Übungen zu
"Lineare Algebra und Geometrie für LAK"

Andreas Cap

Wintersemester 2010/11

Wiederholung grundlegender Begriffe

(1) Bestimme Kern und Bild der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch
$$f(x, y, z) = (3x - 2y + z, y - z, 6x - y - z).$$

(2) Bestimme alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= 3 \\ +x_2 - 2x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

(3) Für welche Werte $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

(4) Bestimme alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$:
$$\begin{aligned} \bar{3}x + \bar{2}y + z &= \bar{4} \\ x + \bar{3}y - z &= \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}z &= \bar{5} \end{aligned}$$

(5) Sei $\mathbb{R}_2[x]$ der Raum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Interpretiere $p \in \mathbb{R}_2[x]$ auch als Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, dass $\{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(-1) = p(1)\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ ein Teilraum ist und finde einen komplementären Teilraum von $\mathbb{R}_2[x]$.

(6) Bestimme den Rang der Matrix $A \in M_4(\mathbb{R})$, die gegeben ist durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(7) Sei $\mathbb{R}_2[x]$ der Raum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Interpretiere $p \in \mathbb{R}_2[x]$ auch als Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und betrachte die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $\varphi(p) := \int_0^1 p(t)dt$. Zeige, dass φ eine lineare Abbildung ist.
Anleitung: Berechne $\varphi(p)$ explizit als Funktion der Koeffizienten von p.

(8) Erweitere die Vektoren $v = (0, -2, 3, 1)$ und $w = (1, 0, 0, -1)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

(9) Sei $g \subset \mathbb{R}^3$ die affine Gerade durch den Punkt $(1, 2, 3)$ in Richtung des Vektors $(1, 1, 1)$. Bestimme die lineare Hülle $\langle g \rangle$ von g.

(10) Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und W ein k–dimensionaler Teilraum von V. Zeige:
(a) Es gibt eine (surjektive) lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}^{n-k}$ sodass $W = \mathrm{Ker}(f)$ gilt.
(b) Ist $g : V \to \mathbb{K}^{n-k}$ eine weitere lineare Abbildung mit $W = \mathrm{Ker}(g)$, dann gibt es einen (eindeutigen) linearen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{K}^{n-k} \to \mathbb{K}^{n-k}$, sodass $g = \varphi \circ f$ gilt.

Anleitung: Für Teil (a) wähle eine geeignete Basis für V und definiere f auf den Basiselementen. Für Teil (b) betrachte die Bilder dieser Basiselemente unter g.

(11) Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ berechne die beiden Matrizen $[\mathrm{id}]^{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}$ und $[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{S}}$ zu den Basiswechseln zwischen der Standardbasis $\mathcal{S}$ und der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(12) Zeige, dass $\mathcal{B} := \{x^2 - 1, x^2 - 3x + 2, x^2 - x - 2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}_2[x]$ ist und bestimme die Koordinatenvektoren der Polynome 1, x und x^2 bezüglich dieser Basis.

(13) Berechne die Matrixdarstellung $[D]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ des Ableitungsoperators $D : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, der gegeben ist durch $D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$, bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus dem letzten Beispiel.

(14) Zeige, dass es reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}_2[x]$ die zugehörige Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$p(5) = a(p(-1)) + b(p(0)) + c(p(1))$$

erfüllt. Bestimme diese Zahlen explizit.

(15) Betrachte den Raum $\mathbb{R}_n[x]$ von Polynomen mit reellen Koeffizienten, und betrachte $p \in \mathbb{R}_n[x]$ auch als Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zeige, dass für jeden Punkt $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\mathrm{ev}_t(p) := p(t)$ ein Element des Dualraumes $(\mathbb{R}_n[x])^*$ definiert. Zeige weiters, dass für $n + 1$ paarweise verschiedene Punkte $t_0, \dots, t_n$ die Menge $\{\mathrm{ev}_{t_0}, \dots, \mathrm{ev}_{t_n}\}$ eine Basis für $(\mathbb{R}_n[x])^*$ bildet. Interpretiere das vorige Beispiel in Anbetracht dieses Resultats.

(16) Zum Ableitungsoperator $D : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ aus Beispiel (13) sei D^* die duale Abbildung. Bestimme die Matrixdarstellungen von D^* bezüglich der dualen Basis $\mathcal{B}^*$ zu $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

(17) Bestimme die Matrixdarstellung der Abbildung D^* aus dem letzten Beispiel bezüglich der Basis $\mathcal{C} = \{\mathrm{ev}_{-1}, \mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1\}$.

(18) Seien U, V und W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen.

Zeige, dass für die Ränge die Abschätzung $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$ gilt. Zeige durch Beispiele, dass Gleichheit gelten kann aber nicht gelten muss.

(19) Für eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$ und $\ell \leq n$ definiert man eine $k \times \ell$–*Teilmatrix* von A als eine Matrix, die entsteht, wenn man in A $(m - k)$ viele Zeilen und $(n - \ell)$ viele Spalten weglässt.

Versuche, eine präzise Definition des Begriffs der Teilmatrix zu geben und zeige mit Hilfe des vorigen Beispiels, dass für eine Teilmatrix B von A immer $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$ gelten muss.

(20) Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Zeige, dass A genau dann Rang r hat, wenn es eine $r \times r$–Teilmatrix von A gibt, die invertierbar ist, aber keine $(r+1) \times (r+1)$–Teilmatrix diese Eigenschaft hat.

Anleitung: Hat A Rang r, dann zeige zunächst, dass es r linear unabhängige Zeilen in A gibt, dann betrachte die von diesen Zeilen gebildete $r \times n$–Teilmatrix.

(21) Bestimme die Dimension des Teilraumes von $\mathbb{R}^5$, der von den Vektoren $(1, -1, 2, 0, 0)$, $(0, 1, 2, 0, 1)$, $(1, 2, 0, 1, 0)$ und $(0, -1, 6, -1, 2)$ erzeugt wird.

Anleitung: Führe das Problem auf die Bestimmung des Ranges einer Matrix zurück.

(22) Für die Matrizen $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ berechne $(E+F)^2$ und $E^2+2EF+F^2$.

(23) Definiere den *Kommutator* $[A, B]$ von zwei Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ durch $[A, B] = AB - BA$. Zeige, dass die Gleichung $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ genau dann gilt, wenn $[A, B] = 0$ ist. Beweise weiters, daß für $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ die *Jacobi–Identität* $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$ gilt.

(24) Betrachte den Teilraum von $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Konstruiere explizit einen linearen Isomorphismus zwischen dem Quotientenraum $\mathbb{R}^3/W$ und dem Teilraum $\{(t, t, t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

(25) Seien U und V zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume und $W \subset V$ ein Teilraum. Zeige, dass man den Raum $L(U, W)$ von linearen Abbildungen als Teilraum von $L(U, V)$ betrachten kann und dass der Quotient $L(U, V)/L(U, W)$ isomorph zu $L(U, V/W)$ ist.

Anleitung: Der Isomorphismus kann durch die Abbildung $\pi_*(f) := \pi \circ f$ realisiert werden, wobei $\pi : V \to V/W$ die natürliche Quotientenabbildung ist.

(26) Seien V und Z zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume und $W \subset V$ ein Teilraum. Zeige, dass man den Raum $L(V/W, Z)$ von linearen Abbildungen mit dem Teilraum

$$\{\varphi \in L(V, Z) : \varphi(w) = 0 \quad \forall w \in W\} \subset L(V, Z)$$

identifizieren kann.

Anleitung: Der Isomorphismus kann durch die Abbildung $\pi^*(f) := f \circ \pi$ realisiert werden, wobei $\pi : V \to V/W$ die natürliche Quotientenabbildung ist.

Kapitel 6: Determinanten

(27) Verifiziere direkt, dass für zwei Matrizen $A, B \in M_2(\mathbb{K})$ die Gleichung $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ gilt.

(28) Zeige: Ist $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $r \in \mathbb{K}$, dann ist $\det(rA) = r^n \det(A)$.

(29) Löse das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Cramer'schen Regel

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

(30) Löse das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Cramer'schen Regel

$$\begin{aligned} 2x - \ \ y + \ \ z &= 1 \\ x + 3y - 2z &= 0 \\ 4x - 3y + \ \ z &= 2 \end{aligned}$$

(31) Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ eine *untere Dreiecksmatrix*, d.h. $a_{ij} = 0$ für $j > i$. Benutze die Definition von det aus Satz 6.3 der Vorlesung und Induktion nach n um zu beweisen, dass $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$ gilt.

(32) Für $n \geq 2$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachte die Matrix $A_\lambda = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, die gegeben ist durch $a_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, n$, $a_{i+1,i} = \lambda$ für $i = 1, \dots, n-1$, $a_{1n} = \lambda$ und alle anderen Eintragungen gleich Null. Zeige, dass $\det(A_\lambda) = 1 + (-1)^{n-1}\lambda^n$ gilt.

(33) Eine Matrix $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ heißt *Block–untere Dreiecksmatrix* der Größe k, falls $m_{ij} = 0$ gilt, wann immer $i \leq k$ und $j > k$ gilt. Das bedeutet gerade, dass man M in Blockform als $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ für $A \in M_k(\mathbb{K})$, $C \in M_{n-k}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n-k,k}(\mathbb{K})$. Benutze die Definition von det aus Satz 6.3 der Vorlesung und Induktion nach k um zu beweisen, dass $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$ gilt.

(34) Erstelle eine Liste aller Permutationen in $\mathfrak{S}_3$, stelle jede dieser Permutationen als ein Produkt von höchstens drei Transpositionen dar und bestimme ihr Signum.

(35) Sei $k < n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation, sodass $\sigma(j) \leq k$ für alle $j \leq k$ gilt. Zeige, dass es eindeutige Permutationen $\sigma' \in \mathfrak{S}_k$ und $\sigma'' \in \mathfrak{S}_{n-k}$ gibt, sodass $\sigma(j) = \sigma'(j)$ für $j \leq k$ und $\sigma(j) = \sigma''(j-k) + k$ für alle $j > k$ gilt. Weiters zeige, dass $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma')\operatorname{sgn}(\sigma'')$ gilt.

(36) Für Matrizen $A \in M_k(\mathbb{K})$ und $B \in M_\ell(\mathbb{K})$ betrachte die $(k+\ell) \times (k+\ell)$–Matrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ ("Blockdiagonalmatrix"). Benutze das vorige Beispiel und die Leibnizformel für die Determinante um zu zeigen, dass die Determinante dieser Matrix $\det(A)\det(B)$ ist. Verallgemeinere das auf endlich viele Blöcke.

(37) Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen durch Entwickeln nach Zeilen oder Spalten:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(38) Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(39) Berechne mit Hilfe von Determinanten die Inverse der komplexen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -1 & 2 & i \\ 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

(40) Sei V ein n–dimensionaler komplexer Vektorraum und sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis für V. Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von V, wobei $w_1 = v_1 + \lambda v_2$, $w_2 = v_2 + \lambda v_3$,…,$w_{n-1} = v_{n-1} + \lambda v_n$, $w_n = v_n + \lambda v_1$. (Vergleiche mit Beispiel 32.)

§7. Eigenwerte und charakteristisches Polynom

(41) Bestimme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Anleitung: λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn $A - \lambda\mathbb{I}$ Rang kleiner als zwei hat.

(42) Für $\theta \in [0, 2\pi)$ bestimme das charakteristische Polynom der Matrix

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

und bestimme damit die Eigenwerte von A_θ. Interpretiere die lineare Abbildung $x \mapsto A_\theta x$ geometrisch.

(43) Sei $A \in M_3(\mathbb{R})$ eine Matrix, sodass $A^3 = \mathbb{I}$ aber $A \neq \mathbb{I}$ gilt. Zeige: A kann nicht diagonalisierbar sein. Gilt das auch für $A \in M_3(\mathbb{C})$?

Anleitung: Zeige, dass $(TAT^{-1})^3 = TA^3T^{-1}$ gilt und benutze das.

(44) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, daß die Multiplikation auf $\mathbb{K}[t]$, $(\sum a_i t^i)(\sum b_j t^j) = \sum c_k t^k$ mit $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ assoziativ, kommutativ und distributiv bezüglich der Addition ist.

(45) Dividiere das Polynom $2t^5 - t^4 + 3t^3 - 2t^2 + 3t + 1 \in \mathbb{R}[t]$ mit Rest durch $t^2 - 2t + 1$.

(46) Zeige: über $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ gibt es unendlich viele Polynome, die keine Nullstelle in $\mathbb{K}$ haben.

(47) Für $\varphi \in [0, 2\pi)$ finde eine Basis von $\mathbb{C}^2$ die aus Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

besteht.

(48) Berechne das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Bestimme die Eigenwerte von A und finde eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

(49) Berechne das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
Bestimme die Eigenwerte von A und finde eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

(50) Sei $V := C([0,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. Zeige: Die Funktion $I : V \to V$, die gegeben ist durch $I(f)(x) = \int_0^x f(s)ds$ ist linear und besitzt keinen Eigenwert.

Anleitung: Wäre f ein Eigenvektor, dann wäre $f(0) = 0$. Andererseits folgt aus $I(f) = \lambda f$ das f differenzierbar ist und eine bestimmte Differentialgleichung erfüllt

(51) Zeige: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen eines komplexen Polynoms der Form $p = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$, dann ist $a_{n-1} = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ und $a_0 = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Im Fall $n = 3$ zeige auch $a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$.

(52) Zeige allgemein, daß für die Koeffizienten $a_0, \dots a_{n-1}$ des Polynoms p aus dem letzten Beispiel die Formel $a_{n-k} = (-1)^k \sum(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})$ gilt, wobei die Summe über alle n–Tupel $(i_1, \dots, i_k)$ von Indizes mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ geht.

(53) Zeige: Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ die komplexen Zahlen $a \pm ib$.

(54) Zeige: Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ immer diagonalisierbar.

(55) Zeige: Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisierbar und sind alle Eigenwerte von $A \geq 0$, dann gibt es eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$, sodaß $B^2 = BB = A$ gilt.

Anleitung: diagonalisiere A, wähle eine Wurzel davon, und bilde daraus eine Wurzel von A.

(56) Zeige, dass es keine Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ gibt, die $A^2 = -\mathbb{I}$ erfüllt. Finde eine Matrix $B \in M_2(\mathbb{R})$ mit $B^2 = -\mathbb{I}$.

Anleitung: Benutze, dass A mindestens einen reellen Eigenwert haben muss, weil das charaktieristische Polynom p_A Grad 3 hat.

(57) Zeige, dass es keine Matrix $B \in M_2(\mathbb{R})$ gibt, die $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt.

Anleitung: Zeige erst, daß die Abbildung $f(x) := Bx$ nichttrivialen Kern hat. Erweitere eine Basis von $\operatorname{Ker}(f)$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$. Nun überlege, daß $[f]^4_{\mathcal{B}} = 0$ gilt, folgere daraus $[f]^2_{\mathcal{B}} = 0$ und daraus $B^2 = 0$.

(58) Zeige: Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

(59) Zeige: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar.

(60) Sei $A \in M_3(\mathbb{R})$ die Matrix aus dem letzten Beispiel. Finde eine invertierbare Matrix $T \in M_3(\mathbb{R})$ sodass TAT^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

(61) Zeige: Die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ ist nicht diagonalisierbar.

(62) Finde Bedingungen an $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die äquivalent zur Diagonalisierbarkeit von $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (i) über $\mathbb{R}$ und (ii) über $\mathbb{C}$ sind.

(63) Zeige: Um Nullstellen von Polynomen dritter Ordnung über $\mathbb{C}$ zu bestimmen, genügt es, Polynome der Form $t^3 + pt + q$ zu betrachten.

Anleitung: Normiere erst den führenden Koeffizienten, dann eliminiere den quadratischen Term durch eine geeignete Substitution der Form $t = x - a$.

(64) Benutze die Idee des vorigen Beispiels um die Lösungsformeln für quadratische Gleichungen herzuleiten.

(65) Zeige, wie man eine Lösung der kubischen Gleichung $\lambda^3 + p\lambda + q = 0$ über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ finden kann.

Anleitung: Substituiere $\lambda = w - \frac{p}{3w}$. Multipliziere die entstehende Gleichung mit w^3, und löse die daraus erhaltene quadratische Gleichung für w^3. Dann muss man nur noch die dritte Wurzel ziehen und einsetzen.

(66) Sei $p \in \mathbb{R}_2[t]$ ein Polynom von Grad ≤ 2. Zeige, dass es ein eindeutiges Polynom $q \in \mathbb{R}_2[t]$ gibt, sodass $q(\lambda) = p(\lambda + 1)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Wie sieht das über $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ aus?

(67) Zeige, dass man eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ erhält, indem man $\Phi(p)$ als das eindeutige Polynom q aus dem letzten Beispiel definiert. Berechne die Eigenwerte von Φ und zeige, dass Φ nicht diagonalisierbar ist.

(68) Verallgemeinere das letzte Beispiel auf Polynome höheren Grades und auf Verschiebungen um $\mu \in \mathbb{R}$ statt um 1.

(69) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, die 2 als einzigen Eigenwert bestizt, wobei die algebraische Vielfachheit 3 und geometrische Vielfachheit 2 beträgt. Zeige, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ gibt, sodass $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gilt.

Anleitung: Wähle zunächst eine Basis des Eigenraumes V_2^f und erweitere sie durch einen Vektor v_3 zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$. Benutze die resultierende Matrixdarstellung und die Information über die Vielfachheiten um zu zeigen, dass $v_2 := f(v_3) - 2v_3 \in V_2^f \setminus \{0\}$ gilt. Dann wählte $v_1 \in V_2^f$ so, dass $\{v_1, v_2\}$ eine Basis für V_2^f ist und setze $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(70) Zeige für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass es keine Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ gibt, die $AB - BA = \mathbb{I}$ erfüllen.

Anleitung: Bilde die Spur.

§8. Normalformen

(71) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ für $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. Finde eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, sodass $[f]_{\mathcal{B}}$ ein obere Dreiecksmatrix ist.

Anleitung: Bestimme zu jedem der Eigenwerte einen Eigenvektor und erweitere diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

(72) Sei V ein n–dimensionaler $\mathbb{C}$–Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, die $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Zeige, daß es eine Basis $\mathcal{B}$ für V gibt, sodaß $[f]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Nullen auf der Hauptdiagonale ist. Zeige damit, dass $f^n = 0$ gilt und dass das charakteristische Polynom p_f gleich $(-1)^n t^n$ ist.

Anleitung: Wähle eine Matrixdarstellung als obere Dreiecksmatrix und überlege dann, wie die Hauptdiagonalelemente aussehen können.

(73) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sei $\sigma : V \to V$ eine *Involution* auf V, also eine lineare Abbildung, sodass $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_V$ gilt. Betrachte die Teilmengen $V^+, V^- \subset V$, die gegeben sind durch $V^\pm = \{v \in V : \sigma(v) = \pm v\}$. Zeige, dass das Teilräume von V sind, und dass $V = V^+ \oplus V^-$ gilt.

Anleitung: Wende Proposition 8.4 der Vorlesung auf die Abbildung $p_1(v) = \frac{1}{2}(v - \sigma(v))$ an.

(74) Sei $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix mit $a_{11} \leq a_{22} \leq a_{33}$. Bestimme durch direkte Rechnung wie eine Matrix $B \in M_3(\mathbb{R})$ aussehen muss, damit $AB = BA$ gilt. Zeige insbesondere, dass B selbst eine Diagonalmatrix sein muss, wenn die Einträge von A alle verschieden sind.

(75) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, λ ein Eigenwert von f und V^f_λ der entsprechende Eigenraum von f. Zeige: Ist $g : V \to V$ eine lineare Abbildung, die $g \circ f = f \circ g$ erfüllt, dann ist $g(V^f_\lambda) \subset V^f_\lambda$. Wie liefert das eine Verallgemeinerung der letzten Aussage des vorigen Beispiels?

§9. Normen und innere Produkte

(76) Zeige, dass $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB^t)$, wobei tr die Spur bezeichnet, ein positive definites inneres Produkt auf dem Raum $M_n(\mathbb{R})$ der reellen $n \times n$–Matrizen definiert.

(77) Interpretiere die Parallelogrammidentität $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ geometrisch, und bringe sie mit dem Satz von Pythagoras in Verbindung.

(78) Für die Vektoren $v = (2, -1, 5)$ und $w = (3, 1, -3)$ in $\mathbb{R}^3$ berechene $\|v\|$, $\|w\|$, $\langle v, w\rangle$, $\|v + w\|$ und $\|v - w\|$.

(79) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis für V. Zeige: Ist $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, dann ist die Matrixdarstellung $[f]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$ gegeben durch $a_{ij} = \langle f(v_i), v_j\rangle$.

(80) Zeige direkt, dass für das Standard innere Produkt auf $\mathbb{R}^n$ und eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ die Gleichung $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(81) Benutze das vorige Beispiel um folgendes Resultat zu beweisen: Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, d.h. $A^t = A$, und sind v und w Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten, dann ist $\langle v, w\rangle = 0$.

(82) Finde eine Orthonormalbasis für den Teilraum von $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren $(1, 1, -1, 1)$ und $(0, 1, 2, 2)$ erzeugt wird.

(83) Finde eine Orthonormalbasis für den Teilraum von $\mathbb{C}^3$, der von den Vektoren $(1, i, 0)$ und $(1, 1, 1)$ erzeugt wird.

(84) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $W \subset V$ ein Teilraum und seine $p, q \in V$ Punkte. Zeige: Im affinen Teilraum $p+W = \{p+w : w \in W\}$ gibt es einen eindeutigen Punkt x_0, der minimalen Abstand von q besitzt. Zeige weiters, dass x_0 durch $(x_0-q) \perp W$ charakterisiert ist.

Anleitung: Benutze $V = W \oplus W^\perp$ um die Existenz eines eindeutigen Punktes x_0 mit $(x_0 - q) \perp W$ zu zeigen. Für $x \in p + W$ berechne dann $\|x - q\|$ mit Hilfe des Satzes von Pythagoras.

(85) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $W \subset V$ ein Teilraum und $\pi : V \to W$ die Orthogonalprojektion auf W. Zeige: Ist $\{w_1, \dots, w_k\}$ eine Orthonormalbasis für W, dann ist $\pi(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, w_i\rangle w_i$.

(86) Betrachte die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, die von den Vektoren $(1, 2, 2)$ und $(-1, 1, 0)$ erzeugt wird. Finde die Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$, sodass $x \mapsto Ax$ die Orthogonalprojektion auf E ist. Verfiziere, dass $AA = A^t = A$ gilt.

Anleitung: Benutze die Formel für die Orthogonalprojektion aus dem letzten Beispiel.

(87) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ finde einen Vektor $n \in \mathbb{R}^2$ und eine Zahl $d \in \mathbb{R}$, sodass $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle n, x\rangle = d\}$ die affine Gerade durch die Punkte $(a, 0)$ und $(0, b)$ ist.

(88) Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und $p \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt. Zeige, dass der Normalabstand von p von der von v und w erzeugten Ebene durch $\frac{\langle p, v\times w\rangle}{\langle v\times w, v\times w\rangle}$ gegeben ist.

(89) Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Zeige, dass $\{v, v \times w, v \times (v \times w)\}$ eine Orthogonalbasis für $\mathbb{R}^3$ ist.

(90) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $v_0, w_0 \in V$ beliebig. Für die lineare Abbildung $f(v) := \langle v, v_0\rangle w_0$ bestimme die adjungierte Abbildung f^*.

(91) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, $W \subset V$ ein Teilraum. Definiere die Spiegelung $\sigma_W : V \to V$ an W durch $\sigma_W(v) = v_1 - v_2$ wobei $v = v_1 + v_2$ die eindeutige Darstellung mit $v_1 \in W$ und $v_2 \in W^\perp$ ist. Zeige, daß σ_W eine orthgonale Abbildung ist, und das $\det(\sigma_W) = (-1)^{\dim(W^\perp)}$ ist. Was sind $\sigma_{\{0\}}$ und σ_V?

(92) Zeige: Sind V und W wie im letzten Beispiel und ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Orthonormalbasis für $W^\perp$, dann ist $\sigma_W(v) = v - 2\sum_{i=1}^k \langle v, v_i\rangle v_i$.

(93) Betrachte die Vektoren $v = (-1, 2, 1)$ und $w = (0, 2, -1)$ in $\mathbb{R}^3$. Finde eine orthogonale Abbildung, die v und w in die x–y–Ebene abbildet.

Anleitung: Berechne $v \times w$ und finde eine Spiegelung (an einer Ebene), die diesen Vektor auf $(0, 0, \|v \times w\|)$ abbildet.