Aufgabensammlung zum Tutorium zur STEOP für LAK

Zusammengestellt von A. Čap aufbauend
auf die Beiepiele von H. Schichl
aus früheren Semestern

Wintersemester 2013/14

Dieses Skriptum enthält Übungsaufgaben zur Vorlesung *Einführung in das mathematische Arbeiten* für Lehramtsstudierende. Diese findet geblockt am Anfang des Semesters („STEOP“, 2.10.—18.12.2013) statt und wird in diesem Zeitraum vom *Tutorium zur STEOP für LAK* begeitet. Dieses Tutorium ist *keine Pflichtveranstaltung* und *nicht Teil der STEOP* sondern ein freiwilliges Angebot. Hintergrund dafür ist, dass wir aus langjähriger Erfahrung wissen, dass die seblständige, praktische Beschäftigung mit den Inhalten von zentraler Bedeutung beim Erlernen von Mathematik ist. Das gilt besonders in der Anfangsphase des Studiums, wo neben dem Stoff auch noch einige weiteren Hürden (Denk- und Sprechweise, Abstraktion, etc.) zu überwinden sind. Da eine verpflichtende Übung im Rahmen der STEOP aus organistorischen Gründen nicht möglich ist, haben wir uns für den Kompromiss einer freiwilligen Übung entschlossen.

Aus dem oben gesagten ergibt sich sofort, dass im Tutorium zur STEOP für LAK der Prüfungscharakter relativ unbedeutend ist und das gemeinsame Lernen und Überwinden von Schwierigkeiten im Vordergrund steht. Dazu ist es aber unbedingt notwendig, dass jede(r) Studierende die hier gesammelten Beispiele (und zwar möglichst viele davon) *selbständig* bearbeitet. Natürlich kann es auch sehr hilfreich sein, die Beispiele mit anderen Studierenden zu besprechen, das sollte aber erst der zweite Schritt sein. Ansonsten ist man zurück in der passiven Rolle, die man ohnehin schon in der Vorlesung inne hat.

Die hier gesammelten Beispiele betreffen nur Inhalte der Vorlesung *Einführung in das mathematische Arbeiten* und nicht den Schulstoff. Um sich im Bereich des Schulstoffes auf die StEOP–Prüfung vorzubereiten, empfehle ich, die (im Internet reichlich vorhandenen) Prüfungsbeispiele der letzten Jahre zu studieren.

A. Čap, Oktober 2013

1. In Proposition 2.1.1 der Vorlesung haben wir bewiesen, dass das Quadrat einer geraden ganzen Zahl selbst eine gerade Zahl ist. Kann man aus diesem Resultat sofort eine oder mehrere der folgenden Aussagen schließen? Wenn ja, welche und warum?
   (a) Dass Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade.
   (b) Eine Zahl, deren Quadrat gerade ist, ist selbst gerade.
   (c) Eine Zahl, deren Quadrat ungerade ist, ist selbst ungerade.

2. *Die Summe ungerader und gerader Zahlen.* Beweisen Sie, dass die Summe einer ungeraden und einer geraden Zahl ungerade ist. Hinweis: Eine ungerade Zahl a lässt sich als $a = 2k + 1$ für ein passendes ganzes k schreiben.

3. *Zahlen mit geradem Produkt.* Beweisen Sie: Wenn das Produkt zweier ganzer Zahlen gerade ist, dann ist mindestens eine dieser beiden Zahlen gerade. Erklären Sie, wie daraus Aussage (b) aus Beispiel 1. folgt.
   Hinweis: Beweisen Sie, dass das Produkt zweier ungerader Zahlen ungerade ist und erklären Sie, warum das eine Lösung des Beispiels liefert.

4. *Indirekter Beweis.* Beweisen Sie, dass es keine ganzen Zahlen a und b gibt, sodass $18a + 42b = 112$ gilt.
   Hinweis: Gehen Sie indirekt vor, indem Sie annehmen, dass es solche Zahlen gibt. Dann finden Sie einen Teiler der linken Seite der Gleichung, der die rechte Seite nicht teilt.

5. *Indexschreibweise* Es seien die Matrizen $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$ für $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2, 3, 4$ gegeben durch $a_{ij} = 2i$, $b_{ij} = j^2$ und $c_{ij} = i + j + k$. Schreiben Sie die Matrizen explizit an.

6. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & a_{23} \\ 4 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$
   von der man weiß, dass die Eintragungen von der Form $a_{ij} = \alpha i - \beta j + \gamma$, für (unbekannte) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, sind. Man berechne die fehlenden Eintragungen.

7. *Summen- und Produktschreibweise 1.* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen– und/oder Produktzeichen:
   (a) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2048$
   (b) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2m$
   (c) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 15 + 17$
   (d) $1 \cdot (1 + 2) \cdot (1 + 2 + 3) \cdots (1 + 2 + \cdots + 30)$

8. Es sei die Zahlenfolge θ für $i = 1, \dots, 10$ durch $\theta_{2i-1} = 1$ und $\theta_{2i} = 0$ gegeben. Schreiben Sie die Folge an und beschreiben Sie in Worten, welche Gestalt θ hat.

9. Man finde einen geschlossenen Ausdruck für

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right).$$

Hinweis: Es handelt sich hierbei um eine Teleskopsumme, alle Terme bis auf zwei heben sich auf. Welche sind das? Dies findet man heraus, indem man einige Summanden anschreibt.

10. Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollten Sie in einer Gleichung einen Fehler finden, so stellen Sie die rechte Seite richtig.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(b_i - b_{i-1}) = b_{k-1} - b_1$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{2i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} p_{2i+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} k^{2j} = \sum_{r=0}^{2n} k^r - \sum_{s=0}^{n} k^{2s+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a^j b^{k-j}$

11. *Vollständige Induktion.* Beweisen Sie für $n \geq 1$ in $\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4} n^2 (1+n)^2.$$

12. *Vollständige Induktion.* Beweisen Sie, dass für eine beliebige reelle Zahl $x \neq 1$ und alle natürlichen Zahlen n, die folgende Identität gilt:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

13. *Geometrische Reihe.* Beweisen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe, d.h. für beliebiges reelles q und n in $\mathbb{N}$ zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

14. *Binomialkoeffizient.* Beweisen Sie: Der Binomialkoeffizient erfüllt die Identität

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}.$$

15. *Binomischer Lehrsatz.* Beweisen Sie: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Für Ambitionierte läßt sich dieses Resultat schön über die Interpretation von $\binom{n}{k}$ als Anzahl der k–elementigen Teilmengen einer n–elementigen Menge erklären. Was ist $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$? (Vorsicht bei $n = 0$!)

16. Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ die Zahl $n^3 - n$ durch 6 teilbar ist.

17. *Fallunterscheidungen.* Wir definieren

$$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } x < y \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \min(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y \\ y & \text{falls } x > y \end{cases}.$$

   (a) Zeigen Sie $\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$.

   (b) Berechnen Sie $\max(x,y) - \min(x,y)$.

18. Betrachten Sie die Aussagen p: "n ist gerade" und q: "n^2 ist gerade" über eine natürliche Zahl n. Schreiben Sie die Aussage von Proposition 2.1.1 und die Aussagen (a) bis (c) aus Beispiel 1 in Form von Implikationen zwischen diesen Aussagen und ihren Verneinungen. Benutzen Sie das, um Beispiel 1 nochmals zu überdenken.

19. Betrachten Sie die Aussagen p: "n ist durch 4 teilbar" und q: "n ist durch 2 teilbar" über eine natürliche Zahl n. Welche der Implikationen $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $\neg p \Rightarrow \neg q$, $\neg q \Rightarrow \neg p$ gelten für alle natürlichen Zahlen n? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel (d.h. eine natürliche Zahl, für die die Aussage nicht gilt) an.

20. Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass die Aussage $(p \wedge q) \Rightarrow q$ für beliebige Aussagen p und q immer wahr ist. Interpretieren Sie dieses Resultat in "normaler" Sprache.

21. Zeigen Sie, dass $\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$ gilt und interpretieren Sie das in "normaler" Sprache.

22. Stellen Sie fest, welche der folgenden Aussagen über natürliche Zahlen m und n wahr und welche falsch sind, indem Sie sie in "normale" Sprache übersetzen (versuchen Sie, möglichst prägnante Übersetzungen zu finden):

$$\forall m \exists n : n \geq m$$
$$\exists m \forall n : n \geq m$$
$$\exists m \forall n : m \geq n$$
$$\forall m \forall n : m \geq n$$

23. Bilden Sie die Negation folgender Aussage, wobei die Variable x reelle Zahlen und die Variable n natürliche Zahlen bezeichnet:

$$\exists x : \forall n : n \leq x.$$

Ist die Aussage wahr oder falsch?

24. Bilden Sie die Verneinungen der folgden Aussagen:

    (a) Alle Hauser sind zu teuer oder schon verkauft.

    (b) Es gibt Vierecke, die genau drei rechte Winkel haben.

    (c) Wenn zwei Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie nicht parallel.

25. Welche der folgenden Aussagen ist eine Tautologie, welche eine Kontradiktion und welche keines von beiden?

$$\text{(a)} \quad p \vee (\neg p \wedge q) \qquad\qquad \text{(b)} \quad p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

26. Gegeben $X = \{3, 6, 9, 12\}, Y = \{6, 12, 18, 24\}, Z = \{3, 9, 15, 21\}$. Bestimmen Sie:

    (a) $X \cup (Y \setminus Z)$

    (b) $(Y \cup X) \setminus (X \cap Z)$

27. Seinen A, B und C beliebige Mengen. Zeigen Sie: Ist $A \subseteq B$, dann ist $A \cap C \subseteq B \cap C$ und $C \setminus A \supseteq C \setminus B$.

28. Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A und B folgende Bedinungen äquivalent sind:

    (a) $A \subseteq B$

    (b) $A \cup B = B$

    (c) $A \cap B = A$

    (d) $A \setminus B = \emptyset$

29. Betrachten Sie das Intervall $I = [0, 1) \subset \mathbb{R}$. Dann ist $I \times I$ ein Quadrat in $\mathbb{R}^2$, also kann man Relationen auf der Menge I graphisch darstellen. Skizzieren Sie in diesem Bild die folgenden Relationen:

    (a) Die übliche Ordnungsrelation $\leq$

    (b) xRy genau dann, wenn x und y die gleiche erste Nachkommastelle haben.

    (c) xSy genau dann, wenn $|x - y| \leq 0.1$

30. Wie drückt sich in der graphischen Darstellung aus dem letzten Beispiel aus, dass eine Relation reflexiv, bzw. symmetrisch, bzw. antisymmetrisch ist.

    Hinweis (für Tüftler): Man kann auch Transitivität gut in diesem graphischen Bild verstehen.

31. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

32. Beweisen Sie, dass die Teilmengenrelation $\subseteq$ eine Ordnungsrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ der Menge $\{1,2,3,4\}$ definiert. Geben Sie Beispiele von unvergleichbaren Element bezüglich dieser Ordnung an. Gibt es Elemente, die mit jedem anderen Element vergleichbar sind?

33. Wiederholen Sie die Definition des Bildes und des Urbildes einer Menge unter einer Abbildung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Mengen A_i, B_i $(i = 1,2,3)$ die Bildmengen $f_i(A_i)$ sowie die Urbildmengen $f_i^{-1}(B_i)$:

    (a) $f_1(x) = -x + 1$, $A_1 = \{0,1,2\}$, $B_1 = (0,1)$
    (b) $f_2(x) = x^2 - 1$, $A_2 = \{-1,1\}$, $B_2 = \{-1,0\}$
    (c) $f_3(x) = a$ $(a \in \mathbb{R}$ konstant$)$, $A_3 = \{-1,0\} \cup (1,4)$, $B_3 = \{a\}$

34. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und seien $A_1, A_2 \subseteq X$ und $B_1, B_2 \subseteq Y$ Teilmengen. Beweisen Sie: $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ und $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

35. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und seien $A_1, A_2 \subseteq X$ Teilmengen. Beweisen Sie, dass $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ und dass Gleichheit gilt, falls f injektiv ist.

36. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen und $g \circ f : X \to Z$ ihre Komposition. Beweisen Sie:

    (a) Sind f und g surjektiv, dann ist $g \circ f$ surjektiv
    (b) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist g surjektiv.

    Finden Sie ein Beispiel in dem in der Situation von (b) f nicht surjektiv ist.

37. Bestimmen Sie die Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ für die jeweils angegebenen Funktionen

    (a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x), g(x) = x^4$.
    (b) $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(q) = \frac{q}{5}, g(q) = q(q-1)$.
    (c) $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = 3^n, g(n) = n^3$.

38. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

    (a) Machen Sie sich klar, was $f^{-1}(f(A))$ ist, beweisen Sie, dass $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ gilt und finden Sie ein Besipiel in dem $A \neq f^{-1}(f(A))$ gilt.

    (b) Bewiesen Sie, dass für eine injektive Funktion f immer $A = f^{-1}(f(A))$. Kann man umgekehrt aus dieser Gleichheit auf Injektivität von f schließen?

39. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $B \subseteq Y$ eine Teilmenge. Formulieren und beweisen Sie analog zum letzten Beispiel Aussagen über $f(f^{-1}(B))$.

40. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, \dots, 9\} \qquad (n, m) \mapsto 3(n - 1) + m$$

    bijektiv ist und bestimmen Sie die inverse Funktion f^{-1}.

41. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, sodass es eine Funktion $g : Y \to X$ gibt, die $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ erfüllt. Beweisen Sie, dass f bijektiv ist und g mit der inversen Funktion f^{-1} von f übereinstimmt.

42. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, I eine Indexmenge und für jedes Element $i \in I$ sei $A_i \subset X$ eine Teilmenge.

    Beweisen Sie, dass $f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$ und $f(\cap_{i \in I} A_i) \subseteq \cap_{i \in I} f(A_i)$ gilt.

43. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen mit Komposition $g \circ f : X \to Z$. Beweisen Sie, dass $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ für jede Teilmenge $U \subseteq Z$ gilt.

44. Geben Sie explizit eine bijektive Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ an.

45. Beweisen Sie, dass die Subtraktion als Operation auf $\mathbb{R}$ nicht assoziativ ist und kein neutrales Element besitzt.

46. (für die, die das in der Schule gelernt haben): Zeigen Sie durch ein (einfaches!) Beispiel, dass das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) auf $\mathbb{R}^3$ das Assoziativgesetz nicht erfüllt und kein neutrales Element besitzt.

47. Stellen Sie die Gruppentafeln für die Multiplikation auf $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_5$ auf.

48. Wir definieren eine Operation $\circ$ auf $\mathbb{R}$ durch $x \circ y := xy - 4$ wobei xy das übliche Produkt auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. Erfüllt diese Operation das Assoziativgesetz?

49. Für eine beiliebige Menge X betrachten wir die Menge $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ aller Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ uind definieren darauf eine Addition durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$. Überlegen Sie sich genau, was diese Definition bedeutet und beweisen Sie dann, dass $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +)$ eine kommutative Gruppe ist.

50. Beweisen Sie, dass die geraden Zahlen eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ bilden. Stimmt das auch für die ungeraden Zahlen?

51. Beweisen Sie, dass $(0, \infty)$ eine Untergruppe in $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ bildet und (mit Hilfe von Schulwissen über die Exponentialfunktion) dass die Funktion $t \mapsto e^t$ einen Gruppenisomorphimsmus $(\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot)$ definiert.

52. Lösen Sie die Gleichung $\bar{3} \cdot x = \bar{4}$ im Ring $\mathbb{Z}_7$ der Restklassen modulo 7. (**Anleitung**: Finden Sie ein multiplikativ inverses Element zu $\bar{3}$.)

53. Bestimmen Sie (händisch) den größten gemeinsamen Teiler von 2772 und 819.

54. Auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ betrachten wir die Relation $\sim$, die definiert ist durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1.$$

Beweisen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist (und bemerken Sie, dass dieser Beweis die Kürzungsregel in $(\mathbb{N}, +)$ benötigt).

55. Für die Relation aus dem letzen Beispiel bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von (m, n) mit $[(m, n)]$ Bweisen Sie, dass wir durch

$$[(m_1, n_1)] + [(m_2, n_2)] := [(m_1 + m_2, n_1 + n_2)]$$

eine wohldefinierte Addition auf der Menge der Äquivalenzklassen erhalten, die diese Menge zu einer kommutativen Gruppen macht.

56. Berechnen Sie $z + w$, zw, $\bar{z}$ und z^{-1} für $z = 3 + 4i$ und $w = -2 - i$.

57. Berechnen Sie die Wurzeln von $z = 3 - 4i$ und $w = 1 + 2i$.

58. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über dem Körper der komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}x + (1 + i)y &= 0 \\ 2x - (1 - i)y &= 2 \end{aligned}$$