch $F(M) \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit: Für $x \in F(M)$ betrachtet man $F^{-1}(x) \in M$, passende offene Mengen U und V mit $F^{-1}(x) \in U$ und einen passenden Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$. Dann setzt man $\tilde{U} := F(U)$, was eine offene Teilmenge ist, die x enthält und betrachtet $\Phi \circ (F|_U)^{-1} : \tilde{U} \rightarrow V$ und bemerkt, dass ein Punkt $y \in \tilde{U}$ genau dann in $\tilde{U} \cap F(M)$ liegt, wenn $F^{-1}(y)$ in $U \cap M$ liegt. Das zeigt sofort, dass $\Phi \circ (F|_U)^{-1}$ die in der Definition geforderte Eigenschaft hat.

BEISPIEL 4.2. Teilmengen von \mathbb{R}^n anhand der Definition als Teilmannigfaltigkeiten zu erkennen ist meist eher mühsam, der Vollständigkeit halber besprechen wir aber wenigstens ein Beispiel in dieser Form. Wir werden in Kürze Resultate beweisen, die viel einfachere Kriterien liefern.

Betrachten wir die Einheitskugel $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Betrachten wir zunächst $e_1 \in S^{n-1}$ und schreiben Elemente von \mathbb{R}^n als (t, x) mit $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, also $e_1 = (1, 0)$. Die Teilmenge $U := \{(t, x) : t > |x|\} \subset \mathbb{R}^n$ ist offen und natürlich ist $e_1 = (1, 0) \in U$. Andererseits ist auch

$$V := \{(y, s) \in \mathbb{R}^n : y \in \mathbb{R}^{n-1}, |y| < 1, s \in \mathbb{R}, s > -1\}$$

eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Nun definieren wir $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\Phi(t, x) := \left(\frac{1}{t} \cdot x, |(t, x)| - 1\right)$$

und $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\Psi(y, s) = (\lambda, \lambda y)$ mit $\lambda = \lambda(y, s) := \frac{s+1}{\sqrt{1+|y|^2}}$. Dann sind das offensichtlich glatte Funktionen und wegen $|\frac{1}{t}x| = \frac{1}{t}|x|$ hat Φ Werte in V . Analog hat die zweite Komponente von $\Psi(y, s)$ Norm $\lambda|y| < \lambda$, also hat Ψ Werte in U . Nun hat aber $\Phi(\Psi(y, s)) = \Phi(\lambda, \lambda y)$ als erste Komponente offensichtlich y . Die zweite Komponente ist $\lambda\sqrt{1+|y|^2} - 1 = (s+1) - 1 = s$, also ist $\Phi \circ \Psi = \text{id}_V$. Andererseits gilt für $t > 0$ die Gleichung $|(t, x)| = \sqrt{t^2 + |x|^2} = t\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}|x|^2}$ und daraus folgt sofort, dass $\lambda(\frac{1}{t}x, |(t, x)| - 1) = t$ und somit $\Psi \circ \Phi = \text{id}_U$ gilt. Also sind $\Phi : U \rightarrow V$ und $\Psi : V \rightarrow U$ inverse Diffeomorphismen und offensichtlich liegt (t, x) genau dann in S^{n-1} wenn die letzte Koordinate von $\Phi(t, x)$ gleich 0 ist.

Betrachten wir nun einen beliebigen Punkt $x \in S^{n-1}$, dann ist x ein Einheitsvektor in \mathbb{R}^n , also findet man eine orthogonale Matrix A , die e_1 auf x abbildet. Damit ist aber $U_x := \{Az : z \in U\}$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n , die x enthält und wir können $\Phi_x : U_x \rightarrow V$ durch $\Phi_x(z) := \Phi(A^{-1}z)$ definieren. Analog definiert man $\Psi_x : V \rightarrow U_x$ als $\Psi_x(y, s) = A\Psi(y, s)$ und offensichtlich ist dies eine glatte Inverse zu Φ_x . Für die orthogonale lineare Abbildung A^{-1} gilt $|A^{-1}z| = |z|$ also gilt $z \in U_x \cap S^{n-1}$ genau dann wenn $A^{-1}z \in U \cap S^{n-1}$, also genau dann, wenn die letzte Komponente von $\Phi_x(z)$ gleich 0 ist. Damit erfüllt die Familie $\{(U_x, \Phi_x) : x \in S^{n-1}\}$ alle Eigenschaften aus Definition

4.2 und wir haben verifiziert, dass S^{n-1} eine $(n-1)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist.

4.3. Tangentialraum und Tangentialabbildung. Die Grundidee der Differentialrechnung ist, dass die Ableitung einer Funktion in einem Punkt die bestmögliche lineare Approximation der Funktion in diesem Punkt sein soll. Dazu benötigt man zunächst einen Vektorraum der die Teilmannigfaltigkeit approximiert, den man im Fall von Teilmannigfaltigkeiten einfach als Teilraum von \mathbb{R}^n auffassen kann. Man könnte diesen Teilraum in eher offensichtlicher Weise über lokale Trivialisierungen wie in Definition 4.2 definieren. Konzeptuell ist es aber handlicher, eine Definition zu benutzen, die keine Wahlen beinhaltet.

DEFINITION 4.3. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit und $x \in M$ ein Punkt. Dann betrachten wir alle glatten Kurven $c : I \rightarrow M$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist, das 0 enthält und die $c(0) = x$ erfüllen und definieren *Tangentialraum* $T_x M$ an M bei x aller Vektoren in \mathbb{R}^n die man in der Form $c'(0)$ für solche Kurven realisieren kann.

Das ist natürlich eine Definition, die für beliebige Teilmengen von \mathbb{R}^n Sinn macht, im Allgemeinen erhält man so aber keine Teilräume von \mathbb{R}^n . Mit so einer Definition ist aber auch klar, dass es eigentlich nur eine sinnvolle Definition für die Ableitung einer glatten Funktion $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Teilmannigfaltigkeiten gibt. Einerseits sollte für eine glatte Kurve $c : I \rightarrow M$ und eine glatte Funktion $f : M \rightarrow N$ auch $f \circ c : I \rightarrow N$ eine glatte Kurve sein. Wenn zusätzlich die Kettenregel gelten soll, dann muss man aber dann die Ableitung $(f \circ c)'(0)$ berechnen können, indem man die Ableitung von f im Punkt $c(0)$ auf $c'(0)$ anwendet. Wir können nun beweisen, dass das im Fall von Teilmannigfaltigkeiten tatsächlich so funktioniert.

SATZ 4.3. (1) Für eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und jeden Punkt $x \in M$ ist der Tangentialraum $T_x M$ ein k -dimensionaler Teilraum von \mathbb{R}^n .

(2) Für eine glatte Funktion $f : M \rightarrow N$ zwischen Teilmannigfaltigkeiten und jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ die dadurch charakterisiert ist, dass $T_x f(c'(0)) = (f \circ c)'(0)$ für jede glatte Kurve $c : I \rightarrow M$ wie in Definition 4.3 gilt.

(3) Sind $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ glatte Funktionen zwischen Teilmannigfaltigkeiten, dann ist auch die Komposition $g \circ f : M \rightarrow P$ glatt und für jeden Punkt $x \in M$ gilt die Kettenregel $T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f : T_x M \rightarrow T_{g(f(x))}P$.

BEWEIS. (1) Nach Definition finden wir offene Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$, sodass $\Phi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^k$ gilt. Dann ist $D\Phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus und wir behaupten, dass $T_x M$ mit der Teilmenge $E := \{X \in \mathbb{R}^n : D\Phi(x)(X) \in \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n\}$ übereinstimmt, die offensichtlich ein k -dimensionaler Teilraum von \mathbb{R}^n ist.

Sei zunächst $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve wie in Definition 4.3. Weil $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $x \in U$ gilt, gibt es ein offenes Teilintervall $\tilde{I} \subset I$ mit $0 \in \tilde{I}$, sodass $c(\tilde{I})$ in U und damit in $U \cap M$ enthalten ist. Damit ist aber $\Phi \circ c : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve in \mathbb{R}^n , die Werte in $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ hat. Offensichtlich ist dann $(\Phi \circ c)'(0) = D\Phi(c(0))(c'(0)) \in \mathbb{R}^k$, also folgt $T_x M \subset E$. Umgekehrt können wir für einen Vektor $X \in \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ den Punkt $\Phi(x) + tX \in \mathbb{R}^n$ betrachten. Da $V = \Phi(U)$ offen in \mathbb{R}^n ist, finden wir ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, sodass $\Phi(x) + tX \in V$ für all $t \in I$ gilt. Damit definiert aber $c(t) := \Phi^{-1}(\Phi(x) + tX)$ eine glatte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, die nach Konstruktion Werte in

$U \cap M$ hat. Damit ist aber $c'(0) = D\Phi^{-1}(\Phi(x))(X) \in T_x M$, was sofort $E \subset T_x M$ und damit (1) impliziert.

(2) Nach Definition der Glattheit finden wir eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und eine Funktion $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ die glatt ist und auf $U \cap M$ mit f übereinstimmt. Für eine Kurve $c : I \rightarrow M$ wie in Definition 4.3 können wir wieder annehmen, dass $c(I) \subset U \cap M$ gilt. Dann ist aber $f \circ c = \tilde{f} \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ und aus der Analysis ist bekannt, dass dies eine glatte Kurve ist. Damit existiert $(f \circ c)'(0)$ und stimmt nach der Kettenregel der Analysis mit $D\tilde{f}(x)(c'(0))$ überein. Daraus folgt, dass $c'(0) \mapsto (f \circ c)'(0)$ wohldefiniert ist und als Abbildung mit $D\tilde{f}(x)|_{T_x M} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ übereinstimmt. Das vervollständigt einerseits den Beweis von (2), andererseits bemerken wir, dass $Df(x)(T_x M) \subset T_{f(x)} N$ gilt.

(3) Für einen Punkt $x \in M$ finden wir eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und eine glatte Funktion $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, die auf $U \cap M$ mit f übereinstimmt. Analog finden wir zum Punkt $f(x) \in N$ eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $f(x) \in V$ und eine glatte Funktion $\tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, die auf $V \cap N$ mit g übereinstimmt. Indem wir U durch $U \cap \tilde{f}^{-1}(V)$ ersetzen dürfen wir oBdA annehmen, dass $\tilde{f}(U) \subset V$ gilt. Dann ist aber $\tilde{g} \circ \tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine glatte Funktion und für $y \in U \cap M$ ist $\tilde{g}(\tilde{f}(y)) = \tilde{g}(f(y))$ und weil $f(y) \in N$ gilt, stimmt das mit $g(f(y))$ über ein. Da der Punkt x beliebig war, ist $g \circ f : M \rightarrow P$ eine glatte Funktion.

Aus Teil (2) wissen wir dann aber, dass $T_x(g \circ f)$ mit der Einschränkung von $D(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x)$ auf $T_x M \subset \mathbb{R}^n$ übereinstimmt. Nach der Kettenregel der Analysis ist aber $D(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x) = D\tilde{g}(\tilde{f}(x)) \circ D\tilde{f}(x)$ und aus Teil (2) wissen wir, dass auf dem Teilraum $T_x M$ die Abbildung $D\tilde{f}(x)$ mit $T_x f$ übereinstimmt. Insbesondere liegen die Werte dann in $T_{f(x)} N$, und darauf stimmt $D\tilde{g}(f(x))$ nach (2) mit $T_{f(x)} g$ überein, was den Beweis vervollständigt. \square

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit und $f : U \rightarrow M$ eine glatte Funktion. Dann ist f glatt im Sinne der Analysis als Funktion nach \mathbb{R}^n und der Beweis zeigt, dass für $x \in U$ die Tangentialabbildung $T_x f$ mit der Ableitung $Df(x)$ im Sinne der Analysis übereinstimmt.

4.4. Einfachere Beschreibungen. Nachdem wir die Grundbegriffe beisammen haben, können wir jetzt die einfacheren Beschreibungen von Teilmannigfaltigkeiten herleiten. Betrachten wir eine lokale Trivialisierung $\Phi : U \rightarrow V$ wie in Definition 4.2, dann ist es naheliegend, den Zielraum (in dem V enthalten ist) als $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ zu betrachten. Zerlegt man Φ entsprechend in Komponenten (Φ_1, Φ_2) dann sind $\Phi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $\Phi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ natürlich glatte Funktionen. Die Bedingung in Definition 4.2 sagt dann gerade, dass $U \cap M = \Phi_2^{-1}(\{0\})$ gilt, also erhält man eine Realisierung von M als Nullstellenmenge einer glatten Funktion. Zusätzlich folgt aus der Tatsache, dass Φ ein Diffeomorphismus ist natürlich dass für jeden Punkt $y \in U$ die Ableitung $D\Phi_2(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv ist.

Betrachten wir andererseits die Inverse $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$, dann können wir $W := V \cap \mathbb{R}^k$ betrachten, was offensichtlich eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k ist. Und natürlich ist $\Phi^{-1}|_W : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt und schränkt sich zu einer Bijektion $W \rightarrow U \cap M$ ein. Da die Ableitung dieser Funktion in jedem Punkt von W offensichtlich injektiv ist, erhalten wir das Analogon einer lokalen regulären Parametrisierung für M . Zusätzlich ist aber die Einschränkung $\Phi_1|_{U \cap M}$ der Funktion Φ_1 von oben natürlich stetig für die Teilraumtopologie auf $U \cap M$ und nach Konstruktion ist sie invers zu $\Phi^{-1}|_W$. Damit

definiert aber $\Phi^{-1}|_W$ einen Homöomorphismus von W auf $U \cap M$ und ist somit eine Einbettung im Sinne der Topologie.

Jeder dieser beiden "Teile" einer lokalen Trivialisierung ist ausreichend um eine Teilmenge von \mathbb{R}^n als Teilmannigfaltigkeit zu identifizieren. Dazu erhält man auch gleich eine angepasste Beschreibung der Tangentialräume.

SATZ 4.4. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge auf der wir die von \mathbb{R}^n induzierte Topologie betrachten. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (1) *M ist eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .*
 (2) *(" M ist lokal reguläre Nullstellenmenge") Für jedes $x \in M$ gibt es eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und eine glatte Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, sodass gilt*

- $M \cap U = F^{-1}(\{0\})$
- Für jedes $y \in M \cap U$ ist $DF(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv.

Für $y \in U \cap M$ ist dann $T_y M = \text{Ker}(DF(y))$.

- (3) *(" M besitzt lokale reguläre Parametrisierungen") Für jedes $x \in M$ gibt es offene Teilmengen $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in V := \tilde{V} \cap M$ und $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine glatte Funktion $u : U \rightarrow \tilde{V}$ sodass gilt:*

- u ist ein Homöomorphismus von U auf die offene Teilmenge V von M .
- Für jedes $z \in U$ ist $Du(z) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv.

Für $y = u(z) \in V$ ist dann $T_y M = \text{im}(Du(z))$.

BEWEIS. Die Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts zeigen, dass (1) \Rightarrow (2) und (1) \Rightarrow (3) gelten.

(2) \Rightarrow (1): Sei $x \in M$ und seien U und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ gegeben. Dann ist $E_1 := \text{ker}(DF(x))$ ein k -dimensionaler Teilraum von \mathbb{R}^n und wir fixieren eine Identifikation von E_1 mit \mathbb{R}^k und eine lineare Projektion $p : \mathbb{R}^n \rightarrow E_1$ (d.h. eine lineare Abbildung, die auf E_1 mit der Identität übereinstimmt). Dann definieren wir $\Phi : U \rightarrow E_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{R}^n$ durch $\Phi(y) = (p(y - x), F(y))$. Dann können wir $D\Phi(x)$ als lineare Abbildung mit Werten in $E_1 \times \mathbb{R}^{n-k}$ betrachten und weil p linear ist, gilt offensichtlich $D\Phi(x)(X) = (p(X), DF(x)(X))$. Damit ist $D\Phi(x)(X) = 0$ äquivalent zu $DF(x)(X) = 0$ und $p(X) = 0$. Die erste Bedingung impliziert aber $X \in E_1$ und damit $p(X) = X$. Damit ist $D\Phi(x)$ injektiv und daher ein linearer Isomorphismus. Also finden wir offene Teilmengen $\tilde{U} \subset U$ und $\tilde{V} \subset E_1 \times \mathbb{R}^{n-k}$, sodass sich Φ zu einem Diffeomorphismus $\tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ einschränkt. Aber nach Konstruktion gilt $y \in U \cap M$ genau dann, wenn $F(y) = 0$ und damit wenn $\Phi(y) \in E_1 \subset E_1 \times \mathbb{R}^{n-k}$, also definiert $\Phi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine lokale Trivialisierung.

Ist $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve durch $y \in M \cap U$ wie in Definition 4.3, dann können $c(I) \subset \tilde{U}$ annehmen und nach Konstruktion ist $(F \circ c)(t) = 0$ für alle $t \in I$. Damit ist $(F \circ c)'(0) = 0$, also $c'(t) \in \text{ker}(DF(y))$. Damit sehen wir, dass $T_y M \subset \text{Ker}(DF(y))$ gilt und da beides k -dimensionale Teilräume von \mathbb{R}^n sind, müssen Sie übereinstimmen.

(3) \Rightarrow (1): Der Beweis ist ähnlich, nur konstruiert man die Inverse zu Φ . Wir fixieren wieder $x \in M$ und nehmen U, \tilde{V} und $u : U \rightarrow \tilde{V}$ wie in (3) und betrachten den eindeutigen Punkt $z_0 \in U$, sodass $u(z_0) = x$ gilt. Dann ist $\text{im}(Du(z_0))$ ein k -dimensionaler Teilraum von \mathbb{R}^n und wir wählen einen dazu komplementären Teilraum $E \subset \mathbb{R}^n$, den wir mit \mathbb{R}^{n-k} identifizieren können. Nun betrachten wir $\Psi : U \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Psi(z, X) := u(z) + X$ und sehen sofort, dass $D\Psi(z_0, 0) : \mathbb{R}^k \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus ist. Damit finden wir eine offene Umgebung W von $(z_0, 0)$ in $\mathbb{R}^k \times E$, auf der sich Ψ zu einem Diffeomorphismus einschränkt. Nun ist aber $W \cap \mathbb{R}^k$ eine offene Umgebung von z_0 , also $u(W \cap \mathbb{R}^k)$ eine offene Umgebung von x in $V = M \cap \tilde{V}$. Damit finden wir eine offene

Teilmenge $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$, sodass $u(W \cap \mathbb{R}^k) = M \cap \tilde{W}$ gilt. Betrachten wir nun die offenen Teilmengen $\hat{U} := \tilde{W} \cap \Psi(W)$ und $\hat{V} := \Psi^{-1}(\hat{U})$ von \mathbb{R}^n und $\mathbb{R}^k \times E$. Dann ist $\Psi : \hat{V} \rightarrow \hat{U}$ ein Diffeomorphismus und wenn $\Psi(z, X) \in M \cap \hat{U}$ liegt, dann gibt es nach Konstruktion einen Punkt $\tilde{z} \in W \cap \mathbb{R}^k$, sodass $\Psi(z, X) = u(\tilde{z}) = \Psi(\tilde{z}, 0)$ gilt. Wegen der Bijektivität von Ψ muss daher $z = \tilde{z}$ und $X = 0$ gelten, also ist $\Psi^{-1} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ eine lokale Trivialisierung für M um x .

Seien $y \in V$ und $z \in U$ mit $u(z) = y$. Für $Y \in \mathbb{R}^k$ hat die Kurve $t \mapsto z + tY$ auf einem Intervall I , das Null enthält Werte in U . Dann ist $c(t) := u(z + tY)$ eine Kurve wie in Definition 4.3 und $c'(0) = Du(z)(Y)$. Damit ist aber $\text{im}(Du(z)) \subset T_y M$ und da beides k -dimensionale Teilräume von \mathbb{R}^n sind, folgt die Gleichheit. \square

Dieses Resultat führt unmittelbar zu vielen Beispielen für Teilmannigfaltigkeiten. Um die Sphäre S^{n-1} als Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n zu erkennen, kann man etwa einfach die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten, die durch $f(x) := \langle x, x \rangle$ gegeben ist. Wir wissen schon, dass $Df(x)(X) = 2\langle x, X \rangle$ und die Regularitätsbedingung vereinfacht sich hier zu $Df(x) \neq 0$, was offensichtlich für alle $x \neq 0$ erfüllt ist.

Analog kann man für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ die Teilmenge $M := \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^n$, also den Graphen von f betrachten. Für diese Teilmenge definieren wir $u(x) := (x, f(x))$ und für $Y \in \mathbb{R}^k$ erhalten wir $Du(x)(Y) = (Y, Df(x)(Y))$. Da die Projektion auf die ersten k Koordinaten sich auf M zu einer stetigen Inversen zu u einschränkt, ist u eine globale Parametrisierung für M und somit M eine glatte Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

Als weiteres Beispiel betrachten wir einen Torus. Für $R > r > 0$ betrachten wir einen Kreis vom Radius r in der (x, z) -Ebene, den wir um einen Kreis vom Radius R in der (x, y) -Ebene rotieren lassen. In Termen von 2 Koordinaten, die wir als Winkel interpretieren liefert das die glatte Funktion

$$u(t, s) := ((R + r \cos s) \cos t, (R + r \cos s) \sin t, r \sin s).$$

Die Ableitung ist $Du(t, s) = \begin{pmatrix} -(R+r \cos s) \sin t & -r \sin s \cos t \\ (R+r \cos s) \cos t & -r \sin s \sin t \\ 0 & r \cos s \end{pmatrix}$. Wegen $R > r$ ist die erste Spalte dieser Matrix immer ungleich 0 also können die Spalten höchstens dann linear abhängig sein, wenn $\cos s = 0$ gilt. In diesem Fall ist aber $\sin s = \pm 1$ und dann ist die Determinante des oberen 2×2 -Blocks entweder $R + r$ oder $R - r$ also sind auch dann die Spalten linear unabhängig. Somit ist $Du(t, s)$ injektiv für beliebiges $t, s \in \mathbb{R}$ und natürlich ist u injektiv auf jedem Produkt von offenen Intervallen mit Länge kleiner 2π . Es ist auch leicht einzusehen, dass φ auf solchen Produkten eine topologische Einbettung ist, also erhalten wir so lokale Parametrisierungen des Torus.

4.5. Diffeomorphismen und der inverse Funktionensatz. Lokale Parametrisierungen liefern uns auch eine schöne Charakterisierung glatter Funktionen. Diese erlaubt uns insbesondere, über lokale Parametrisierungen lokal glatte Funktionen auf einer Teilmannigfaltigkeit zu definieren. Außerdem können wir damit leicht den inversen Funktionensatz auf Teilmannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Der Begriff eines Diffeomorphismus verallgemeinert sich problemlos auf Teilmannigfaltigkeiten: Ein Diffeomorphismus von M nach N ist einfach eine bijektive glatte Funktion $f : M \rightarrow N$, sodass auch die inverse Funktion $f^{-1} : N \rightarrow M$ glatt ist. Ist f ein Diffeomorphismus, dann folgt aus der Kettenregel in Satz 4.3 sofort, dass die linearen Abbildungen $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ und $T_{f(x)} f^{-1} : T_{f(x)} N \rightarrow T_x M$ invers zueinander sind. Da offene Teilmengen von Teilmannigfaltigkeiten selbst Teilmannigfaltigkeiten sind, macht es auch keine Probleme zu definieren, wann $f : M \rightarrow N$ lokal um einen

Punkt $x \in M$ ein Diffeomorphismus ist. Das bedeutet einfach, dass es offene Teilmengen U von M und V von N mit $x \in U$ und $f(x) \in V$ gibt, sodass sich f zu einem Diffeomorphismus von U nach V einschränkt. Schließlich nennt man $f : M \rightarrow N$ einen *lokalen Diffeomorphismus* wenn f lokal um jeden Punkt $x \in M$ ein Diffeomorphismus ist.

PROPOSITION 4.5. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(1) *Ist $u : U \rightarrow \tilde{V}$ eine lokale Parametrisierung für eine Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, dann ist u ein Diffeomorphismus von U auf die offene Teilmenge $\tilde{V} \cap M$ von M . Umgekehrt definiert jeder solche Diffeomorphismus eine lokale Parametrisierung für M .*

(2) *Für eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *f ist glatt.*

(ii) *f ist stetig und für jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow \tilde{V}$ für M mit $x \in \tilde{V}$, sodass $f \circ u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt im Sinne der Analysis ist.*

(iii) *f ist stetig und für jede lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow \tilde{V}$ für M ist $f \circ u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt im Sinne der Analysis.*

BEWEIS. (1) Natürlich ist eine lokale Parametrisierung u glatt als Funktion $U \rightarrow M$ und bijektiv als Funktion nach $V := \tilde{V} \cap M$. Also bleibt zu zeigen, dass $u^{-1} : V \rightarrow U$ glatt ist. Aber lokal um jeden Punkt in U finden wir wie im Beweis von Satz 4.4 einen Diffeomorphismus Ψ der u erweitert. Dann können wir die Inverse $\Phi := \Psi^{-1}$ wieder in Komponenten (Φ_1, Φ_2) zerlegen. Aber dann ist Φ_1 eine Erweiterung von u^{-1} , die glatt auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n ist.

Seien umgekehrt $U \subset \mathbb{R}^k$ und $V \subset M$ offene Teilmengen und $u : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist u ein Homöomorphismus und wir finden eine offene Teilmenge $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit $U = M \cap \tilde{U}$, also erfüllt $u : U \rightarrow \tilde{V}$ alle Eigenschaften einer lokalen Parametrisierung.

(2) Offensichtlich folgt (iii) aus (i), weil die Komposition glatter Funktionen glatt ist und klarerweise folgt (ii) aus (iii), also bleibt zu zeigen, dass (i) aus (ii) folgt. Aber aus Teil (1) wissen wir, dass für eine Parametrisierung $u : U \rightarrow \tilde{V}$, und $V := \tilde{V} \cap M$ die Abbildung $u^{-1} : V \rightarrow U$ glatt ist. Ist f eine Funktion, sodass $f \circ u$ glatt ist, dann kann man $f|_V$ als $(f \circ u) \circ u^{-1}$ schreiben und das ist glatt als Komposition von zwei glatten Funktionen. Für eine Funktion f , die die Bedingung aus (ii) erfüllt, finden wir somit eine Überdeckung von M mit offenen Teilmengen, sodass die Einschränkung von f auf jede dieser Teilmengen glatt ist. Daraus folgt aber sofort, dass f selbst glatt ist. \square

Daraus können wir nun leicht die allgemeine Version des inversen Funktionensatzes ableiten:

SATZ 4.5. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ und $N \subset \mathbb{R}^m$ glatte k -dimensionale Teilmannigfaltigkeiten und sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Funktion. Ist $x \in M$ ein Punkt, sodass die lineare Abbildung $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ invertierbar ist, dann ist f lokal um x ein Diffeomorphismus.*

BEWEIS. Nach Satz 4.4 finden wir lokale Parametrisierungen $u : U \rightarrow \tilde{W}$ für M und $v : V \rightarrow \tilde{Z}$ für N mit $x \in \tilde{W} \cap M$ und $f(x) \in \tilde{Z} \cap N$. Da f und u stetig sind, sind $f^{-1}(\tilde{Z}) \subset M$ und $\tilde{U} := u^{-1}(f^{-1}(\tilde{Z})) \subset \mathbb{R}^k$ offen, und $f \circ u$ bildet \tilde{U} nach $Z := \tilde{Z} \cap N$ ab. Damit ist aber $v^{-1} \circ f \circ u : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Funktion (im Sinne der Analysis) und nach Konstruktion ist ihre Ableitung in $u^{-1}(x)$ invertierbar. Nach dem inversen

Funktionensatz für offene Teilmengen gibt es eine offene Teilmenge $\hat{U} \subset \tilde{U}$ sodass $v^{-1} \circ f \circ u$ sich zu einem Diffeomorphismus von \hat{U} auf eine offene Teilmenge $\hat{V} \subset V$ einschränkt. Nun sind aber auch $u(\hat{U}) \subset \tilde{W} \cap M$ und $v(\hat{V}) \subset \tilde{Z} \cap N$ offen und man kann $f|_{u(\hat{U})}$ als $v \circ (v^{-1} \circ f \circ u) \circ (u|_{\hat{U}})^{-1}$ schreiben. Das impliziert einerseits, dass $f(u(\hat{U})) \subset v(\hat{V})$ gilt und andererseits dass $f|_{u(\hat{U})}$ als Komposition von 3 Diffeomorphismen selbst ein Diffeomorphismus ist. \square

Fundamentalformen und Krümmungen

4.6. Tangentialflächen und Einheitsnormalenfeld. Nachdem wir den analytischen Hintergrund entwickelt haben, können wir nun beginnen, geometrische Aspekte zu studieren. Für eine k -dimensionale glatte Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $x \in M$ können wir parallel zum Fall von Kurven in 2.2 eine geometrische Version des Tangentialraumes betrachten. Dazu definieren wir τ_x^M als den k -dimensionalen affinen Teilraum durch x mit modellierendem Teilraum $T_x M \subset \mathbb{R}^n$. Offensichtlich ist das mit Bewegungen verträglich. Für eine Euklidische Bewegung f mit zugehöriger orthogonaler Matrix A wissen wir aus 4.2, dass $f(M)$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist und natürlich ist $T_{f(x)} f(M) = A(T_x M)$. Nach Satz 1.2 ist aber $f(\tau_x^M)$ ein affiner Teilraum von \mathbb{R}^n mit modellierendem Teilraum $A(T_x M)$. Da $f(x)$ nach Konstruktion in diesem affinen Teilraum liegt, sehen wir, dass $f(\tau_x^M) = \tau_{f(x)}^{f(M)}$ gilt. Dieser affine Tangentialraum spielt aber keine wichtige Rolle in der Theorie.

Wie schon in 4.1 besprochen können wir das innere Produkt von \mathbb{R}^n für jeden Punkt $x \in M$ auf den Tangentialraum $T_x M$ einschränken. Man erhält also eine Familie von positiv definiten inneren Produkten auf den Tangentialräumen von M , die man als die *erste Fundamentalform* von M bezeichnet. Betrachten wir nun eine lokale Parametrisierung u für M , die auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ definiert ist. Dann ist für jeden Punkt $y \in U$ die Ableitung $Du(y)$ ein linearer Isomorphismus $\mathbb{R}^k \rightarrow T_{u(y)} M$, mit dem man das innere Produkt auf \mathbb{R}^k zurückziehen kann. Die Matrixdarstellung dieses inneren Produkts (bezüglich der Standardbasis $\{e_i\}$) ist gerade die Matrix $(g_{ij}^u(y))$ aus 4.1.

Die Grundidee der Krümmung von ebenen Kurven ist, dass die Krümmung misst, wie schnell sich die Tangente der Kurve dreht, siehe insbesondere Proposition 2.6. Versucht man das in höhere Dimensionen zu verallgemeinern, dann wird der Fall von Teilmannigfaltigkeiten der Codimension 1 besonders einfach. Betrachten wir eine n -dimensionale Teilmannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^{n+1} , dann ist für jeden Punkt $x \in M$ der Tangentialraum $T_x M$ eine Hyperebene in \mathbb{R}^{n+1} , also hat $(T_x M)^\perp$ Dimension 1. Also kann man versuchen, die Tangentialräume durch einen Normalvektor zu beschreiben. Das motiviert die folgenden Definitionen.

DEFINITION 4.6. (1) Eine *Hyperfläche* in \mathbb{R}^{n+1} ist eine Teilmannigfaltigkeit M der Dimension n . Im Fall $n = 2$ spricht man von *Flächen*.

(2) Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Ein *lokales Einheitsnormalenfeld* \mathbf{n} für M ist eine glatte Funktion \mathbf{n} von einer offenen Teilmenge $U \subset M$ nach \mathbb{R}^{n+1} , sodass für jeden Punkt $x \in U$ der Vektor $\mathbf{n}(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Bedingungen $|\mathbf{n}(x)| = 1$ und $\mathbf{n}(x) \perp T_x M$ erfüllt.

(3) Eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt *orientierbar*, wenn sie ein globales (also auf ganz M definiertes) glattes Einheitsnormalenfeld besitzt.

PROPOSITION 4.6. *Jede Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt lokal um jeden Punkt $x \in M$ glatte Einheitsnormalenfelder. Ist $U \subset M$ eine zusammenhängende offene Teilmenge,*

sodass ein auf U definiertes glattes Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} für M existiert, dann gibt es genau zwei solche, nämlich \mathbf{n} und $-\mathbf{n}$.

BEWEIS. Nach Satz 4.4 finden wir eine offene Teilmenge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \in \tilde{U}$ und eine glatte Funktion $F : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $U := M \cap \tilde{U} = F^{-1}(\{0\})$ gilt und für alle $y \in U$ $DF(y) \neq 0$ gilt. Für jeden Punkt $y \in U$ ist dann $T_y M = \text{Ker}(DF(y))$. Aus der Analysis ist bekannt, dass dann der Gradient $\text{grad}(F)$ eine glatte Funktion $\tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definiert, die durch $\langle \text{grad}(F)(z), X \rangle = DF(z)(X)$ für $z \in \tilde{U}$ und $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ charakterisiert ist. Insbesondere ist $|\text{grad}(F)(y)| > 0$ für alle $y \in U$ und indem wir eventuell \tilde{U} verkleinern können wir annehmen, dass $|\text{grad}(F)(z)| > 0$ für alle $z \in \tilde{U}$ gilt. Damit definiert aber $\mathbf{n}(z) := \frac{1}{|\text{grad}(F)(z)|} \text{grad}(F)(z)$ eine glatte Funktion $\tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, deren Einschränkung auf U natürlich ebenfalls glatt ist. Nach Definition gilt aber $T_y M = \text{Ker}(DF(y)) = \text{grad}(F)(y)^\perp = \mathbf{n}(y)^\perp$ für alle $y \in U$, also haben wir ein lokales glattes Einheitsnormalenfeld gefunden.

Sind \mathbf{n} und $\tilde{\mathbf{n}}$ zwei auf U definierte Einheitsnormalenfelder, dann gilt offensichtlich $\tilde{\mathbf{n}}(y) = \pm \mathbf{n}(y)$ für alle $y \in U$. Insbesondere kann die glatte Funktion $\langle \tilde{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \rangle$ nur die Werte 1 und -1 annehmen und muss daher für zusammenhängendes U konstant sein. \square

BEISPIEL 4.6. (1) Für die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist $T_x S^n = x^\perp$ für alle $x \in S^n$, also liefert $\mathbf{n}(x) = x$ globales Einheitsnormalenfeld für S^n . (Natürlich ist das gerade der normierte Gradient der Funktion $F(z) = \langle z, z \rangle - 1$.)

(2) Für beliebiges M betrachten wir offene Teilmengen $U, V \subset M$, sodass $U \cap V$ zusammenhängend ist. Hat man dann lokale Einheitsnormalenfelder \mathbf{n}^U auf U und \mathbf{n}^V auf V gefunden, dann muss $\mathbf{n}^U|_{U \cap V} = \pm \mathbf{n}^V|_{U \cap V}$ gelten. Indem man falls nötig \mathbf{n}^V durch $-\mathbf{n}^V$ ersetzt, kann man $\mathbf{n}^U|_{U \cap V} = \mathbf{n}^V|_{U \cap V}$ und damit definieren die beiden Funktionen gemeinsam ein glattes Einheitsnormalenfeld auf $U \cup V$. So kann man lokale Einheitsnormalenfelder weiter ausdehnen.

Im Fall des Torus wie in Abschnitt 4.4 beschrieben sieht man leicht, dass man so ein globales Einheitsnormalenfeld erhält, indem man etwa immer das “nach außen weisende” lokale Einheitsnormalenfeld benutzt. Also ist auch der Torus orientierbar. Das funktioniert aber nicht immer, wie das Beispiel eines Möbiusbands zeigt, das nicht orientierbar ist.

(3) Für Flächen kann man lokale Einheitsnormalenfelder auch leicht aus lokalen Parametrisierungen konstruieren. Ist M eine Fläche in \mathbb{R}^3 und $u : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, dann sind die partiellen Ableitungen $\partial_i u : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ für $i = 1, 2$ natürlich glatte Funktionen, deren Werte in jedem Punkt $y \in U$ linear unabhängig sind. Damit definiert aber auch $\partial_1 u \times \partial_2 u$ (Kreuzprodukt in \mathbb{R}^3) eine glatte Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}^3$ die nirgends Null ist. Somit ist auch $\frac{1}{|\partial_1 u \times \partial_2 u|} (\partial_1 u \times \partial_2 u)$ eine glatte Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Nach Proposition 4.5 können wir eine glatte Funktion $\mathbf{n} : u(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $\mathbf{n}(u(y)) = \frac{1}{|\partial_1 u(y) \times \partial_2 u(y)|} (\partial_1 u(y) \times \partial_2 u(y))$ definieren und nach Konstruktion liefert das ein lokales Einheitsnormalenfeld.

4.7. Gaußabbildung, Weingartenabbildung und zweite Fundamentalform.

Um zu sehen, wie sich die Tangentialräume einer Hyperfläche “drehen” liegt es nun nahe, lokale Einheitsnormalenfelder zu differenzieren. Dazu beobachten wir noch, dass man eine lokales Einheitsnormalenfeld auf einer offenen Teilmenge $V \subset M$ als glatte Funktion $\mathbf{n} : V \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ betrachten können. In dieser Form nennt man \mathbf{n} eine lokale *Gaußabbildung* für M . Für $x \in V$ kann man nun die Ableitung $T_x \mathbf{n} : T_x M \rightarrow T_{\mathbf{n}(x)} S^n$ betrachten. Nun ist aber $T_{\mathbf{n}(x)} S^n = \mathbf{n}(x)^\perp = T_x M$, also kann man die Ableitung als lineare Abbildung $L_x : T_x M \rightarrow T_x M$ betrachten. In dieser Form nennt man die

Ableitung die Weingartenabbildung von M in x . Da man auf $T_x M$ ein inneres Produkt hat, kann man L_x äquivalent als Bilinearform II_x auf T_x betrachten, wobei $II_x(X, Y) := \langle X, L_x(Y) \rangle$ ist. Diese Bilinearform nennt man die *zweite Fundamentalform* von M bei x . Analog zur ersten Fundamentalform können wir diese Bilinearform in einer lokalen Parametrisierung wieder als Matrix schreiben. Wählt man lokal das andere mögliche Einheitsnormalenfeld, dann wechseln offensichtlich sowohl die Gaußabbildung, als auch die Weingartenabbildung und die zweite Fundamentalform das Vorzeichen.

Betrachten wir also eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ und eine lokales Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} , das auf $u(U)$ definiert ist. Dann ist $\mathbf{n} \circ u : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Funktion und nach der Kettenregel erhalten wir für die partiellen Ableitungen $\partial_j(\mathbf{n} \circ u)(z) = T_{u(z)}\mathbf{n}(\partial_j u(z))$. Damit sind aber die Eintragungen der Matrix der zweiten Fundamentalform gerade $\langle \partial_i u, \partial_j(\mathbf{n} \circ u) \rangle$ und definieren damit glatte Funktionen auf U . Wir erhalten also wieder eine Matrix II_{ij}^u solcher Funktionen. Damit können wir nun eine wichtige Eigenschaft der zweiten Fundamentalform beweisen:

SATZ 4.7. *Die Matrix (II_{ij}^u) ist symmetrisch, d.h. $II_{ij}^u = II_{ji}^u$. Daher ist in jedem Punkt $x \in M$ die Weingartenabbildung $L_x : T_x M \rightarrow T_x M$ symmetrisch in dem Sinne, dass $\langle L_x(X), Y \rangle = \langle X, L_x(Y) \rangle$ für alle $X, Y \in T_x M$ gilt.*

BEWEIS. Da $\partial_i u(z) \in T_{u(z)}M$ für alle $z \in U$ gilt, ist die Funktion $\langle \partial_i u, \mathbf{n} \circ u \rangle : U \rightarrow \mathbb{R}$ identisch Null. Bildet man davon die j te partielle Ableitung, dann erhält man

$$0 = \partial_j(\langle \partial_i u, \mathbf{n} \circ u \rangle) = \langle \partial_j \partial_i u, \mathbf{n} \circ u \rangle + \langle \partial_i u, \partial_j(\mathbf{n} \circ u) \rangle.$$

Damit ist aber $II_{ij}^u = -\langle \partial_j \partial_i u, \mathbf{n} \circ u \rangle$ und die Symmetrie von (II_{ij}^u) folgt aus der Symmetrie der zweiten partiellen Ableitungen. Die Symmetrie von L_x folgt dann direkt aus der Definition. \square

Die zweite Fundamentalform besitzt eine schöne geometrische Interpretation mittels Kurven. Dazu betrachten wir eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, einen Punkt $x \in M$ und ein lokal um x definiertes Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} . Außerdem wollen wir eine Richtung in x festlegen, die wir durch einen Einheitsvektor $X \in T_x M$ beschreiben. Dann spannen X und $\mathbf{n}(x)$ eine Ebene in \mathbb{R}^{n+1} auf, für die sie eine Orthonormalbasis bilden. Diese bestimmt eine affine Ebene durch den Punkt x , die man mit M schneiden kann. Anschaulich ist es plausibel, dass der Schnitt eine Kurve ist und natürlich kann man die affine Ebene mit \mathbb{E}^2 identifizieren. Wir können nun beweisen, dass man tatsächlich eine reguläre Kurve erhält, deren Krümmung (als ebene Kurve) durch die zweite Fundamentalform berechnet werden kann.

PROPOSITION 4.7. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, $x \in M$ ein Punkt, \mathbf{n} ein lokal um x definiertes Einheitsnormalenfeld und $X \in T_x M$ ein Vektor mit $\langle X, X \rangle = 1$. Sei $E := \{x + tX + s\mathbf{n}(x) : t, s \in \mathbb{R}\}$ die affine Ebene durch x , die von X und $\mathbf{n}(x)$ erzeugt wird. Dann gibt es eine offene Umgebung von x in E deren Schnitt mit M eine reguläre Kurve c in E ist. Wählen wir auf E die Orientierung, die durch $\{\mathbf{n}(x), X\}$ bestimmt ist, dann ist die Krümmung von c im Punkt x durch $II(X, X)$ gegeben.*

BEWEIS. Realisieren wir M lokal um x als reguläre Nullstellenmenge durch $F : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \in \tilde{U}$, wobei wir annehmen können, dass \mathbf{n} auf $\tilde{U} \cap M$ definiert ist. Dann ist $V := \tilde{U} \cap E$ eine offene Umgebung von x in E und wir können F zu einer glatten Funktion $F|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ einschränken. Offensichtlich ist die Nullstellenmenge von $F|_V$ gerade $V \cap M$ und nach Konstruktion ist $D(F|_V)(x)(\mathbf{n}(x)) \neq 0$. Indem wir V wenn nötig verkleinern, können wir erreichen, dass $D(F|_V)(y) \neq 0$ für alle $y \in V \cap M$ gilt. Damit ist aber $F|_V$ regulär also $V \cap M$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von E

und eine lokale Parametrisierung für diese Teilmannigfaltigkeit um x liefert eine regulär parametrisierte Kurve.

Wählen wir eine Bogenlängenparametrisierung $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ dieser Kurve mit $c(0) = x$, sodass $c'(0) = X$ gilt. Dann ist $ic'(0) = -\mathbf{n}(x)$, also ist die Krümmung von c in x gerade $-\langle c''(0), \mathbf{n}(x) \rangle$. Da aber c Werte in M hat, erhalten wir $0 = \langle c'(t), \mathbf{n}(c(t)) \rangle$ für alle t . Differenzieren wir das nach t , dann erhalten wir

$$0 = \langle c''(t), \mathbf{n}(c(t)) \rangle + \langle c'(t), (\mathbf{n} \circ c)'(t) \rangle.$$

Aber für $t = 0$ ist $(\mathbf{n} \circ c)'(0) = T_{c(0)}\mathbf{n}(c'(0)) = L_x(X)$ und die Behauptung folgt. \square

In Anbetracht dieses Resultats liegt es nahe, die Funktion $X \mapsto II_x(X, X)$ auf der Einheitskugel $S^{n-1} \subset T_x M$ zu betrachten. Offensichtlich ist das eine glatte Funktion, die man die *Normalkrümmung* von M bei x nennt. Da II_x eine symmetrische Bilinearform ist, ist $X \mapsto II_x(X, X)$ eine quadratische Form auf $T_x M$ und daher durch ihre Einschränkung auf die Kugel eindeutig bestimmt. Durch Polarisierung kann man II_x aus dieser quadratischen Form zurückgewinnen, etwa durch

$$II_x(X, Y) = \frac{1}{2}(II_x(X + Y, X + Y) - II_x(X, X) - II_x(Y, Y)).$$

4.8. Extrinsische Krümmungen für Hyperflächen. Für eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und einen Punkt $x \in M$ mit einem lokal um x definierten Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} liefert die Weingartenabbildung L_x eine lineare Abbildung auf dem Tangentialraum $T_x M$, die zusätzlich symmetrisch bezüglich der Einschränkung des inneren Produkts ist. Die einzige Wahl, die wir dazu getroffen haben, war die des Einheitsnormalenfeldes und lokal um x gibt es nur zwei mögliche Einheitsnormalenfelder. Die zweite Wahl $-\mathbf{n}$ liefert einfach nur $-L_x$ als Bilinearform, also kann man mit dieser Uneindeutigkeit leicht umgehen. (Es ist nicht schwierig einen Begriff von orientierten Hyperflächen zu entwickeln, der dann eines der beiden Einheitsnormalenfelder auswählt und so die Freiheit im Vorzeichen eliminiert.)

Für symmetrische Abbildungen (und daher für symmetrische Bilinearformen) liefert aber die lineare Algebra numerische Invarianten die uns hier geometrische Größen liefern: Eine symmetrische lineare Abbildung ist immer (orthogonal) diagonalisierbar mit reellen Eigenwerte, also hat man (mit Vielfachheit gezählt) n solche Eigenwerte. Zu jedem dieser Eigenwerte gibt es einen Eigenraum und verschiedene Eigenräume stehen orthogonal aufeinander. Wenn man glatte Funktionen mit Werten in den symmetrischen linearen Abbildungen betrachtet, dann können sich die Vielfachheiten der Eigenwerte ändern, was die Situation analytisch heikel macht. Es ist aber kein Problem, die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einer Familie $A(x)$ von Matrizen zu betrachten, die ja ebenfalls unabhängig von der Wahl einer Basis sind. Diese Koeffizienten sind nach Konstruktion durch polynomiale Ausdrücke in den Eintragungen der Matrix gegeben. Wenn also die Familie $A(x)$ glatt von x abhängt, dann gilt das auch für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms, also insbesondere für die Determinante $\det(A(x))$ und die Spur $\text{tr}(A(x))$. Das motiviert die folgende Definition.

DEFINITION 4.8. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, $x \in M$ ein Punkt, \mathbf{n} ein lokal um x definiertes Einheitsnormalenfeld und L_x die Weingartenabbildung bei x .

(1) Die Eigenwerte $\kappa_i(x)$ von L_x heißen die *Hauptkrümmungen von M in x* , die zugehörigen Eigenräume die *Hauptkrümmungsrichtungen*.

(2) Der Punkt x heißt ein *Nabelpunkt* (“umbilic point”) von M , wenn alle Hauptkrümmungen in x gleich sind, also L_x ein Vielfaches der Identität ist. Sind alle $\kappa_i(x)$ gleich Null, dann heißt x ein *Flachpunkt*.

(3) Eine glatte Kurve $c : I \rightarrow M$ heißt *Krümmungslinie* wenn für jedes $t \in I$ die Ableitung $c'(t) \in T_{c(t)}M$ ein Eigenvektor für $L_{c(t)}$ ist.

(4) Die *Gaußkrümmung* von M ist durch $K(x) := \det(L_x) = \prod_i \kappa_i(x)$ gegeben.

(5) Die *mittlere Krümmung* von M ist durch $H(x) := \frac{1}{n} \operatorname{tr}(L_x) = \frac{1}{n} \sum_i \kappa_i(x)$ gegeben.

Aus den Bemerkungen von oben folgt sofort, die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung lokal um x glatte Funktionen auf M sind. Auch sind alle diese Größen nicht von der Wahl von Parametrisierungen abhängig sondern nur von \mathbf{n} , und diese Wahl beeinflusst höchstens ihr Vorzeichen. Wir können auch sofort sehen, dass alle dieser Konzepte verträglich mit (orientierungstreuen) Bewegungen sind. Ist nämlich $f(y) = Ay + b$ eine Bewegung $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, dann ist f ein Diffeomorphismus, also $f(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Hyperfläche, siehe 4.2. Für $x \in M$ ist dann $T_{f(x)}f(M) = A(T_xM)$ und somit ist für ein lokal um x definiertes Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} natürlich $A \circ \mathbf{n} \circ f^{-1}$ ein lokal um $f(x)$ definiertes Einheitsnormalenfeld für $f(M)$. Daraus folgt sofort, dass die Weingartenabbildung lokal um $f(x)$ durch $L_{f(y)} = A \circ L_y \circ A^{-1}$ gegeben ist. Entsprechend haben $L_{f(y)}$ und L_y die gleichen Eigenwerte und das gleiche charakteristische Polynom.

BEISPIEL 4.8. (1) Für eine affine Hyperebene $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Normalvektor $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ definiert natürlich $\mathbf{n}(x) = X$ ein globales Einheitsnormalenfeld. Damit ist die Gaußabbildung konstant, also $L_x = 0$ für alle $x \in E$ also sind alle Krümmungen konstant gleich 0.

(2) Für $R > 0$ sei $S_R^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = R\}$ die Kugel vom Radius R . Dann ist natürlich $\mathbf{n}(x) = \frac{1}{R}x$ ein globales Einheitsnormalenfeld, also ist die Gaußabbildung durch Multiplikation mit $\frac{1}{R}$ gegeben. Damit ist aber $L_x = \frac{1}{R} \operatorname{id}$ für alle $x \in S_R^n$. Also ist jeder Punkt ein Nabelpunkt, alle Hauptkrümmungen sind gleich R , $K(x) = R^n$ und $H(x) = R$ für alle x .

(3) Betrachten wir einen Zylinder in \mathbb{R}^3 , etwa $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2\}$. Dann erhalten wir lokale Parametrisierungen durch $(\theta, z) \mapsto (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$ für $z \in \mathbb{R}$ und $\theta \in (a, b)$ mit $b - a < 2\pi$. Eine Einheitsnormale in $(R \cos \theta, R \sin \theta, z)$ erhält man natürlich durch $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, also ist $\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, 0)$ für alle $(x, y, z) \in M$. Insbesondere ist $\partial_z \mathbf{n} = 0$, also erhält man hier einen Eigenvektor mit Eigenwert 0 und die senkrechten Geraden $t \mapsto (x, y, t)$ in M sind Krümmungslinien. Auf horizontale Ebenen eingeschränkt ist aber \mathbf{n} wieder $\frac{1}{R} \operatorname{id}$ und damit erhält man hier einen Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{R}$ und die horizontalen Kreise sind ebenfalls Krümmungslinien. Insbesondere sind alle Krümmungen konstant, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = \frac{1}{R}$, $K = 0$ und $H = \frac{1}{2R}$.

Wir können die Hauptkrümmungen auch leicht in Termen der Normalkrümmung aus 4.7 interpretieren. Ist $X \in T_xM$ ein Eigenvektor von L_x zum Eigenwert λ mit $|X| = 1$, dann ist $II_x(X, X) = \langle X, L_x(X) \rangle = \lambda$, also sind die Hauptkrümmungen Werte der Normalkrümmung. Betrachten wir II_x als quadratische Form q auf $S^{n-1} \subset T_xM$, dann ist für $X \in S^{n-1}$ natürlich $T_X S^{n-1} = X^\perp$. Aus der Definition von q folgt aber sofort, dass $T_X q(Y) = 2II_x(X, Y) = 2\langle L_x(X), Y \rangle$ gilt. Aber natürlich ist X genau dann ein Eigenvektor von L_x wenn $\langle L_x(X), Y \rangle = 0$ für alle $Y \in X^\perp$ gilt. Damit sind aber die Hauptkrümmungen genau die kritischen Werte der Normalkrümmung. Da S^{n-1} kompakt ist muss q sowohl ein Maximum als auch ein Minimum annehmen, die natürlich kritische Werte sind. Im Fall $n = 2$ von Flächen, gibt es nur 2 Hauptkrümmungen, diese müssen also das Minimum und das Maximum der Normalkrümmung sein, vergleiche mit Beispiel (3) von oben.

Als einfaches Beispiel eines Klassifikationssatzes können wir zeigen, dass die Beispiele (1) und (2) von oben im wesentlichen die einzigen Hyperflächen sind, in denen jeder Punkt ein Nabelpunkt ist.

PROPOSITION 4.8. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine zusammenhängende, orientierbare Hyperfläche, sodass jedes $x \in M$ ein Nabelpunkt ist. Dann ist M Teil einer affinen Hyperebene oder einer Sphäre.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung finden wir ein globales Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ und für $x \in M$ und $X \in T_x M$ ist $T_x \mathbf{n}(X) = a(x)X$ für eine Zahl $a(x) \in \mathbb{R}$. Im Bereich einer lokalen Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ mit $x \in u(U)$ erhalten wir für die glatte Funktion $\mathbf{n} \circ u : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ und jedes $i = 1, \dots, n$ die Gleichung $\partial_i(\mathbf{n} \circ u)(y) = a(u(y))\partial_i u(y)$. Daraus folgt einerseits, dass $y \mapsto a(u(y))$ glatt ist, also definiert a lokal um x (und damit global auf M) eine glatte Funktion. Andererseits können wir die j te partielle Ableitung der Gleichung $\partial_i(\mathbf{n} \circ u) = (a \circ u)\partial_i u$ bilden und erhalten

$$\partial_j \partial_i(\mathbf{n} \circ u) = (\partial_j(a \circ u))\partial_i u + (a \circ u)\partial_j \partial_i u.$$

Bilden wir analog die i te partielle Ableitung der entsprechenden Gleichung für den Index j , dann erhalten wir wegen der Symmetrie der zweiten partiellen Ableitungen sofort $(\partial_i(a \circ u))\partial_j u = (\partial_j(a \circ u))\partial_i u$. Aber für $i \neq j$ und jedes $y \in U$ sind $\partial_j u(y)$ und $\partial_i u(y)$ linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^{n+1} also ist das nur für $\partial_i(a \circ u)(y) = \partial_j(a \circ u)(y) = 0$ möglich. Damit ist $a \circ u$ auf $u(U)$ konstant und weil M zusammenhängend ist, ist a global eine Konstante.

Ist $a = 0$, dann ist $\mathbf{n}(x) = X$ für einen fixen Vektor $X \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Da X normal auf jeden Tangentialraum von M steht folgt sofort, dass die Funktion $x \mapsto \langle x, X \rangle$ auf M konstant ist, also ist M in einer affinen Hyperebene enthalten. Ist $a \neq 0$, dann betrachtet man die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, die durch $f(x) = x - \frac{1}{a}\mathbf{n}(x)$ gegeben ist. Nach Konstruktion gilt $T_x f = 0$ für alle $x \in M$, also ist $f(x) = x_0$ für einen fixen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Damit gilt aber $x = x_0 + \frac{1}{a}\mathbf{n}(x)$, also insbesondere $|x - x_0| = 1/a$, also liegt M in der Sphäre mit Radius $1/a$ um x_0 . \square

4.9. Formeln für Flächen in \mathbb{R}^3 . In 4.6 und 4.7 haben wir die erste und zweite Fundamentalform für eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in lokalen Parametrisierungen explizit verstanden. Für Flächen in \mathbb{R}^3 ist die traditionelle Notation, die erste Fundamentalform als Matrix $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ zu schreiben. Man betrachtet also eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ und setzt $E = \langle \partial_1 u, \partial_1 u \rangle$ und so weiter. Analog bezeichnet man die zweite Fundamentalform mit der Matrix $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$, also ist $e = II(\partial_1 u, \partial_1 u) = \langle \partial_1 u, \partial_1(\mathbf{n} \circ u) \rangle = -\langle \partial_1 \partial_1 u, \mathbf{n} \circ u \rangle$ und so weiter. Um die Krümmungen ausrechnen zu können, benötigen wir die Matrix der Weingartenabbildung, die ja durch $II(X, Y) = \langle L_x(X), Y \rangle$ charakterisiert ist. In der Parametrisierung u ist sie durch $L_{u(y)}(\partial_j u) = \sum_i L_j^i \partial_i u$ geben, was (mit Einstein Summenkonvention) sofort $II_{ij}^u = L_i^k g_{kj}^u$ impliziert. Nun wissen wir ja, dass die erste Fundamentalform einfach das innere Produkt beschreibt, das nicht degeneriert ist. Damit gibt es zu $(g_{ij}^u(y))$ immer eine inverse Matrix, die wir als $(g^{ij}(y))$ schreiben. Nach der Kramerschen Regel kann man die Eintragungen dieser Matrix als Quotient der Determinante einer Teilmatrix von $(g_{ij}^u(y))$ und der Determinante der ganzen Matrix (die nirgends verschwindet) schreiben. Daraus sehen wir sofort, dass auch die Matrix $(g^{ij}(y))$ glatt von y abhängt. Aus der Definition folgt dann sofort, dass $L_i^j = II_{ik}^u g^{kj}$ gilt.

Nach bekannten Resultaten über Determinanten ist daher $\det(L) = \det(II) \det(g)^{-1}$. Für $n = 2$ liefert das den expliziten Ausdruck $K \circ u = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ für die Gaußkrümmung.

Für $n = 2$ gilt $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$ und man erhält die Matrix zu L

explizit als $\frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & -eF + fE \\ fG - gF & -fF + gE \end{pmatrix}$. Insbesondere erhalten wir für die mittlere Krümmung den Ausdruck $H \circ u = \frac{eG+gE-2fF}{2(EG-F^2)}$. Um die Hauptkrümmungen zu bestimmen können wir benutzen, dass $K = \kappa_1\kappa_2$ und $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$ gelten. Damit ist aber $H^2 - K = (\frac{\kappa_1-\kappa_2}{2})^2$ also $\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$. (Das entspricht auch der Tatsache, dass das charakteristische Polynom von L durch $t^2 - \text{tr}(L)t + \det(L)$ gegeben ist.) Um Eigenvektoren von L und damit die Hauptkrümmungsrichtungen zu bestimmen, können wir benutzen, dass $X \in T_xM$ genau dann ein Eigenvektor für L_x ist, wenn die Vektoren X und $L_x(X)$ linear abhängig sind. Äquivalent muss die Determinante der Matrix mit den Spalten X und $L_x(X)$ verschwinden. Damit ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha\partial_1u + \beta\partial_2u$ genau dann ein Eigenvektor wenn der folgende Ausdruck verschwindet.

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \alpha(eG - fF) + \beta(-eF + fE) \\ \beta & \alpha(fG - gF) + \beta(-fF + gE) \end{pmatrix} = \alpha^2(fG - gF) + \alpha\beta(gE - eG) + \beta^2(eF - fE)$$

BEISPIEL 4.9. (1) Wir betrachten den Torus in \mathbb{R}^3 . Aus Abschnitt 4.5 kennen wir schon lokale Parametrisierungen und die ersten Ableitungen mit $R > r > 0$:

$$\begin{aligned} u(t, s) &= ((R + r \cos s) \cos t, (R + r \cos s) \sin t, r \sin s) \\ \partial_1 u(t, s) &= (-(R + r \cos s) \sin t, (R + r \cos s) \cos t, 0) \\ \partial_2 u(t, s) &= (-r \sin s \cos t, -r \sin s \sin t, r \cos s). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir sofort $E = (R + r \cos s)^2$, $F = 0$ und $G = r^2$. Man sieht auch sofort, dass $\mathbf{n}(t, s) = (\cos t \cos s, \sin t \cos s, \sin s)$ immer ein Einheitsvektor ist, der sowohl auf ∂_1u als auch auf ∂_2u normal steht. Damit haben wir ein Einheitsnormalenfeld gefunden. Damit folgt

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{n}(t, s) &= (-\sin t \cos s, \cos t \cos s, 0) \\ \partial_2 \mathbf{n}(t, s) &= (-\cos t \sin s, -\sin t \sin s, \cos s) \end{aligned}$$

und das liefert $e = (R + r \cos s) \cos s$, $f = 0$, $g = r$. Einsetzen in die Formeln liefert $K = \frac{\cos s}{r(R+r \cos s)}$. Nach Voraussetzung ist $R > r > 0$, also ist der Nenner immer positiv und somit stimmt das Vorzeichen von K mit dem Vorzeichen von $\cos s$ überein. Die Gaußkrümmung ist also auf dem äußeren Teil des Torus positiv, auf dem inneren Teil negativ. Differenzieren von K zeigt sofort, dass die Extrema von K bei $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ liegen, dort ist $K = 1/r(R + r)$ bzw. $K = -1/r(R - r)$.

Für die mittlere Krümmung ergibt sich $H = \frac{R+2r \cos s}{2r(R+r \cos s)}$. Wiederum ist der Nenner immer positiv, aber das Verhalten des Zählers hängt vom Verhältnis zwischen R und r ab. Ist $R > 2r$, dann ist H überall positiv, für $R = 2r$ gibt es auch Nullstellen von H und für $R < 2r$ werden auch negative Werte angenommen.

Da $f = F = 0$ gilt, vereinfacht sich die Gleichung für die Hauptkrümmungsrichtungen zu $0 = \alpha\beta(gE - eG)$ und man sieht leicht, dass $gE - eG$ nirgends verschwindet. Die Lösungen dafür sind offensichtlich $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ und $(0, 1)$. Also beschreiben ∂_1u und ∂_2u in jedem Punkt Hauptkrümmungsrichtungen und die Kurven $t \mapsto u(t, s_0)$ und $s \mapsto u(t_0, s)$ sind für fixes s_0 bzw. t_0 immer Krümmungslinien. Für die Hauptkrümmungen erhält man dann $\frac{e}{E} = \frac{\cos s}{R+r \cos s}$ und $\frac{g}{G} = \frac{1}{r}$.

In klassischer Terminologie nennt man Punkte x einer Fläche mit $K(x) > 0$ *elliptisch*, Punkte mit $K(x) < 0$ *hyperbolisch* und Punkte mit $K(x) = 0$ aber $H(x) \neq 0$ *parabolisch*. Eine schönen Interpretation dieser Bedingungen erhält man durch das folgende Beispiel, dass auf den ersten Blick recht speziell aussieht. Betrachten wir eine offene Umgebung U

von 0 in \mathbb{R}^2 und den Graphen $M := \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in U\}$ einer glatten Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, die $h(0, 0) = 0$ und $Dh(0, 0) = 0$ erfüllt. Dann definiert natürlich $u : U \rightarrow M$, $u(x, y) := (x, y, h(x, y))$ eine globale Parametrisierung von M . Nach unseren Annahmen an h ist $\partial_1 u(0, 0) = (1, 0, 0)$ und $\partial_2 u(0, 0) = (0, 1, 0)$. Damit ist $T_0 M$ die x - y -Ebene und $\partial_i \partial_j u(0, 0) = (0, 0, \partial_i \partial_j h(0, 0))$. Damit folgt sofort, dass im Nullpunkt $E = G = 1$ und $F = 0$ gilt und wenn man das Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} mit $\mathbf{n}(0, 0) = (0, 0, -1)$ wählt, dann ist $(II_{ij}^u) = (\partial_i \partial_j h(0, 0))$, die Hesse Matrix von h in 0 und diese stimmt mit der Matrix von L_0 überein.

Die Bedingung $K(0) > 0$ sagt gerade, dass beide Eigenwerte L_0 ungleich Null sind und das gleiche Vorzeichen haben, also ist die Hesse Matrix von h in diesem Fall positiv definit bzw. negativ definit. Das bedeutet aber dass 0 ein lokales Minimum bzw. ein lokales Maximum von h ist. Damit liegt aber M lokal um 0 auf einer Seite der x - y -Ebene. Ist $K(0) < 0$, dann sind beide Eigenwerte von L_0 ungleich Null, haben aber verschiedenes Vorzeichen. Dann ist aber 0 ein Sattelpunkt von h , also finden sich in jeder Umgebung von 0 Punkte auf beiden Seiten der Tangentialebene. Die Bedingung, dass $K(0) = 0$ aber $H(0) \neq 0$ ist, besagt genau, dass die Hesse-Matrix Rang 1 hat, also hängt das lokale Verhalten um den Punkt von Termen höherer Ordnung ab.

Tatsächlich kann man jede Fläche lokal um jeden Punkt in dieser Form darstellen: Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $x \in M$ ein Punkt und $T_x M \subset \mathbb{R}^3$ der Tangentialraum bei x und $\tau_x M = x + T_x M$ die affine Tangentialebene in x . Für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ kann man $y - x$ eindeutig als Summe eines Vektors in $T_x M$ und eines Vektors, der normal auf $T_x M$ steht schreiben. Ist \mathbf{n} ein lokal um x definiertes Einheitsnormalenfeld, dann kann man diese Zerlegung als $y = x + (y - x - a(y)\mathbf{n}(x)) + a(y)\mathbf{n}(x)$ schreiben, wobei $a(y) = \langle y - x, \mathbf{n}(x) \rangle$ gilt. Daraus folgt sofort, dass die ersten beiden Komponenten eine glatte Funktion $\mathbb{R}^3 \rightarrow \tau_x M$ definiert. Schränken wir diese zu $p : M \rightarrow \tau_x(M)$ ein, dann erhalten wir $T_x p = \text{id}$ als schränkt sich p zu einem Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung V von x in M auf eine offene Umgebung U von x in $\tau_x M$ ein. Die Inverse dieses Diffeomorphismus muss nach Konstruktion $z \in U$ auf $z + f(z)\mathbf{n}(x)$ für eine glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ abbilden. Nach Konstruktion gilt $f(x) = 0$ und weil wir mit der Tangentialebene arbeiten folgt $Df(x) = 0$. Damit ist man (bis auf eine Euklidische Bewegung) genau in der Situation von oben.

Somit schließen wir dass eine beliebige Fläche lokal um einen elliptischen Punkt ganz auf einer Seite der affinen Tangentialebene liegt. (Aus dem gemeinsamen Vorzeichen der beiden Hauptkrümmungen sieht man, ob das die Seite ist, in die $\mathbf{n}(x)$ zeigt, oder die andere Seite.) Lokal um einen hyperbolischen Punkt finden sich hingegen auf beiden Seiten der affinen Tangentialebene Punkte von M . In parabolischen Punkten muss es mindesten eine affine Gerade geben, die die Fläche zu zweiter Ordnung berührt. Das zeigt sich schön im Bild des Torus aus Beispiel 4.9, wo der äußere Teil des Torus aus elliptischen Punkten und der innere Teil des Torus aus hyperbolischen Punkten besteht. Die parabolischen Punkte bilden die beiden Kreise der höchsten und niedrigsten Punkte des Torus. Die höchsten und niedrigsten Punkte haben eine gemeinsame affine Tangentialebene, die den Torus in dem entsprechenden Kreis schneidet. Längs dieses Kreises ist offensichtlich das Einheitsnormalenfeld konstant, was eine Richtung im Kern der Weingartenabbildung liefert.

Intrinsische Geometrie von Flächen

In unserem bisherigen Studium der Geometrie von Hyperflächen haben wir die Flächen “von außen” betrachtet. Die Begriffen von Krümmung waren im wesentlichen davon abgeleitet, wie sich die Tangentialräume der Hyperfläche im umgebende Vektorraum bewegen. Eine fundamentale Einsicht von C.F. Gauß war, dass für Flächen im \mathbb{R}^3 Teile der Krümmung (in diesem Fall die Gaußkrümmung) auch “von innen” sichtbar sind. Dieses Resultat war für ihn selbst so überraschend, dass er es als “Theorema egregium” bezeichnet hat. Man kann das durch direkte Rechnung beweisen, wir werden aber einen anderen Zugang wählen. Dieser hat den Vorteil, dass er sich in ein allgemeineres Setting übertragen lässt und damit die Grundlagen der Riemann Geometrie bildet, die einen zentraler Teil der Differentialgeometrie darstellt.

5.1. Intrinsische und extrinsische Größen. Wir müssen zunächst abklären, was mit “von innen sichtbar” gemeint ist. Die geometrische Betrachtung von Teilmannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n beginnt mit der ersten Fundamentalform, siehe 4.1 und 4.6 also der Einschränkung des inneren Produkts von \mathbb{R}^n auf die Tangentialräume von M . Diese erlaubt uns, die Momentangeschwindigkeit einer Kurve in M oder den Schnittwinkel zwischen zwei Kurven im Schnittpunkt zu bestimmen und es ist anschaulich klar, dass man das von innerhalb der Teilmannigfaltigkeit kann. Man bezeichnet geometrische Größen, die nur von der ersten Fundamentalform abhängen, als *intrinsisch*, alle anderen geometrischen Größen werden als *extrinsisch* bezeichnet. Wir können nun durch ein einfaches Beispiel zeigen, dass die meisten Größen, die wir in Kapitel 4 kennen gelernt haben, nicht intrinsisch sind.

BEISPIEL 5.1. Betrachten wir $U := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ und die Funktion $u : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, die durch $u(\theta, t) := (\cos \theta, \sin \theta, t)$ gegeben ist. Dann ist $\partial_1 u(\theta, t) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ und $\partial_2 u(\theta, t) = (0, 0, 1)$. Insbesondere ist $Du(\theta, t)$ immer injektiv und man sieht leicht, dass u einen Homöomorphismus $U \rightarrow u(U) := M$ definiert und dass M ein offener Teil eines Zylinders in \mathbb{R}^3 ist. Somit können wir u aber als globale Parametrisierung für M betrachten. Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform sind in dieser Parametrisierung durch $(g_{ij}^u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Damit sieht aber die erste Fundamentalform von M genau so aus, wie die von U als offener Teil einer affinen Ebene in \mathbb{R}^3 . Wir bemerken aber, dass $|u(0, 0) - u(\pi/2, 0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \pi/2$ ist, also kann u nicht Einschränkung einer Bewegung sein.

Ein Einheitsnormalenfeld auf M ist natürlich durch $\mathbf{n}(u(\theta, t)) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ gegeben und dafür ist $\partial_1(\mathbf{n} \circ u) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ und $\partial_2(\mathbf{n} \circ u) = (0, 0, 0)$. Damit erhalten wir für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform $e = 1$, $f = g = 0$ und damit ist die Weingartenabbildung durch $L_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Also sind alle Krümmungen konstant mit $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$, $H = \frac{1}{2}$ und $K = 0$. Da auf U die zweite Fundamentalform 0 ist und daher alle Krümmungen verschwinden, sind die zweite Fundamentalform, die Weingartenabbildung, die mittlere Krümmung, die Hauptkrümmungen, Hauptkrümmungsrichtungen, Krümmungslinien und ähnliches sicher nicht intrinsisch. Es bleibt also für Flächen im \mathbb{R}^3 höchstens die Gaußkrümmung als mögliche intrinsische Größe übrig.

Man kann das auch etwas abstrakter formulieren, was die Grundbegriffe der Riemann Geometrie liefert. Haben wir eine glatte Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, dann können wir allgemeine Familien von inneren Produkten auf den Tangentialräumen von M betrachten (die nichts mit dem umgebenden Raum \mathbb{R}^n zu tun haben müssen). Wir betrachten einfach für jeden Punkt $x \in M$ ein inneres Produkt $h_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, also eine positiv definite, symmetrische Bilinearform. Für eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ können wir dann analog zu 4.1 vorgehen und für $i, j \in \{1, \dots, k\}$ die Funktion $h_{ij}^u : U \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten, die durch $h_{ij}^u(z) = h_{u(z)}(\partial_i u(z), \partial_j u(z))$ betrachtet. Wir nennen h eine *Riemann Metrik* auf M , wenn es für jeden Punkt $x \in M$ eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ mit $x \in u(U)$ gibt, sodass die Funktionen $h_{ij}^u : U \rightarrow \mathbb{R}$ alle glatt sind. Eine Mannigfaltigkeit, die mit einer Riemann Metrik ausgestattet ist, nennt man dann eine *Riemann Mannigfaltigkeit*. Wir bemerken, dass man eine Riemann Metrik problemlos auf eine offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit einschränken kann, die dadurch selbst zu einer Riemann Mannigfaltigkeit wird.

Dazu gibt es natürlich einen passenden Begriff von Abbildungen, die mit Riemann Metriken verträglich sind. Für unsere Zwecke genügt der einfachste Begriff, für den man annimmt, dass (M, h) und (\tilde{M}, \tilde{h}) Riemann Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension k sind. Eine *Isometrie* ist dann eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \tilde{M}$ sodass alle Tangentialabbildungen $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \tilde{M}$ mit den inneren Produkten verträglich sind, also $\tilde{h}_{f(x)}(T_x f(X), T_x f(Y)) = h_x(X, Y)$ für alle $x \in M$ und $X, Y \in T_x M$ erfüllen. Falls $T_x f(X) = 0$ gilt, dann folgt daraus sofort, dass $h_x(X, X) = 0$ und damit $X = 0$ ist. Somit sind die Tangentialabbildungen von f injektiv und damit lineare Isomorphismen, also ist eine Isometrie automatisch ein lokaler Diffeomorphismus. Ist eine Isometrie zusätzlich injektiv, dann spricht man von einer *isometrischen Einbettung*, ist sie bijektiv von einem *isometrischen Diffeomorphismus*.

Für den Euklidischen Raum \mathbb{R}^n kann man alle Tangentialräume mit \mathbb{R}^n identifizieren, also definiert das Standard innere Produkt auf \mathbb{R}^n eine Riemann Metrik auf \mathbb{R}^n . Für eine Euklidische Bewegung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = Ax + b$ ist $Df(x)$ die orthogonale Abbildung A für alle x , also ist f eine Isometrie. Umgekehrt kann man zeigen, dass für beliebige zusammenhängende offene Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ jede Isometrie $f : U \rightarrow V$ Einschränkung einer Euklidischen Bewegung ist. Betrachten wir nun eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, dann wissen wir aus 4.2, dass auch $f(M) \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit ist und natürlich ist $f : M \rightarrow f(M)$ ein Diffeomorphismus. Betrachten wir nun auf M und $f(M)$ die induzierten Riemann Metriken g wie in Kapitel 4 (also die Einschränkungen des inneren Produkts auf die Tangentialräume) dann macht das natürlich $f : (M, g) \rightarrow (f(M), g)$ zu einem isometrischen Diffeomorphismus. Die Abbildung u aus Beispiel 5.1 ist natürlich ein isometrischer Diffeomorphismus $U \rightarrow u(U) = M$ wir haben aber schon bemerkt, dass u nicht Einschränkung einer Bewegung sein kann. Man kann intrinsische Größen formal als Größen definieren, die mit allen isometrischen Diffeomorphismen und nicht nur mit (Einschränkungen von) Euklidischen Bewegungen verträglich sind.

5.2. Kovariante Ableitung längs Kurven. Betrachten wir eine glatte Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Kurve $c : I \rightarrow M$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ offen ist. Dann können wir die Ableitung $c' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten und nach Definition ist $c'(t) \in T_{c(t)} M$. Als Kurve in \mathbb{R}^n kann man c' problemlos nochmals differenzieren und erhält $c'' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, es gibt aber keinen Grund, warum die Werte von c'' tangential zu M sein sollten. Für jeden Punkt $x \in M$ können wir nun den Tangentialraum $T_x M \subset \mathbb{R}^n$ und sein orthogonales Komplement $(T_x M)^\perp$ betrachten. Natürlich gilt dann $\mathbb{R}^n = T_x M \oplus (T_x M)^\perp$ und

die Überlegungen aus Kapitel 2 legen es nahe, $c''(t)$ entsprechend in eine tangentielle und eine normale Komponente zu zerlegen. Das funktioniert natürlich auch für allgemeinere Funktionen als c' .

DEFINITION 5.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve.

(1) Ein *Vektorfeld längs c* ist eine glatte Funktion $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass $X(t) \in T_{c(t)}M \subset \mathbb{R}^n$ für alle $t \in I$ gilt.

(2) Für ein Vektorfeld X längs c sei $\nabla X(t) \in T_{c(t)}M$ die tangentielle Komponente von $X'(t) \in \mathbb{R}^n$. Die dadurch definierte Funktion $\nabla X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt die *kovariante Ableitung* von X . Ist $\nabla X = 0$, dann sagt man " X ist *parallel längs c* ".

(3) Die Kurve c heißt eine *Geodäte in M* , wenn die $\nabla c' = 0$ gilt, also c' parallel längs c ist.

Ist M eine Hyperfläche, dann folgt sofort, dass für ein Vektorfeld X längs c die Funktion $\nabla X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt und damit ebenfalls ein Vektorfeld längs c ist. Für $t_0 \in I$ und ein lokales glattes Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} , das auf einer offenen Umgebung von $c(t_0)$ definiert ist, kann man $\nabla X(t)$ lokal um t_0 als $X'(t) - \langle X'(t), \mathbf{n}(c(t)) \rangle \mathbf{n}(c(t))$ schreiben und das ist offensichtlich glatt. Das gilt auch für allgemeine Teilmannigfaltigkeiten, siehe den Beweis von Proposition 5.4. Eine alternative lokale Formel für ∇X erhält man, indem man die Gleichung $0 = \langle X(t), \mathbf{n}(c(t)) \rangle$ differenziert und beachtet, dass nach Definition $(\mathbf{n} \circ c)'(t) = L_{c(t)}(c'(t))$ gilt. Damit erhält man sofort, dass $\nabla X(t) = X'(t) + II(X(t), c'(t))\mathbf{n}(c(t))$ gilt.

Ist $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld längs einer Kurve $c : I \rightarrow M$, dann können wir die glatte Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten, die durch $\langle X(t), X(t) \rangle$ gegeben ist. Ihre Ableitung ist natürlich durch $2\langle X'(t), X(t) \rangle$ gegeben. Da aber nach Voraussetzung $X(t) \in T_{c(t)}M$ gilt, kann man $X'(t)$ orthogonal nach $T_{c(t)}M$ projizieren, ohne das innere Produkt mit $X(t)$ zu verändern. Damit können wir die Ableitung auch als $2\langle \nabla X(t), X(t) \rangle$ schreiben und sehen insbesondere, dass Vektorfelder, die parallel längs c sind, konstante Länge haben müssen.

Die Interpretation von Geodäten ist ganz analog wie im Fall von Bogenlängenparametrisierungen von Kurven. Die Tatsache, dass $c''(t)$ immer orthogonal auf $T_{c(t)}M$ steht bedeutet im Bild der Bewegung einen Teilchens gerade, dass die Beschleunigungen nur dazu dienen, dass das Teilchen die Teilmannigfaltigkeit nicht verlässt. Daher werden Geodäten als die Bahnen von Teilchen interpretiert, die sich in der Teilmannigfaltigkeit "frei bewegen". Das legt nahe, dass es sich hierbei um ein intrinsisches Konzept handeln könnte, was aber aus der Konstruktion, die ja den umgebenden Raum benutzt, absolut nicht offensichtlich ist. Aus der Konstruktion folgt jedenfalls sofort, dass Stücke von affinen Geraden, die in M enthalten sind, mit ihrer natürlichen Parametrisierung Geodäten in M sind. Sie erfüllen ja $c''(t) = 0$ und damit insbesondere auch $\nabla c'(t) = 0$. Schließlich sehen wir von oben, dass $|c'(t)|$ für jede Geodäte c konstant ist.

5.3. Vektorfelder. Die kovariante Ableitung längs Kurven ist intuitiv leicht interpretierbar, aber um ihre Eigenschaften zu studieren und zu beweisen, dass sie ein intrinsisches Konzept ist, wird ein anderer Zugang benötigt. Dazu betrachten wir Vektorfelder auf Teilmannigfaltigkeiten, also Funktionen die jedem Punkt $x \in M$ in glatter Weise einen Tangentialvektor bei x zuordnen:

DEFINITION 5.3. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit.

(1) Ein *Vektorfeld* auf M ist eine glatte Funktion $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass für jeden Punkt $x \in M$ der Wert $\xi(x)$ im Tangentialraum $T_x M$ liegt.

(2) Ein *lokales Vektorfeld* auf M ist ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$.

(3) Die Menge aller Vektorfelder auf M wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.

Offensichtlich kann man Vektorfelder punktweise addieren und punktweise mit glatten Funktionen multiplizieren. Damit ist $\mathfrak{X}(M)$ ein Vektorraum und ein Modul über dem kommutativen Ring $C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit Einselement.

Vektorfelder erlauben uns nun ein Analogon von Richtungsableitungen für Funktionen auf Teilmannigfaltigkeiten zu definieren. Da man auf so einer Teilmannigfaltigkeit keine “konstanten” Richtungen hat, erlaubt man einfach, dass die Richtung glatt vom Punkt abhängt, also durch ein Vektorfeld beschrieben wird. Sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion und $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld. Dann definieren wir eine Funktion $\xi \cdot F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $(\xi \cdot F)(x) := T_x F(\xi(x))$. Lokal um jeden Punkt $x_0 \in M$ kann man F als Einschränkung einer glatten Funktion \tilde{F} auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n schreiben und dann ist $T_x F$ die Einschränkung von $D\tilde{F}(x)$ auf den Tangentialraum $T_x M$. Damit kann man aber $\xi \cdot F$ als $x \mapsto D\tilde{F}(x)(\xi(x))$ schreiben und das ist offensichtlich glatt, also ist $\xi \cdot F$ eine glatte Funktion auf M .

Hat F Werte in einer Teilmannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^m$, dann gilt $(\xi \cdot F)(x) \in T_{F(x)} N$ für jedes $x \in M$. Schließlich impliziert die Produktregel sofort, dass für glatte Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, das (punktweise) Produkt $fF : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ die Gleichung $\xi \cdot fF = (\xi \cdot f)F + f(\xi \cdot F)$ gilt. Damit können wir Vektorfelder und ihre Wirkung auf Funktionen in lokalen Parametrisierungen beschreiben, wobei wir von nun an durchgehend die Summenkonvention benutzen.

PROPOSITION 5.3. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit, $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge und $u : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung für M .*

(1) *Zu $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ gibt es eindeutige glatte Funktionen $\xi_u^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, k$, sodass $\xi \circ u = \xi_u^i \partial_i u$ gilt. Umgekehrt ist $\partial_i u \circ u^{-1}$ für jedes i ein lokales Vektorfeld auf $u(U) \subset M$.*

(2) *Stellen wir $\xi \circ u$ wie in (1) dar, dann gilt für eine glatte Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichung $(\xi \cdot F) \circ u = \xi_u^i \partial_i (F \circ u)$.*

BEWEIS. (1) Betrachten wir die erste Fundamentalform (g_{ij}^u) , dann habe wir in 4.9 bemerkt, dass wir für $z \in U$ die inverse Matrix $(g^{ij}(z))$ zu $(g_{ij}^u(z))$ bilden können, deren Eintragungen ebenfalls glatte Funktionen sind. Damit definieren wir nun glatte Funktionen ξ_u^i durch $\xi_u^i(z) := \langle \xi(u(z)), \partial_j u(z) \rangle g^{ji}(z)$, und betrachten $\xi_u^i \partial_i u$. Einsetzen liefert dann

$$\langle \xi_u^i \partial_i u, \partial_k u \rangle = \xi_u^i g_{ik}^u = \langle \xi \circ u, \partial_j u \rangle g^{ji} g_{ik}^u = \langle \xi \circ u, \partial_k u \rangle.$$

Da die $\partial_k u(z)$ immer eine Basis für $T_{u(z)} M$ bilden folgt daraus $\xi \circ u = \xi_u^i \partial_i u$. Die letzte Behauptung ist klar, da $\partial_i u(z) \in T_{u(z)} M$ für alle $z \in U$ gilt.

(2) Nach Definition gilt $\xi(u(z)) = \xi_u^i(z) Du(z)(e_i)$. Damit ist aber $T_{u(z)} F(\xi(u(z))) = \xi_u^i(z) T_{u(z)} F(Du(z)(e_i))$ und nach der Kettenregel ist

$$T_{u(z)} F(Du(z)(e_i)) = D(F \circ u)(z)(e_i) = \partial_i (F \circ u)(z).$$

□

Wir können nun Vektorfelder selbst als \mathbb{R}^n -wertige Funktionen betrachten und damit so differenzieren. Damit erhalten wir für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ eine Funktion $\xi \cdot \eta : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir werden später diese Funktion in einen Tangential- und einen Normalteil zerlegen. Zuerst beobachten wir aber eine interessante Eigenschaft, die eine der fundamentalen Operationen der Analysis auf Mannigfaltigkeiten liefert:

SATZ 5.3. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit und seien $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder auf M .

(1) Für jeden Punkt $x \in M$ gilt $(\xi \cdot \eta)(x) - (\eta \cdot \xi)(x) \in T_x M$, also definiert $[\xi, \eta] := \xi \cdot \eta - \eta \cdot \xi$ ein Vektorfeld auf M .

(2) Für jede glatte Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt $[\xi, \eta] \cdot F = \xi \cdot (\eta \cdot F) - \eta \cdot (\xi \cdot F)$.

(3) Ist $\zeta \in \mathfrak{X}(M)$ ein weiteres Vektorfeld, dann gilt die Jacobi Identität

$$[\xi, [\eta, \zeta]] = [[\xi, \eta], \zeta] + [\eta, [\xi, \zeta]].$$

BEWEIS. (1) Sei $u : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung. Dann können wir nach Teil (1) von Proposition 5.3 $\eta \circ u$ als $\eta_u^i \partial_i u$ für glatte Funktionen $\eta_u^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $i = 1, \dots, k$ schreiben. Nach Teil (2) dieser Proposition erhalten wir

$$(5.1) \quad (\xi \cdot \eta) \circ u = \xi_u^j \partial_j (\eta_u^i \partial_i u) = (\xi_u^j \partial_j \eta_u^i) \partial_i u + \xi_u^j \eta_u^i \partial_j \partial_i u.$$

Berechnen wir analog $(\eta \cdot \xi) \circ u$ dann liefert das wegen der Symmetrie der zweiten partiellen Ableitungen den gleichen zweiten Term. Damit erhalten wir aber für $(\xi \cdot \eta - \eta \cdot \xi)$ den Ausdruck

$$(5.2) \quad (\xi_u^j \partial_j \eta_u^i - \eta_u^j \partial_j \xi_u^i) \partial_i u \in T_x M.$$

(2) Aus Proposition 5.3 erhalten wir $(\eta \cdot F) \circ u = \eta_u^i \partial_i (F \circ u)$ und differenzieren mit ξ liefert

$$\xi \cdot (\eta \cdot F) \circ u = \xi_u^j \partial_j (\eta_u^i \partial_i (F \circ u)) = (\xi_u^j \partial_j \eta_u^i) \partial_i (F \circ u) + \xi_u^j \eta_u^i \partial_j \partial_i (F \circ u).$$

Drückt man $\eta \cdot (\xi \cdot F)$ analog aus, dann erhält man wieder die gleichen Terme mit zweiten partiellen Ableitungen und die Behauptung folgt sofort aus (5.2) und Teil (2) von Proposition 5.3.

(3) Natürlich ist $\xi \cdot [\eta, \zeta] = \xi \cdot (\eta \cdot \zeta) - \xi \cdot (\zeta \cdot \eta)$. Nach Teil (2) gilt aber auch $[\eta, \zeta] \cdot \xi = \eta \cdot (\zeta \cdot \xi) - \zeta \cdot (\eta \cdot \xi)$. Schreibt man die andere Seite der Identität analog, dann liefert eine einfache Rechnung das Resultat. \square

Das Vektorfeld $[\xi, \eta]$ heißt die *Lie Klammer* von ξ und η .

5.4. Kovariante Ableitung von Vektorfeldern. Nun können wir analog zum Fall von Kurven aus 5.2 die Ableitung eines Vektorfelds in Richtung eines anderen Vektorfelds bilden und orthogonal in den Tangentialraum projizieren.

DEFINITION 5.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit. Für Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir die *kovariante Ableitung* $\nabla_\xi \eta$ von η in Richtung ξ indem wir $\nabla_\xi \eta(x)$ als die $T_x M$ -Komponente von $(\xi \cdot \eta)(x)$ bezüglich der orthogonalen Zerlegung $\mathbb{R}^n = T_x M \oplus (T_x M)^\perp$ definieren.

PROPOSITION 5.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit.

(1) Für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ ist $\nabla_\xi \eta$ ein glattes Vektorfeld auf M .

(2) Ist M eine Hyperfläche, $x \in M$ ein Punkt und \mathbf{n} lokal um x definiertes Einheitsnormalenfeld für M , dann gilt die Gauß Gleichung

$$\nabla_\xi \eta(x) = (\xi \cdot \eta)(x) + II_x(\xi(x), \eta(x)) \mathbf{n}(x).$$

(3) Für $\xi, \xi_1, \xi_2, \eta, \eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi_1 + \xi_2} \eta &= \nabla_{\xi_1} \eta + \nabla_{\xi_2} \eta & \nabla_\xi (\eta_1 + \eta_2) &= \nabla_\xi \eta_1 + \nabla_\xi \eta_2 \\ \nabla_{f\xi} \eta &= f \nabla_\xi \eta & \nabla_\xi f \eta &= (\xi \cdot f) \eta + f \nabla_\xi \eta \\ \xi \cdot \langle \eta_1, \eta_2 \rangle &= \langle \nabla_\xi \eta_1, \eta_2 \rangle + \langle \eta_1, \nabla_\xi \eta_2 \rangle & \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi &= [\xi, \eta]. \end{aligned}$$

BEWEIS. (1) Analog zum Beweis von Proposition 5.3 betrachten wir eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ und definieren offensichtlich glatte Funktionen $\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi^i(z) = \langle (\xi \cdot \eta)(u(z)), \partial_j u(z) \rangle g^{ji}(z)$$

und rechnen nach, dass $(\xi \cdot \eta) \circ u - \varphi^i \partial_i u$ immer orthogonal zu allen $\partial_k u$ ist. Da die $\partial_k u(z)$ eine Basis von $T_{u(z)}$ bilden folgt, dass $(\nabla_\xi \eta) \circ u = \varphi^i \partial_i u$ gelten muss und die Behauptung folgt.

(2) Im Fall einer Hyperfläche erhalten wir auf dem Definitionsbereich eines Einheitsnormalenfeldes natürlich

$$\nabla_\xi \eta(y) = (\xi \cdot \eta)(y) - \langle (\xi \cdot \eta)(y), \mathbf{n}(y) \rangle \mathbf{n}(y).$$

Da η ein Vektorfeld ist, ist $\langle \eta, \mathbf{n} \rangle = 0$ und differenziert man das in Richtung $\xi(x)$, dann erhält man $0 = \langle (\xi \cdot \eta)(x), \mathbf{n}(x) \rangle + \langle \eta(x), T_x \mathbf{n} \cdot \xi(x) \rangle$ und nach Definition liefert der zweite Summand $II(\eta(x), \xi(x))$.

(3) Da $T_x \eta$ für jedes $x \in M$ linear ist, folgt $(\xi_1 + \xi_2) \cdot \eta = \xi_1 \cdot \eta + \xi_2 \cdot \eta$ und weil Differenzieren eine lineare Operation ist, erhalten wir $\xi \cdot (\eta_1 + \eta_2) = \xi \cdot \eta_1 + \xi \cdot \eta_2$. Da die Summen punktweise sind und die Orthogonalprojektion auf den Tangentialraum eine lineare Abbildung ist, folgen die ersten beiden Regeln.

Analog ist $(f\xi)(x) = f(x)\xi(x)$ und daher $T_x \eta((f\xi)(x)) = f(x)T_x \eta(\xi(x))$, also folgt auch die dritte Rechenregel aus der Linearität der Orthogonalprojektion. Andererseits wissen wir aus 5.3, dass $\xi \cdot (f\eta) = (\xi \cdot f)\eta + f(\xi \cdot \eta)$ gilt, was sofort die vierte Regel liefert. Wie im Beweis von (2) erhalten wir

$$\xi \cdot \langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \langle \xi \cdot \eta_1, \eta_2 \rangle + \langle \eta_1, \xi \cdot \eta_2 \rangle.$$

Im ersten Summanden auf der rechten Seite liegt in jedem Punkt $\eta_2(x) \in T_x M$, also kann man $(\xi \cdot \eta_1)(x)$ durch den Wert der Orthogonalprojektion auf $T_x M$ ersetzen, ohne das innere Produkt zu verändern. Schreibt man den zweiten Summanden analog um, dann folgt behauptete Verträglichkeit mit dem inneren Produkt. Nach Definition erhält man $\nabla_\xi \eta(x) - \nabla_\eta \xi(x)$ indem man $(\xi \cdot \eta)(x) - (\eta \cdot \xi)(x)$ orthogonal nach $T_x M$ projiziert. Aber nach Teil (1) von Satz 5.3 liegt diese Differenz schon in $T_x M$ und stimmt mit $[\xi, \eta](x)$ überein. \square

Nachdem wir die Eigenschaften der kovarianten Ableitung abgeklärt haben, können wir das fundamentale Resultat für die intrinsische Geometrie von Teilmannigfaltigkeiten beweisen. Trotz der Konstruktion, die natürlich den umgebenden Raum benutzt, ist nämlich die kovariante Ableitung eine intrinsische Operation. Tatsächlich kann man auf jeder Riemann Mannigfaltigkeit eine analoge Operation, die *Levi-Civita Ableitung* konstruieren, die die Eigenschaften aus Teil (3) von Proposition 5.4 hat und durch diese eindeutig charakterisiert ist.

SATZ 5.4. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit. Dann ist die kovariante Ableitung intrinsisch. Explizit erhält man für eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ und Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\xi \circ u = \xi_u^j \partial_j u$, $\eta \circ u = \eta_u^i \partial_i u$ die Gleichung*

$$(\nabla_\xi \eta) \circ u = \xi_u^j (\partial_j \eta_u^i) \partial_i u + \xi_u^i \eta_u^j \Gamma_{ij}^k \partial_k u,$$

wobei $\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell}^u + \partial_j g_{i\ell}^u - \partial_\ell g_{ij}^u)$.

BEWEIS. Im Beweis von Satz 5.3 haben wir bereits $(\xi \cdot \eta) \circ u$ berechnet und nach Formel (5.1) aus diesem Beweis müssen wir nur noch zeigen, dass für $z \in U$ und

$x = u(z) \in M$ die Orthogonalprojektion von $\partial_i \partial_j u(z)$ auf $T_x M$ durch $\Gamma_{ij}^k \partial_k(u(z))$ gegeben ist. Wie im Beweis von Proposition 5.3 können wir die Orthogonalprojektion als $g^{k\ell} \langle \partial_i \partial_j u, \partial_\ell u \rangle \partial_k u$ berechnen.

Setzen wir in die Definition von $g_{j\ell}^u$ ein, dann erhalten wir

$$\partial_i g_{j\ell}^u = \partial_i \langle \partial_j u, \partial_\ell u \rangle = \langle \partial_i \partial_j u, \partial_\ell u \rangle + \langle \partial_j u, \partial_i \partial_\ell u \rangle.$$

Setzt man das ein und benutzt die Symmetrie des inneren Produkts und der zweiten partiellen Ableitungen, dann folgt sofort, dass der Klammerausdruck in der Definition von Γ_{ij}^k gerade $2 \langle \partial_i \partial_j u, \partial_\ell u \rangle$ ergibt und damit die Behauptung. \square

Man nennt die Größen Γ_{ij}^k aus dem Satz die *Christoffel Symbole* (zweiter Art) in der Parametrisierung u . Aus dem Satz erhalten wir sofort eine einfache Interpretation für diese Größen. Beschränkt man sich nämlich auf das Bild $u(U)$ einer lokalen Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ für M , dann definieren die partiellen Ableitung $\partial_i u$ natürlich Vektorfelder auf $u(U)$, die explizit als $\partial_i u \circ u^{-1}$ gegeben sind. Für jeden Punkt $x \in u(U)$ bilden die Werte dieser Vektorfelder in x eine Basis für $T_x M$. Aus dem Satz folgt nun sofort, dass für die kovarianten Ableitungen dieser Vektorfelder die Gleichungen

$$(5.3) \quad \nabla_{\partial_i u \circ u^{-1}} (\partial_j u \circ u^{-1}) = \sum_k \Gamma_{ij}^k (\partial_k u \circ u^{-1})$$

gelten. Die Christoffel Symbole beschreiben also die kovarianten Ableitungen dieser "Basisvektorfelder". Die allgemeine Formel für kovariante Ableitungen aus dem Satz folgt daraus sofort mittels der Eigenschaften auf Teil (3) von Proposition 5.4.

5.5. Paralleltransport und Geodäten. Mit Hilfe der lokalen Darstellung der kovarianten Ableitung aus Satz 5.4 können wir nun auch strukturelle Eigenschaften der kovarianten Ableitung längs Kurven herleiten. Einerseits erlaubt uns die kovariante Ableitung, Tangentialvektoren in natürlicher Weise längs Kurven parallel zu verschieben:

PROPOSITION 5.5. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ ein Punkt und $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Dann gibt es zu jedem Tangentialvektor $X_0 \in T_{c(t_0)} M$ ein eindeutiges Vektorfeld $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ längs c , das parallel längs c ist, sodass $X(t_0) = X_0$ gilt.*

BEWEIS. Nehmen wir zunächst an, dass es eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ gibt, sodass $c(I) \subset u(U)$ gilt. Dann erhalten wir eine glatte Kurve $\gamma := u^{-1} \circ c : I \rightarrow U$, deren Komponenten wir mit γ^j für $j = 1, \dots, k$ bezeichnen. Analog zum Beweis von Proposition 5.3 kann man jedes Vektorfeld längs c als $X(t) = X^i(t) \partial_i u(\gamma(t))$ für glatte Funktionen $X^i : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $i = 1, \dots, k$ schreiben. Nun rechnen wir

$$X'(t) = (X^i)'(t) \partial_i u(\gamma(t)) + X^i(t) \partial_j \partial_i u(\gamma(t)) (\gamma^j)'(t),$$

wobei wir die Produktregel und die Kettenregel benutzt haben. Die Forderung, dass X parallel längs c ist, bedeutet genau, dass für jedes $t \in I$ die Orthogonalprojektion von $X'(t)$ auf $T_{c(t)} M$ verschwindet. Aber der erste Summand liegt schon in $T_{c(t)} M$ und für den zweiten Summanden ist die Projektion auf $T_{c(t)} M$ nach dem Beweis von Satz 5.4 durch $X^i(t) (\gamma^j)'(t) \Gamma_{ij}^\ell \partial_\ell u(\gamma(t))$ gegeben. Somit ist X genau dann parallel längs c , wenn für $\ell = 1, \dots, k$ die Gleichung

$$0 = (X^\ell)'(t) + X^i(t) (\gamma^j)'(t) \Gamma_{ij}^\ell(\gamma(t))$$

erfüllt ist. Das ist aber ein System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung an die Funktionen $X^i : I \rightarrow \mathbb{R}^k$, also gibt es zu gegebenen Anfangswerten $X^i(t_0)$ eindeutige globale Lösungen.

Im allgemeinen Fall finden wir für jedes $s \in I$ eine lokale Parametrisierung für M in deren Bild $c(s)$ liegt. Für $t \in I$ mit $t > t_0$ ist $c([t_0, t])$ kompakt, also finden wir eine Unterteilung $t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t$ von $[t_0, t]$ und lokale Parametrisierungen $u_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ mit $\alpha = 0, \dots, N-1$, sodass $c([t_\alpha, t_{\alpha+1}]) \subset u_\alpha(U_\alpha)$. Wir bezeichnen die offene Teilmenge $c^{-1}(u_\alpha(U_\alpha)) \subset I$ mit I_α . Wie oben erhalten wir zu $X_0 \in T_{c(t_0)}M$ ein Vektorfeld $X : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ längs $c|_{I_0} : I_0 \rightarrow M$, das parallel längs $c|_{I_0}$ ist. Setzen wir $X_1 := X(t_1) \in T_{c(t_1)}M$, dann finden wir analog ein Vektorfeld $X : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ längs $c|_{I_1} : I_1 \rightarrow M$, das parallel längs $c|_{I_1}$ ist. Wegen der Eindeutigkeit muss dies aber auf dem offenen Intervall $I_0 \cap I_1$ mit dem vorher konstruierten X übereinstimmen, also definieren die beiden gemeinsam ein glattes Vektorfeld $X : I_0 \cup I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ und in endlich vielen Schritten erhält man ein Vektorfeld, das auf einer offenen Obermenge von $[t_0, t]$ definiert ist. Für $t < t_0$ argumentiert man analog mit der Kompaktheit des Intervalls $[t, t_0]$. \square

Sei nun $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve in einer Teilmannigfaltigkeit und seien $a, b \in I$ Punkte mit $a < b$. Dann finden wir für jeden Tangentialvektor $X_0 \in T_{c(a)}M$ ein glattes Vektorfeld $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ längs c mit $X(a) = X_0$ und damit einen Tangentialvektor $X(b) \in T_{c(b)}M$. Das definiert eine Abbildung $T_{c(a)}M \rightarrow T_{c(b)}M$ und aus der Konstruktion folgt sofort, dass diese Abbildung linear ist. Man nennt sie den *Paralleltransport längs c* . Durchlaufen wir die Kurve in umgekehrter Richtung, dann erhalten wir analog eine Inverse, also ist der Paralleltransport ein linearer Isomorphismus. Außerdem wissen wir aus 5.2, dass parallele Vektorfelder längs Kurven konstante Länge haben, also ist $|X(b)| = |X_0|$, also ist der Paralleltransport längs c sogar eine orthogonale lineare Abbildung.

Analog können wir nun die lokale Existenz von Geodäten beweisen, die aus der Interpretation als Bahnen von "freien Teilchen" in Abschnitt 5.3 intuitiv einsichtig ist.

SATZ 5.5. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit, $x \in M$ ein Punkt und $X \in T_x M$ ein Tangentialvektor bei x . Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine glatte Geodäte $c : I \rightarrow M$ mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$. Ist $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall und $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow M$ eine weitere Geodäte mit diesen Eigenschaften, dann stimmen c und \tilde{c} auf $I \cap \tilde{I}$ überein.*

BEWEIS. Wählen wir eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ mit $x \in u(U)$. Sei $z := u^{-1}(x)$ und für $i = 1, \dots, k$ sei $X^i \in \mathbb{R}$ die eindeutige Zahl sodass $X = X^i \partial_i u(z)$. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$ und $\gamma : I \rightarrow U$ eine glatte Kurve, dann setzen wir $c := u \circ \gamma : I \rightarrow M$. Natürlich ist $c(0) = x$ äquivalent zu $\gamma(0) = z$ und $c'(0) = X$ äquivalent zu $(\gamma^j)'(0) = X^j$ für $j = 1, \dots, k$. Weiters sehen wir, dass $c'(t) = (\gamma^i)'(t) \partial_i u(\gamma(t))$ gilt. Damit können wir aber aus dem Beweis von Proposition 5.5 ablesen, dass c genau dann eine Geodäte ist, wenn

$$0 = (\gamma^\ell)''(t) + (\gamma^i)'(t)(\gamma^j)'(t)\Gamma_{ij}^\ell(\gamma(t))$$

für alle $\ell = 1, \dots, k$ gilt. Das ist ein System von (nichtlinearen) gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung an die Funktionen $\gamma^j(t)$, das für die gegebenen Anfangsbedingungen lokal eindeutige Lösungen besitzt.

Für die Eindeutigkeitsaussage bemerken wir, dass $I \cap \tilde{I}$ ein Intervall ist, das 0 enthält und wir betrachten die Teilmenge $A := \{t \in I \cap \tilde{I} : c(t) = \tilde{c}(t), c'(t) = \tilde{c}'(t)\}$. Offensichtlich ist A abgeschlossen und nicht leer, weil $x \in A$ gilt. Für $t_0 \in A$ können wir wie oben eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ mit $c(t_0) \in u(U)$ wählen und die Kurven lokal um t_0 als $u \circ \gamma$ und $u \circ \tilde{\gamma}$ schreiben. Wie oben folgt aber, dass γ und $\tilde{\gamma}$ das gleiche System von Differentialgleichungen mit gleichen Anfangsbedingungen lösen. Damit gibt

es aber eine offene Umgebung von t_0 auf der γ und $\tilde{\gamma}$ und damit c und \tilde{c} und somit auch c' und \tilde{c}' übereinstimmen. Damit ist aber A offen in $I \cap \tilde{I}$ und da das Intervall zusammenhängend ist, folgt $A = I \cap \tilde{I}$. \square

Mit der Eindeutigkeitsaussage aus dem Satz kann man für gegebenes x und $X \in T_x M$ ein maximales offenes Intervall um 0 in \mathbb{R} finden, auf dem eine Geodäte c mit $c(0) = x$ und $c'(0) = X$ definiert ist.

5.6. Riemannkrümmung und Theorema Egregium. Sind $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder auf einer Teilmannigfaltigkeit M , dann ist nach Satz 5.4 auch $\nabla_\eta \zeta \in \mathfrak{X}(M)$ also können wir auch die “zweite kovariante Ableitung” $\nabla_\xi \nabla_\eta \zeta \in \mathfrak{X}(M)$ bilden. Darüber erhalten wir aber sofort Informationen. Nach Teil (2) von Satz 5.3 gilt nämlich

$$(5.4) \quad 0 = \xi \cdot (\eta \cdot \zeta) - \eta \cdot (\xi \cdot \zeta) - [\xi, \eta] \cdot \zeta.$$

Man kann nun diese Gleichung in einen tangentialen und einen normalen Teil zerlegen, die natürlich beide verschwinden müssen. Wir analysieren das nur im Fall von Hyperflächen, wo wir mit einem lokalen Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} und der Gaußgleichung aus Proposition 5.4 arbeiten können. Um die Notation zu vereinfachen, machen wir zunächst noch eine Beobachtung über die zweite Fundamentalform und die Weingartenabbildung. Betrachten wir zwei Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$, dann können wir für jedes $x \in M$ die Zahl $II_x(\xi(x), \eta(x)) \in \mathbb{R}$ betrachten, also erhalten wir eine Funktion auf M , die wir mit $II(\xi, \eta)$ bezeichnen. Analog erhalten wir für jedes $x \in M$ den Tangentialvektor $L_x(\xi(x)) \in T_x M$ und wir betrachten das als Funktion $L(\xi) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Für eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ betrachten wir die Darstellungen $\xi(u(z)) = \xi_u^i(z) \partial_i u(z)$ und $\eta(u(z)) = \eta_u^j(z) \partial_j u(z)$. Dann folgt nach Definition

$$II(\xi, \eta)(u(z)) = II_{u(z)}(\xi_u^i(z) \partial_i u(z), \eta_u^j(z) \partial_j u(z)) = \xi_u^i(z) \eta_u^j(z) II_{ij}^u(z).$$

Also ist $II(\xi, \eta) : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $II(\xi, \eta) \circ u = \xi_u^i \eta_u^j II_{ij}^u$ (wobei natürlich u nicht als Index zu betrachten ist). Analog sieht man, dass $L(\xi)$ ein Vektorfeld auf M definiert.

In dieser Notation liefert die Gaußgleichung $\eta \cdot \zeta = \nabla_\eta \zeta - II(\eta, \zeta) \mathbf{n}$. Benutzen wir das, um $\xi \cdot (\eta \cdot \zeta)$ zu expandieren, dann erhalten wir zunächst einen Term $\xi \cdot \nabla_\eta \zeta$ den man wieder mittels der Gaußgleichung als $\nabla_\xi \nabla_\eta \zeta + II(\xi, \nabla_\eta \zeta) \mathbf{n}$ schreiben kann. Andererseits müssen wir $-II(\eta, \zeta) \mathbf{n}$ in Richtung ξ differenzieren, was nach der Produktregel $-(\xi \cdot II(\eta, \zeta)) \mathbf{n} - II(\eta, \zeta) L(\xi)$ liefert. Der zweite Summand in (5.4) zerlegt sich analog während wir für den dritten Summanden direkt nach der Gaußgleichung $\nabla_{[\xi, \eta]} \zeta + II([\xi, \eta], \zeta) \mathbf{n}$ erhalten.

Damit ist das Verschwinden des Tangentialteils von (5.4) äquivalent zu

$$(5.5) \quad \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta = II(\eta, \zeta) L(\xi) - II(\xi, \zeta) L(\eta).$$

Diese Gleichung ist in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert. Der Wert von $\nabla_\xi \nabla_\eta \zeta$ in einem Punkt $x \in M$ hängt nach Satz 5.4 von den ersten und zweiten Ableitungen der Komponentenfunktionen von ζ und von den ersten Ableitungen der Komponentenfunktionen von η in x ab. Die Gleichung (5.5) zeigt aber, dass der Wert der speziellen Kombination von kovarianten Ableitung in der linken Seite der Gleichung in x als $II_x(\eta(x), \zeta(x)) L_x(\xi(x)) - II_x(\xi(x), \zeta(x)) L_x(\eta(x))$ berechnet werden kann und damit nur von den Werten der drei Vektorfelder in x abhängt.

Andererseits benötigt man zur Berechnung der linken Seite nur die kovariante Ableitung, also schließen wir, dass der Ausdruck in der rechten Seite der Gleichung eine intrinsische Größe darstellt. Man nennt die durch (5.5) definierte Größe, die man für

jeden Punkt $x \in M$ als trilineare Abbildung $T_x M \times T_x M \times T_x M \rightarrow T_x M$ interpretieren kann, die *Riemannkrümmung* R der Riemann Mannigfaltigkeit (M, g) . Man kann diese Krümmung allgemein für Riemann Mannigfaltigkeiten definieren und sie stellt die grundlegende Invariante in der Riemann Geometrie dar.

Der Normalteil von (5.4) ist durch eine Funktion mal \mathbf{n} gegeben und sein Verschwinden ist natürlich äquivalent zum Verschwinden dieser Funktion. Einsetzen liefert direkt

$$(5.6) \quad 0 = -II(\xi, \nabla_\eta \zeta) - \xi \cdot II(\eta, \zeta) + II(\eta, \nabla_\xi \zeta) + \eta \cdot II(\xi, \zeta) + II([\xi, \eta], \zeta).$$

Schreiben wir $II(\eta, \zeta) = \langle L(\eta), \zeta \rangle$ und analog für $II(\eta, \nabla_\xi \zeta)$, dann sehen wir, dass der zweite und dritte Summand gemeinsam $\langle \nabla_\xi L(\eta), \zeta \rangle$ liefern. Analog liefern der erste und vierte Summand gemeinsam $\langle \nabla_\eta L(\xi), \zeta \rangle$. Schreibt man den letzten Summanden als $\langle L([\xi, \eta]), \zeta \rangle$, dann erhalten wir für die ganze Summe ein inneres Produkt mit ζ , dessen Verschwinden für beliebiges ζ natürlich äquivalent zum Verschwinden des anderen Eintrages ist. Somit muss für beliebige Vektorfelder ξ und η die *Codazzi-Mainardi Gleichung*

$$(5.7) \quad 0 = \nabla_\xi L(\eta) - \nabla_\eta L(\xi) - L([\xi, \eta])$$

gelten.

Durch die Analyse der Riemannkrümmung können wir nun einige Größen als intrinsisch identifizieren und insbesondere das Theorema Egregium von Gauß beweisen.

SATZ 5.6. (1) (*Theorema Egregium*) Für eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ bestimmen die Riemannkrümmung und die Gaußkrümmung einander. Insbesondere ist die Gaußkrümmung für Flächen intrinsisch und die Riemannkrümmung verschwindet genau dann, wenn die Gaußkrümmung verschwindet.

(2) Für eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Hauptkrümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ ist $x \mapsto \sum_{i < j} \kappa_i(x) \kappa_j(x)$ eine intrinsische Krümmungsgröße, die glatt von x abhängt.

BEWEIS. Wir beobachten zunächst einige Eigenschaften der Riemannkrümmung. Wir formulieren das über den Ausdruck

$$(5.8) \quad \langle R(\xi, \eta)(\zeta), \tilde{\zeta} \rangle = II(\eta, \zeta)II(\xi, \tilde{\zeta}) - II(\xi, \zeta)II(\eta, \tilde{\zeta}),$$

der vier Vektorfeldern $\xi, \eta, \zeta, \tilde{\zeta} \in \mathfrak{X}(M)$ eine glatte Funktion $M \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnet und linear in allen vier Variablen ist. Offensichtlich wechselt die rechte Seite von (5.8) ihr Vorzeichen wenn man entweder ξ und η oder ζ und $\tilde{\zeta}$ vertauscht, also verschwindet sie insbesondere, wenn $\xi = \eta$ oder $\zeta = \tilde{\zeta}$ gilt. Außerdem haben wir bereits beobachtet, dass der Wert der rechten Seite in einem Punkt $x \in M$ nur von den Werten der vier Vektorfelder in x abhängt. Damit genügt es, Elemente einer Basis von $T_x M$ einzusetzen.

(1) Im Fall einer Fläche wird die Riemannkrümmung damit ein ziemlich einfaches Objekt. Betrachten wir für $x \in M$ eine Orthonormalbasis $\{X, Y\}$ von $T_x M$, dann ist $R(X, X) = R(Y, Y) = 0$ und $R(Y, X) = -R(X, Y)$, also ist die Riemannkrümmung in x durch die Abbildung $R(X, Y)$ bestimmt. Nun wissen wir aber, dass $R(X, Y)(X)$ normal auf X steht, also ein Vielfaches von Y ist, das man als $\langle R(X, Y)(X), Y \rangle$ berechnen kann. Wir wissen auch schon, dass dieser Ausdruck gleich $-\langle R(X, Y)(Y), X \rangle$ ist und damit auch $R(X, Y)(Y)$ bestimmt. Damit ist die Riemannkrümmung in x durch den Wert von $\langle R(X, Y)(X), Y \rangle$ in x bestimmt. Setzt man in (5.8) ein, dann erhält man $II_x(X, Y)^2 - II_x(X, X)II_x(Y, Y)$ also gerade das negative der Determinante der Matrix von II_x bezüglich der Basis. Für eine Eigenbasis stimmt das aber mit $-\kappa_1(x)\kappa_2(x) = -K(x)$ überein.

(2) In höheren Dimensionen ist die Riemannkrümmung ein viel komplizierteres Objekt und es ist schwieriger, Information zu extrahieren. Eine relativ einfache Möglichkeit

gibt es aber: Für eine Orthonormalbasis $\{X_1, \dots, X_n\}$ von $T_x M$ betrachten wir die Ausdrücke

$$b_{ij} := \langle R(X_i, X_j)(X_i), X_j \rangle = II_x(X_i, X_j)^2 - II_x(X_i, X_i)II(X_j, X_j).$$

Dann ist $b_{ii} = 0$ für alle i und $b_{ji} = b_{ij}$, also $\sum_{i,j} b_{ij} = 2 \sum_{i < j} b_{ij}$. Wir behaupten nun, dass dieser Ausdruck unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis $\{X_i\}$ ist. Haben wir das gezeigt, dann folgt die Behauptung, denn einerseits ist dann $\sum_{i,j} b_{ij}$ offensichtlich durch die Riemannkrümmung bestimmt, die intrinsisch ist. Andererseits ist für eine Eigenbasis mit $L_x(X_i) = \kappa_i(x)X_i$ natürlich $\sum_{i < j} b_{ij} = -\sum_{i < j} \kappa_i(x)\kappa_j(x)$.

Um die Unabhängigkeit von der Basis einzusehen bemerken wir, dass $II_x(X_i, X_j) = \langle L_x(X_i), X_j \rangle$ gerade der Koeffizient $a_{ji} = a_{ij}$ der Matrixdarstellung von L bezüglich der Orthonormalbasis $\{X_i\}$ ist. Also erhält man $\sum_{i < j} b_{ij} = \sum_{i < j} (a_{ij}^2 - a_{ii}a_{jj})$ und wir behaupten, dass das bis auf ein Vorzeichen der Koeffizient von t^{n-2} im charakteristischen Polynom von L_x ist, der natürlich nicht von der Basis abhängt. Um das zu sehen, schreiben wir das charakteristische Polynom als

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (a_{1\sigma_1} - t\delta_{1\sigma_1}) \dots (a_{n\sigma_n} - t\delta_{n\sigma_n})$$

wobei δ_{ij} gleich 1 für $i = j$ und 0 für $i \neq j$. Ein Beitrag zum Koeffizienten von t^{n-2} kann nur aus Termen kommen, bei denen $\sigma_i \neq i$ für höchstens 2 Indizes i gilt. Damit kommen nur die Summanden in Betracht, in denen σ die Identität oder eine Transposition (ij) mit $i < j$ ist. Aus dem Summanden mit $\sigma = \operatorname{id}$ erhalten wir offensichtlich den Beitrag $\sum_{i < j} a_{ii}a_{jj}$. Andererseits erhalten wir für die Transposition (ij) gerade den Beitrag $a_{ij}a_{ji}$ und durch Summieren über alle $i < j$ folgt die Behauptung. \square

5.7. Mehr über Riemannkrümmung und Codazzi-Gleichung. In 5.6 haben wir schon festgestellt, dass der Wert der Riemannkrümmung $R(\xi, \eta)(\zeta)$ für Vektorfelder $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{X}(M)$ in einem Punkt $x \in M$ nur von den Werten der Vektorfelder in x abhängt. Im Bereich einer lokalen Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ für M ist die Riemannkrümmung daher durch die glatten Funktionen $R_{ij}{}^k{}_\ell : U \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmt, die durch

$$R(\partial_i u(z), \partial_j u(z))(\partial_\ell u(z)) = R_{ij}{}^k{}_\ell(z) \partial_k u(z)$$

definiert sind. Aus der Definition der Riemannkrümmung über kovariante Ableitungen ergibt sich leicht eine explizite Formel für diese Funktionen. Dazu beobachten wir zunächst, dass die Vektorfelder zu $\partial_i u$ und $\partial_j u$ nach Gleichung (5.2) immer verschwindende Lie Klammer haben. Damit können wir einfach die zweiten Kovarianten Ableitungen mit Hilfe von Satz 5.4 aus (5.3) bestimmen und erhalten

$$(5.9) \quad R_{ij}{}^k{}_\ell = \partial_i \Gamma_{j\ell}^k - \partial_j \Gamma_{i\ell}^k + \Gamma_{j\ell}^m \Gamma_{im}^k - \Gamma_{i\ell}^m \Gamma_{jm}^k.$$

Mit Hilfe der expliziten Formel für die Christoffel Symbole aus Satz 5.4 kann man die Funktionen auch direkt in Termen der ersten Fundamentalform (g_{ij}^u) ausdrücken, was aber schon recht kompliziert wird. Natürlich kann man auch den Bezug zur zweiten Fundamentalform in Termen entsprechender Funktionen ausdrücken. Dazu ist es einfacher die Funktionen $R_{ijkl} : U \rightarrow \mathbb{R}$ zu betrachten, die durch $R_{ijkl} = R_{ij}{}^m{}_\ell g_{mk}^u$ definiert sind. Für diese liefert Gleichung (5.8) direkt $R_{ijkl} = II_{j\ell}^u II_{ik}^u - II_{i\ell}^u II_{jk}^u$.

In Teil (1) von Satz 5.6 haben wir gesehen, dass in Dimension 2 die Riemannkrümmung äquivalent durch eine einzige glatte Funktion beschrieben werden kann, die für Flächen in \mathbb{R}^3 gerade die Gaußkrümmung ist. In Teil (2) dieses Satzes haben wir gezeigt, dass wir für Hyperflächen in höheren Dimensionen durch zweifache Spurbildung aus der Riemannkrümmung eine glatte Funktion erhalten, die eine Invariante darstellt.

Das funktioniert auch auf allgemeinen Riemann Mannigfaltigkeiten und liefert die sogenannte *Skalarkrümmung*. Es zeigt sich, dass man auch durch einfach Spurbildung ein geometrisches Objekt erhält, die sogenannte *Ricci Krümmung*, die jedem Punkt $x \in M$ eine symmetrische Bilinearform auf $T_x M$ zuordnet. Mit etwas Aufwand kann man zeigen, dass in Dimension 3 die Riemannkrümmung äquivalent durch diese Ricci Krümmung beschrieben wird. In höheren Dimensionen ist die Riemannkrümmung ein deutlich komplizierteres Objekt als die Ricci Krümmung.

Verwendet man auf dem Euklidischen Raum \mathbb{E}^n die durch Wahl eines Nullpunktes induzierte Identifikation mit \mathbb{R}^n als Karte und betrachtet die Riemann Metrik, die durch das innere Produkt gegeben ist, dann ist die erste Fundamentalform natürlich konstant. Daraus ergibt sich sofort, dass die Christoffel Symbole alle identisch Null sind und damit verschwindet auch die Riemannkrümmung. Man kann in beliebigen Dimensionen beweisen, dass die Riemannkrümmung einer n -dimensionalen Riemann Mannigfaltigkeit genau dann identisch Null ist, wenn sie lokal isometrisch diffeomorph zu \mathbb{E}^n ist. Im Fall von Dimension 2 kann man dieses Resultat erweitern und zeigen, dass je zwei Flächen mit gleicher konstanter Gauß Krümmung lokal isometrisch diffeomorph sind, siehe Abschnitt 4E von [Kühnel].

Zur Interpretation der Codazzi-Mainardi Gleichung, bemerken wir zunächst, dass wir die Gleichung in der Form (5.6) im Bereich einer lokalen Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ für M leicht für die Vektorfelder $\partial_i u \circ u^{-1}$ explizit machen können. Hier verschwindet der Term mit der Lie Klammer wie oben und man erhält die Gleichung

$$(5.10) \quad 0 = -\partial_i II_{jk}^u + \partial_j II_{ik}^u + \Gamma_{ik}^\ell II_{j\ell}^u - \Gamma_{jk}^\ell II_{i\ell}^u.$$

Aus 5.6 sehen wir, dass diese Gleichung äquivalent zur Codazzi-Mainardi Gleichung (5.7) für die Vektorfelder $\partial_i u \circ u^{-1}$ ist. Mit Hilfe der expliziten Formeln für die kovariante Ableitung aus Satz 5.4 und für die Lie Klammer aus (5.2) verifiziert man aber leicht dass daraus schon (5.7) für beliebige Vektorfelder ξ und η folgt. Somit liefert (5.10) eine äquivalente Form der Codazzi-Mainardi Gleichung im Bereich der Parametrisierung u . Setzt man darin die Formel für die Christoffel Symbole aus Satz 5.4 ein, dann erhält man ein System partieller Differentialgleichungen an die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform im Bereich der Parametrisierung u . Analog kann man die Formel für die Riemannkrümmung aus (5.9) mit der Formel über die zweite Fundamentalform kombinieren und erhält ein weiteres System von partiellen Differentialgleichungen an die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform, das oft als *Gauß Gleichung* bezeichnet wird.

Es stellt sich heraus, dass diese beiden Systeme gemeinsam die vollständigen Integrabilitätsbedingungen an die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform darstellen: Gibt man sich auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ glatte Funktionen g_{ij} und II_{ij} vor, sodass $g_{ji} = g_{ij}$ und $II_{ji} = II_{ij}$ gelten, die Matrix (g_{ij}) in jedem Punkt positiv definit ist und sodass die Gauß- und Codazzi-Mainardi Gleichungen erfüllt sind, dann findet man lokal eine glatte Funktion u nach \mathbb{R}^{n+1} , sodass $g_{ij} = g_{ij}^u$ und $II_{ij} = II_{ij}^u$ gilt. Zusätzlich ist diese Funktion eindeutig bis auf Komposition mit einer Euklidischen Bewegung bestimmt. Beweise dieser Tatsachen finden sich in Satz 4.24 von [Kühnel].

Exkurs: Verschiedenes über Flächen

Nachdem wir nun sowohl die extrinsische als auch die intrinsische Geometrie von Hyperflächen besprochen haben, beschäftigen wir uns in diesem Kapitel zunächst mit einigen speziellen Klassen von Flächen in \mathbb{R}^3 . Am Ende des Kapitels beschäftigen wir uns mit dem Satz von Gauß-Bonnet, der ausgehend von lokalen Überlegungen eine Brücke zur globalen Theorie von Flächen schlägt.

Drehflächen

6.1. Allgemeines über Drehflächen. Die Grundidee zur Definition einer Drehfläche ist, dass man eine Kurve in der Ebene um eine Achse rotieren lässt, um eine Fläche im Raum zu erhalten. Besonders interessant ist der Fall in dem man die Kurve als Graph einer Funktion über der Rotationsachse betrachten kann. Aber auch in diesem Fall ist es handlich, mit allgemeineren Parametrisierungen zu arbeiten. Wir betrachten also eine regulär parametrisierte Kurve in der x - z -Ebene, deren Parametrisierung wir als $t \mapsto (r(t), h(t))$ für t in einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ schreiben. Offensichtlich ist es sinnvoll anzunehmen, dass $r(t) > 0$ ist (also die Kurve die Rotationsachse nicht schneidet). Den Fall eines Graphen über der z -Achse erhält man, wenn $h'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist. In diesem Fall ist h monoton und definiert daher einen Diffeomorphismus von I auf ein offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Reparametrisiert man die Kurve mit h^{-1} , dann erhält man $s \mapsto (r(h^{-1}(s)), s)$ also genau den Graphen der Funktion $r \circ h^{-1} : J \rightarrow (0, \infty)$.

Die Idee der Drehfläche führt sofort zu lokalen Parametrisierungen der Form

$$u(t, \varphi) := (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, h(t))$$

für $t \in I$ und $\varphi \in (\alpha, \beta)$ mit $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Das liefert sofort

$$\partial_1 u(t, \varphi) = (r'(t) \cos \varphi, r'(t) \sin \varphi, h'(t)) \quad \partial_2 u(t, \varphi) = (-r(t) \sin \varphi, r(t) \cos \varphi, 0)$$

und damit ergibt sich für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform

$$E = r'(t)^2 + h'(t)^2 \quad F = 0 \quad G = r(t)^2.$$

Nach Voraussetzung sind E und G immer positiv, also sind die orthogonalen Vektoren $\partial_1 u(t, \varphi)$ und $\partial_2 u(t, \varphi)$ immer linear unabhängig, also ist $Du(t, \varphi)$ immer injektiv. Man kann auch leicht zeigen, dass man die resultierende Teilmenge von \mathbb{R}^3 lokal als reguläre Nullstellenmenge beschreiben kann und somit eine Teilmannigfaltigkeit erhält.

Als lokales Einheitsnormalenfeld benutzen wir das negative es normierten Kreuzprodukts der partiellen Ableitungen und erhalten

$$\mathbf{n}(u(t, \varphi)) = \frac{1}{\sqrt{r'(t)^2 + h'(t)^2}} (h'(t) \cos \varphi, h'(t) \sin \varphi, -r'(t)).$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_1 u(t, \varphi) &= (r''(t) \cos \varphi, r''(t) \sin \varphi, h''(t)) \\ \partial_1 \partial_2 u(t, \varphi) &= (-r'(t) \sin \varphi, r'(t) \cos \varphi, 0) \\ \partial_2 \partial_2 u(t, \varphi) &= (-r(t) \cos \varphi, -r(t) \sin \varphi, 0). \end{aligned}$$

Daraus erhält man die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform als

$$e = \frac{-r''(t)h'(t)+r'(t)h''(t)}{\sqrt{h'(t)^2+r'(t)^2}} \quad f = 0 \quad g = \frac{r(t)h'(t)}{\sqrt{h'(t)^2+r'(t)^2}}.$$

Da sowohl die erste als auch die zweite Fundamentalform diagonal sind, ist auch die Weingartenabbildung durch eine Diagonalmatrix gegeben, deren Eintragungen gerade $e/E = \frac{-r''(t)h'(t)+r'(t)h''(t)}{(h'(t)^2+r'(t)^2)^{3/2}}$ und $g/G = \frac{h'(t)}{r(t)\sqrt{h'(t)^2+r'(t)^2}}$ sind. Diese beiden Größen liefern also die Hauptkrümmungen und damit kann man natürlich die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung explizit berechnen.

Man sieht sofort, dass sich die Formeln deutlich vereinfachen, wenn man $r'(t)^2 + h'(t)^2 = 1$ annimmt, was genau bedeutet, dass die ursprüngliche Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist. In diesem Fall erhält man

$$\kappa_1(u(t, \varphi)) = -r''(t)h'(t) + r'(t)h''(t) \quad \kappa_2(u(t, \varphi)) = \frac{h'(t)}{r(t)}.$$

Damit ist κ_1 gerade durch die Krümmung der ursprünglichen Kurve gegeben. Die Formeln für die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung kann man nochmals vereinfachen, indem man die Gleichung $r'(t)^2 + h'(t)^2 = 1$ differenziert. Das liefert $r'(t)r''(t) + h'(t)h''(t) = 0$ (vergleiche mit Proposition 2.4) und wir können wie $K(u(t, \varphi))$ wie folgt berechnen

$$\frac{1}{r(t)}(-r''(t)h'(t)^2 + r'(t)h'(t)h''(t)) = -\frac{1}{r(t)}r''(t)(h'(t)^2 + r'(t)^2) = \frac{-r''(t)}{r(t)}.$$

Für die mittlere Krümmung ergibt sich einer einfachere Formel unter der Annahme, dass $r'(t) \neq 0$ gilt. In diesem Fall kann man $-r''(t)$ als $\frac{h'(t)h''(t)}{r'(t)}$ schreiben und erhält damit leicht $k_1(u(t, \varphi)) = \frac{h''(t)}{r'(t)}$. Damit können wir nun $H(u(t, \varphi))$ wie folgt berechnen:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h''(t)}{r'(t)} + \frac{h'(t)}{r(t)} \right) = \frac{(rh')'(t)}{(r^2)'(t)}.$$

Damit sehen wir, dass wir Bedingungen an K und H als Differentialgleichungen an r formulieren können, indem wir wenn notwendig noch $h'(t) = \pm\sqrt{1-r'(t)^2}$ einsetzen.

Wir wenden uns nun intrinsischen Aspekten von Drehflächen zu. Die Tatsache, dass die erste Fundamentalform diagonal ist sagt natürlich gerade, dass in jedem Punkt von $u(U) \subset M$ die Vektorfelder $\partial_1 u \circ u^{-1}$ und $\partial_2 u \circ u^{-1}$ eine Orthogonalbasis des Tangentialraumes bilden. Dadurch vereinfacht sich auch die Berechnung der Christoffel Symbole, weil für die inverse Matrix g^{ij} natürlich $g^{11} = 1/E$, $g^{12} = 0$ und $g^{22} = 1/G$ gilt. Durch Berechnen der inneren Produkte $\langle \partial_i \partial_j u, \partial_k u \rangle$ erhält man dann leicht $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$, sowie

$$\Gamma_{11}^1(t, \varphi) = \frac{r'(t)r''(t)+h'(t)h''(t)}{r'(t)^2+h'(t)^2} \quad \Gamma_{12}^2(t, \varphi) = \frac{r'(t)}{r(t)} \quad \Gamma_{22}^1(t, \varphi) = \frac{-r(t)r'(t)}{r'(t)^2+h'(t)^2}.$$

Die wesentliche Eigenschaft von Drehflächen ist natürlich die Rotationssymmetrie, die in den Überlegungen oben schon dadurch sichtbar war, dass alle Krümmungsgrößen in unserer Parametrisierung unabhängig von φ sind. Die Richtung der Rotationssymmetrie wird durch das Vektorfeld $\partial_2 u \circ u^{-1}$ bestimmt, das daher auch vom intrinsischen Standpunkt besondere Eigenschaften haben sollte. Dieses beschreibt die Tangentialvektoren an die "Breitenkreise", die man durch $c(\varphi) := u(t_0, \varphi)$ für fixes $t_0 \in I$ beschreiben kann, was gerade $c'(\varphi) = \partial_2 u(t_0, \varphi)$ liefert. Insbesondere ist $\nabla_{c'} c' = 0$ äquivalent zu $-r(t_0)r'(t_0) = 0$, also ist ein Breitenkreis genau dann eine Geodäte, wenn $r'(t_0) = 0$ gilt, also r bei t_0 einen kritischen Punkt hat. Allgemeiner können wir eine Eigenschaft von Geodäten auf einer Drehfläche beweisen, die eine gute qualitative Vorstellung ihres Verlaufes liefert.

PROPOSITION 6.1. *Betrachten wir eine Drehfläche $M \subset \mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung $u(t, \varphi) = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, h(t))$. Sei $c : J \rightarrow M$ eine Geodäte in M , die wir in der Parametrisierung als $c(s) = u(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ schreiben.*

Für $s \in J$ sei $\theta(s)$ der Winkel zwischen $c'(s)$ und dem Breitenkreis $\varphi \mapsto u(\gamma_1(s), \varphi)$. Dann ist $r(\gamma_1(s)) \cos(\theta(s))$ konstant.

BEWEIS. Setzen wir $\xi := \partial_1 u \circ u^{-1}$ und $\eta := \partial_2 u \circ u^{-1}$, dann wissen wir von oben, dass $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ gilt. Differenzieren wir das in Richtung ξ , dann erhalten wir aus Satz 5.4, dass $0 = \langle \nabla_\xi \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_\xi \eta \rangle$ gilt. Andererseits wissen wir von oben, dass $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$ gilt, was uns $\langle \nabla_\xi \eta, \xi \rangle = 0$ und $\langle \nabla_\eta \eta, \eta \rangle = 0$ liefert. Schreiben wir ein allgemeines Vektorfeld $\zeta = f_1 \xi + f_2 \eta$, dann folgt aus diesen Gleichungen leicht, dass $0 = \langle \nabla_\zeta \eta, \zeta \rangle$ gelten muss.

Damit können wir aber nun $\langle c'(s), \eta(c(s)) \rangle$ als glatte Funktion $J \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten. Differenzieren wir diese, dann erhalten wir nach Satz 5.4 gerade

$$\langle \nabla_{c'} c'(s), \eta(c(s)) \rangle + \langle c'(s), \nabla_{c'(s)} \eta(c(s)) \rangle.$$

Der erste Summand verschwindet, weil c eine Geodäte ist, der zweite nach unseren Überlegungen von oben, also ist $\langle c'(s), \eta(c(s)) \rangle$ konstant. Da $\eta(c(s))$ tangential zum "Breitenkreis" durch $c(s)$ ist, kann man dieses innere Produkt als $|c'(s)| |\eta(c(s))| \cos(\theta(s))$ expandieren. Aber aus 5.2 wissen wir, dass $|c'(s)|$ konstant ist und natürlich ist $|\eta(c(s))| = \sqrt{G} = r(\gamma_1(s))$. \square

Bewegt sich eine Geodäte in Richtung von abnehmendem Radius, dann muss also der Cosinus des Winkels zum Breitenkreis wachsen, der Winkel selbst also abnehmen. Damit wird also eine Geodäte auf einer Drehfläche bei abnehmendem Radius "flacher" und bei zunehmendem Radius "steiler".

6.2. Beispiele von Drehflächen. Für $r(t) = r_0 > 0$ und $h(t) = t$ erhalten wir einen Zylinder und damit nochmals die Resultate für die konstanten Krümmungen $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_2 = 1/r_0$. Vom intrinsischen Standpunkt zeigen unsere Formel sofort, dass alle Christoffel Symbole verschwinden. Damit haben aber die Vektorfelder $\partial_i u$ für $i = 1, 2$ verschwindende kovariante Ableitungen. Damit sehen wir sofort, dass für beliebige Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ die Kurve $c(s) := (r_0 \cos(as), r_0 \sin(as), bs)$ eine Geodäte auf dem Zylinder ist.

Für $I = (0, \infty)$, $r(t) = \cos at$ und $h(t) = \sin at$ für $\alpha \in (0, \pi/2)$ erhalten wir einen Kegel (ohne Spitze) und die Krümmungen $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_2 = \frac{\tan \alpha}{t}$, also verschwindet auch hier die Gaußkrümmung. Für die (möglicherweise nicht-trivialen) Christoffel Symbole erhalten wir $\Gamma_{11}^1 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = 1/t$ und $\Gamma_{22}^1 = -\cos^2 at$. Geodäten auf einem Kegel explizit zu beschreiben ist schon relativ aufwändig.

Wie in 6.1 beschrieben kann man Bedingungen an die Krümmungen einer Drehfläche als Differentialgleichungen an die Funktion $r(t)$ formulieren, wenn man die Parametrisierung der ursprünglichen Kurve als $(r(t), h(t))$ mit $r'(t)^2 + h'(t)^2 = 1$ schreibt. Insbesondere erhält man für konstante Gaußkrümmung K die Gleichung $r''(t) = -Kr(t)$. Für $K = 0$ liefert das $r(t) = at + r_0$ mit $a < 1$, was uns die Beispiele von Zylinder (für $a = 0$) und Kegel (für $a \neq 0$) von oben liefert.

Für $K = 1$ erhält man als grundlegende Lösungen $a \cos t + b \sin t$, wobei man einerseits natürlich die stehende Forderung $r(t) > 0$ in Betracht ziehen muss. Andererseits kann man durch eine Verschiebung des Parameters $b = 0$ erreicht und sich damit auf $r(t) = a \cos t$ für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ einschränken. Damit ist $r'(t)^2 = a^2 \sin^2 t$ und damit wir eine Lösung von $r'(t)^2 + h'(t)^2 = 1$ finden können, muss das ≤ 1 sein (was für $a > 1$ eine weitere Einschränkung an den Definitionsbereich von r liefert). Für $a = 1$ erhalten wir einfach $h(t) = \sin t$ und damit die Kugel (ohne Pol) die durch Rotation eines offenen

Halbkreises um eine Achse entsteht. Für $a \neq 1$ kann man $h(t) = \int_0^t \sqrt{1 - a^2 \sin^2(s)} ds$ definieren. Dies ist ein elliptisches Integral und kann daher nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden. Bilder den resultierenden Flächen finden sich in Bild 3.11 von [Kühnel].

Für $K = -1$ erhält man als einfachste Lösungen $r(t) = ae^{-t}$ und nach Einschränkung auf den passenden Definitionsbereich $h(t) = \int_0^t \sqrt{1 - a^2 e^{-2s}} ds$. Das liefert eine Bogenlängenparametrisierung der Schleppkurve oder Traktrix, die dadurch gekennzeichnet ist, dass die $c(t) + c'(t)$ immer auf der Rotationsachse liegt. Die entsprechende Drehfläche hat also konstante Gaußkrümmung -1 . Die allgemeine Lösungen für $K = -1$ kann man durch die Hyperbelfunktionen als $r(t) = a \cosh t + b \sinh t$ angeben.

Ein weiteres interessantes Beispiel einer Drehfläche liefert das sogenannte Katenoid, für das wir $r(t) = \cosh(t)$ und $h(t) = t$ setzen. Nach den bekannten Identitäten für diese Funktionen ist $r'(t) = \sinh t$ und damit $r'(t)^2 + h'(t)^2 = \cosh^2 t$. Damit liefern aber die allgemeinen Formeln für die Hauptkrümmungen der entsprechenden Drehfläche leicht $\kappa_1 = \frac{-1}{\cosh^2 t}$ und $\kappa_2 = \frac{1}{\cosh^2 t}$ und damit $H = 0$. Also ist das Katenoid eine Fläche mit verschwindender mittlerer Krümmung, eine sogenannte *Minimalfläche*. Wir werden uns mit diesen Flächen noch ausgiebiger beschäftigen.

Regelflächen

6.3. Regelflächen und Torsen. Man kann die Definition einer Drehfläche so interpretieren, dass sie aus einer glatten Familie von Kreisen um die z -Achse besteht. Analog dazu kann man Regelflächen als glatt parametrisierte Familien von Geraden auffassen.

DEFINITION 6.3. Eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Regelfläche* wenn sie lokal um jeden Punkt eine glatte lokale Parametrisierung der Form $u(t, s) := c(t) + sX(t)$ besitzen, wobei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve und $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein glattes Vektorfeld längs c ohne Nullstellen ist.

Offensichtlich erhält man für eine Parametrisierung wie in der Definition $\partial_1 u(t, s) = c'(t) + sX'(t)$ und $\partial_2 u(t, s) = X(t)$, also beinhaltet die Definition die implizite Forderung, dass diese beiden Vektoren für alle (t, s) im Definitionsbereich von u linear unabhängig sind. Natürlich wissen wir, dass lokal um (t_0, s_0) im Definitionsbereich $u(t_0, s) = c(t_0) + sX(t_0)$ ein Stück einer affinen Geraden ist, das in M liegt und daher eine Geodäte in M ist (vergleiche mit Abschnitt 5.2). Nachdem $X(t) \neq 0$ für alle t gilt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $|X(t)| = 1$ für alle $t \in I$ gilt, was natürlich $\langle X(t), X'(t) \rangle = 0$ impliziert.

Zylinder und Kegel sind offensichtlich nicht nur Drehflächen sondern auch Regelflächen. Man erhält für sie etwa die Parametrisierungen $c(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$, $X(t) = (0, 0, 1)$ für den Zylinder und für den Kegel $c(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$ und das Vektorfeld $X(t) = (-\sin \alpha \cos t, -\sin \alpha \sin t, \cos \alpha)$ für $\alpha \in (0, \pi/2)$ längs c . Analog kann man “Zylinder” oder “Kegel” über allgemeineren ebenen Kurven definieren, wobei man jeweils die Parameterbereiche für s passend einschränken muss, um Selbstdurchdringungen zu vermeiden. Ein interessantes Beispiel einer Fläche, die zugleich Drehfläche und Regelfläche ist, erhält man, wenn man wieder $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ betrachtet und das Vektorfeld längs c durch $X(t) = (-\sin \alpha \sin t, \sin \alpha \cos t, \cos \alpha)$ für $\alpha \in (0, \pi/2)$ definiert. Hier lässt man also eine “schräge” Gerade um den Einheitskreis rotieren. Es ist nicht offensichtlich, dass dies eine Drehfläche liefert, man rechnet aber sofort nach, dass alle Punkte der Fläche die Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2 \alpha z^2 = 1$ erfüllen. Das beschreibt ein einschaliges Hyperboloid, dass man offensichtlich auch als Drehfläche beschreiben kann.

Eine einfache Eigenschaft von Regelflächen ist folgende:

PROPOSITION 6.3. *Für jede Regelfläche M erfüllt die Gaußkrümmung K von M die Gleichung $K(x) \leq 0$ für alle $x \in M$.*

BEWEIS. Aus Abschnitt 4.9 wissen wir, dass wir im Bereich einer lokalen Parametrisierung u für M die Gaußkrümmung als $K \circ u = \det(II_{ij}^u) / \det(g_{ij}^u)$ schreiben können. Nun ist aber die Matrix (g_{ij}^u) immer positiv definit und hat daher positive Determinante, also genügt es zu zeigen, dass $\det(II_{ij}^u) = II_{11}^u II_{22}^u - (II_{12}^u)^2 \leq 0$ ist. Nun ist aber für eine Parametrisierung der Form $u(t, s) = c(t) + sX(t)$ offensichtlich $\partial_2 \partial_2 u(t, s) = 0$ für alle t und s , und damit ist auch $II_{22}^u(t, s) = 0$ für alle t und s und die Behauptung folgt. \square

Für eine Parametrisierung der Form $u(t, s) = c(t) + sX(t)$ erhalten wir natürlich $\partial_1 \partial_2 u(t, s) = X'(t)$. Damit sehen wir aus dem Beweis von Proposition 6.3 sofort, dass $K(u(t, s)) = 0$ genau dann gilt, wenn $\langle X'(t), \mathbf{n}(u(t, s)) \rangle = 0$ gilt.

Lokal um Punkte t_0 , in denen $X'(t_0) \neq 0$ gilt, kann man die Parametrisierung einer Regelfläche noch mehr spezialisieren, was einen interessanten Bezug zur Theorie der Raumkurven liefert. Auf einer Umgebung von t_0 kann man dann nämlich X als regulär parametrisierte Kurve in $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ betrachten und diese dann nach der Bogenlänge parametrisieren. Das liefert dann $|X'(t)| = 1$ für alle t , also bilden $X(t)$ und $X'(t)$ immer ein Orthonormalsystem. Betrachten wir eine Parametrisierung $u(t, s) = c(t) + sX(t)$ mit dieser Form, dann können wir natürlich noch die Kurve c variieren, indem wir den Ansatz $\hat{c}(t) = c(t) + s(t)X(t)$ machen. Dann ist aber $\hat{c}'(t) = c'(t) + s'(t)X(t) + s(t)X'(t)$ und damit liefert $s(t) = -\langle \hat{c}'(t), X'(t) \rangle$ eine eindeutige Wahl für \hat{c} , die als zusätzliche Bedingung $\langle \hat{c}'(t), X'(t) \rangle = 0$ erfüllt.

Betrachten wir also eine Parametrisierung $u(t, s) = c(t) + sX(t)$, die alle diese Bedingungen erfüllt, dann erhalten wir drei Funktionen in einer Variablen, die die Fläche beschreiben. Einerseits erhalten wir für den Koeffizienten F der ersten Fundamentalform gerade $\langle c'(t), X(t) \rangle$, also hängt dieser nur von t ab. Andererseits erhalten wir für jedes t eine Orthonormalbasis $\{X(t), X'(t), X(t) \times X'(t)\}$. Wegen $\langle c'(t), X'(t) \rangle = 0$ ist $c'(t)$ durch $F(t)$ und $\lambda(t) := \langle c'(t), X(t) \times X'(t) \rangle = \det(c'(t), X(t), X'(t))$ vollständig bestimmt. Andererseits wissen wir auch, dass $\langle X''(t), X'(t) \rangle = 0$ gilt, während differenzieren der Gleichung $0 = \langle X(t), X'(t) \rangle$ zeigt, dass $\langle X(t), X''(t) \rangle = -1$ gilt. Somit ist $X''(t)$ vollständig durch $J(t) := \langle X''(t), X(t) \times X'(t) \rangle = \det(X(t), X'(t), X''(t))$ bestimmt.

Damit haben wir (unter der Bedingung $X'(t) \neq 0$ für alle t) spezielle Parametrisierungen gefunden, die uns dann drei Funktionen von t liefern. Es stellt sich heraus, dass man umgekehrt zu drei solchen Funktionen eine Regelfläche findet, die bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt ist, siehe Satz 3.22 in [Kühnel]. Der wesentliche Schritt dazu ist, dass die Funktion J (die nur von X abhängt) zusammen mit $|X(t)| = 1$ eine bis auf Bewegungen eindeutige bogenlängenparametrisierte Kurve X bestimmt. Hat man diese, dann muss $c'(t) = F(t)X(t) + \lambda(t)(X(t) \times X'(t))$ gelten und durch Lösen dieser Gleichung erhält man eine Parametrisierung wie gewünscht.

Eine spezielle Klasse von Regelflächen sind die sogenannten *Torsen*. Man kann Torsen als jene Regelflächen definieren, bei denen für eine Parametrisierung wie in der Definition das Einheitsnormalenfeld parallel längs der Geradenstücke $s \mapsto c(t_0) + sX(t_0)$ für alle t_0 ist. Das impliziert natürlich, dass $T_{u(t_0, s)} \mathbf{n}(X(t_0)) = 0$ ist, also ist 0 ein Eigenwert der Weingartenabbildung und damit hat jede Torse verschwindende Gaußkrümmung.

Man kann relativ leicht zeigen, dass die Torsen genau die Regelflächen mit verschwindender Gaußkrümmung sind und alle solchen Flächen lokal beschreiben. Aus dieser Beschreibung schließt man dann, dass man jede Torse isometrisch in die Ebene abbilden kann, wobei die Geradenstücke wieder auf Geradenstücke abgebildet werden, siehe Satz 3.24 von [Kühnel]. Deshalb nennt man Torsen auch *abwickelbare* Regelflächen. (Die Tatsache, dass jede Torse lokal isometrisch zur Ebene folgt nach den allgemeinen Resultaten, die wir in 5.7 erwähnt haben, schon aus dem Verschwinden der Gaußkrümmung.)

Minimalflächen

Dreh- und Regelflächen waren durch die Existenz spezieller Parametrisierungen definiert. Als nächstes wenden wir uns einer Klasse von Flächen zu, die von ganz anderer Natur ist, weil sie durch eine geometrische Bedingung an die Flächen definiert wird. Diese erlaubt einerseits eine schönen Charakterisierung in Termen des Flächeninhaltes andererseits ergeben sich interessante Bezüge zu verschiedenen Teilen der Analysis.

6.4. Minimalflächen und Flächeninhalt. Wir nennen eine glatte Hyperfläche M in \mathbb{R}^{n+1} eine *Minimalfläche*, wenn ihre mittlere Krümmung identisch verschwindet. Neben dem offensichtlichen Beispiel von affinen Hyperebenen haben wir auch schon in Abschnitt 6.2 das Katenoid als Beispiel einer Drehfläche kennen gelernt, die eine Minimalfläche ist. Der Schlüssel zum Verständnis der geometrischen Bedeutung der Begriffs der Minimalfläche ergibt sich aus Überlegungen zum “Volumen” von M (also für $n = 2$ zum Flächeninhalt), das wir hier nur kurz besprechen.

Betrachten wir also eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Da wir das innere Produkt auf \mathbb{R}^{n+1} zur Verfügung haben, haben wir automatisch auch einen Volumensbegriff auf jedem Teilraum. Dazu verlangt man einfach, dass jede Orthonormalbasis ein Einheitsvolumen aufspannt. Für uns genügt es, das Verhalten der Flächenelemente unter lokalen Parametrisierungen zu studieren. Betrachten wir also eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist. Für jedes $z \in U$ sind dann die Vektoren $\partial_i u(z)$ eine Basis für $T_{u(z)}M$ und wir können das Volumen berechnen, dass diese Basis aufspannt. Wählen wir eine Orthonormalbasis $\{X_k\}$ für $T_{u(z)}M$ und entwickeln $\partial_i u(z) = \sum_k a_i^k X_k$, dann ist dieses Volumen durch $|\det(a_i^k)|$ gegeben. Andererseits können wir die Koeffizienten der ersten Fundamentalform als $g_{ij}^u(z) = \sum_k a_i^k a_j^k$ berechnen, also ist $(g_{ij}^u(z))$ gerade das Produkt der Matrix (a_i^k) und ihrer Transponierten, können wir das Volumen auch als $\sqrt{\det(g_{ij}^u(z))}$ berechnen. Sofern diese Volumen endlich ist, ist also das Volumen von $u(U) \subset M$ gerade durch $\int_U \sqrt{\det(g_{ij}^u(z))} dz$ gegeben.

Nun stellen wir uns die Frage, wie sich dieses Volumenelement unter kleinen Variationen der Fläche verändert. Die Idee hier ist, dass man kleine Variationen der Fläche beschreiben kann, indem man jeden Punkt $x \in M$ normal zur Fläche bewegt, wobei die Distanz durch eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben wird. Diese Änderung der Fläche kann man nun mit einem Parameter skalieren. Im Definitionsbereich eines Einheitsnormalenfeldes kann man dann die entstehende Familie von Flächen als $M_\epsilon := \{x + \epsilon f(x) \mathbf{n}(x) : x \in M\}$ schreiben. Für eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$, sodass $u(U)$ im Definitionsbereich von \mathbf{n} enthalten ist, erhält man dann eine Funktion $u_\epsilon : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, die durch $u_\epsilon(z) = u(z) + \epsilon f(u(z)) \mathbf{n}(u(z))$ definiert ist. Für die partiellen Ableitungen erhält man

$$\partial_i u_\epsilon = \partial_i u + \epsilon \partial_i (f \circ u) \mathbf{n} \circ u + \epsilon (f \circ u) \partial_i (\mathbf{n} \circ u).$$

Benutzen wir nun $\langle \partial_i(\mathbf{n} \circ u), \partial_j u \rangle = II_{ij}^u$, dann erhalten wir sofort

$$\langle \partial_i u_\epsilon, \partial_j u_\epsilon \rangle = g_{ij}^u + 2\epsilon(f \circ u)II_{ij}^u + O(\epsilon^2).$$

Wir werden an dieser Stelle formal weiter rechnen und uns nicht darum kümmern unter welchen Voraussetzungen an f man sicherstellen kann, dass für hinreichend kleines ϵ die Funktion u_ϵ tatsächlich eine reguläre Hyperfläche parametrisieren. Wenn das der Fall ist, dann haben wir gerade deren erste Fundamentalform (bis auf $O(\epsilon^2)$ berechnet) und das genügt um die infinitesimale Änderung (also die Ableitung der Volumensform als Funktion von ϵ) bei $\epsilon = 0$ zu berechnen.

Dazu genügt es zu beobachten, dass

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \det(g_{ij}^u + 2\epsilon f II_{ij}^u + O(\epsilon^2)) = \text{tr}(g^{ik} 2f II_{kj}^u) = 2fH$$

gilt. Damit erhält man für die infinitesimale Änderung des Volumenelements gerade den Ausdruck $\frac{fH}{\sqrt{\det(g_{ij}^u)}}$ und der (automatisch positive) Nenner spielt keine große Rolle. Damit sehen wir, dass diese infinitesimale Änderung genau dann für beliebiges f verschwindet, wenn M eine Minimalfläche ist. In diesem Sinn sind also Minimalflächen kritisch für das Volumenelement.

Man kann aus dieser Rechnung zum ‘‘Volumenelement’’ Aussagen über Volumina ableiten, indem man den Integralbegriff für Funktionen verwendet, wie wir sie in 6.8 entwickeln werden. Dann kann man das Volumen einer kompakten Teilmannigfaltigkeit als das Integral über die konstante Funktion 1 definieren. Für eine Variation M_ϵ wie oben, die durch eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben wird, kann man dann sehen, dass das Volumen für hinreichend kleine ϵ (sodass M_ϵ immer noch eine glatte Teilmannigfaltigkeit ist) glatt von ϵ abhängt. Dann kann man die Ableitung bei $\epsilon = 0$ berechnen und erhält das Integral über das Produkt von fH mit einer positiven Funktion. Ist M keine Minimalfläche, dann kann man durch die Wahl von $f = -H$ (auch lokal) die Fläche immer so deformieren dass das Volumen kleiner wird. Besonders interessant werden diese Überlegungen für Flächen mit Rand, wobei man den Rand festhält. Betrachtet man etwa das Katenoid aus Abschnitt 6.2 und schneidet es mit der Teilmenge $\mathbb{R}^2 \times [a, b]$ für $a < b \in \mathbb{R}$, dann erhält man eine Fläche, deren Rand zwei Kreise (im Allgemeinen mit verschiedenen Radien) sind. Das Verschwinden der mittleren Krümmung impliziert dann, dass bei vorgegebenem Rand, das Katenoid die Fläche mit minimalem Flächeninhalt ist, die man in diese Rand ‘‘einspannen’’ kann. Ähnliche Überlegungen kann man dann für allgemeinere Ränder anstellen, insbesondere beschreibt das dann die Flächen, die von Seifenhäuten aufgespannt werden.

6.5. Konforme Parametrisierungen. Man nennt eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ einer Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ *konform*, wenn die Koeffizienten der ersten Fundamentalform in jedem Punkt $z \in U$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix bilden, also $g_{ij}^u(z) = \lambda(z)\delta_{ij}$ für eine glatte Funktion $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ gilt (die wegen der positiven Definitheit positive Werte haben muss). Allgemeiner nennt man für Riemann Mannigfaltigkeiten (M, h) und (\tilde{M}, \tilde{h}) einen lokalen Diffeomorphismus $f : M \rightarrow \tilde{M}$ konform, wenn $\tilde{h}_{f(x)}(T_x f(X), T_x f(Y)) = \lambda(x)h_x(X, Y)$ für alle Punkt $x \in M$ und Tangentialvektoren $X, Y \in T_x M$ gilt. Man erhält in dieser Situation ebenfalls eine glatte Funktion $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit positiven Werten.

Betrachten wir nun eine Minimalfläche M der Dimension $n = 2$ ohne Flachpunkte. Dann gilt für die Hauptkrümmungen in jedem Punkt $x \in M$ natürlich $0 \neq \kappa_1(x) = -\kappa_2(x)$, also ist die Weingartenabbildung L_x immer invertierbar. Betrachtet man eine lokales Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} als Gaußabbildung nach S^2 dann sagt das gerade, dass

\mathbf{n} ein lokaler Diffeomorphismus ist. In einer Eigenbasis für L_x folgt sofort, dass $L_x^2 = -K(x)\text{id}$ gilt und mit Hilfe der Symmetrie der Weingartenabbildung (Proposition 4.7) erhält man

$$\langle T_x \mathbf{n}(X), T_x \mathbf{n}(Y) \rangle = \langle L_x(X), L_x(Y) \rangle = \langle X, L_x^2(Y) \rangle.$$

Damit ist aber die Gaußabbildung konform. Man kann leicht zeigen, dass für jedes n die Sphäre S^n konforme Parametrisierungen besitzt (“stereographische Projektion”). Explizit ist so eine Parametrisierung für $S^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ durch die Funktion $u(z) := (\frac{2}{|z|^2+1}z, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1})$ gegeben (siehe Übungen). Komponiert man diese Parametrisierung (für $n = 2$) mit einer lokalen Inversen der Gaußabbildung dann sieht man, dass jede Minimalfläche ohne Flachpunkte konforme Parametrisierungen besitzt.

Damit ergibt sich die Frage, wann eine konforme Parametrisierung eine Minimalfläche liefert, was sich aber recht leicht berechnen lässt:

PROPOSITION 6.5. *Sie $u : U \rightarrow M$ eine konforme Parametrisierung einer Fläche mit erster Fundamentalform $g_{ij}^U(z) = \lambda(z)\delta_{ij}$ und sei $\Delta u := \partial_1 \partial_1 u + \partial_2 \partial_2 u : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann gilt für ein lokales Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} , dass auf $u(U)$ definiert ist die Gleichung $\Delta u = -2\lambda H(\mathbf{n} \circ u)$. Insbesondere ist $u(U)$ genau dann eine Minimalfläche wenn die Komponentenfunktionen von u harmonisch sind.*

BEWEIS. Nach Definition gilt $\langle \partial_1 u, \partial_1 u \rangle = \lambda = \langle \partial_2 u, \partial_2 u \rangle$ und $\langle \partial_1 u, \partial_2 u \rangle = 0$. Durch partielles Ableiten erhalten wir

$$\langle \partial_1 \partial_1 u, \partial_1 u \rangle = \langle \partial_1 \partial_2 u, \partial_2 u \rangle = -\langle \partial_1 u, \partial_2 \partial_2 u \rangle.$$

Also gilt $\langle \Delta u, \partial_1 u \rangle = 0$ und analog erhält man $\langle \Delta u, \partial_2 u \rangle = 0$. Also muss $\Delta u(z)$ proportional zu $\mathbf{n}(u(z))$ für alle $z \in U$ sein. Andererseits wissen wir aber, dass $\langle \partial_i \partial_i u, \mathbf{n} \circ u \rangle = -II_{ii}^u$ für $i = 1, 2$ gilt. Damit ist aber $\langle \Delta u, \mathbf{n} \circ u \rangle = -2\lambda H$ und die Behauptung folgt. \square

Damit ergibt sich eine schöne Verbindung zur komplexen Analysis. Aus der Vorlesung über komplexe Analysis ist bekannt dass der Real- und der Imaginärteil einer holomorphen Funktion automatisch harmonisch sind. Damit kann man holomorphe Funktionen benutzen um lokale Beispiele von Minimalflächen zu konstruieren, siehe Kapitel 3D von [Kühnel].

Der Satz von Gauß-Bonnet

Unser letztes Thema in der Vorlesung ist ein Satz, der die intrinsische Natur der Gaußkrümmung besonders deutlich macht, weil er sie in Zusammenhang mit der Winkelsumme in geodätischen Dreiecken bringt. Andererseits liefert der Satz ein fundamentales Resultat zur globalen Theorie der Flächen. Um technische Schwierigkeiten zu vermeiden, werden wir uns auf einen Überblick beschränken und nicht alle Beweise im Detail ausführen.

6.6. Lokale orthonormale Rahmen. Die Krümmungen, die wir für Hyperflächen gefunden haben, sind lokale Invarianten. Die Existenz dieser Invarianten impliziert, dass Hyperflächen auch lokal nicht alle gleich “aussehen” und intrinsische Invarianten implizieren, dass das nicht nur die Lage im \mathbb{R}^{n+1} betrifft sondern auch “von innen” sichtbar ist. Die Formeln für die Christoffel Symbole in Satz 5.4 und Formel (5.9) für die Riemannkrümmung zeigen, dass schon die zweiten Ableitungen der ersten Fundamentalform in einem Punkt Informationen über die Krümmung enthalten. Das schränkt die Möglichkeiten, lokale Parametrisierungen an eine Riemann Metrik anzupassen, ziemlich ein. Viel weniger problematisch ist es, lokale Vektorfelder zu finden, die an eine Riemann Metrik angepasst sind.

DEFINITION 6.6. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit und h eine Riemann Metrik auf M . Ein *lokaler orthonormaler Rahmen* für M auf einer offenen Teilmenge $V \subset M$ ist eine Familie von auf V definierten lokalen Vektorfeldern X_1, \dots, X_k auf M , sodass für jeden Punkt $x \in V$ die Werte $X_1(x), \dots, X_k(x) \in T_x M$ orthonormal bezüglich h_x sind.

Man kann allgemein zeigen, dass es im Bereich einer lokalen Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ für M immer lokale orthonormale Rahmen gibt. Für Flächen in \mathbb{R}^3 (mit der induzierten Metrik) wird der Beweis besonders einfach, weil wir da wissen, dass es ein auf $u(U) \subset M$ definiertes lokales Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} gibt. Dann können wir einfach $X_1(u(z)) := \frac{1}{|\partial_1 u(z)|}$ und $X_2(u(z)) := \mathbf{n}(u(z)) \times X_1(u(z))$ definieren. (Wir haben die Wahl von X_2 so getroffen, dass in jedem Punkt $\{X_1(x), X_2(x), \mathbf{n}(x)\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis für \mathbb{R}^3 ist.) In höheren Dimensionen beweist man das mit Hilfe des Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahrens.

In so eine orthonormalen Rahmen lässt sich dann handlich rechnen: Man kann jedes auf V definierte lokale Vektorfeld ξ als $\xi = \langle \xi, X_1 \rangle X_1 + \langle \xi, X_2 \rangle X_2$ schreiben. Differenziert man die Gleichungen, dass $\langle X_i, X_j \rangle$ für alle i, j konstant ist, in Richtung ξ , dann erhält man $0 = \langle \nabla_\xi X_i, X_i \rangle$ und $\langle \nabla_\xi X_1, X_2 \rangle = -\langle X_1, \nabla_\xi X_2 \rangle$. In Dimension 2 kann man damit die kovariante Ableitung schön durch eine einzige Größe beschreiben: Für einen Punkt $x \in V$ kann man $X \mapsto \langle \nabla_\xi X_1(x), X_2(x) \rangle$ für ein lokales Vektorfeld ξ mit $\xi(x) = X$ als lineare Abbildung $T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten. Bezeichnet man diese mit $\omega(x)$, dann haben wir eine Funktion definiert, die jedem Punkt $x \in V$ ein lineares Funktional auf dem Tangentialraum $T_x M$ zuordnet. Dieses hängt glatt von x ab in dem Sinne, dass für jedes Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(V)$ die Funktion $\omega(\xi) : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega(\xi)(x) := \omega(x)(\xi(x))$ glatt ist. Analog zu Abschnitt 2.7 nennt man so ein Objekt eine glatte 1-Form auf V .

Aus den obigen Überlegungen können wir sofort ablesen, dass $\nabla_\xi X_1 = \omega(\xi) X_2$ und $\nabla_\xi X_2 = -\omega(\xi) X_1$ gilt. Schreibt man dann wie oben $\eta = f_1 X_1 + f_2 X_2$ und benutzt die Regeln aus Proposition 5.4, dann erhält man

$$\nabla_\xi \eta = \nabla_\xi(f_1 X_1) + \nabla_\xi(f_2 X_2) = (\xi \cdot f_1 - \omega(\xi) f_2) X_1 + (\xi \cdot f_2 + \omega(\xi) f_1) X_2.$$

Daraus lässt sich auch die Krümmung schön beschreiben. Wenden wir ein lokales Vektorfeld ξ auf $\omega(\eta) = \langle \nabla_\eta X_1, X_2 \rangle$ an, dann erhalten wir wiederum nach Proposition 5.4 den Ausdruck $\langle \nabla_\xi \nabla_\eta X_1, X_2 \rangle + \langle \nabla_\eta X_1, \nabla_\xi X_2 \rangle$. Wir wissen aber bereits, dass $\nabla_\eta X_1$ proportional zu X_2 und $\nabla_\xi X_2$ proportional zu X_1 ist, also verschwindet der zweite Summand. Damit ergibt sich

$$\xi \cdot \omega(\eta) - \eta \cdot \omega(\xi) - \omega([\xi, \eta]) = \langle R(\xi, \eta)(X_1), X_2 \rangle.$$

Nun können wir noch ξ und η als Linearkombinationen von X_1 und X_2 schreiben und den Beweis von Satz 5.6 benutzen. Dort haben wir gesehen habe, dass $\langle R(X_1, X_2)(X_1), X_2 \rangle = -K$ gilt, wobei K die Gaußkrümmung bezeichnet. Damit erhalten wir

$$\xi \cdot \omega(\eta) - \eta \cdot \omega(\xi) - \omega([\xi, \eta]) = (-\langle \xi, X_1 \rangle \langle \eta, X_2 \rangle + \langle \eta, X_1 \rangle \langle \xi, X_2 \rangle) K.$$

6.7. Geodätische Krümmung. In seiner einfachsten Form studiert der Satz von Gauß-Bonnet ein Analogon der totalen Krümmung für regulär parametrisierte geschlossene Kurven $c : I \rightarrow M$ in einer Fläche M . Dabei nehmen wir zusätzlich an, dass wir ein Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} auf M gegeben haben, dass lokal um $c(I)$ definiert ist. Für eine glatte Kurve $c : I \rightarrow M$ haben wir die Ableitung $c' : I \rightarrow M$, die $c'(t) \in T_{c(t)} M$ erfüllt und wir verlangen, dass $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. In Analogie zu den Überlegungen über Frenet Kurven in Kapitel 2 können wir nun ein Begleitbein betrachten, das an M angepasst ist. Definieren wir $\tau_1(t) := c'(t)/|c'(t)|$ und $\tau_3(t) = \mathbf{n}(c(t))$ und

$\tau_2(t) := \tau_3(t) \times \tau_1(t)$, dann ist $\{\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t)\}$ für jedes t eine positiv orientierte Orthonormalbasis für \mathbb{R}^3 .

Nun definieren wir die *geodätische Krümmung* κ_g von c als $\langle \tau_1'(t), \tau_2(t) \rangle$. Natürlich ändert sich das innere Produkt nicht, wenn man $\tau_1'(t)$ zuerst orthogonal in den Tangentialraum $T_{c(t)}M$ projiziert, also gilt auch $\kappa_g(t) = \langle \nabla \tau_1(t), \tau_2(t) \rangle$. Ist $\hat{c} = c \circ \varphi$ eine orientierungstreue Reparametrisierung, dann folgt leicht $\hat{\tau}_i(s) = \tau_i(\varphi(s))$ und damit $\hat{\kappa}_g(s) = \kappa_g(\varphi(s))\varphi'(s)$. Daraus sehen wir einerseits, dass die Eigenschaft, dass $\kappa_g = 0$ ist, unabhängig von Reparametrisierungen ist. Parametrisieren wir die Kurve aber so, dass $\langle c'(t), c'(t) \rangle$ konstant ist, dann ist $\tau_1(t)$ ein konstantes Vielfaches von $c'(t)$, also $\tau_1'(t)$ ein konstantes Vielfaches von $c''(t)$. Andererseits folgt $0 = \langle c''(t), c'(t) \rangle$, also ist $\kappa_g = 0$ äquivalent dazu, dass $c''(t)$ proportional zu $\mathbf{n}(t)$ und damit c ein Geodäte ist. Andererseits sehen wir, dass $\int_c \kappa_g$ parametrisierungsunabhängig definiert ist.

Die einfachste Version des Satzes von Gauß-Bonnet kann man dann mit dem Satz von Green in der Ebene beweisen:

SATZ 6.7. *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Gaußkrümmung $K : M \rightarrow \mathbb{R}$, $U := B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ der Ball um 0 mit Radius $r > 1$, $B := \bar{B}_1(0) \subset U$ der abgeschlossene Einheitsball. Sei $u : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung und $c : [0, 2\pi] \rightarrow M$ die regulär parametrisierte glatte Kurve $c(t) := u(\cos t, \sin t)$. Sei $\mathbf{n} : u(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Einheitsnormalenfeld, das durch Normieren von $\partial_1 u \times \partial_2 u$ erhalten wird. Dann gilt*

$$\int_c \kappa_g + \int_B (K \circ u) \sqrt{\det(g_{ij}^u)} = 2\pi.$$

BEWEISSKIZZE. Unsere Wahl von \mathbf{n} ist so getroffen, dass für jedes $x = u(z) \in u(U)$ die Basis $\{\partial_1 u(z), \partial_2 u(z), \mathbf{n}(x)\}$ positiv orientiert ist. Aus 6.6 wissen wir, dass wir im Bereich der lokalen Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ einen lokalen orthonormalen Rahmen $\{X_1, X_2\}$ finden können, sodass $\{X_1(x), X_2(x), \mathbf{n}(x)\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis für \mathbb{R}^3 ist. Analog zu den Überlegungen über Polarkoordinaten in 2.6 können wir nun eine glatte "Winkelfunktion" $\theta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren, sodass $\tau_1(t) = \cos(\theta(t))X_1(c(t)) + \sin(\theta(t))X_2(c(t))$. Lokal um jedes t ist diese Funktion durch eine der beiden Gleichungen

$$(6.1) \quad \cos(\theta(t)) = \langle \tau_1(t), X_1(c(t)) \rangle \quad \sin(\theta(t)) = \langle \tau_1(t), X_2(c(t)) \rangle$$

eindeutig bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmt. Das impliziert aber leicht, dass man lokale Wahlen für solche Funktionen glatt zusammensetzen kann. Weil $\{\tau_1(t), \tau_2(t), \mathbf{n}(c(t))\}$ positiv orientiert ist, folgt

$$\tau_2(t) = -\sin(\theta(t))X_1(c(t)) + \cos(\theta(t))X_2(c(t)).$$

Nach Konstruktion kann man c periodisch glatt fortsetzen, also gilt $c'(2\pi) = c'(0)$. Damit ist $\theta(2\pi) - \theta(0)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π , das man als $\int_0^{2\pi} \theta'(t) dt$ berechnen kann.

Der Beweis besteht aus zwei Schritten, die ganz unabhängig voneinander sind. Einerseits kann man $\theta'(t)$ analysieren und damit das Integral durch ein Integral über die geodätische Krümmung von c und (mit Hilfe des Satzes von Green) ein Integral über den abgeschlossenen Einheitsball ausdrücken. Andererseits müssen wir zeigen, dass analog zum Hopfschen Umlaufsatz $\theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi$ gilt.

Für den ersten Schritt differenzieren wir die erste Gleichung aus (6.1) und erhalten

$$-\sin(\theta(t))\theta'(t) = \langle \nabla \tau_1(t), X_1(c(t)) \rangle + \langle \tau_1(t), \nabla_{c'(t)} X_1(c(t)) \rangle$$

Für den ersten Summanden verifiziert man sofort, dass $X_1(c(t)) = \cos(\theta(t))\tau_1(t) - \sin(\theta(t))\tau_2(t)$ gilt, setzt das ein und benutzt $\langle \nabla \tau_1, \tau_1 \rangle = 0$. Im zweiten Summanden

kann man direkt die Zerlegung von $\tau_1(t)$ einsetzen und benutzen, dass $\langle X_1, \nabla X_1 \rangle = 0$ gilt. Insgesamt erhalten wir

$$-\sin(\theta(t))\theta'(t) = \sin(\theta(t))(-\langle \nabla \tau_1(t), \tau_2(t) \rangle + \langle X_2(c(t)), \nabla_{c'(t)} X_1(c(t)) \rangle).$$

Ist $\sin(\theta(t)) \neq 0$, dann können wir dividieren und erhalten $\theta'(t) = \kappa_g(t) - \omega(c(t))(c'(t))$, wobei ω die 1-Form aus 6.6 ist. Für Punkte mit $\sin(\theta(t)) = 0$ erhält man den gleichen Ausdruck für $\theta'(t)$, indem man analog die zweite Gleichung aus (6.1) differenziert.

Damit können wir dass $\theta(2\pi) - \theta(0) - \int_0^{2\pi} \kappa_g(t)$ als ein Integral einer 1-Form über den Einheitskreis in U schreiben. Explizit können wir diese 1-Form als $f dx + g dy$ schreiben, wobei $f(z) = -\omega(u(z))(\partial_1 u(z))$ und $g(z) = -\omega(u(z))(\partial_2 u(z))$. Nach dem Satz von Green gilt $\int_{S^1} (f dx + g dy) = \int_{\bar{B}_1(0)} \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dy$. Nun ist aber leicht einzusehen, dass $\frac{\partial f}{\partial y} = -\partial_2 u(z) \cdot \omega(u(z))(\partial_1 u(z))$ und analog für $\frac{\partial g}{\partial x}$. Da $[\partial_1 u \circ u^{-1}, \partial_2 u \circ u^{-2}] = 0$ gilt, folgt aus 6.6 sofort, dass

$$-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} = K(\langle \partial_1 u, X_1 \rangle \langle \partial_2 u, X_2 \rangle - \langle \partial_1 u, X_2 \rangle \langle \partial_2 u, X_1 \rangle).$$

Der Klammerausdruck in der rechten Seite ist (in jedem Punkt) die Determinante der Matrix der Koordinatenvektoren von $\partial_1 u$ und $\partial_2 u$ bezüglich der Orthonormalbasis $\{X_1, X_2\}$. Nach Konstruktion sind diese Basen gleich orientiert, also ist diese Determinante positiv. Damit wissen wir aus 6.4, dass man die rechte Seite als $K \sqrt{\det(g_{ij}^u)}$ schreiben kann.

Für den zweiten Beweisschritt ist es besser, nicht mehr auf $u(U) \subset M$ zu rechnen, sondern nur noch auf U . Man kann die Funktion θ auch auf U berechnen. Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform $(g_{ij}^u(z))$ beschreiben ja gerade das innere Produkt auf \mathbb{R}^2 , das man durch zurückziehen von $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_{u(z)}M}$ längs des linearen Isomorphismus $Du(z)$ erhält. Zusätzlich können wir beobachten, dass $\theta(2\pi) - \theta(0)$ unabhängig von der Wahl der (richtig orientierten) Basis $\{X_1, X_2\}$ ist. Damit können wir die Funktion θ auch auf U berechnen, indem wir etwa die Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ für den Tangentialraum in jedem Punkt $z \in U$ bezüglich des inneren Produkts $(g_{ij}^u(z))$ zu eine Basis $\{X_1(z), X_2(z)\}$ orthonormalisieren. Für $t \in [0, 2\pi]$ können wir dann im Punkt $z(t) = (\cos t, \sin t)$ den Vektor $(-\sin t, \cos t)$ bezüglich $(g_{ij}^u(z(t)))$ zu $\tau_1(t) \in \mathbb{R}^2$ normieren und dann die Winkelfunktion über die analogen Gleichung zu (6.1) mit dem inneren Produkt $(g_{ij}^u(z(t)))$ konstruieren.

Für $s \in [0, 1]$ definieren wir nun $h_{ij}^s(z) := s\delta_{ij} + (1-s)g_{ij}^u(z)$ und betrachten die symmetrische Matrix $(h_{ij}^s(z))$. Man sieht leicht, dass diese Matrix für jedes $s \in [0, 1]$ positiv definit ist und damit ein inneres Produkt auf \mathbb{R}^2 beschreibt. Damit kann man aber jetzt den obigen Prozess für alle s durchführen. Man orthonormalisiert also zunächst $\{e_1, e_2\}$ zu einer Basis $\{X_1^s(z), X_2^s(z)\}$, die orthonormal für $(h_{ij}^s(z))$ ist. Aus der Form des Gram-Schmidt Verfahrens folgt sofort, dass $(s, z) \mapsto X_i^s(z)$ für $i = 1, 2$ eine glatte Funktion $[0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert und natürlich ist $X_i^1(z) = e_i$ für $i = 1, 2$ und jedes $z \in U$. Analog zu den Überlegungen zur Homotopie im Beweis von Satz 3.3 kann man dann auch die Winkelfunktion θ zu einer glatten Familie $\theta^s(t)$ ausdehnen. Dabei muss man natürlich den Vektor $(-\sin t, \cos t)$ bezüglich $(h_{ij}^s(z(t)))$ normieren und erhält $\theta^s(t)$ zunächst lokal in beiden Variablen, globalisiert dann in s und danach in t . Jedenfalls ist aber $\theta^s(2\pi) - \theta^s(0)$ immer ein ganzzahliges Vielfaches von 2π und weil das stetig von s abhängt muss es konstant sein. Nach Konstruktion ist aber $\theta^1(t) = t$, also $\theta^s(2\pi) - \theta^s(0) = 2\pi$ für alle s . \square

6.8. Integrale und der Satz von Stokes. Der erste Schritt zur Verallgemeinerung ist, über den Bereich einer lokalen Parametrisierung hinauszugehen. Das Integral der geodätischen Krümmung bereitet hier kaum Probleme, sofern man annimmt, dass man ein lokal um $c(I)$ definiertes Einheitsnormalenfeld zur Verfügung hat. Jedenfalls funktioniert das auf *orientierten Flächen*, bei denen man eine globales Einheitsnormalenfeld gewählt hat (was natürlich nur auf orientierbaren Flächen möglich ist). Für das zweite Integral in Satz 6.7 und eine bessere Version des Satzes von Green ist größerer technischer Aufwand nötig.

Beim Thema Integration gibt es zwei Zugängen, die beiden auf die Frage aufbauen, wie man wohldefiniert über den Bereich einer lokalen Parametrisierung integrieren kann, die mit Hilfe des Transformationssatzes für Mehrfachintegrale beantwortet wird. Zum einen stellt sich heraus, dass man auf Riemann Mannigfaltigkeiten (und damit auf Teilmannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n mit der induzierten Riemann Metrik) einen wohldefinierten Integralbegriff für Funktionen entwickeln kann (der keine Orientierung benötigt). Den Schlüssel dazu liefert das Volumenelement $\sqrt{\det(g_{ij}^u)}$. Andererseits kann man auf orientierten Mannigfaltigkeiten Differentialformen integrieren, was gemeinsam mit dem Begriff einer Mannigfaltigkeit mit Rand auch zu einer allgemeinen Version des Satzes von Green führt.

Erinnern wir uns zunächst an die Definition des *Trägers* $\text{supp}(f)$ einer glatten Funktion f als den Abschluss der Menge $\{x : f(x) \neq 0\}$. Das macht natürlich auch für Vektorfelder und ähnliche geometrische Objekte Sinn. Betrachten wir nun eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, eine lokale Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ und eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, der in $u(U)$ enthalten ist. Dann definiert $(f \circ u)\sqrt{\det(g_{ij}^u)}$ eine glatte Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}$ und weil $u^{-1} : u(U) \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist, ist der Träger dieser Funktion gerade $u^{-1}(\text{supp}(f))$ und damit kompakt. Also kann man problemlos das Integral $\int_U f(u(z))\sqrt{\det(g_{ij}^u(z))}dz \in \mathbb{R}$ bilden. Die entscheidende Beobachtung ist nun, dass dieses Integral invariant unter Reparametrisierungen ist.

Betrachten wir dazu eine lokale Parametrisierung $v : V \rightarrow M$ mit $v(V) = u(U)$, dann ist $\varphi := v^{-1} \circ u : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus, sodass $v \circ \varphi = u$ gilt. Wir haben schon in 4.1 gezeigt, dass daraus $(g_{ij}^u(y)) = (D\varphi(y))^t(g_{ij}^v(\varphi(y)))(D\varphi(y))$ folgt. Damit erhalten wir aber

$$\sqrt{\det(g_{ij}^u(y))} = |\det(D\varphi(y))|\sqrt{\det(g_{ij}^v(\varphi(y)))}$$

und nach dem Transformationssatz für Mehrfachintegrale folgt

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(U)} (f \circ v)(z)\sqrt{\det(g_{ij}^v(z))}dz &= \int_U (f \circ v \circ \varphi)(y)\sqrt{\det(g_{ij}^v(\varphi(y)))}|\det(D\varphi(y))|dy \\ &= \int_U f(u(y))\sqrt{\det(g_{ij}^u(y))}dy. \end{aligned}$$

Für den zweiten möglichen Integralbegriff definiert man eine k -Form auf einer k -dimensionalen Teilmannigfaltigkeit M als eine Funktion τ , die jedem Punkt $x \in M$ in glatter Weise eine k -lineare, alternierende Abbildung $\tau(x) : (T_x M)^k \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnet. Die Glattheit ist wieder so definiert, dass für Vektorfelder $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$ mit $i = 1, \dots, k$ die Funktion

$$\tau(\xi_1, \dots, \xi_k) \quad x \mapsto \tau(x)(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x))$$

immer glatt ist. Insbesondere bilden die k -linearen alternierenden Abbildungen $(\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$ einen endlichdimensionalen Vektorraum und man erhält aus einer glatte Funktion von einer offenen Umgebung von M in \mathbb{R}^n eine k -Form auf M , indem man einfach auf die Tangentialräume einschränkt. Man kann problemlos vom Träger $\text{supp}(\tau)$ einer k -Form τ sprechen. Ist $\text{supp}(\tau)$ kompakt und im Bild einer lokalen Parametrisierung $u : U \rightarrow M$ enthalten, dann definiert $z \mapsto \tau(u(z))(\partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z))$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger auf U , die man problemlos über U integrieren kann.

Das Verhalten dieser Funktion unter Reparametrisierungen kann man leicht berechnen, wenn man sich daran erinnert, dass sich k -lineare alternierende lineare Abbildungen auf k -dimensionalen Räumen mit der Determinante transformieren. Damit sieht man dann, dass das Integral $\int_U \tau(u(z))(\partial_1 u(z), \dots, \partial_k u(z))$ bis auf sein Vorzeichen unabhängig von Reparametrisierungen ist. Das Problem mit dem Vorzeichen kann man lösen, indem man den Begriff der *orientierten Mannigfaltigkeit* entwickelt. Das erlaubt es, lokale Parametrisierungen in zwei Klassen zu teilen, nämlich orientierungstreue und orientierungsvertauschende. Schränkt man sich dann auf orientierungstreue lokale Parametrisierungen ein, dann erhält man ein Integral, das invariant unter orientierungstreuen Reparametrisierungen ist.

Mit Hilfe von *Partitionen der Eins* kann man dann sowohl das Integral für Funktionen auf Riemann Mannigfaltigkeiten als auch das Integral über Differentialformen auf allgemeine Funktionen bzw. Formen mit kompaktem Träger erweitern. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ so eine Funktion, dann findet man endlich viele lokale Parametrisierungen $u_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$, sodass $\text{supp}(f) \subset \cup_\alpha u_\alpha(U_\alpha)$ gilt. Dazu findet man glatte Funktionen $\varphi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit Werten in $[0, 1]$ sodass $\text{supp}(\varphi_\alpha) \subset u_\alpha(U_\alpha)$ gilt und sodass $\sum_\alpha \varphi_\alpha$ auf $\text{supp}(f)$ identisch 1 ist. Dann definiert man

$$(6.2) \quad \int_M f := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} ((\varphi_\alpha f) \circ u_\alpha) \sqrt{\det(g_{ij}^{u_\alpha})}$$

und verifiziert durch eine direkte Rechnung unter Benutzung der Transformationsformeln von oben, dass das Resultat unabhängig von der Wahl der Parametrisierungen u_α und der Funktionen φ_α ist. Analog funktioniert das für Formen und orientierungstreue Parametrisierungen.

Im Setting der Differentialformen gibt es dann auch eine allgemeine Version des Satzes von Green. Dazu benötigt man einerseits den Begriff einer Mannigfaltigkeit mit Rand. Im Bild von lokalen Parametrisierungen bedeutet das, dass man einerseits wie bisher lokale Parametrisierungen hat, die auf offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^k$ definiert sind. Andererseits erlaubt man auch lokale Parametrisierungen, die auf offenen Teilmengen U des *Halbraumes* $\mathcal{H}^k := \{x \in \mathbb{R}^k : x^1 \geq 0\}$ definiert sind. Das liefert *Randpunkte* in M , die Bilder von Punkten mit $x^1 = 0$ sind. Man bezeichnet die Menge dieser Punkte mit ∂M und zeigt, dass $M \setminus \partial M$ eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Andererseits kann man die lokalen Parametrisierungen auf die offenen Teilmengen $U \cap \{x : x^1 = 0\}$ von \mathbb{R}^{k-1} einschränken und zeigt dann, dass ∂M eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension $k - 1$ ist. Schließlich kann man noch zeigen, dass eine Orientierung von $M \setminus \partial M$ kanonisch eine Orientierung von ∂M induziert.

Damit kann man dann für eine orientierte Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M , k -Formen über M und $k - 1$ -Formen über ∂M integrieren. Schließlich konstruiert man eine geometrische Operation, die *äußere Ableitung* die aus einer $(k - 1)$ -Form τ auf M eine k -Form $d\tau$ auf M macht. Für den allgemeinen Satz von Gauß-Bonnet benötigt man nur den Fall $k = 1$. Hier gilt für Vektorfelder ξ und η die Gleichung

$$d\tau(\xi, \eta) = \xi \cdot \tau(\eta) - \eta \cdot \tau(\xi) - \tau([\xi, \eta])$$

(vergleiche mit 6.6). Der allgemeine Satz von Stokes sagt dann, dass für eine $(k-1)$ -Form τ auf M mit kompaktem Träger die Gleichung $\int_{\partial M} \tau = \int_M d\tau$ gilt.

6.9. Allgemeinere Versionen des Satzes von Gauß-Bonnet. Die Bemerkungen zur Integration führen nun recht schnell zu einer allgemeineren Version des Satzes von Gauß-Bonnet. Betrachtet man eine kompakte orientierte Fläche M mit Rand, dann ist der Rand $\partial M =: c$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit, die selbst keinen Rand hat und damit als geschlossene glatte Kurve c parametrisiert werden kann. Diese Kurve hat eine geodätische Krümmung κ_g in M wie in 6.7 definiert und es ist kein Problem $\int_{\partial M} \kappa_g$ zu bilden. Andererseits können wir die glatte Funktion K wie in 6.8 beschrieben mit Hilfe des Volumenelements über M integrieren, das Resultat wird in diesem Fall oft mit $\int_M K dA$ (Flächenelement) bezeichnet. Ein analoger Beweis wie für Satz 6.7 unter Benutzung des Satzes von Stokes zeigt dann, dass $\int_c \kappa_g + \int_M K dA = 2\pi$ gilt.

Insbesondere kann man den Satz dann auf einfach geschlossene, glatte Kurven in einer kompakten orientierten Fläche anwenden, wobei man die Vereinigung der Kurve mit ihrem "Inneren" zu einer Fläche mit Rand macht. Der nächste Schritt der Verallgemeinerung ist, von glatten geschlossenen Kurven auf stückweise glatte geschlossene Kurven überzugehen, was auf den ersten Blick nicht besonders interessant klingt. Man betrachtet also eine geschlossene stetige Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$, sodass es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ gibt, sodass c auf jedem der Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$ eine glatte Kurve c_i definiert. Aus den Überlegungen zu Satz 6.7 ist ziemlich klar, wie die "richtige" Verallgemeinerung des Satzes von Gauß-Bonnet in dieser Situation aussieht: Zum offensichtlichen Term $\int_M K dA + \sum_i \int_{c_i} \kappa_g$ muss man noch $\sum_i \alpha_i$ addieren um das Resultat 2π zu erhalten. Dabei ist α_i die "Winkeländerung in den Sprungstellen von $c'(t)$ ", also der Winkel zwischen $c'_{i-1}(t_i)$ und $c'_i(t_i)$.

Das Interesse an diesem Fall liegt nun darin, dass man nachdem man auf die Glätte verzichtet hat, Einschränkungen an die Teilkurven c_i machen kann. Insbesondere kann man *geodätische Polygone* betrachten, also stückweise glatte Kurven, in denen jedes c_i eine Geodäte ist. Nehmen wir etwa an, dass wir drei Punkte $x, y, z \in M$ wählen und jeweils eine Geodäte finden, die zwei der Punkte verbindet, dann erhalten wir ein *geodätisches Dreieck*. In diesem Fall verschwinden natürlich die Terme $\int_{c_i} \kappa_g$ und es bleiben nur die Winkeländerungen α_i . Man sieht sofort, dass man $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 3\pi - \sum_{i=1}^3 \beta_i$ erhält, wobei β_i der Winkel in der i ten Ecke des geodätischen Dreiecks ist. Der Satz von Gauß-Bonnet liefert dann $\sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi = \int_M K dA$, wobei M das Innere des Dreiecks bezeichnet. Im Fall konstanter Gaußkrümmung sagt das also, dass $\sum_i \beta_i - \pi$ proportional zur Fläche eines geodätischen Dreiecks ist. Das zeigt natürlich die intrinsische Natur der Gaußkrümmung besonders deutlich.

Das führt dann schließlich zur Verbindung zwischen Geometrie und Topologie, indem man für kompakte Flächen das Integral $\int_M K dA$ studiert. Man kann dieses Integral studieren, indem man M "trianguliert", also in Teile zerlegt, die stückweise glatten Rand haben und dann das Integral über jeden dieser Teile mit Hilfe des Satzes von Gauß-Bonnet analysiert. In dieser Zerlegung gibt es jeweils endlich viele Ecken, Kanten und Flächen. Jedes Randstück trifft auf zwei Flächen (mit entgegengesetzter Orientierung), also heben sich die entsprechenden Terme $\int_{c_i} \kappa_g$ beim Aufsummieren der Integrale weg. Ähnlich kommen Außenwinkel bei Ecken zusammen und addieren sich auf 2π auf. Es zeigt sich (siehe Satz 4.43 von [Kühnel]) dass man für $\int_M K dA$ ein Vielfaches von 2π erhält, wobei der Faktor gerade durch Anzahl der Ecken minus Anzahl der Kanten plus Anzahl der Flächen in der Triangulierung gegeben ist. Diese Zahl ist aber eine topologische Invariante von M , die sogenannte *Euler-Charakteristik*.

Insbesondere ist damit $\int_M K dA$ nur vom topologischen Typ der Fläche M abhängig und nicht von der Riemann Metrik auf M , die wir betrachten. Insbesondere erhält man für jede Metrik auf S^2 immer $\int_{S^2} K dA = 4\pi$ und für jede Metrik auf dem Torus $\int_T K dA = 0$.

Literaturverzeichnis

- [Bär] C. Bär, “Elementare Differentialgeometrie”, 2. Auflage, de Gruyter, 2010.
- [LA] A. Čap, “Lineare Algebra und Geometrie” Vorlesungsskriptum, Version WS 2014/15 – WS 2015/16, online unter <http://www.mat.univie.ac.at/~cap/lectnotes.html>
- [Ivey-Landsberg] T.A. Ivey, J.M. Landsberg, “Cartan for beginners”, 2nd edition, Graduate Studies in Mathematics, 175, Amer. Math. Soc., 2016.
- [Kühnel] W. Kühnel, “Differentialgeometrie”, 6. Auflage, Springer 2013.
- [Vietoris] L. Vietoris, Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven, Archiv d. Math. **3** (1952) 304-306.
- [Whitney] H. Whitney, On regular curves in the plane, Compos. Math. **4** (1937) 276-284.