

KAPITEL 2

Bündel

In diesem Kapitel werden wir die Theorie der Faserbündel und speziell der Vektorbündel und der Hauptfaserbündel studieren. Die allgemeine Idee dabei ist, daß man Mannigfaltigkeiten betrachtet, die lokal wie ein Produkt einer offenen Teilmenge einer fixen Basismannigfaltigkeit und einer fixen Mannigfaltigkeit (der Faser) aussehen. Die Spezialfälle ergeben sich so, daß man für die Faser einen Vektorraum oder eine Lie Gruppe nimmt, und die entsprechende Struktur in der Konstruktion berücksichtigt.

2.1. Faserbündel. Sei $p : E \rightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und F eine weitere glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Faserbündelkarte* für p mit Faser F ist eine offene Teilmenge $U \subset M$ zusammen mit einem Diffeomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, sodaß $\text{pr}_1 \circ \varphi = p$ ist.

Die Abbildung p (oder E) heißt ein Faserbündel mit Faser F , falls es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U von x in M und eine Faserbündelkarte $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ gibt. E heißt dann der *Totalraum*, M die *Basis* und F die *typische Faser* des Faserbündels. Eine Faserbündelkarte für ein Faserbündel heißt auch eine *lokale Trivialisierung* des Faserbündels. Ein Faserbündel $p : E \rightarrow M$ heißt *trivial*, falls es eine Faserbündelkarte (M, φ) gibt. In diesem Fall heißt φ eine *Trivialisierung* des Faserbündels.

Ein *Schnitt* eines Faserbündels ist eine glatte Funktion $\sigma : M \rightarrow E$ mit $p \circ \sigma = \text{id}_M$, und ein *lokaler Schnitt* ist eine glatte Funktion $\sigma : U \rightarrow E$ mit $p \circ \sigma = \text{id}_U$, wobei $U \subset M$ eine offene Teilmenge ist. Die Menge der glatten Schnitte eines Faserbündels $p : E \rightarrow M$ wird mit $\Gamma(E)$ und die Menge der lokalen glatten Schnitte über eine offenen Teilmenge $U \subset M$ mit $\Gamma(U, E)$ bezeichnet. Ist (U, φ) eine Faserbündelkarte für $p : E \rightarrow M$ und $f : U \rightarrow F$ eine glatte Funktion, dann definiert $\sigma(x) = \varphi^{-1}(x, f(x))$ einen lokalen glatten Schnitt von E . Somit hat jedes Faserbündel viele lokale Schnitte. Genauer gesagt gilt $\Gamma(U, E) \cong C^\infty(U, F)$ für jede Kartenumgebung U . Im allgemeinen muß aber ein Faserbündel keinen globalen glatten Schnitt besitzen.

Ist $p : E \rightarrow M$ ein Faserbündel, dann ist p nach Definition surjektiv. Ist $\sigma : U \rightarrow E$ ein glatter lokaler Schnitt, dann ist $T_{\sigma(x)}p \circ T_x\sigma = \text{id}_{T_xU}$, also ist $T_{\sigma(x)}p$ surjektiv. Nach der obigen Überlegung geht durch jeden Punkt von E ein lokaler glatter Schnitt (entsprechend einer konstanten Funktion $U \rightarrow F$), also ist p eine Submersion. Insbesondere ist damit für jeden Punkt $x \in M$ die *Faser* $E_x := p^{-1}(x)$ von E über x eine glatte Teilmannigfaltigkeit von E , die diffeomorph zu F ist.

Ein *Faserbündelatlas* für ein Faserbündel $p : E \rightarrow M$ ist eine Familie $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ von Faserbündelkarten, sodaß $M = \cup_\alpha U_\alpha$ gilt. Für zwei Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (U_β, φ_β) in so einem Atlas setzen wir $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ und betrachten die Funktion $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times F \rightarrow U_{\alpha\beta} \times F$. Nach Definition ist die erste Komponente dieser Abbildung die Identität. Die zweite Komponente ist eine glatte Funktion $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \times F \rightarrow F$, die die Eigenschaft hat, daß für jeden Punkt $x \in U_{\alpha\beta}$ die Abbildung $y \mapsto \varphi_{\alpha\beta}(x, y)$ ein Diffeomorphismus von F ist.

Sind $p : E \rightarrow M$ und $p' : E' \rightarrow M'$ Faserbündel, dann ist ein *Faserbündelmorphismus* von E nach E' eine glatte Funktion $f : E \rightarrow E'$, sodaß es eine Funktion $\underline{f} : M \rightarrow M'$ gibt, die $p' \circ f = \underline{f} \circ p$ erfüllt. Da p eine surjektive Submersion ist, ist dann auch $\underline{f} : M \rightarrow M'$ automatisch eine glatte Funktion. Ein *Faserbündelisomorphismus* ist ein Faserbündelmorphismus f , der ein Diffeomorphismus ist. In diesem Fall ist auch der inverse Diffeomorphismus f^{-1} ein Faserbündelmorphismus.

Beispiele. (1) Die erste Projektion $\text{pr}_1 : M \times F \rightarrow F$ ist ein triviales Faserbündel über M mit Faser F .

(2) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p : TM \rightarrow M$ das Tangentialbündel von M . Für eine Karte (U, u) für M ist $Tu : p^{-1}(U) \rightarrow u(U) \times \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, der $\text{pr}_1 \circ Tu = u \circ p$ erfüllt. Damit ist aber $(u^{-1}, \text{id}) \circ Tu = (p, \text{pr}_2 \circ Tu) : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ eine Faserbündelkarte, also ist $p : TM \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Faser $\mathbb{R}^n$.

Für eine Lie-Gruppe G ist $X_g \mapsto (g, T_g \lambda_{g^{-1}} \cdot X_g) : TG \rightarrow G \times \mathfrak{g}$ eine Faserbündelkarte, also eine Trivialisierung des Tangentialbündels.

(3) Sei G eine Lie Gruppe, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, G/H der entsprechende homogene Raum und $p : G \rightarrow G/H$ die kanonische Projektion. Dann wissen wir aus 1.12, daß $p : G \rightarrow G/H$ ein Faserbündel mit Faser H ist.

2.2. Lemma. Sei E eine Menge, M und F glatte Mannigfaltigkeiten, $p : E \rightarrow M$ eine Funktion. Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M sodaß es bijektive Funktionen $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ mit $\text{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = p$ gibt, sodaß für $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ glatte Funktionen $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \times F \rightarrow F$ gibt, die $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(x, y) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(x, y))$ für alle $(x, y) \in U_{\alpha\beta} \times F$ erfüllen. Dann gibt es auf E eine eindeutige Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, sodaß $p : E \rightarrow M$ glatt ist und $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Faserbündelatlas ist.

BEWEIS. Indem wir die Mengen U_α mit den Kartenumgebungen eines Atlas von M schneiden und davon eine abzählbare Teilüberdeckung nehmen (siehe [I, 2.7(3)]), dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\{U_\alpha\}$ eine abzählbare Familie von Kartenumgebungen in einem Atlas $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}$ für M ist. Sei $\{(V_i, v_i)\}$ ein abzählbarer Atlas für F . Dann definieren wir $W_{i\alpha} \subset E$ durch $W_{i\alpha} = \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times V_i)$ und Funktionen $w_{i\alpha} : W_{i\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, wobei $m = \dim(M)$ und $n = \dim(F)$ durch $w_{i\alpha} = (u_\alpha, v_i) \circ \varphi_\alpha$. Dann ist $w_{i\alpha} : W_{i\alpha} \rightarrow w_{i\alpha}(W_{i\alpha}) = u_\alpha(U_\alpha) \times v_i(V_i)$ eine Bijektion auf eine offen Teilmenge. Weiters ist $w_{i\alpha}(W_{j\beta} \cap W_{i\alpha}) = u_\alpha(U_{\alpha\beta}) \times v_i(V_{ij})$ also offen. Für die Kartenwechselabbildungen erhalten wir

$$w_{i\alpha} \circ w_{j\beta}^{-1} = (u_\alpha, v_i) \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ (u_\beta^{-1}, v_j^{-1}),$$

also $(x, y) \mapsto (u_{\alpha\beta}(x), v_i(\varphi_{\alpha\beta}(u_\beta^{-1}(x), v_j^{-1}(y))))$ und das ist glatt. Da die Familie $\{W_{i\alpha}\}$ abzählbar ist, erhalten wir aus diesen Karten nach [I, 2.4(5)] die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit auf E , und alle weiteren Eigenschaften sind offensichtlich. $\square$

2.3. Faserbündel mit Strukturgruppe. Sei $\ell : G \times F \rightarrow F$ eine fixe Linkswirkung einer Lie Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit F und sei $p : E \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Zwei Faserbündelkarten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (U_β, φ_β) für $p : E \rightarrow M$ heißen *G-verträglich* falls es eine glatte Funktion $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G$ gibt, sodaß die Funktion $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times F \rightarrow U_{\alpha\beta} \times F$ gegeben ist durch $(x, y) \mapsto (x, \ell(\varphi_{\alpha\beta}(x), y))$. Die Funktion $\varphi_{\alpha\beta}$ heißt dann die *Transitionsfunktion* zu den beiden Faserbündelkarten.

Ein Faserbündelatlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ für eine Faserbündel $p : E \rightarrow M$ mit Faser F heißt ein *G-Atlas*, falls je zwei seiner Karten *G-verträglich* sind. Zwei *G-Atlanten* heißen *äquivalent* falls ihre Vereinigung wieder ein *G-Atlas* ist. Ein Faserbündel mit Faser F und *Strukturgruppe* G ist ein Faserbündel $p : E \rightarrow M$ mit typischer Faser F zusammen

mit einer Äquivalenzklasse von G -Atlanten. So eine Äquivalenzklasse liefert natürlich einen maximalen G -Atlas, und eine Faserbündelkarte auf so einem Bündel ist einfach eine Karte aus diesem maximalen G -Atlas.

Seien $p : E \rightarrow M$ und $p' : E' \rightarrow M$ Faserbündel mit Faser F und Strukturgruppe G . Ein Isomorphismus von E nach E' ist ein Faserbündelisomorphismus $f : E \rightarrow E'$ mit $\underline{f} = \text{id} : M \rightarrow M$, sodaß für jede Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ in einem G -Atlas von E' $(U_\alpha, \varphi_\alpha \circ f)$ eine Karte im maximalen G -Atlas von E ist. Klarerweise ist das unabhängig von der Wahl des Atlas auf E' .

Beispiele. (1) Betrachten wir das Faserbündel $p : TM \rightarrow M$ aus Beispiel (2) von 2.1. Für zwei Karten (U_α, u_α) und (U_β, u_β) für M sei $u_{\alpha\beta} = u_\alpha \circ u_\beta^{-1} : u_\beta(U_{\alpha\beta}) \rightarrow u_\alpha(U_{\alpha\beta})$ die Kartenwechselabbildung. Dann ist $Tu_\alpha \circ (Tu_\beta)^{-1}$ nach [I, 2.16] gegeben durch $(y, Y) \mapsto (u_{\alpha\beta}(y), Du_{\alpha\beta}(y)(Y))$. Somit sehen wir, daß der oben konstruierte Faserbündelatlas ein $GL(n, \mathbb{R})$ -Atlas ist, wobei die Transitionsfunktionen durch $\varphi_{\alpha\beta}(x) = Du_{\alpha\beta}(u_\beta(x))$ gegeben sind. $p : TM \rightarrow M$ ist also ein Faserbündel mit Faser $\mathbb{R}^n$ und Strukturgruppe $GL(n, \mathbb{R})$.

(2) Aus 1.12 wissen wir, daß $p : G \rightarrow G/H$ ein Faserbündel mit Faser H und Strukturgruppe H ist, wobei H auf sich selbst durch Linksmultiplikation wirkt.

Hauptfaserbündel und assoziierte Bündel

2.4. Hauptfaserbündel. Sei G eine Lie Gruppe. Ein G -Hauptfaserbündel $p : P \rightarrow M$ über M ist ein Faserbündel mit typischer Faser G und Strukturgruppe G , wobei G auf sich selbst durch Linksmultiplikation wirkt. Das bedeutet gerade, daß es einen Faserbündelatlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G)\}$ für P gibt, sodaß es glatte Funktionen $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G$ gibt, die $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(x, g) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(x)g)$ erfüllen. So ein Atlas heißt ein *Hauptfaserbündelatlas* und die Karten eines maximalen Hauptfaserbündelatlas heißen *Hauptfaserbündelkarten*.

Vorsicht: Für ein G -Hauptfaserbündel $p : P \rightarrow M$ ist jede Faser $p^{-1}(x)$ für $x \in M$ diffeomorph zur Lie-Gruppe G (und eine abgeschlossene Teilmannigfaltigkeit von P). Die Faser selbst hat aber *keine* natürliche Gruppenstruktur. Jede Hauptfaserbündelkarte φ_α mit $x \in U_\alpha$ liefert zwar einen Diffeomorphismus von $p^{-1}(x)$ mit G und somit eine Multiplikation auf $p^{-1}(x)$ aber diese Multiplikation hängt von der Wahl der Karte ab. Es gibt aber eine Struktur die an die Gruppenmultiplikation erinnert:

Sei $p : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel. Dann definieren wir die *prinzipale Rechtswirkung* $r : P \times G \rightarrow P$ durch $r(\varphi_\alpha^{-1}(x, g), h) := \varphi_\alpha^{-1}(x, gh)$. Ist $\varphi_\alpha^{-1}(x, g) = \varphi_\beta^{-1}(x, g')$, dann ist $g = \varphi_{\alpha\beta}(x)g'$, also $gh = \varphi_{\alpha\beta}(x)g'h$ und damit $\varphi_\alpha^{-1}(x, gh) = \varphi_\beta^{-1}(x, g'h)$, also ist r wohldefiniert. Nach Definition ist $r|_{p^{-1}(U_\alpha) \times G} = \varphi_\alpha^{-1} \circ (\text{id}_{U_\alpha} \times \mu) \circ (\varphi_\alpha \times \text{id}_G)$ also eine glatte Abbildung. Da die Mengen $p^{-1}(U_\alpha) \times G$ eine offenen Überdeckung von $P \times G$ bilden ist damit $r : P \times G \rightarrow P$ eine glatte Funktion und offensichtlich ist r eine Rechtswirkung.

Sei $u \in P$ ein Punkt und $h \in G$ so, daß $u \cdot h = u$ gilt. Dann ist $u = \varphi_\alpha^{-1}(x, g)$ für ein α , ein $x \in U_\alpha$ und ein $g \in G$ und $\varphi_\alpha^{-1}(x, gh) = \varphi_\alpha^{-1}(x, g)$, also $h = e$. Damit ist die Wirkung r frei. Außerdem ist für $u \in P$, $u = \varphi_\alpha^{-1}(x, g)$ der Orbit $u \cdot G$ gerade durch das Urbild unter φ_α von $\{x\} \times G$ gegeben, also genau die Faser $p^{-1}(p(u))$, d.h. die Wirkung r ist transitiv auf jeder Faser.

Beispiele. (1) Nach 1.12 ist für eine Lie Gruppe G und eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ die Projektion $p : G \rightarrow G/H$ ein H -Hauptfaserbündel. Die prinzipale

Rechtswirkung ist in diesem Fall einfach die Einschränkung $\mu : G \times H \rightarrow G$ der Multiplikation.

(2) **Das Rahmenbündel einer Mannigfaltigkeit** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Für einen Punkt $x \in M$ sei $\mathcal{P}_x M$ die Menge aller linearen Isomorphismen von $\mathbb{R}^n$ nach $T_x M$. Sei $\mathcal{P}M = GL(\mathbb{R}^n, TM)$ die disjunkte Vereinigung über alle $x \in M$ der $\mathcal{P}_x M$. Dann gibt es eine offensichtliche Projektion $p : \mathcal{P}M \rightarrow M$. Sei $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}$ ein Atlas für M . Dann ist für jeden Punkt $x \in M$ die Funktion $T_x u_\alpha : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus. Nun definiere $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times GL(n, \mathbb{R})$ durch $\varphi_\alpha l(\Phi_x) := (x, T_x u_\alpha \circ \Phi_x)$. Natürlich ist $T_x u_\alpha \circ \Phi_x$ als Komposition von zwei linearen Isomorphismen ein Element von $GL(n, \mathbb{R})$. Offensichtlich ist $(x, A) \mapsto (T_x u_\alpha)^{-1} \circ A$ eine Inverse zu φ_α . Damit ist aber der Kartenwechsel gegeben durch $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(x, A) = (x, T_x u_\alpha \circ (T_x u_\beta)^{-1} \circ A)$. Nach [I, 2.16] ist $\varphi_{\alpha\beta}(x) = T_x u_\alpha \circ (T_x u_\beta)^{-1} = D(u_{\alpha\beta})(u_\beta(x))$, also ist $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ eine glatte Funktion. Nach Lemma 2.2 ist $\mathcal{P}M \rightarrow M$ ein glattes $GL(n, \mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel. Die prinzipale Rechtswirkung für dieses Hauptfaserbündel ist nach Konstruktion einfach durch Komposition von rechts gegeben, d.h. $\Phi_x \cdot A = \Phi_x \circ A$.

Sei $\sigma : U \rightarrow \mathcal{P}M$ ein lokaler Schnitt des Rahmenbündels. Dann ordnet σ jeden Punkt $x \in U$ einen linearen Isomorphismus $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ zu. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein fixer Vektor. Dann betrachte die Funktion $\xi : U \rightarrow TM$, die gegeben ist durch $\xi_v(x) = \sigma(x)(v)$. Für eine Karte (U_α, u_α) von M mit $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$ ist $\text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \sigma$ eine glatte Funktion $U \cap U_\alpha \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, die gegeben ist durch $x \mapsto T_x u_\alpha \circ \sigma(x)$. Daraus folgt aber sofort, daß $x \mapsto T_x u_\alpha \cdot \xi_v$ eine glatte Funktion $U \cap U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist, also ist ξ_v ein lokales glattes Vektorfeld. Betrachte nun die Familie $\{\xi_{e_1}, \dots, \xi_{e_n}\}$ von glatten Vektorfeldern auf U . Nach Konstruktion sind die Werte dieser Vektorfelder in jedem Punkt $x \in U$ linear unabhängig, also bilden sie einen lokalen Rahmen für M über U . Also liefert ein Schnitt von $\mathcal{P}M$ über U einen lokalen Rahmen über U .

Ist umgekehrt $U \subset M$ offen und $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ein lokaler Rahmen über U , dann definiert man $\sigma : U \rightarrow \mathcal{P}M$ durch $\sigma(x)(v_1, \dots, v_n) := v_1 \xi_1(x) + \dots + v_n \xi_n(x)$. Dann ist jedes $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ ein linearer Isomorphismus und man verifiziert leicht, daß σ ein lokaler glatte Schnitt von $\mathcal{P}M$ ist. Somit entsprechen die lokalen Schnitte von $\mathcal{P}M$ genau den lokalen Rahmen auf M . Daher kommt auch der Name Rahmenbündel.

2.5. Hauptfaserbündelhomomorphismen. Der allgemeinste Begriff eines Hauptfaserbündelhomomorphismus ist der folgende: Sei $\psi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus zwischen Lie-Gruppen, $p : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $q : Q \rightarrow N$ ein H -Hauptfaserbündel. Ein *Hauptfaserbündelhomomorphismus* von P nach Q über ψ ist ein Faserbündelmorphismus $f : P \rightarrow Q$, der mit den prinzipalen Rechtswirkungen über ψ verträglich ist, also $f(u \cdot g) = f(u) \cdot \psi(g)$ erfüllt.

Meist betrachtet man den Fall $N = M$ und $f = \text{id}_M$. In diesem Fall spricht man von einer *Reduktion der Strukturgruppe* des Bündels Q auf die Gruppe G , vor allem wenn $\psi : G \rightarrow H$ die Inklusion einer Untergruppe ist. Ist $\psi : G \rightarrow H$ surjektiv, dann spricht man auch von einer Erweiterung der Strukturgruppe.

Betrachten wir den noch spezielleren Fall $M = N$, $f = \text{id}_M$, $G = H$ und $\psi = \text{id}_G$. Dann ist f automatisch ein Isomorphismus. Seien nämlich $p : P \rightarrow M$ und $q : Q \rightarrow M$ G -Hauptfaserbündel und $f : P \rightarrow Q$ ein Hauptfaserbündelhomomorphismus mit den obigen Eigenschaften. Dann ist f bijektiv: Sind $u, v \in P$ mit $f(u) = f(v)$, dann gilt $p(u) = p(v)$ wegen $q \circ f = p$. Damit gibt es aber ein eindeutiges $g \in G$, sodaß $v = u \cdot g$ gilt. Dann ist aber $f(v) = f(u) \cdot g = f(u)$, also $g = e$ weil G frei wirkt, also $u = v$ und f ist injektiv. Ist $w \in Q$ beliebig, dann wähle einen Punkt $u \in p^{-1}(q(w))$. Dann ist $q(f(u)) = p(u) = q(w)$, also gibt es ein eindeutiges $g \in G$ mit $w = f(u) \cdot g$.

Damit ist aber $w = f(u \cdot g)$, also f surjektiv. Wir müssen also nur noch zeigen, daß die Inverse Funktion f^{-1} glatt ist. Sei dazu $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Hauptfaserbündelatlant für P und $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ ein Hauptfaserbündelatlant für Q (ohne Beschränkung der Allgemeinheit zur selben offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M). Definiere $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$ durch $f_\alpha(x) := (\text{pr}_2 \circ \psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x, e)$. Dann ist f_α offensichtlich glatt und wegen der Äquivarianz von f ist $(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x, g) = (x, f_\alpha(x)g)$. Damit ist aber $(\varphi_\alpha \circ f^{-1} \circ \psi_\alpha^{-1})(x, g) = (x, f_\alpha(x)^{-1}g)$, also ist f^{-1} glatt. Ein Hauptfaserbündelhomomorphismus dieser Art von einem Bündel P auf sich selbst heißt auch eine *Eichtransformation*.

2.6. Beschreibung durch Kozykel von Transitionsfunktionen. Sei $p : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und sei $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ein Hauptfaserbündelatlant mit zugehörigen Transitionsfunktionen $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G$. Für drei Karten mit $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ gilt dann nach Konstruktion $\varphi_{\alpha\beta}(x)\varphi_{\beta\gamma}(x) = \varphi_{\alpha\gamma}(x)$, die *Kozykelgleichung*. Man bemerke, daß diese Gleichung schon formal für $\alpha = \beta = \gamma$ die Gleichung $\varphi_{\alpha\alpha}(x)^2 = \varphi_{\alpha\alpha}(x)$, also $\varphi_{\alpha\alpha}(x) = e$ und damit für $\gamma = \alpha$ die Gleichung $\varphi_{\beta\alpha}(x) = \varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1}$ impliziert. Die Familie $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ heißt der *Kozykel der Transitionsfunktionen* zu dem gegebenen Hauptfaserbündelatlant.

Sei umgekehrt $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ eine offene Überdeckung von M und sei $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G$ eine Familie von glatten Funktionen, sodaß $\varphi_{\alpha\beta}(x)\varphi_{\beta\gamma}(x) = \varphi_{\alpha\gamma}(x)$ für alle $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ gilt. Dann definieren wir eine Menge $\tilde{P} := \{(\alpha, x, g) : \alpha \in I, x \in U_\alpha, g \in G\}$ und darauf eine Relation durch $(\alpha, x, g) \sim (\beta, x', g')$ genau dann, wenn $x = x'$ und $g = \varphi_{\alpha\beta}(x)g'$ gilt. Wegen der Kozykelgleichung (die ja $\varphi_{\alpha\alpha}(x) = e$ und $\varphi_{\beta\alpha}(x) = \varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1}$ impliziert) ist das eine Äquivalenzrelation und wir setzen $P = \tilde{P} / \sim$, die Menge der Äquivalenzklassen. Wir schreiben $[\alpha, x, g]$ für die Äquivalenzklasse von (α, x, g) . Nach Definition von $\sim$ liefert $p([\alpha, x, g]) = x$ eine wohldefinierte Abbildung $p : P \rightarrow M$.

Als nächstes definieren wir für jedes $\alpha \in I$ eine Funktion $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$: Für $[\beta, x, g]$ in $p^{-1}(U_\alpha)$ ist $x \in U_{\alpha\beta}$ und wir setzen $\varphi_\alpha([\beta, x, g]) := (x, \varphi_{\alpha\beta}(x)g)$. Ist $[\beta, x, g] = [\gamma, x', g']$, dann ist $x = x'$ und $g = \varphi_{\beta\gamma}(x)g'$, also $\varphi_{\alpha\beta}(x)g = \varphi_{\alpha\beta}(x)\varphi_{\beta\gamma}(x)g' = \varphi_{\alpha\gamma}(x)g'$, also ist φ_α wohldefiniert. Ist $\varphi_\alpha([\beta, x, g]) = \varphi_\alpha([\gamma, x', g'])$, dann ist $x = x'$ und $\varphi_{\alpha\beta}(x)g = \varphi_{\alpha\gamma}(x)g' = \varphi_{\alpha\beta}(x)\varphi_{\beta\gamma}(x)g'$, also $g = \varphi_{\beta\gamma}(x)g'$, also $(\beta, x, g) \sim (\gamma, x', g')$, also ist φ_α injektiv. Außerdem ist $\varphi_\alpha([\alpha, x, g]) = (x, g)$, also ist φ_α sogar bijektiv.

Betrachten wir nun für $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ die Funktion $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times G \rightarrow U_{\alpha\beta} \times G$. Nach Konstruktion ist $\varphi_\beta^{-1}(x, g) = [\beta, x, g]$, also erhalten wir $\varphi_\alpha([\beta, x, g]) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(x)g)$. Nach Lemma 2.2 ist $p : P \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Faserbündelatlant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, also ein G -Hauptfaserbündel, und die Transitionsfunktionen für den konstruierten Hauptfaserbündelatlant sind genau die Funktionen $\varphi_{\alpha\beta}$ mit denen wir begonnen haben.

Wir finden also für jede Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M und jeden zugehörigen Kozykel $\varphi_{\alpha\beta}$ von Transitionsfunktionen ein G -Hauptfaserbündel mit diesen Transitionsfunktionen.

Wir müssen also nur noch in Termen der Transitionsfunktionen beschreiben, wann zwei Hauptfaserbündel isomorph sind. Zunächst können wir dazu durch Einschränken der Karten ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß wir G -Atlanten zur selben offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M haben. Seien also $p : P \rightarrow M$ und $q : Q \rightarrow M$ G -Hauptfaserbündel mit Hauptfaserbündelatlanten $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ und $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ und entsprechenden Kozykeln $\varphi_{\alpha\beta}$ und $\psi_{\alpha\beta}$ von Transitionsfunktionen. Ist $f : P \rightarrow Q$ ein Isomorphismus, dann seien $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$ die Funktionen aus 2.5, d.h. $(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x, g) = (x, f_\alpha(x)g)$. Dann gilt aber auf $U_{\alpha\beta}$ die Gleichung

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} = (\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\beta^{-1})^{-1}.$$

Damit gilt aber für $x \in U_{\alpha\beta}$ und $g \in G$ die Gleichung

$$(x, \psi_{\alpha\beta}(x)g) = (x, f_\alpha(x)\varphi_{\alpha\beta}(x)f_\beta(x)^{-1}g),$$

also erhalten wir $\psi_{\alpha\beta}(x)f_\beta(x) = f_\alpha(x)\varphi_{\alpha\beta}(x)$ für alle $x \in U_{\alpha\beta}$. Man sagt, die Kozykel $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ und $\{\varphi'_{\alpha\beta}\}$ sind *kohomolog*.

Nehmen wir umgekehrt an, daß wir zu den Bündeln P, Q mit den obigen G -Atlanten glatte Funktionen $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$ finden, sodaß $\psi_{\alpha\beta}(x)f_\beta(x) = f_\alpha(x)\varphi_{\alpha\beta}(x)$ für alle $x \in U_{\alpha\beta}$ gilt. Dann definieren wir $f : P \rightarrow Q$ durch $f(\varphi_\alpha^{-1}(x, g)) := \psi_\alpha^{-1}(x, f_\alpha(x)g)$. Ist $u = \varphi_\alpha^{-1}(x, g) = \varphi_\beta^{-1}(x, g')$, dann ist $g = \varphi_{\alpha\beta}(x)g'$, also $f_\alpha(x)g = f_\alpha(x)\varphi_{\alpha\beta}(x)g' = \psi_{\alpha\beta}(x)f_\beta(x)g'$, und damit $\psi_\alpha^{-1}(x, \psi_\alpha(x)g) = \psi_\beta^{-1}(x, f_\beta(x)g')$. Damit ist f wohldefiniert nach Konstruktion ist f ein Homomorphismus, also nach 2.5 ein Isomorphismus von Hauptfaserbündeln.

Somit haben wir eine vollständige Beschreibung der Isomorphieklassen von G -Hauptfaserbündeln als Menge der Kozykel von Transitionsfunktionen modulo der Äquivalenzrelation kohomologer Kozykel.

2.7. Assoziierte Bündel. Der wesentliche Punkt an Hauptfaserbündeln ist, daß man für eine Mannigfaltigkeit F mit einer glatten Linkswirkung $\ell : G \times F \rightarrow F$ aus jedem G -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ ein Faserbündel $P \times_G F \rightarrow M$ mit Faser F und Strukturgruppe G , das *assoziierte Bündel* konstruieren kann. Wir werden sehen, daß man im Fall von effektiven Wirkungen so jedes Faserbündel mit Strukturgruppe G erhält, und daß das entsprechende Hauptfaserbündel eindeutig bestimmt ist.

Zunächst aber zur Konstruktion des assoziierten Bündels. Sei $p : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $\ell : G \times F \rightarrow F$ eine glatte Linkswirkung von G auf einer Mannigfaltigkeit F . Dann definieren wir eine glatte Rechtswirkung von G auf $P \times F$ durch $(u, y) \cdot g := (u \cdot g, g^{-1} \cdot y)$, also einfach als das Produkt der beiden Wirkungen. Sei $P \times_G F$ die Menge der Orbits dieser Wirkung. Für einen Punkt $(u, y) \in P \times F$ schreiben wir $[u, y]$ für die Klasse des Punktes in $P \times_G F$. Das bedeutet gerade, daß $[u, y] = [u \cdot g, g^{-1} \cdot y]$ bzw. $[u \cdot g, y] = [u, g \cdot y]$ gilt. Da $p(u \cdot g) = p(u)$ gilt, induziert $p \circ \text{pr}_1 : P \times F \rightarrow M$ eine wohldefinierte surjektive Funktion $\pi : P \times_G F \rightarrow M$, die durch $\pi([u, y]) = p(u)$ gegeben ist.

Sei nun $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Hauptfaserbündelatlas für P . Dann definieren wir $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ durch $\psi_\alpha([u, y]) := (p(u), \ell((\text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha)(u), y))$. Ist $[u, y] = [v, z]$, dann gibt es ein eindeutiges $g \in G$, sodaß $v = u \cdot g$ und $z = g^{-1} \cdot y$ gilt. Damit ist aber $(\text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha)(v) = (\text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha)(u)g$, also ist ψ_α wohldefiniert. Außerdem ist die Abbildung $(x, y) \mapsto [\varphi_\alpha^{-1}(x, e), y]$ offensichtlich invers zu ψ_α , also ist ψ_α bijektiv. Für eine zweite Karte (U_β, φ_β) mit $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ erhalten wir dann

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, y) = \psi_\alpha([\varphi_\beta^{-1}(x, e), y]) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot y).$$

Nach Lemma 2.2 ist daher $\pi : P \times_G F \rightarrow M$ ein glattes Faserbündel mit Faserbündelatlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$, also ein Faserbündel mit typischer Faser F und Strukturgruppe G .

Betrachten wir schließlich noch die kanonische Abbildung $q : P \times F \rightarrow P \times_G F$. In einer Hauptfaserbündelkarte φ_α für P und der entsprechenden Karte ψ_α für $P \times_G F$ hat diese Abbildung gerade die Form $(x, g, y) \mapsto (x, g \cdot y)$, also ist q eine glatte Funktion. In diesen Karten ist aber $(x, y) \mapsto (x, e, y)$ ebenfalls glatt, also gibt es lokale glatte Schnitte zu q und somit ist $q : P \times F \rightarrow P \times_G F$ eine surjektive Submersion.

2.8. Satz. Sei $q : E \rightarrow M$ ein Faserbündel mit typischer Faser F und Strukturgruppe G bezüglich einer effektiven glatten Linkswirkung $\ell : G \times F \rightarrow F$. Dann gibt es ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges G -Hauptfaserbündel $p : P \rightarrow M$ sodaß $E \cong P \times_G F$ (als Bündel mit Strukturgruppe G) gilt.

BEWEIS. Sei $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ ein G -Atlas mit Transitionsfunktionen $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G$. Nach Konstruktion gilt für drei Karten mit $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$ die Gleichung $(\varphi_{\alpha\beta}(x)\varphi_{\beta\gamma}(x)) \cdot y = \varphi_{\alpha\gamma}(x) \cdot y$ für alle $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ und $y \in F$. Wegen der Effektivität der Wirkung folgt daraus $\varphi_{\alpha\beta}(x)\varphi_{\beta\gamma}(x) = \varphi_{\alpha\gamma}(x)$ für alle $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$, d.h. $\varphi_{\alpha\beta}$ ist ein Kozykel von Transitionsfunktionen. Nach 2.6 finden wir zu diesem Kozykel ein G -Hauptfaserbündel $p : P \rightarrow M$ mit einem Hauptfaserbündelatlas $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ mit diesen Transitionsfunktionen. Sei $\pi : P \times_G F \rightarrow M$ das dazu assoziierte Bündel mit dem G -Atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ aus 2.7. Dann definieren wir $f : P \times_G F \rightarrow E$ durch $f(\psi_\alpha^{-1}(x, y)) = \varphi_\alpha^{-1}(x, y)$. Weil die Bündel E und $P \times_G F$ die selben Transitionsfunktionen haben ist f wohldefiniert und klarerweise ist es ein Isomorphismus von Faserbündeln mit Faser F und Strukturgruppe G .

Für den zweiten Teil des Beweises nehmen wir an, daß $p : P \rightarrow M$ und $p' : P' \rightarrow M$ zwei G -Hauptfaserbündel mit Hauptfaserbündelatlasen $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ und $\{(U_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ und entsprechenden Kozykeln von Transitionsfunktionen $\varphi_{\alpha\beta}$ und $\varphi'_{\alpha\beta}$ sind, sodaß ein Isomorphismus $f : P \times_G F \rightarrow P' \times_G F$ existiert. Sind $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ und $\{(U_\alpha, \psi'_\alpha)\}$ die entsprechenden G -Atlanten für die assoziierten Bündel, dann gibt es nach Definition eines Isomorphismus von Bündeln mit Strukturgruppe G glatte Funktionen $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$, sodaß $(\psi'_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1})(x, y) = (x, f_\alpha(x) \cdot y)$ gilt. Für zwei Kartenumgebungen mit $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ erhalten wir aus der Gleichung

$$\psi'_\alpha \circ (\psi'_\beta)^{-1} = (\psi'_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}) \circ (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi'_\beta \circ f \circ \psi_\beta^{-1})^{-1},$$

daß $\varphi'_{\alpha\beta}(x) \cdot y = (f_\alpha(x)\varphi_{\alpha\beta}(x)f_\beta(x)^{-1}) \cdot y$ für alle $y \in F$ gelten muß. Wegen der Effektivität der Wirkung folgt daraus $\varphi'_{\alpha\beta}(x)f_\beta(x) = f_\alpha(x)\varphi_{\alpha\beta}(x)$. Damit sind aber die Kozykel $\varphi_{\alpha\beta}$ und $\varphi'_{\alpha\beta}$ kohomolog, also die Bündel P und P' isomorph. $\square$

Vektorbündel

2.9. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein $\mathbb{K}$ -Vektorbündel $p : E \rightarrow M$ über einer glatten Mannigfaltigkeit M ist Faserbündel, das als typische Faser einen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorraum V und als Strukturgruppe die Gruppe $GL(V)$ der invertierbaren $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen hat. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ spricht man von komplexen Vektorbündeln, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ einfach von Vektorbündeln. Nach Definition bedeutet das, daß es einen Faserbündelatlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times V)$ gibt, sodaß es für je zwei Karten glatte Funktionen $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(V)$ gibt, die $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(x)(v))$ erfüllen. In diesem Fall heißt ein $GL(V)$ -Atlas ein *Vektorbündelatlas* und die Karten im maximalen $GL(V)$ -Atlas heißen *Vektorbündelkarten*. Der *Rang* eines Vektorbündels ist die Dimension von V . Ein *Linienbündel* ist ein Vektorbündel mit Rang 1.

Ist $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, dann ist jede Faser $E_x = p^{-1}(x) \subset E$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für zwei Punkte $u_1, u_2 \in E_x$ und $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ wählen wir eine Vektorbündelkarte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ mit $x \in U_\alpha$ und definieren $t_1u_1 + t_2u_2$ als $\varphi_\alpha^{-1}(x, t_1v_1 + t_2v_2)$ wobei $\varphi_\alpha(u_i) = (x, v_i)$ für $i = 1, 2$ gilt. Wählen wir eine andere Karte (U_β, φ_β) mit $x \in U_\beta$, dann ist $\varphi_\beta(u_i) = (x, \varphi_{\beta\alpha}(x)(v_i))$ und weil $\varphi_{\beta\alpha}(x)$ linear ist, ist $t_1\varphi_{\beta\alpha}(x)(v_1) + t_2\varphi_{\beta\alpha}(x)(v_2) = \varphi_{\beta\alpha}(x)(t_1v_1 + t_2v_2)$, und damit ist die Definition unabhängig von der Wahl der Vektorbündelkarte.

Da die kanonische Wirkung $GL(V) \times V \rightarrow V$ effektiv ist, ist nach Satz 2.8 jedes Vektorbündel über M assoziiert zu einem bis auf Isomorphie eindeutigen $GL(V)$ -Hauptfaserbündel über M . In diesem Fall kann man dieses Hauptfaserbündel auch leicht explizit beschreiben: Für $x \in M$ sei $GL(V, E)_x$ die Menge aller linearen Isomorphismen zwischen V und dem Vektorraum E_x . Dann sei $GL(V, E)$ die disjunkte

Vereinigung über alle $x \in M$ der Räume $GL(V, E)_x$ und $q : GL(V, E) \rightarrow M$ die offensichtliche Projektion. Ist $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Vektorbündelatlas für E , dann definieren wir $\psi_\alpha : q^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times GL(V)$ durch $\psi_\alpha(\Phi_x) := (x, \text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \Phi_x)$. Da für jedes x die Abbildung $\text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_x} : E_x \rightarrow V$ ein linearer Isomorphismus ist, ist die Komposition mit $\Phi_x : V \rightarrow E_x$ ein Element von $GL(V)$. Nun rechnet man leicht nach, daß $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, A) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(x) \circ A)$ gilt, wobei $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(V)$ die Transitionsfunktionen des Vektorbündels E sind. Aus Lemma 2.2 folgt nun wieder, daß $q : GL(V, E) \rightarrow M$ ein glatte $GL(V)$ -Hauptfaserbündel ist, und da die Transitionsfunktionen für diese Bündel die selben sind wie für E folgt aus dem Beweis von Satz 2.8, daß $E \cong GL(V, E) \times_{GL(V)} V$ gilt. Das Bündel $GL(V, E)$ heißt das *Rahmenbündel* von E .

Ist umgekehrt G eine Lie-Gruppe, $p : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $\ell : G \times V \rightarrow V$ eine Darstellung von G auf einem Vektorraum V , dann ist $P \times_G V$ ein Vektorbündel über M .

Sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, $s \in \Gamma(E)$ ein glatter Schnitt von E und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine glatte Funktion. Dann definiert $(fs)(x) := f(x)s(x)$ einen glatten Schnitt $fs \in \Gamma(E)$. Außerdem kann man glatte Schnitte natürlich punktweise addieren und erhält wieder einen glatten Schnitt. Somit ist der Raum $\Gamma(E)$ ein Modul über der Algebra $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Damit folgt aber nun sofort, daß jedes Vektorbündel viele globale glatte Schnitte hat. Zunächst hat man den *Nullschnitt*, der jedem Punkt $x \in M$ das Nullelement im Vektorraum E_x zuordnet. Aus 2.1 wissen wir bereits, daß E viele lokale glatte Schnitte besitzt, und mit Hilfe einer Partition der Eins auf M kann man aus lokalen Schnitte globale Schnitte konstruieren.

Seien $p : E \rightarrow M$ und $p' : E' \rightarrow M'$ Vektorbündel. Ein *Vektorbündelhomomorphismus* $\Phi : E \rightarrow E'$ ist ein Faserbündelmorphismus (d.h. es gibt eine Funktion $\underline{\Phi} : M \rightarrow M'$ mit $p' \circ \Phi = \underline{\Phi} \circ p$), sodaß für jeden Punkt $x \in M$ die Einschränkung $\Phi|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_{\underline{\Phi}(x)}$ eine lineare Abbildung ist. Insbesondere betrachtet man wieder den Fall $M = M'$ und $\underline{\Phi} = \text{id}_M$. Ist Φ so ein Vektorbündelhomomorphismus, dann erhalten wir eine induzierte Abbildung $\Phi_* : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$ durch $\Phi_*\sigma = \Phi \circ \sigma$.

Beispiele. (1) Für jede Mannigfaltigkeit M und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\text{pr}_1 : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$ ein Vektorbündel, das *triviale Vektorbündel* vom Rang n . Die glatten Schnitte dieses Bündels sind genau die glatten Funktionen von M nach $\mathbb{R}^n$.

(2) Für jede glatte Mannigfaltigkeit M ist das Tangentialbündel TM ein glattes Vektorbündel über M . Die glatten Schnitte des Tangentialbündels sind genau die Vektorfelder auf M . Das Rahmenbündel von TM ist genau das Rahmenbündel $\mathcal{P}M$ von M aus Beispiel (2) von 2.4. Für eine glatte Funktion $f : M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist die Tangentialabbildung $Tf : TM \rightarrow TN$ ein Vektorbündelhomomorphismus.

(3) **Das kanonische Bündel über einer Grassmann-Mannigfaltigkeit** Betrachte die Grassmann-Mannigfaltigkeit $Gr(k, \mathbb{R}^n)$ der k -dimensionalen Teilräume von $\mathbb{R}^n$ aus Beispiel (3) von 1.17. Definiere $E \subset Gr(k, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ durch $E = \{(V, v) : v \in V\}$ und $p : E \rightarrow Gr(k, \mathbb{R}^n)$ als die Einschränkung der ersten Projektion. Wir zeigen, daß dies ein glattes Vektorbündel ist, indem wir es direkt mit einem assoziierten Bündel zum Hauptfaserbündel $p : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow Gr(k, \mathbb{R}^n)$ identifizieren. Betrachte dazu $\mathbb{R}^k$ einerseits als Teilraum von $\mathbb{R}^n$ und andererseits als Punkt in $Gr(k, \mathbb{R}^n)$ und definiere eine glatte Abbildung $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^k \rightarrow Gr(k, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ durch $(A, v) \mapsto (p(A), Av)$. Nach Definition ist $p(A) = A(\mathbb{R}^k)$, also hat dies Funktion Werte in E und sie ist offensichtlich surjektiv auf E . Zwei Matrizen $A, A' \in GL(n, \mathbb{R})$ erfüllen genau dann $p(A) = p(A')$, wenn es ein B in der Isotropiegruppe H von $\mathbb{R}^k \in Gr(k, \mathbb{R}^n)$ gibt, sodaß $A' = AB$ ist. Gilt dann auch noch $Av = A'v'$, dann ist $Av = ABv'$, also $v = B^{-1}v'$. Somit erhalten wir eine

glatte Bijektion $GL(n, \mathbb{R}) \times_H \mathbb{R}^k \rightarrow E$. Um zu sehen, daß dies ein Diffeomorphismus ist, wähle einen lokalen glatten Schnitt σ des Bündels $GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow Gr(k, \mathbb{R}^n)$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset Gr(k, \mathbb{R}^n)$ und betrachte die Funktion $p^{-1}(U) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \times_H \mathbb{R}^k$, die gegeben ist durch $(V, v) \mapsto [\sigma(V), \sigma(V)^{-1}v]$. Offensichtlich ist das eine lokale glatte Inverse.

2.10. Lemma. *Seien $p : E \rightarrow M$ und $p' : E' \rightarrow M$ glatte Vektorbündel, $T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau dann einen Vektorbündelhomomorphismus $\Phi : E \rightarrow E'$ mit $T = \Phi_*$, wenn T linear über $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist, d.h. $T(f\sigma) = fT(\sigma)$ für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und alle $\sigma \in \Gamma(E)$ gilt.*

BEWEIS. Der Beweis ist völlig analog zur Charakterisierung von Tensorfeldern in [I, 5.5]. Wir müssen zeigen, daß $T(\sigma)(x)$ nur von $\sigma(x)$ abhängt. Zunächst hängt für eine offene Teilmenge $U \subset M$ und $x \in U$ der Wert $T(\sigma)(x)$ nur von $\sigma|_U$ ab. Ist nämlich $\sigma|_U = 0$, dann finden wir eine Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ und $f|_{M \setminus U} = 1$. Dann ist $f\sigma = \sigma$, also $T(\sigma) = T(f\sigma) = fT(\sigma)$, und das verschwindet in x , weil $f(x) = 0$ gilt.

Nehmen wir nun an, daß $\sigma(x) = 0$ gilt. Dann finden wir eine Vektorbündelkarte $(U, \varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times V)$ mit $x \in U$. Wähle nun eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ für V . Für $i = 1, \dots, n$ ist $e_i : U \rightarrow E$, $e_i(y) = \varphi^{-1}(y, v_i)$ ein lokaler glatter Schnitt von E über U , und man kann jeden glatten Schnitt von E über U eindeutig als $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i e_i$ für glatte Funktionen $\sigma_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben, und $\sigma(x) = 0$ ist offensichtlich äquivalent zu $\sigma_i(x) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist $T(\sigma)|_U = T(\sum_i \sigma_i e_i) = \sum_i \sigma_i T(e_i)$, und das verschwindet in x , weil alle σ_i in x verschwinden.

Somit erhalten wir für jeden Punkt $x \in M$ eine wohldefinierte lineare Abbildung $\Phi_x : E_x \rightarrow E'_x$, die $\Phi_x(\sigma(x)) = T(\sigma)(x)$ für alle Schnitte $\sigma \in \Gamma(E)$ erfüllt. Aus der Tatsache, daß $\Phi \circ \sigma$ für jeden glatten Schnitt σ von E ein glatter Schnitt von E' ist, folgt sofort, daß $\Phi : E \rightarrow E'$ glatt ist. $\square$

Konstruktionen mit Faserbündeln

2.11. Pullbacks. Sei $p : E \rightarrow N$ ein Faserbündel und $f : M \rightarrow N$ eine glatte Funktion. Definiere $f^*E := \{(x, u) \in M \times E : f(x) = p(u)\}$. Offensichtlich ist f^*E eine abgeschlossene Teilmenge von $M \times E$. Seien $f^*p : f^*E \rightarrow M$ und $p^*f : f^*E \rightarrow E$ die Einschränkungen der beiden Projektionen auf f^*E . Nach Definition gilt dann $p \circ p^*f = f \circ f^*p$, und für jeden Punkt $x \in M$ induziert die Abbildung p^*f eine Bijektion zwischen $(f^*p)^{-1}(x)$ und $E_{f(x)} = p^{-1}(f(x))$.

Sei nun $(U, \varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F)$ eine Faserbündelkarte für $p : E \rightarrow N$. Dann ist $f^{-1}(U)$ eine offene Teilmenge von M und die Abbildung $(f^*\varphi)(x, u) := (x, \text{pr}_2(\varphi(u)))$ liefert eine Bijektion zwischen $(f^*p)^{-1}(f^{-1}(U))$ und $f^{-1}(U) \times F$. Für zwei Faserbündelkarten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (U_β, φ_β) ist $(f^*\varphi_\alpha) \circ (f^*\varphi_\beta)^{-1}(x, y) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(f(x), y))$, also ist nach Lemma 2.2 $f^*p : f^*E \rightarrow M$ ein glattes Faserbündel, der *Pullback* des Bündels E längs der Abbildung f .

Aus der Beschreibung der Kartenwechsel folgt sofort, daß für ein Bündel $p : E \rightarrow N$ mit Faser F und Strukturgruppe G und entsprechenden Transitionsfunktionen $\varphi_{\alpha\beta}$ auch der Pullback f^*E Strukturgruppe G hat, wobei die Transitionsfunktionen durch $\varphi_{\alpha\beta} \circ f$ gegeben sind. Insbesondere ist also jeder Pullback eines G -Hauptfaserbündels wieder ein G -Hauptfaserbündel und der Pullback jedes Vektorbündels wiederum ein Vektorbündel.

Beispiel. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $f : M \rightarrow N$ eine glatte Funktion. Dann ist $f^*p : f^*TN \rightarrow M$ ein glattes Vektorbündel, und wir haben den Vektorbündelhomomorphismus $p^*f : f^*TN \rightarrow TN$. Ist $\sigma : M \rightarrow f^*TN$ ein glatter Schnitt,

dann ist $p^*f \circ \sigma : M \rightarrow TN$ eine glatte Funktion, die $p \circ p^*f \circ \sigma = f \circ f^*p \circ \sigma = f$ erfüllt, also ein Vektorfeld längs f . Sei umgekehrt $\xi : M \rightarrow TN$ ein Vektorfeld längs f . Dann ist $x \mapsto (x, \xi(x))$ eine glatte Funktion $M \rightarrow M \times TN$ und weil ξ ein Vektorfeld längs f ist, hat diese Funktion Werte im Teilraum f^*TN , ist also ein glatter Schnitt von f^*TN . Damit sind die glatten Schnitte von f^*TN genau die Vektorfelder längs f .

2.12. Lemma. *Seien $p : E \rightarrow M$ und $p' : E' \rightarrow M'$ Vektorbündel, $f : E \rightarrow E'$ ein Vektorbündelhomomorphismus mit entsprechender Abbildung $\underline{f} : M \rightarrow M'$, sodaß für jeden Punkt $x \in M$ die Einschränkung $f_x := f|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_{\underline{f}(x)}$ ein linearer Isomorphismus ist. Dann induziert f einen Isomorphismus $E \cong \underline{f}^*E'$ von Vektorbündeln.*

BEWEIS. Betrachten wir zunächst den Fall $M' = M$, $\underline{f} = \text{id}_M$. Dann ist f offensichtlich bijektiv, also müssen wir nur zeigen, daß die Inverse f^{-1} ein glatter Homomorphismus von Vektorbündeln ist. Für Vektorbündelkarten (U, φ) für E und (U, ψ) von E' gibt es aber eine glatte Funktion $f_U : U \rightarrow L(V, V')$ mit $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, v) = (x, f_U(x)(v))$. Nach Voraussetzung hat diese Funktion Werte im offenen Teilraum der linearen Isomorphismen von V nach V' , also ist auch die Funktion $x \mapsto (f_U(x))^{-1}$ glatt. Damit ist aber $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(x, v') = (x, (f_U(x))^{-1}(v'))$, also ist f^{-1} ein glatter Vektorbündelhomomorphismus, also f ein Isomorphismus.

Im allgemeinen Fall betrachten wir die Funktion $(p, f) : E \rightarrow M \times E'$. Nach Konstruktion gilt $p' \circ f = \underline{f} \circ p$, also hat diese Abbildung Werte in $\underline{f}^*E'$, definiert also einen glatten Vektorbündelhomomorphismus $E \rightarrow \underline{f}^*E'$, der als unterliegende Abbildung die Identität auf M hat. Die Faser von $\underline{f}^*E'$ über x ist gerade die Faser von E' über $\underline{f}(x)$, also induziert dieser Vektorbündelhomomorphismus immer noch lineare Isomorphismen in jeder Faser, also folgt die Behauptung aus dem ersten Teil des Beweises. $\square$

2.13. Gefaserte Produkte. Seien $p : E \rightarrow M$ und $p' : E' \rightarrow M$ Faserbündel mit typischer Faser F und F' . Definiere einen Teilraum $E \times_M E' \subset E \times E'$ durch $E \times_M E' = \{(u, u') \in E \times E' : p(u) = p'(u')\}$. Klarerweise ist das ein abgeschlossener Teilraum und wir erhalten eine wohldefinierte Projektion $q : E \times_M E' \rightarrow M$. Sei $(U, \varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F)$ eine Faserbündelkarte für E und $(U, \varphi' : (p')^{-1}(U) \rightarrow U \times F')$ eine Faserbündelkarte für E' (ohne Beschränkung der Allgemeinheit über der selben offenen Teilmenge $U \subset M$). Definiere $\psi : q^{-1}(U) \rightarrow U \times (F \times F')$ durch $\psi(u, u') := (q(u, u'), \text{pr}_2(\varphi(u)), \text{pr}_2(\varphi'(u')))$. Offensichtlich ist das eine Faserbündelkarte für $E \times_M E'$. Aus dieser Beschreibung sieht man auch sofort, daß die Transitionsfunktionen für zwei Karten dieser Form gegeben sind durch $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, y, y') = (x, \varphi_{\alpha\beta}(x, y), \varphi'_{\alpha\beta}(x, y'))$. Somit ist nach Lemma 2.2 $q : E \times_M E' \rightarrow M$ ein glattes Faserbündel, das *gefaserte Produkt* von E und E' . Hat E Strukturgruppe G und E' Strukturgruppe G' , dann hat $E \times_M E'$ Strukturgruppe $G \times G'$ bezüglich der offensichtlichen Linkswirkung von $G \times G'$ auf $F \times F'$. Insbesondere ist das gefaserte Produkt eines G -Hauptfaserbündels mit einem G' -Hauptfaserbündel ein $G \times G'$ -Hauptfaserbündel und das gefaserte Produkt zweier Vektorbündel ist wieder ein Vektorbündel. Da für Vektorräume das direkte Produkt mit der direkten Summe übereinstimmt, schreibt man im Fall von Vektorbündeln meist $E \oplus E'$ für $E \times_M E'$ und nennt das die *Whitney-Summe* von E und E' .

Offensichtlich induzieren die Projektion von $E \times E'$ auf E und E' Faserbündelhomomorphismen $\text{pr}_1 : E \times_M E' \rightarrow E$ und $\text{pr}_2 : E \times_M E' \rightarrow E'$ über der Identität auf M . Für einen Schnitt $\sigma \in \Gamma(E \times_M E')$ ist $\text{pr}_1 \circ \sigma$ ein glatter Schnitt von E und $\text{pr}_2 \circ \sigma$ ein glatter Schnitt von E' , und das liefert eine Bijektion $\Gamma(E \times_M E') \cong \Gamma(E) \times \Gamma(E')$.

Mit Hilfe dieser Konstruktion können wir nun zusätzliche Strukturen auf Hauptfaserbündeln und assoziierten Bündel gewinnen:

2.14. Proposition. *Sei $p : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel, $\ell : G \times F \rightarrow F$ eine glatte Linkswirkung von G auf einer Mannigfaltigkeit F und $q : E := P \times_G F \rightarrow M$ das entsprechende assoziierte Bündel über M .*

(1) *Es gibt eine glatte Funktion $\tau : P \times_M P \rightarrow G$, die charakterisiert ist durch $v = u \cdot \tau(u, v)$ für $u, v \in P$ mit $p(u) = p(v)$.*

(2) *Es gibt eine glatte Funktion $\tau^F : P \times_M E \rightarrow F$ die charakterisiert ist durch $v = [u, \tau^F(u, v)]$ für alle $u \in P$ und $v \in E$ mit $p(u) = q(v)$.*

BEWEIS. (1) Da die prinzipale Rechtswirkung von G auf P frei und transitiv auf jeder Faser ist, gibt es für zwei Punkte $u, v \in P$ mit $p(u) = p(v)$ ein eindeutiges Element $\tau(u, v) \in G$, sodaß $v = u \cdot \tau(u, v)$ gilt. Wir müssen also nur zeigen, daß die entsprechende Abbildung $\tau : P \times_M P \rightarrow G$ glatt ist. Sei dazu $(U, \varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times G)$ eine Hauptfaserbündelkarte für P . Dann ist die entsprechende Karte für $P \times_M P$ gegeben durch $\psi(u, v) = (p(u), \text{pr}_2(\varphi(u)), \text{pr}_2(\varphi(v)))$ und nach Definition ist $\tau(u, v) = \text{pr}_2(\varphi(u))^{-1} \text{pr}_2(\varphi(v))$, also ist τ glatt.

(2) Punkte in E haben die Form $[v, y]$ für $v \in P$ und $y \in F$. Für einen Punkt $u \in P$ mit $p(u) = p(v)$ ist $[v, y] = [u \cdot \tau(u, v), y] = [u, \tau(u, v) \cdot y]$ und das ist der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft, der als erste Koordinate u hat. Somit ist $\tau^F(u, [v, y]) = \tau(u, v) \cdot y$ eindeutig bestimmt und wir müssen wieder nur zeigen, daß τ^F glatt ist. Für eine Hauptfaserbündelkarte (U, φ) von P ist die entsprechende Karte für E gegeben durch $[v, y] \mapsto (p(v), \text{pr}_2(\varphi(v)) \cdot y)$, also die entsprechende Karte für $P \times_M E$ gegeben durch $(u, [v, y]) \mapsto (p(u), \text{pr}_2(\varphi(u)), \text{pr}_2(\varphi(v)) \cdot y)$. Nach den obigen Überlegungen ist $\tau^F(u, [v, y]) = \text{pr}_2(\varphi(u))^{-1} \cdot \text{pr}_2(\varphi(v)) \cdot y$, also eine glatte Funktion. $\square$

2.15. Korollar. (1) *Ein G -Hauptfaserbündel $p : P \rightarrow M$ besitzt genau dann einen globalen glatten Schnitt, wenn es trivial, also isomorph zu $\text{pr}_1 : M \times G \rightarrow M$ ist.*

(2) *Sei $p : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel, $\ell : G \times F \rightarrow F$ eine glatte Linkswirkung von G auf einer Mannigfaltigkeit F und $q : E = P \times_G F \rightarrow M$ das entsprechende assoziierte Bündel. Dann gibt es eine natürlich Bijektion zwischen dem Raum $\Gamma(E)$ der glatten Schnitte von E und dem Raum*

$$C^\infty(P, F)^G = \{f \in C^\infty(P, F) : f(u \cdot g) = g^{-1} \cdot (f(u)) \quad \forall u \in P, g \in G\}$$

der G -äquivarianten glatten Funktionen von P nach F .

BEWEIS. (1) Offensichtlich besitzt das triviale Bündel glatte Schnitte. Sei also $\sigma : M \rightarrow P$ ein globaler glatter Schnitt eines G -Hauptfaserbündels P . Definiere $\Phi : M \times G \rightarrow P$ durch $\Phi(x, g) := \sigma(x) \cdot g$. Offensichtlich ist das ein glatter Homomorphismus von Hauptfaserbündeln und $u \mapsto (p(u), \tau(\sigma(p(u)), u))$ ist eine glatte Inverse.

(2) Sei $s : M \rightarrow E$ ein glatter Schnitt von E . Definiere $f : P \rightarrow F$ durch $f(u) := \tau^F(u, s(p(u)))$. Dann ist f offensichtlich glatt. Nach Definition ist $s(p(u)) = [u, f(u)]$ für alle $u \in P$, also $[u \cdot g, f(u \cdot g)] = [u, f(u)] = [u \cdot g, g^{-1} \cdot f(u)]$, also gilt $f(u \cdot g) = g^{-1} \cdot f(u)$, also ist f äquivariant.

Sei umgekehrt $f : P \rightarrow F$ eine G -äquivariante glatte Funktion. Definiere $s(x) = [u, f(u)]$ wobei $u \in P$ ein Punkt mit $p(u) = x$ ist. Ist v ein anderer Punkt mit $p(v) = x$, dann ist $v = u \cdot \tau(u, v)$, also $f(v) = \tau(u, v)^{-1} \cdot f(u)$, also $[v, f(v)] = [u, f(u)]$, also ist s wohldefiniert. Ist (U, φ) eine Hauptfaserbündelkarte für P , dann ist die entsprechende Karte für E gegeben durch $[u, y] \mapsto (p(u), \text{pr}_2(\varphi(u)) \cdot y)$. Sei $\sigma(x) = \varphi^{-1}(x, e)$ der kanonische lokale Schnitt von P über der Karte (U, φ) , dann ist $s(x) = [\sigma(x), f(\sigma(x))]$ und das hat in der Karte für E die Form $x \mapsto f(\sigma(x))$, ist also glatt. Offensichtlich sind die beiden Konstruktionen invers zueinander. $\square$

Konstruktionen mit Vektorbündeln

Neben den bereits besprochenen Pullbacks und Whitney–Summen gibt es noch weitere Konstruktionen mit Vektorbündeln. Im wesentlichen kann man jede funktorielle Konstruktion der linearen Algebra auch auf Vektorbündel anwenden. Da das allgemeine Resultat eher unangenehm zu formulieren ist, werden wir die wichtigsten Spezialfälle besprechen.

2.16. Das duale Bündel. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $p : E \rightarrow M$ ein $\mathbb{K}$ –Vektorbündel. Für $x \in M$ sei E_x^* der Dualraum über $\mathbb{K}$ der Faser $E_x = p^{-1}(x)$. Sei E^* die disjunkte Vereinigung über alle $x \in M$ der Räume E_x^* . Dann gibt es eine offensichtliche Projektion $\pi : E^* \rightarrow M$. Sei $(U, \varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times V)$ eine Vektorbündelkarte für E . Für einen Punkt $\lambda \in E^*$ mit $\pi(\lambda) = x$ ist $v \mapsto \lambda(\varphi^{-1}(x, v)) \in \mathbb{K}$ ein $\mathbb{K}$ –lineares Funktional $\varphi_*\lambda \in V^*$. Definiere nun $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V^*$ durch $\psi(\lambda) = (\pi(\lambda), \varphi_*(\lambda))$. Für einen Vektorbündelatlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ von E mit Transitionsfunktionen $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(V)$ ist $\varphi_\beta^{-1}(x, v) = \varphi_\alpha^{-1}(x, \varphi_{\alpha\beta}(x)(v))$, also $(\varphi_\beta)_*\lambda = \varphi_{\alpha\beta}(x)^t((\varphi_\alpha)_*\lambda)$. Damit erhalten wir für die Kartenwechsel für E^* die Gleichung $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, \lambda) = \varphi_{\beta\alpha}(x)^t(\lambda)$. Nach Lemma 2.2 ist damit $\pi : E^* \rightarrow M$ ein glattes Vektorbündel.

Nach 1.19 bedeutet das auch, daß $E^* = GL(V, E) \times_{GL(V)} V^*$ gilt. Das duale Bündel ist also assoziiert zum Rahmenbündel bezüglich der dualen Darstellung von $GL(V)$ auf V^* . Ist allgemeiner E assoziiert zu einem G –Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ bezüglich einer Darstellung von G auf V , dann ist E^* assoziiert zu P bezüglich der dualen Darstellung von G auf V^* .

Die Dualitätspaarung $V \times V^* \rightarrow \mathbb{K}$ verallgemeinert sich zu einem Faserbündelmorphismus $E \times_M E^* = E \oplus E^* \rightarrow M \times \mathbb{K}$, der einfach durch die punktweise Evaluation gegeben ist. (Das ist kein Vektorbündelhomomorphismus, weil die Einschränkung auf jede Faser bilinear und nicht linear ist.) Zusammen mit dem Isomorphismus $\Gamma(E) \times \Gamma(E^*) \rightarrow \Gamma(E \times_M E^*)$ liefert das eine bilineare Abbildung $\Gamma(E) \times \Gamma(E^*) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$.

Seien $p : E \rightarrow M$ und $q : F \rightarrow N$ Vektorbündel mit typischen Fasern V und W und $f : E \rightarrow F$ ein Vektorbündelhomomorphismus, sodaß die unterliegende Abbildung $\underline{f} : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus ist. Dann definieren wir $f^* : F^* \rightarrow E^*$ mit unterliegender Abbildung $\underline{f}^{-1} : N \rightarrow M$ wie folgt: Für $\lambda \in F^*$ mit Fußpunkt $y \in N$ muß $f^*(\lambda)$ ein lineares Funktional auf E_x sein, wobei $x = \underline{f}^{-1}(y)$. Daher definieren wir $f^*(\lambda)(v) = \lambda(f(v))$ für $v \in E_x$. Offensichtlich ist $\lambda \in E_x^*$ und wir müssen nur noch zeigen, daß f^* glatt ist, um zu sehen, daß es ein Vektorbündelhomomorphismus mit unterliegender Abbildung $\underline{f}^{-1}$ ist. In lokalen Koordinaten hat aber f die Form $(x, v) \mapsto (\underline{f}(x), f_U(v))$ für eine glatte Abbildung $f_U : U \rightarrow L(V, W)$. In dieser Koordination hat aber dann f^* die Form $(y, \lambda) \mapsto (\underline{f}^{-1}(y), f_U^t(\lambda))$, ist also ebenfalls glatt. Klarerweise gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Das ist genau die Verallgemeinerung der dualen Abbildung einer linearen Abbildung.

Symmetrische und äußere Potenzen. Ganz analog zum dualen Bündel konstruiert man die k –te Symmetrische Potenz $S^k E$ und die k –te äußere Potenz $\bigwedge^k E$ eines glatten Vektorbündels $p : E \rightarrow M$. Man wendet einfach die entsprechende Konstruktion auf jede Faser an, und konstruiert aus einem Vektorbündelatlas für E einen Vektorbündelatlas für $S^k E$ bzw. $\bigwedge^k E$. Das einzige, was man dazu benötigt ist, daß die Abbildungen $GL(V) \rightarrow GL(S^k V)$ bzw. $GL(V) \rightarrow GL(\bigwedge^k V)$, die wir in 1.19 beschreiben haben, glatt sind. Das ist aber offensichtlich, wenn man mit Basen arbeitet. Aus dieser Beschreibung folgt wieder sofort, daß $S^k E = GL(V, E) \times_{GL(V)} S^k V$ und $\bigwedge^k E = GL(V, E) \times_{GL(V)} \bigwedge^k V$ für die Darstellungen aus 1.19 gilt. Allgemeiner geht das wieder für beliebige Hauptfaserbündel, zu denen E assoziiert ist.

Die universellen Eigenschaften von symmetrischen bzw. äußeren Potenzen von Vektorräumen übertragen sich direkt auf Vektorbündel. Wir formulieren sie hier nur für die äußere Potenz. Sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Betrachte das k -fache gefaserte Produkt $E \times_M \dots \times_M E$. Die Abbildung $(u_1, \dots, u_k) \mapsto u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ definiert einen Faserbündelmorphismus $\Phi : E \times_M \dots \times_M E \rightarrow \bigwedge^k E$, dessen Einschränkung auf jede Faser k -linear und alternierend ist. Ist nun $E' \rightarrow M'$ ein beliebiges Vektorbündel und $f : E \times_M \dots \times_M E \rightarrow E'$ ein Faserbündelmorphismus, dessen Einschränkung auf jede Faser k -linear und alternierend ist, dann erhalten wir faserweise eine eindeutige lineare Abbildung $\bigwedge^k E_x \rightarrow E'_{f(x)}$. Aus der Konstruktion des Vektorbündelatlas für $\bigwedge^k E$ folgt leicht, daß diese lineare Abbildung einen glatten Vektorbündelhomomorphismus $\tilde{f} : \bigwedge^k E \rightarrow E'$ definieren, der $\tilde{f} \circ \Phi = f$ erfüllt. Ersetzt man in dieser Beschreibung überall alternierend durch symmetrisch und $\wedge$ durch $\vee$, dann erhält man die universelle Eigenschaft der symmetrischen Potenz.

Seien insbesondere $E \rightarrow M$ und $F \rightarrow N$ Vektorbündel und $f : E \rightarrow F$ ein Vektorbündelhomomorphismus. Betrachten wir nun die Funktion $E \times_M \dots \times_M E \rightarrow \bigwedge^k F$, die gegeben ist durch $(e_1, \dots, e_k) \mapsto f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_k)$. Dann liefert die universelle Eigenschaft sofort einen Vektorbündelhomomorphismus $\bigwedge^k f : \bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^k F$, der $\bigwedge^k f(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) = f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_k)$ erfüllt, also ist die Konstruktion der k -ten äußeren Potenz funktoriell. Für die symmetrischen Potenzen funktioniert natürlich alles analog.

Beispiel. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p : TM \rightarrow M$ das Tangentialbündel. Das duale Bündel dazu ist gerade das Kotangentialbündel T^*M . Seine glatten Schnitte sind genau die 1-Formen auf M . Weiters ist $T^*M = \mathcal{P}M \times_{GL(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^{n*}$, das assoziierte Bündel zum Rahmenbündel von M aus Beispiel (2) von 2.4. Die bilineare Abbildung $\mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$, die man in diesem Fall erhält, ist gerade $(\xi, \varphi) \mapsto \varphi(\xi)$.

Ein Diffeomorphismus $f : M \rightarrow N$ induziert über die Tangentialabbildung $Tf : TM \rightarrow TN$ einen Vektorbündelhomomorphismus $T^*f : T^*N \rightarrow T^*M$ mit unterliegender Abbildung $f^{-1} : N \rightarrow M$.

Die k -te äußere Potenz $\bigwedge^k T^*M$ des Kotangentialbündels ist das assoziierte Bündel $\mathcal{P}M \times_{GL(n, \mathbb{R})} \bigwedge^k \mathbb{R}^{n*}$. Die glatten Schnitte dieses Bündels sind genau die k -Formen $\Omega^k(M)$. Korollar 2.15(2) liefert also insbesondere Isomorphismen

$$\Omega^k(M) \cong C^\infty(\mathcal{P}M, \bigwedge^k \mathbb{R}^{n*})^{GL(n, \mathbb{R})}.$$

Für einen Diffeomorphismus $f : M \rightarrow N$ erhalten wir den induzierten Vektorbündelhomomorphismus $\bigwedge^k T^*f : \bigwedge^k T^*N \rightarrow \bigwedge^k T^*M$ mit unterliegender Abbildung $f^{-1} : N \rightarrow M$.

2.17. Tensorprodukte von Vektorbündeln. Seien $p : E \rightarrow M$ und $p' : E' \rightarrow M$ Vektorbündel über M . Für $x \in M$ setze $(E \otimes E')_x := E_x \otimes E'_x$ und definieren $E \otimes E'$ als disjunkte Vereinigung über alle $x \in M$ der Räume $(E \otimes E')_x$ und sei $q : E \otimes E' \rightarrow M$ die offensichtliche Projektion. Für eine Vektorbündelkarte $(U, \varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times V)$ sei $\varphi_x : E_x \rightarrow V$ die Einschränkung von $\text{pr}_2 \circ \varphi$ auf E_x und analog für eine Vektorbündelkarte (U, φ') für E' . Dann ist $\varphi_x \otimes \varphi'_x : (E \otimes E')_x \rightarrow V \otimes V'$ ein linearer Isomorphismus, und wir definieren $\psi : q^{-1}(U) \rightarrow U \times (V \otimes V')$ durch $\psi(w) = (q(w), (\varphi_{q(w)} \otimes \varphi'_{q(w)})(w))$. Dann ist ψ bijektiv. Für die Kartenwechsel $(\psi_\alpha \circ \psi_b^{-1})(x, v \otimes v')$ erhält man einfach $(x, (\varphi_{\alpha\beta}(x)(v)) \otimes (\varphi'_{\alpha\beta}(x)(v')))$. Damit ist $q : E \otimes E' \rightarrow M$ nach Lemma 2.2 ein glattes Vektorbündel. Falls es ein G -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ gibt, sodaß $E \cong P \times_G V$ und

$E' \cong P \times_G V'$ gilt, dann ist $E \otimes E' \cong P \times_G (V \otimes V')$, das assoziierte Bündel bezüglich dem Tensorprodukt der Darstellungen.

Wiederum überträgt sich die universelle Eigenschaft. Die kanonischen bilinearen Abbildungen $E_x \times E'_x \rightarrow E_x \otimes E'_x$ induzieren eine Abbildung $b : E \oplus E' = E \times_M E' \rightarrow E \otimes E'$. Diese ist ein Faserbündelmorphismus, weil sie in geeigneten Karten konstant gleich der kanonischen bilinearen Abbildung $V \times V' \rightarrow V \otimes V'$ ist. Ist $F \rightarrow N$ ein beliebiges Vektorbündel und $f : E \oplus E' \rightarrow F$ ein Faserbündelmorphismus, dessen Einschränkung auf jede Faser eine bilineare Abbildung ist, dann erhalten wir faserweise lineare Abbildungen $(E \otimes E')_x \rightarrow F_{f(x)}$ und diese definieren eine Funktion $\tilde{f} : E \otimes E' \rightarrow F$ mit $\tilde{f} \circ b = f$. In Vektorbündelkarten hat f die Form $(x, v, v') \mapsto (f(x), g(x)(v, v'))$, wobei g eine glatte Funktion mit Werten im Raum der bilinearen Funktionen $V \times V' \rightarrow W$ ist. Damit ist aber auch die entsprechende Funktion $\tilde{g}$ mit Werten in $L(V \otimes V', W)$ glatt, und $\tilde{f}$ hat in den obigen Karten die Form $(x, u) \mapsto (f(x), \tilde{g}(u))$ für $u \in V \otimes V'$. Somit ist $\tilde{f}$ ein Vektorbündelhomomorphismus.

Sind insbesondere $E, E' \rightarrow M$ und $F, F' \rightarrow N$ Vektorbündel, $f : E \rightarrow F$ und $f' : E' \rightarrow F'$ Vektorbündelhomomorphismen mit der gleichen unterliegenden Abbildung $M \rightarrow N$, dann erhält man einen Vektorbündelhomomorphismus $f \otimes f' : E \otimes E' \rightarrow F \otimes F'$, wiederum zur gleichen unterliegenden Abbildung.

Andrerseits können wir die universelle Eigenschaft auch auf die Evaluationsabbildung $E \oplus E^* \rightarrow M \times \mathbb{R}$ anwenden und erhalten einen Vektorbündelhomomorphismus $E \otimes E^* \rightarrow M \times \mathbb{R}$, die *Kontraktion*.

Es übertragen sich auch die üblichen Isomorphismen auf Vektorbündel, d.h. $E \otimes E' \cong E' \otimes E$, $E \otimes (E' \otimes E'') \cong (E \otimes E') \otimes E''$, $(E \otimes F)^* \cong E^* \otimes F^*$ und so weiter, indem man einfach die entsprechenden Isomorphismen für Vektorräume faserweise anwendet.

Wegen des natürlichen Isomorphismus $L(V, V') \cong V^* \otimes V'$ kann man nun auch $L(E, E')$ als $E^* \otimes E'$ definieren. Die Faser dieses Bündels über einem Punkt $x \in M$ ist gerade $L(E_x, E'_x)$. Ein Schnitt von $L(E, E')$ ordnet also jedem Punkt $x \in M$ eine lineare Abbildung $E_x \rightarrow E'_x$ zu und damit verifiziert man leicht, daß die glatten Schnitte von $L(E, E')$ genau den Vektorbündelhomomorphismen $E \rightarrow E'$ über id_M entsprechen.

Beispiel. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, TM das Tangentialbündel und T^*M das Kotangentialbündel, und $\otimes^k T^*M \otimes \otimes^\ell TM$ das entsprechende Tensorprodukt. Dann ist dies das assoziierte Bündel zu $\mathcal{P}M$ bezüglich der Darstellung von $GL(n, \mathbb{R})$ auf $\otimes^k \mathbb{R}^{n*} \otimes \otimes^\ell \mathbb{R}^n$. Die glatten Schnitte dieses Vektorbündels sind genau die $\binom{\ell}{k}$ -Tensorfelder $\mathcal{T}_k^\ell(M)$. Mittels Korollar 2.15(2) erhalten wir einen Isomorphismen

$$\mathcal{T}_k^\ell(M) \cong C^\infty(\mathcal{P}M, \otimes^k \mathbb{R}^{n*} \otimes \otimes^\ell \mathbb{R}^n)^{GL(n, \mathbb{R})}.$$

Eine beliebige glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ liefert für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Vektorbündelhomomorphismus $\otimes^k T f : \otimes^k TM \rightarrow \otimes^k TN$ mit unterliegender Abbildung $f : M \rightarrow N$. Ein Diffeomorphismus induziert sogar Vektorbündelhomomorphismen zwischen beliebigen Tensorbündeln. Natürlich liefern diese Vektorbündelhomomorphismen auf dem Level der glatten Schnitte gerade die üblichen Pullback Operationen für Tensorfelder.