Übungen zu “Matrixgruppen”

Andreas Cap

Sommersemester 2022

(1) Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass das Bild $\operatorname{Im}(\varphi)$ eine Untergruppe von H ist und dass der Kern $\ker(\varphi)$ eine normale Untergruppe von G ist.

(2) Erklären Sie die Definition des Quotienten einer Gruppe nach einer normalen Untergruppe und zeigen Sie, dass in der Situation von Beispiel (1) der Homomorphismus φ einen Isomorphismus zwischen $G/\ker(\varphi)$ und $\operatorname{Im}(\varphi)$ induziert.

(3) Zeigen Sie, dass die reellen 2×2–Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper bilden, der isomorph zu $\mathbb{C}$ ist. Überlegen Sie genau, was dabei tatsächlich bewiesen werden muss und was aus allgemeinen Eigenschaften der Operationen auf Matrizen folgt.

(4) Erklären Sie, warum das direkte Analogon von Beispiel (3) für komplexe Matrizen nicht funktioniert, also warum die komplexen 2×2–Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} z & -w \\ w & z \end{smallmatrix}\right)$ mit den üblichen Matrizenoperationen keinen Körper bilden.

(5) Zeigen Sie, dass die komplexen 2×2–Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{smallmatrix}\right)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen Schiefkörper bilden, also alle Körperaxiome außer der Kommutativität der Multiplikation erfüllt sind.

(6) Beweisen Sie, dass es in dem Schiefkörper aus Beispiel (5) eine Basis (über $\mathbb{R}$) gibt, die aus der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$, sowie drei Matrizen I, J und K besteht, die $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbb{1}$, sowie $IJ = -JI = K$ erfüllen.

(7) Sei f eine reellwertige, stetig differenzierbare Funktion, die auf einer offenen Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^3$ definiert ist, $f(0,0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x_3}(0) \neq 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen U von 0 in $\mathbb{R}^2$ und V von 0 in $\mathbb{R}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ gibt, sodass folgendes gilt: Sind $(x_1, x_2) \in U$ und $x_3 \in V$, dann gilt $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ genau dann, wenn $x_3 = g(x_1, x_2)$ gilt.

Anleitung: Wenden Sie den inversen Funktionensatz auf die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an, die durch $F(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_2, f(x_1, x_2, x_3))$ gegeben ist.

(8) Beweisen Sie in der Situation von Beispiel (7), dass es eine offene Umgebung W von 0 in $\mathbb{R}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\sigma : W \to \mathbb{R}^3$ gibt, sodass $f \circ \sigma = \operatorname{id}_W$ gilt. Schließen Sie daraus, dass W im Bild von f enthalten ist und dass eine Funktion $h : W \to \mathbb{R}^m$ genau dann stetig differenzierbar ist, wenn $h \circ f : f^{-1}(W) \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar ist. (Das ist einfacher, als es aussieht.)

(9) Versuchen Sie, eine passende Verallgemeinerung der Aussage von Beispiel (7) auf die Situation zu finden, dass für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$, eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $x_0 \in U$ die Ableitung $Df(x_0)$ ungleich Null ist. Beweisen Sie diese allgemeinere Version, indem Sie sie auf die Situation von Beispiel (7) zurückführen.

Anleitung: Für die Formulierung ersetzen Sie die x_1–x_2–Ebene durch den Kern von $Df(x_0)$ und die x_3–Achse durch das orthogonale Komplement dieses Kerns und verschieben dann alles zum Punkt x_0. Für den Beweis verwenden Sie eine passende Translation und eine Rotation um in die Situation von Beispiel (7) zu gelangen.

(10) Betrachten Sie eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, also eine Funktion $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die folgende Bedingungen erfüllt:
(N1) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ gilt nur für $x = 0$.
(N2) Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
(N3) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Sei $\| \ \|_2$ die übliche Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$, also $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist und folgern Sie daraus, dass sie auf der Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ein Minimum und ein Maximum annimmt, die beide positiv sind. Folgern Sie daraus, dass es positive, reelle Konstanten c_1 und c_2 gibt, sodass die Abschätzungen $c_1\|x\|_2 \leq \|x\| \leq c_2\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gelten.

(11) Benutzen Sie Beispiel (10) um zu zeigen, dass man in der üblichen Definition der Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^n$ sowie in der ϵ–δ–Definition der Stetigkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die auftretenden euklidischen Normen durch beliebige andere Normen ersetzen kann, also jede Wahl von Normen zu den gleichen konvergenten Folgen und stetigen Funktionen führt.

(12) Zu einer beliebigen Norm $\| \ \|$ auf $\mathbb{R}^n$ definiere eine Abbildung $\| \ \|_O : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $\|A\|_O := \sup_{x:\|x\|=1} \|Ax\|$. Zeigen Sie, dass diese Vorschrift eine Norm auf $M_n(\mathbb{R})$ definiert, die *Operatornorm* zu $\| \ \|$. Zeigen Sie weiters, dass für $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ die Abschätzung $\|AB\|_O \leq \|A\|_O\|B\|_O$ gilt und dass $\|I\|_O = 1$ ist.

(13) Sei $f = \sum_k a_k x^k$ eine Potenzreihe auf $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Operatornorm aus dem letzten Beispiel, dass für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $\|A\|_O < R$ die Reihe $\sum_k a_k A^k$ absolut konvergiert und man somit $f(A)$ bilden kann. Zeigen Sie damit insbesondere, dass für das Matrizenexponential $\|e^A\|_O \leq e^{\|A\|_O}$ gilt.

(14) Sei $\mathbb{H}$ (die *Hamilton'schen Quaternionen*) der Schiefkörper aus Beispiel (5) und sei $\mathbb{H}^n$ die Menge aller Vektoren $(q_1, \dots, q_n)$ mit Eintragungen $q_\ell \in \mathbb{H}$, mit der komponentenweisen Addition und einer komponentenweisen Skalarmultiplikation von rechts, also $(q_1, \dots, q_n) \cdot q := (q_1 q, \dots q_n q)$. Zeigen Sie, dass man $\mathbb{H}$–lineare Abbildungen (im offensichtlichen Sinn) $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$ (wie über Körpern) durch Matrizen mit m Zeilen und n Spalten mit Eintragungen in $\mathbb{H}$ beschreiben kann. Zeigen Sie weiters, dass (trotz der Nichtkommutativität von $\mathbb{H}$) die Komposition von $\mathbb{H}$–linearen Abbildungen der üblichen Matrizenmultiplikation entspricht.