Seminar

Garben

und

Garbenkohomologie

Sommersemester 1998

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies sind die Resultate eines Seminars, daß im Sommersemester 1998 stattgefunden hat. Die einzelnen Kapitel wurden von den TeilnehmerInnen Florian Wisser (1.1–1.12), Michael Kunzinger (2.11–2.23), Theresia Eisenkölbl (3.1–3.8), Johannes Trimmel (Kapitel 4) und Stefan Haller (Kapitel 5) verfaßt, wofür ich mich vielmals bedanken möchte. Ich habe dann die weiteren Punkte ergänzt, die ich auch im Seminar vorgetragen habe, und alles in eine (halbwegs) einheitliche Form gebracht.

Basis für das Seminar war eine Mitschrift eines Teils einer Vorlesung von Prof. P. Michor, die in einigen Punkten durch verschiedene Quellen ergänzt wurde. Zum Verständnis des Textes sind neben den Grundbegriffen der Kategorientheorie vor allem gute Kenntnisse aus algebraischer Topologie nötig. Für einige der Anwendungen sind auch Kenntnisse der Differentialgeometrie erforderlich.

Zum Inhalt der einzelnen Kapitel: In Kapitel 1 werden zunächst die Grundbegriffe (Prägarben, Garben und ihre Morphismen) entwickelt. Dann wird die Garbifizierung einer Prägarbe, also die Konstruktion der von einer Prägarbe erzeugten Garbe ausführlich besprochen, wobei der nötige Hintergrund über direkte Limiten vollständig entwickelt wird.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit Auflösungen von Garben. Dazu werden zunächst exakte Sequenzen von Garben besprochen. Als Beispiele von Auflösungen werden die singuläre Auflösung konstanter Garben und die de–Rham Auflösung der konstanten Garbe $\mathbb{R}$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit besprochen. Dabei wird der nötige Hintergrund aus der Differentialgeometrie kurz wiederholt. Anschließend werden Auflösungen genauer studiert, die Klassen der weichen und feinen Garben definiert, und die kanonische feine Auflösung einer beliebigen Garbe wird konstruiert.

In Kapitel 3 wird die Garbenkohomologie definiert und der Satz von de–Rham sowohl in der abstrakten Version (jede azyklische Auflösung einer Garbe berechnet die Garbenkohomologie), als auch in der konkreten Version (de–Rham Kohomologie einer glatten Mannigfaltigkeit stimmt mit der singulären Kohomologie mit reellen Koeffizienten überein) vollständig bewiesen.

Kapitel 4 behandelt einerseits die klassische Alexander–Spanier Kohomologie, andererseits wird mit der Čech–Kohomologie ein (äquivalenter) alternativer Zugang zur Garbenkohomologie vorgestellt.

Kapitel 5 behandelt Zusammenhänge zwischen Garbentheorie und der Theorie der Vektorbündel. Zunächst wird die Beschreibung von Vektorbündeln durch nichtabel'sche Čech–Kohomologie diskutiert. Dann werden die Grundlagen der Theorie der charakteristischen Klassen (Stiefel–Whitney– und Chern–Klassen) entwickelt und einige Anwendungen besprochen.

Wien, im Dezember 1998 Andreas Čap

KAPITEL 1

Prägarben und Garben

1.1. Definition: Prägarben (Presheaves).

(1) Sei X ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der offenen Teilmengen $U \subseteq X$ und der Einbettungen $i : U \hookrightarrow V$ für $U \subseteq V$. Sei $\mathcal{D}$ die Kategorie der Mengen und Funktionen. Eine *Prägarbe* $\mathcal{F}$ auf X ist ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$.

(2) Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf X. Ein *Morphismus* $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation vom Funktor $\mathcal{F}$ auf den Funktor $\mathcal{G}$.

(3) Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ heißt *Teilprägarbe* einer Prägarbe $\mathcal{G}$ genau dann, wenn $\forall U \subseteq X$ offen $h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ eine Einbettung ist.

(4) Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ heißt *Prägarbe von abelschen Gruppen (bzw. Ringen, Algebren, Moduln, etc.)* genau dann, wenn $\mathcal{F}$ ein Funktor in die Kategorie der abelschen Gruppen (bzw. Ringe, Algebren, Moduln, etc.) ist.

(5) Ein Element von $\mathcal{F}(U)$ heißt *Schnitt von $\mathcal{F}$ über U*

Beispiel: Sei Y eine Menge. Der Funktor $\mathcal{F}_Y$ sei definiert durch $\mathcal{F}_Y(U) := \{f : U \to Y\}$ und $\mathcal{F}_Y(i : V \hookrightarrow U) := (r_V^U : \mathcal{F}_Y(U) \to \mathcal{F}_Y(V))$ wobei $r_V^U(f) := f|_V$. Dann ist $\mathcal{F}_Y$ eine Prägarbe.

Im weiteren werden wir oft für das Bild der Einbettung $V \hookrightarrow U$ unter einer beliebigen Garbe einfach r_V^U schreiben.

1.2. Definition: Garben (Sheaves).

(1) Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt *Garbe* genau dann, wenn für jede Familie $\{U_i : i \in I\}$ offener Mengen in X mit $\bigcup_{i\in I} U_i = U$ gilt:

(G1): Sind $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(t)$ $(\forall i \in I)$, dann ist $s = t$.

(G2): Ist $\{s_i : i \in I\}$ mit $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ $(\forall i \in I)$ eine Familie von Schnitten für die $r_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$ gilt $\forall U_i \cap U_j \neq \emptyset$, dann $\exists s \in \mathcal{F}(U)$ sodaß $r_{U_i}^U(s) = s_i$ für alle $i \in I$ gilt.

(2) Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X. Ein *Morphismus* $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Garben ist ein Morphismus der den Garben zugrundeliegenden Prägarben. (Die Garben über einem Raum X bilden mit diesen Morphismen eine Kategorie.)

(3) Eine Teilprägarbe $\mathcal{F}$ einer Garbe $\mathcal{G}$, die eine Garbe ist, heißt *Teilgarbe von $\mathcal{G}$*

(4) Ein *Isomorphismus* von Garben ist ein invertierbarer Garbenmorphismus. (d.h.: Eine natürliche Transformation $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist ein Isomorphismus, wenn $h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ bijektiv ist $\forall U$.)

1.3. Beispiele von Garben.

(1) Das Beispiel aus 1.1 ist eine Garbe.

(2) Sei Y ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{C}_Y$ definiert durch

$$\mathcal{C}_Y(U) := C(U, Y) = \{f : U \to Y : f \text{stetig}\}$$

und die Restriktionsabbildungen wie im Beispiel in 1.1. $\mathcal{C}_Y$ ist eine Garbe, die *Garbe der stetigen Abbildungen nach Y auf X*. Für $Y = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist $\mathcal{C}_\mathbb{R}$ bzw. $\mathcal{C}_\mathbb{C}$

eine Garbe von $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-Algebren. $\mathcal{C}_Y$ ist durch die natürliche Transformation $h : \mathcal{C}_Y \to \mathcal{F}_Y$ ($h_U : \mathcal{C}_Y(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_Y(U)$) eine Teilgarbe der Garbe $\mathcal{F}_Y$ aus Beispiel 1.1

(3) Sei X eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Sei $\mathcal{E}_X$ definiert durch $\mathcal{E}(U) := C^\infty(U, \mathbb{R})$ und die Restriktionsabbildungen. $\mathcal{E}_X$ ist eine Garbe, die *Garbe der C^∞-Funktionen* auf X. Sie heißt Strukturgarbe von X. Ist X eine C^ω-Mannigfaltigkeit so ist $\mathcal{A}_X$ die *Garbe der reell-analytischen Funktionen* auf X, die Strukturgarbe. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit so ist $\mathcal{O}_X$, die *Garbe der holomorphen Funktionen* auf X, die Strukturgarbe.

(4) Sei X ein topologischer Raum und G eine (abelsche) Gruppe. Der Funktor $\mathcal{G}$ sei definiert durch $\mathcal{G}(U) := \{f : U \to G | f \text{ lokalkonstant}\}$ und die Restriktionsabbildungen. $\mathcal{G}$ ist eine Garbe, die *konstante Garbe mit Werten in G*. Besteht U aus n Zusammenhangskomponenten, so ist $\mathcal{G}(U) = \prod_{i=1}^n G$. Ist U zusammenhängend, so ist $\mathcal{G}(U) = G$.

(5) Zum Abschluß dieses Abschnitts ein Beispiel einer Prägarbe die keine Garbe ist. Definiere eine Prägarbe $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{C}$ durch $\mathcal{B}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} : f \text{ beschränkt}\}$ und die Restriktionsabbildungen. Die Mengen $U_i = \{z \in \mathbb{C} : |z| < i\}$ überdecken $\mathbb{C}$ und $f_i(z) = z \in \mathcal{B}(U_i)$ ($\forall i \in \mathbb{N}$). Aber es gibt kein $f \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ sodaß $f|_{U_i} = f_i$, denn eine solche Funktion f wäre nicht beschränkt. Damit ist das Garbenaxiom (G2) verletzt.

1.4. Definition: Garben von Moduln. Sei $\mathcal{R}$ eine (Prä-) Garbe von Ringen auf X. Eine Garbe $\mathcal{M}$ von abelschen Gruppen heißt eine *(Prä-) Garbe von Moduln über $\mathcal{R}$* genau dann, wenn $\mathcal{M}(U)$ für alle U ein $\mathcal{R}(U)$-Modul ist und wenn $r_V^U(\alpha \cdot m) = r_V^U(\alpha) \cdot r_V^U(m)$ für alle $V \subseteq U$ gilt.

Beispiel: Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Funktion $p : E \to X$ heißt ein topologisches Vektorbündel über X, wenn eine offene Überdeckung $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ von X und Isomorphismen $\psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ existieren, sodaß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$\forall \alpha \in A$ kommutieren und $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ die Funktion $\psi_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\psi_{\alpha\beta}(x)(v) := pr_2(\psi_\alpha({\psi_\beta}^{-1}(x, v)))$ linear ist. Sei Γ_E definiert durch $\Gamma_E(U) := \{s : U \to E$ stetig mit $p \circ s = id_U\}$. Γ_E ist eine Garbe von Moduln über der Garbe der stetigen Funktionen $\mathcal{C}_\mathbb{R}$ von X. (Ist f ein Element des Ringes $C(U, \mathbb{R})$ und $s \in \Gamma_E(U)$ so ist auch $(fs)(x) := f(x) \cdot s(x)$ Element von $\Gamma_E(U)$ und somit ist $\Gamma_E(U)$ ein Modul über $C(U, \mathbb{R})$.)

Ist X eine C^∞-Mannigfaltigkeit, $p : E \to X$ ein C^∞-Vektorbündel, d.h. in der obigen Definition alle ψ_α Diffeomorphismen, und betrachtet man nur C^∞-Schnitte so erhält man eine Garbe Γ_E von Moduln über der Strukturgarbe $\mathcal{E}_X$ von X.

Definition: Sei $\mathcal{R}$ eine Garbe von kommutativen Ringen auf X.

(1) Für $p \geq 0$ definiere die Garbe $\mathcal{R}^p$ durch $\mathcal{R}^p(U) := \mathcal{R}(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}(U)$. $\mathcal{R}^p$ ist eine Garbe von Moduln über $\mathcal{R}$, die *p-fache direkte Summe von $\mathcal{R}$*

(2) Ist $\mathcal{M}$ eine Garbe von Moduln über $\mathcal{R}$ sodaß $\mathcal{M} \cong \mathcal{R}^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ ist, so heißt $\mathcal{M}$ *freie Garbe von Moduln über $\mathcal{R}$*

(3) Ist $\mathcal{M}$ eine Garbe von Moduln über $\mathcal{R}$ sodaß es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U von x gibt, sodaß $\mathcal{M}|_U$ frei über $\mathcal{R}|_U$ ist, so heißt $\mathcal{M}$ *lokal frei*.

Sei X eine zusammenhängende C^∞-Mannigfaltigkeit und (E, p, X) ein C^∞–Vektorbündel. Dann ist die Garbe Γ_E der glatten Schnitte von E eine lokale freie Garbe von $\mathcal{E}_X$–Moduln. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ ist ja $\Gamma_{E|_U} \cong C^\infty(X, \mathbb{R}^n) \cong (\mathcal{E}_X)^n$.

Ist umgekehrt $\mathcal{M}$ eine lokal freie Garbe von $\mathcal{E}_X$–Moduln, dann kann man zeigen, daß diese Garbe isomorph zur Garbe der Schnitte eines glatten Vektorbündels über X ist. Dazu betrachtet man eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von X, sodaß $\mathcal{M}|_{U_\alpha} \cong (\mathcal{E}_X)^n$ für jedes α gilt. Dann benutzt man diese lokalen Isomorphismen, um einen Kozykel von Transitionsfunktionen für die Überdeckung $\{U_\alpha\}$ zu konstruieren und dieser liefert das entsprechende Vektorbündel (siehe Kapitel 5).

Direkte Limiten

1.5. Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und I eine gerichtete Menge. Ein *direktes System* in der Kategorie $\mathcal{A}$ über I ist ein kommutatives Diagramm gebildet aus Objekten $\{D_i : i \in I\}$ der Kategorie $\mathcal{A}$ und Morphismen $\pi_{ij} : D_i \to D_j$ für alle i, j mit $i \leq j$, sodaß $\pi_{ii} = \mathrm{id}_{D_i}$ und $\pi_{ik} = \pi_{jk} \circ \pi_{ij}$ für $i \leq j \leq k$ gilt. Der *direkte Limes* dieses direkten Systems ist ein Objekt $L \in \mathcal{A}$ zusammen mit Morphismen $u_i : D_i \to L$ für jedes $i \in I$, sodaß für alle $i \leq j$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "\pi_{ij}"] & L \\ D_j \arrow[ur, "u_j"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist und folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Ist L' ein weiteres Objekt von $\mathcal{A}$ und sind $\{u_i' : D_i \to L' : i \in I\}$ Morphismen, die ebenfalls die obige Kommutativitätsbedingung erfüllen, dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $\gamma : L \to L'$ sodaß für jedes $i \in I$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "u_i'"'] & L \arrow[d, "\gamma"'] \\ & L' \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Für ein direktes System in **Sets** (die Kategorie der Mengen mit den Funktionen als Morphismen) existiert der direkte Limes immer. Er ist sogar explizit beschreibbar:

1.6. Lemma. *Sei $\{M_i : i \in I\}$ mit $f_{ij} : M_i \to M_j$ für $i \leq j$ ein direktes System in der Kategorie* ***Sets****. Sei $M := \sqcup_{i \in I} M_i$ und $\equiv$ folgende Äquivalenzrelation auf M: $(x \in M_i, y \in M_j)$ $x \equiv y :\Leftrightarrow \exists z \in M_k$ mit $z = f_{ik}(x) = f_{jk}(y)$. Dann ist $\tilde{M} := M/\!\equiv$ mit den Abbildungen $u_i : M_i \to \tilde{M}$, $u_i(x) = [x]$ der direkte Limes.*

Beweis. Sei $i \leq j$ und $x \in M_i$. Da $i \leq j$ und $j \leq j$ und $f_{ij} = f_{jj}(f_{ij}(x))$ ist $x \equiv f_{ij}(x)$ und somit ist $u_j(f_{ij}) = [f_{ij}(x)] = [x] = u_i(x)$. D.h.:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "f_{ij}"] & \tilde{M} \\ M_j \arrow[ur, "u_j"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Nun zur Universalitätseigenschaft: Sei M' mit $u'_i : M_i \to M'$ eine weitere Menge mit Funktionen, die die Kommutativitätseigenschaft erfüllen. Definiere $\gamma : \tilde{M} \to M'$ durch $\gamma([x_i]) = u'_i(x_i)$.

- Wohldefiniertheit: $x_j \equiv x_i \Rightarrow \exists x_k \in M_k$ mit $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j) = x_k \Rightarrow u'_i(x_i) = u'_j(x_j) = u'_k(x_k) \Rightarrow \gamma$ ist wohldefiniert.
- Die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "u'_i"'] & \tilde{M} \arrow[d, "\gamma"'] \\ & M' \end{tikzcd}$$

  ist nach Definition klar.
- Eindeutigkeit: Angenommen es existiert $\gamma_2 : \tilde{M} \to M'$ mit $\gamma_2 \neq \gamma \Rightarrow \exists [x]$ mit $\gamma_2([x]) \neq \gamma([x]) = u'_i(x) \Rightarrow \gamma_2 \circ u_i(x) \neq u'_i(x) \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "u'_i"'] & \tilde{M} \arrow[d, "\gamma"'] \\ & M' \end{tikzcd}$$

  kommutiert nicht, ein Widerspruch.

□

1.7. Der direkte Limes von Gruppen. Man betrachtet den direkten Limes des Diagramms der zugrundeliegenden Mengen und versucht dann die Gruppenstruktur durch den direkten Limes zu ziehen.

Seien G_i Gruppen und $\pi_{ij} : G_i \to G_j$ Gruppenhomomorphismen. Sei $x_i \in G_i$ und $x_j \in G_j$ so gibt es ein $k \in I$ mit $i \leq k$, $j \leq k$. Auf dem direkten Limes der Mengen definiert man nun $[x_i][x_j] := u_k(\pi_{ik}(x_i)\pi_{jk}(x_j)) = [\pi_{ik}(x_i)\pi_{jk}(x_j)]$. Nun ist zu zeigen, daß dieses Produkt wohldefiniert ist und die Gruppeneigenschaften erfüllt.

- Wohldefiniertheit: Sei $k' \in I$ ein weiterer Index mit $i \leq k'$, $j \leq k'$, dann gibt es ein $m \in I$ mit $k \leq m$, $k' \leq m$. Dann gilt

$$u_k(\pi_{ik}(x_i)\pi_{jk}(x_j)) = u_m(\pi_{km} \circ \pi_{ik}(x_i)\pi_{km} \circ \pi_{jk}(x_j)) = u_m(\pi_{im}(x_i)\pi_{jm}(x_j)),$$

  und genauso für k' statt k. Damit hängt das Produkt nicht von der Wahl des Index k ab. Dann hängt es aber auch nicht von der Wahl des Repräsentanten der Klasse ab, weil es für $x_{i'} \equiv x_i$ und $x_{j'} \equiv x_j$ einen Index m mit $i' \leq m$, $i \leq m$, $j' \leq m$, $j \leq m$ gibt, sodaß $\pi_{im}(x_i) = \pi_{i'm}(x_{i'})$ und $\pi_{jm}(x_j) = \pi_{j'm}(x_{j'})$ gilt.
- Gruppeneigenschaften: Seien $x_i \in G_i$, $x_j \in G_j$, $x_k \in G_k$. Dann gibt es ein m mit $i, j, k \leq m$, also gilt

$$([x_i][x_j])[x_k] = [\pi_{im}(x_i)\pi_{jm}(x_j)][x_k] = [(\pi_{im}(x_i)\pi_{jm}(x_j))\pi_{km}(x_k)],$$

  und die Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Multiplikation auf G_m.

Garbenräume

1.8. Definition. Sei X ein topologischer Raum

(1) Ein *Garbenraum* über X ist ein topologischer Raum Y zusammen mit einer stetigen Surjektion $\pi : Y \to X$, die lokal ein Homöomorphismus ist. (d.h. für jedes $y \in Y$ gibt es eine offene Umgebung U von y, sodaß $\pi|_U : U \to \pi(U)$ ein Homöomorphismus ist.)

(2) Ein *Schnitt* eines Garbenraumes $Y \xrightarrow{\pi} X$ über $U \subseteq X$ offen ist eine stetige Abbildung $s : U \to Y$ sodaß $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$. Die Menge der Schnitte über U wird mit $\Gamma(U, Y)$ bezeichnet.

(3) Seien $Y \xrightarrow{\pi_1} X$, $Z \xrightarrow{\pi_2} X$ Garbenräume über X. Eine stetige Funktion $h : Y \to Z$ ist ein *Garbenraumhomomorphismus* genau dann, wenn $\pi_2 \circ h = \pi_1$ gilt.

1.9. Halme und Keime. Ist $Y \xrightarrow{\pi} X$ ein Garbenraum, so ist $\Gamma(\_, Y)$ eine Teilgarbe der Garbe $\mathcal{C}_Y$ aus 1.3.

Nun suchen wir zu jeder Garbe $\mathcal{F}$ über X einen Garbenraum $\overline{\mathcal{F}}$ über X sodaß $\mathcal{F} = \Gamma(\_, \overline{\mathcal{F}})$ (Die Schnitte der Garbe sind genau die Schnitte des Garbenraumes).

Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Definiere

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} (\mathcal{F}(U), r)$$

als den direkten Limes der Mengen $\mathcal{F}(U)$ mit $x \in U$ bezüglich der Restriktionsabbildungen r^U_V. $\mathcal{F}_x$ heißt *Halm* der Prägarbe $\mathcal{F}$ *bei* x. Aus dem direkten Limes erhält man für jedes $x \in U$ eine Abbildung $r^U_x : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$, die $r^V_x \circ r^U_V = r^U_x$ $(U \supseteq V \supseteq \{x\})$ erfüllt. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$, so heißt $s_x := r^U_x(s)$ *Keim von* s bei x; s heißt ein *Repräsentant* des Keims s_x über U.

Sind alle $\mathcal{F}(U)$ abelsche Gruppen (bzw. Ringe, Algebren, ...) so ist auch $\mathcal{F}_x$ eine abelsche Gruppe (bzw. Ring, Algebra, ...), und die Funktionen r^U_x sind Homomorphismen für die entsprechende Struktur. Ist $\mathcal{M}$ eine Garbe von Moduln über einer Garbe $\mathcal{R}$ von Ringen, dann ist jeder Halm $\mathcal{M}_x$ ein Modul über dem Ring $\mathcal{R}_x$.

1.10. Beispiele von Halmen und Keimen.

(1) Sei X ein topologischer Raum und G ein Gruppe. $\mathcal{G}(U) := \{f : U \to G | f$ lokal konstant$\}$ die konstante Garbe mit Werten in G aus 1.3. Für $x \in X$ sei $\mathcal{G}_x$ der Halm bei x. In diesem Fall ist $\mathcal{G}_x = G$ für alle $x \in X$, soferne der Raum X lokal zusammenhängend ist. Für jede offene Umgebung U von x ist die konstante Funktion g ein Repräsentant des Keims $g \in G = \mathcal{G}_x$.

(2) Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}^Y$ die Garbe der stetigen Abbildungen aus 1.3, also $\mathcal{C}^Y(U) := \{f : U \to Y | f \text{ stetig}\}$. Für $x \in X$ ist $\mathcal{C}^Y_x(U) := \{f : U \to Y | x \in U, U \text{ offen in } X, f \text{ stetig}\}/\equiv$ der Halm bei x, wobei

$$f : U_1 \to Y \equiv g : U_2 \to Y :\Leftrightarrow \exists U \subseteq U_1 \cap U_2 \text{ mit } x \in U \text{ sodaß } f|_U = g|_U.$$

(U muß nicht ganz $U_1 \cap U_2$ sein). Ist $f \in \mathcal{C}^Y(U)$, so ist der Keim $f_x := r^U_x(f) = [f] \in \mathcal{C}^Y_x$.

Garbifizierung (erzeugte Garben)

1.11. Für eine Prägarbe $\mathcal{F}$ über X sei $\overline{\mathcal{F}} := \sqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ und $\pi : \overline{\mathcal{F}} \to X$ definiert durch $\pi(s_x) := x$ für $s_x \in \mathcal{F}_x$. Um $\overline{\mathcal{F}}$ zu einem Garbenraum zu machen benötigen wir eine Topologie: Zu $s \in \mathcal{F}(U)$ definieren wir $\bar{s} : U \to \overline{\mathcal{F}}$ durch $\bar{s}(x) := s_x = r^U_x(s)$ für $x \in U$. Dann gilt offensichtlich $\pi \circ \bar{s} = \mathrm{id}_U$. Nun wählen wir $\mathcal{B} := \{\bar{s}(U) : U \subseteq X$ offen,

$s \in \mathcal{F}(U)\}$ als Basis für die Topologie auf $\overline{\mathcal{F}}$. Dann sind alle $\bar{s}$ stetig: Sei nämlich $\bar{s} : U \to \overline{\mathcal{F}}$ und $\bar{t}(V) \in \mathcal{B}$ sodaß $s^{-1}(\bar{t}(V)) \neq \emptyset$. Dann gibt es einen Punkt $x \in U \cap V$, sodaß $\bar{s}(x) = \bar{t}(x)$. Das bedeutet aber $r_x^U(s) = r_x^V(t)$, also gibt es einen offenen Umgebung W von x mit $W \subseteq V \cap U$ sodaß $r_W^U(s) = r_W^V(t)$ gilt. Damit gilt aber $\bar{t}|_W = \bar{s}|_W$, also $W \subseteq \bar{s}^{-1}(\bar{t}(V))$. Weiters ist π stetig, denn für $s_x \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $\pi(s_x) = x$ und eine offene Umgebung U von x ist $\bar{s}(U) \subseteq \pi^{-1}(U)$, und ein lokaler Homöomorphismus, da $\bar{s}|_U$ invers zu $\pi|_{\bar{s}(U)}$ ist. Somit haben wir jeder Prägarbe $\mathcal{F}$ einen Garbenraum $\overline{\mathcal{F}}$ zugeordnet. Hat $\mathcal{F}$ eine algebraische Struktur die durch direkte Limiten geht, so erbt $\overline{\mathcal{F}}$ diese Struktur.

Ist zum Beispiel $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen so gilt:

(1) Jeder Halm $\overline{\mathcal{F}}_x := \pi^{-1}(x) = \mathcal{F}_x$ ist eine abelsche Gruppe.
(2) Setzt man $\overline{\mathcal{F}} \times_X \overline{\mathcal{F}} := \{(s,t) \in \overline{\mathcal{F}} \times \overline{\mathcal{F}}\} | \pi(s) = \pi(t)$ so ist $\mu : \overline{\mathcal{F}} \times_X \overline{\mathcal{F}} \to \mathcal{F}$ definiert durch $\mu(s_x, t_x) := s_x - t_x$ stetig $(\mu^{-1}(\overline{(s-t)}(U)) = \bar{s}(U) \times_U \bar{t}(U)$ also offen) also ist für $U \subseteq X$ offen $\Gamma(U, \overline{\mathcal{F}})$ eine abelsche Gruppe: $s, t \in \Gamma(U, F)$: $(s-t)(x) := s(x) - t(x)$ ist wieder stetig.

Für andere geeignete algebraische Strukturen ist alles analog. $\Gamma(\_, \overline{\mathcal{F}})$ ist eine Garbe, die *von $\mathcal{F}$ erzeugte Garbe* oder dir *Garbifizierung von $\mathcal{F}$*, und es existiert ein natürlicher Prägarbenhomomorphismus $\tau : \mathcal{F} \to \Gamma(\_, \overline{\mathcal{F}})$ durch $(\tau_U s)(x) := \bar{s}(x) = r_x^U(s)$.

1.12. Satz. **(Isomorphiesatz)** *Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe, so ist $\tau : \mathcal{G} \to \Gamma(\_, \overline{\mathcal{G}})$ ein Isomorphismus von Garben.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß $\tau_U : \mathcal{G}(U) \to \Gamma(U, \overline{\mathcal{G}})$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ bijektiv ist.
Injektivität: Seien $s', s'' \in \mathcal{G}(U)$ mit $\tau_U(s') = \tau_U(s'')$. Dann ist $\tau_U(s')(x) = \tau_U(s'')(x)$, also $r_x^U(s') = r_x^U(s'')$ für alle $x \in U$. Daher gibt es aber für jedes x eine offene Umgebung V_x von x, sodaß $r_{V_x}^U(s') = r_{V_x}^U(s'')$ gilt. Da $\{V_x : x \in U\}$ eine offene Überdeckung von U ist und $\mathcal{G}$ das Garbenaxiom (G1) erfüllt (siehe 1.2) muß $s' = s''$ gelten.
Surjektivität: Sei $\sigma \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{G}})$. Dann finden wir zu $x \in U$ eine offene Umgebung V_x von x und einen Schnitt $s^x \in \mathcal{G}(V_x)$ sodaß $\sigma(x) = (s^x)_x = \tau_{V_x}(s^x)(x) = r_x^{V_x}(s^x)$ gilt.

Für Schnitte eines Garbenraumes gilt: Seien $\sigma, \sigma' \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{G}})$ mit $\sigma(x) = \sigma'(x) = s_x$. Da σ, σ' stetig sind, gibt es für eine offene Umgebung $\bar{s}(U)$ von s_x offene Umgebungen U_σ und $U_{\sigma'}$ von x mit $\sigma(U_\sigma) \subseteq \bar{s}(U)$ und $\sigma'(U_{\sigma'}) \subseteq \bar{s}(U)$. Das bedeutet aber, daß für $y \in U_\sigma \cap U_{\sigma'}$ die Gleichung $\sigma(y) = \bar{s}(y) = \sigma'(y)$ gelten muß. Das bedeutet aber, daß Schnitte eines Garbenraumes, die in einem Punkt übereinstimmen, auch auf einer offenen Umgebung dieses Punktes übereinstimmen.

Daher finden wir aber eine offene Umgebung W_x von x, mit $W_x \subseteq V_x \subseteq U$ sodaß $\sigma|_{W_x} = \tau_{V_x}(s^x)|_{W_x} = \tau_{W_x}(r_{W_x}^{V_x}(s^x))$ gilt. $\{W_x : x \in U\}$ ist eine offene Überdeckung von U, $t^x := r_{W_x}^{V_x}(s^x) \in \mathcal{G}(W_x)$ und für $W_x \cap W_y \neq \emptyset$ gilt:

$$\tau_{W_x}(t^x)|_{W_x \cap W_y} = \sigma|_{W_x \cap W_y} = \tau_{W_y}(t_y)|_{W_x \cap W_y},$$

also ist $\tau_{W_x \cap W_y}(r_{W_x \cap W_y}^{W_x}(t^x)) = \tau_{W_x \cap W_y}(r_{W_x \cap W_y}^{W_y}(t^y))$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist $\tau_{W_x \cap W_y}$ injektiv also gilt $r_{W_x \cap W_y}^{W_x}(t^x) = r_{W_x \cap W_y}^{W_y}(t^y)$. Nach dem Garbenaxiom (G2) gibt es einen Schnitt $t \in \mathcal{G}(U)$, der $r_{W_x}^U(t) = t^x$ für alle $x \in U$ erfüllt. Daraus folgt aber $t_x = (\tau_U(t))(x) = \sigma(x)$ für alle $x \in U$, also $\tau_U(t) = \sigma$. □

1.13. Garbifizierung als Funktor. Wir haben nun also jeder Prägarbe $\mathcal{F}$ über X eine Garbe $\tilde{\mathcal{F}} = \Gamma(\_, \bar{\mathcal{F}})$ über X zugeordnet und einen Morphismus von Prägarben $\tau : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ konstruiert, der ein Isomorphismus ist, falls $\mathcal{F}$ eine Garbe ist. Sei nun $\mathcal{G}$ eine weitere Prägarbe über X und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Dann erhalten wir für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ eine Funktion $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Für $V \subset U$ gilt die Gleichung $\varphi_V \circ r_V^U = r_V^U \circ \varphi_U$, wobei wir die Einschränkungsabbildungen für beide Prägarben mit r bezeichnen. Sei nun $x \in X$ ein Punkt, $\mathcal{G}_x$ der Halm von $\mathcal{G}$ bei x und $r_x^U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}_x$ für jede offene Umgebung U von x die kanonische Funktion. Dann erfüllen die Funktionen $r_x^U \circ \varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}_x$ die Kommutativitätsbedingung $r_x^V \circ \varphi_V \circ r_V^U = r_x^V \circ r_V^U \circ \varphi_U = r_x^U \circ \varphi_U$, also erhalten wir nach Definition des direkten Limes eine Funktion $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$. Explizit ist diese Funktion einfach so gegeben, daß man für einen Keim $s_x \in \mathcal{F}_x$ einen Repräsentanten $s \in \mathcal{F}(U)$ wählt und $\varphi_x(s_x)$ als den Keim von $\varphi_U(s)$ bei x definiert.

Haben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ geeignete algebraische Strukturen (abel'sche Gruppen, Ringe, Moduln über der gleichen Garbe $\mathcal{R}$ von Ringen), dann haben die Halme die entsprechende Struktur und jedes φ_x ist nach Konstruktion ein Homomorphismus für diese Struktur.

Ist $\mathcal{H}$ noch eine Prägarbe über X und ψ eine weiterer Morphismus von Prägarben, dann sind $\psi_x \circ \varphi_x$ und $(\psi \circ \varphi)_x$ jeweils Funktionen $\mathcal{F}_x \to \mathcal{H}_x$, die komponiert mit r_x^U genau $r_x^U \circ \psi_U \circ \varphi_U$ liefern, also gilt nach der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft des direkten Limes $(\psi \circ \varphi)_x = \psi_x \circ \varphi_x$ für alle $x \in X$.

Nun definieren wir eine Funktion $\bar{\varphi} : \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ durch $\varphi|_{\mathcal{F}_x} = \varphi_x$. Dann behaupten wir, daß $\bar{\varphi}$ ein Garbenraummorphismus ist. Die Verträglichkeit mit den Projektionen ist offensichtlich, also müssen wir nur zeigen, daß $\bar{\varphi}$ stetig ist. Sei also $s_x \in \mathcal{F}_x$ und $t_x = \bar{\varphi}(s_x) \in \mathcal{G}_x$. Eine typische offene Umgebung von t_x ist eine Menge der Form $\bar{t}(U)$, wobei $U \subseteq X$ offen ist und $t \in \mathcal{G}(U)$ ein Schnitt mit $r_x^U(t) = t_x$ ist. Indem wir eventuell die Menge U noch verkleinern, können wir einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ finden, sodaß $r_x^U(s) = s_x$ gilt. Betrachte nun den Schnitt $\varphi_U(s) \in \mathcal{G}(U)$. Nach Konstruktion gilt $r_x^U(\varphi_U(s)) = \varphi_x(s_x) = t_x$. Aus dem Beweis von 1.12 wissen wir damit aber, daß es eine offene Umgebung W von x gibt, sodaß $r_W^U(\varphi_U(s)) = r_W^U(t)$ gilt. Betrachte nun $s_1 = r_W^U(s) \in \mathcal{F}(W)$ und die entsprechende offene Menge $\bar{s}_1(W) \subset \bar{\mathcal{F}}$. Nach Konstruktion enthält diese offene Menge s_x und für $y \in W$ gilt

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(r_y^W(s_1)) = \varphi_y(r_y^W(s_1)) = r_y^W(\varphi_W(s_1)) = r_y^W(\varphi_W(r_W^U(s))) = \\ = r_y^W(r_W^U(\varphi_U(s))) = r_y^W(r_W^U(t)) = r_y^U(t) = \bar{t}(y) \in \bar{t}(W),\end{aligned}$$

also ist $\bar{\varphi}$ tatsächlich stetig.

Die stetige Funktion $\bar{\varphi} : \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$ induziert nun einen Morphismus $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$, indem man einen lokalen Schnitt $s : U \to \bar{\mathcal{F}}$ auf $\varphi \circ s : U \to \bar{\mathcal{G}}$ abbildet. Ist $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ ein weitere Morphismus von Prägarben, dann zeigen unsere Überlegungen von oben sofort, daß $\overline{\psi \circ \varphi} = \bar{\psi} \circ \bar{\varphi}$ und damit auch $\widetilde{\psi \circ \varphi} = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}$ gilt. Das bedeutet aber gerade, daß die Zuordnung $\mathcal{F} \mapsto \tilde{\mathcal{F}}$, $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ einen Funktor von der Kategorie der Prägarben auf X in die Kategorie der Garben auf X definiert.

Bezeichnen wir nun die natürlichen Prägarbenmorphismen $\mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{G} \to \tilde{\mathcal{G}}$ mit $\tau^{\mathcal{F}}$ und $\tau^{\mathcal{G}}$. Ist $U \subset X$ offen und $s \in \mathcal{F}(U)$, dann gilt

$$\tilde{\varphi}(\tau_U^{\mathcal{F}}(s))(x) = \varphi_x(r_x^U(s)) = r_x^U(\varphi_U(s)) = \tau_U^{\mathcal{G}}(\varphi_U(s))(x),$$

also gilt $\tilde{\varphi} \circ \tau^{\mathcal{F}} = \tau^{\mathcal{G}} \circ \varphi$. In kategorieller Sprache bedeutet das gerade, daß die Morphismen $\tau^{\mathcal{F}}$ eine natürliche Transformation von identischen Funktor in die Garbifizierung definieren. Betrachten wir schließlich noch den Fall, daß $\mathcal{G}$ eine Garbe ist. Dann können wir $\mathcal{G}$ einfach als Prägarbe betrachten, d.h. kategoriell gesprochen den Vergißfunktor V von der Kategorie der Garben über X in die Kategorie der Prägarben über X anwenden. Ist $\varphi : \mathcal{F} \to V(\mathcal{G})$ ein Morphismus von Prägarben, dann liefert die obige Konstruktion einen Morphismus $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$. Da $\tau^{\mathcal{G}}$ ein Isomorphismus ist, ist $\varphi = (\tau^{\mathcal{G}})^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ \tau^{\mathcal{F}}$, und daraus folgt sofort, daß die entsprechende Abbildung zwischen den Morphismenmengen bijektiv ist. Man sagt, der Garbifizierungsfunktor ist ein linksadjungierter Funktor zum Vergißfunktor. Insgesamt haben wir also bewiesen:

Satz. *Die Garbifizierung definiert einen Funktor von der Kategorie der Prägarben über X in die Kategorie der Garben über X der linksadjungiert zum Vergißfunktor ist. Der kanonische Morphismus τ von einer Prägarbe in ihre Garbifizierung definiert eine natürliche Transformation vom identischen Funktor in den Garbifizierungsfunktor.*

KAPITEL 2

Auflösungen von Garben

Ab nun werden wir hauptsächlich Garben von abel'schen Gruppen behandeln. Alle Resultate gelten aber völlig analog für Garben von Moduln über Garben von kommutativen Ringen mit 1. In diesem Kapitel werden wir den zentralen Begriff der exakten Sequenzen von Garben studieren. Der wesentliche Punkt dabei ist, daß Exaktheit einer Sequenz von Garben ein lokaler Begriff ist. Die Garbenkohomologie liefert dann ein Maß dafür, in wie weit die Exaktheit beim Übergang zu globalen Schnitten erhalten bleibt. Der Prototyp einer exakten Sequenz von abel'schen Gruppen ist eine Sequenz der Form $0 \to H \to G \to G/H \to 0$ wobei $H \subset G$ eine Untergruppe ist. Analog dazu werden wir zunächst Quotienten von Garben studieren.

2.1. Quotientengarben. Sei $\mathcal{G}$ eine Garbe über einem topologischen Raum X und $\mathcal{F}$ eine Teilgarbe von $\mathcal{G}$. Dann ist für jedes offene $U \subseteq X$ die abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}(U)$, also können wir den Quotienten $\mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ betrachten. Klarerweise definiert $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ eine Prägarbe von abel'schen Gruppen auf X. Im allgemeinen ist diese Prägarbe aber keine Garbe:

Beispiel. Das hier angegebene Beispiel ist relativ komplizert, aber dafür wichtig. Wir werden später noch einfachere, aber weniger wichtige Beispiele sehen (siehe 2.5).

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Definiere $\mathcal{G}(U)$ als die Menge aller geschlossenen 1–Formen auf U und $\mathcal{F}(U)$ als die Menge aller exakten 1–Formen auf U. Dann gilt $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{G}(U)$ und nach dem Lemma von Poincaré ist für offene Mengen, die diffeomorph zu einem Ball in $\mathbb{R}^n$ sind, $\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U)$. Also ist für solche Mengen $\mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U) = 0$. Wäre $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ eine Garbe auf M, dann müßte $\mathcal{G}(M) = \mathcal{F}(M)$ sein. M besitzt nämlich eine Überdeckung aus offenen Menge U_i für die $\mathcal{G}(U_i) = \mathcal{F}(U_i)$. Für ein Element $s \in \mathcal{G}(M)/\mathcal{F}(M)$ ist dann $r^M_{U_i}(s) = 0$ und nach dem Garbenaxiom (G1) folgt $s = 0$. Aber $\mathcal{G}(M)/\mathcal{F}(M)$ ist genau die erste de–Rham Kohomologiegruppe von M, und diese Gruppe ist im Allgemeinen (zum Beispiel für $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ungleich Null.

Wir definieren nun die Quotientengarbe $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ als die Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$. Um diese Garbe zu bekommen, müssen wir zunächst die Halme bestimmen, die wir mit $(\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$ bezeichnen. Nun sind aber die Halme $\mathcal{G}_x$ von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{F}_x$ von $\mathcal{F}$ abel'sche Gruppen (siehe 1.11), und da $\mathcal{F}$ eine Teilgarbe ist, ist $\mathcal{F}_x$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}_x$. Damit können wir aber den Quotienten $\mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x$ bilden. Wir behaupten nun, daß $(\mathcal{G}/\mathcal{F})_x = \mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x$ gilt:

Für jede offene Umgebung U von x haben wir die kanonische Projektion $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$. Diese Projektionen sind mit den Einschränkungsabbildungen verträglich. Setzen wir sie mit den kanonischen Abbildungen $r^U_x : \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U) \to (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$ zusammen, dann erhalten wir eine Familie von Homomorphismen $\mathcal{G}(U) \to (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$, die wiederum mit den Einschränkungen verträglich ist. Nach Definition des direkten Limes erhalten wir einen Homomorphismus $p_x : \mathcal{G}_x \to (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$ der surjektiv ist, weil jede der Abbildungen $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ surjektiv ist, und jedes Element in $(\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$ aus einer der Gruppen $\mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ kommt. Wir müssen also nur noch zeigen, daß der Kern von p_x

genau $\mathcal{F}_x$ ist. Ist $s_x \in \mathcal{F}_x$, dann gibt es eine offene Umgebung U von x und einen Schnitt $s \in F(U)$, sodaß $s_x = r_x^U(s)$ gilt. Dann ist aber $p_x(s_x) = r_x^U([s])$, wobei $[s]$ die Klasse von s in $\mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ bezeichnet, also $p_x(s_x) = 0$. Sei umgekehrt s_x ein Element im Kern von p_x und $s \in G(U)$ ein Repräsentant für den Keim s_x auf einer offenen Umgebung U von x. Dann ist $r_x^U([s]) = p_x(s_x) = 0$, also muß es eine offene Umgebung V von x mit $V \subset U$ geben, sodaß $r_W^U([s]) = [r_W^U(s)] = 0 \in \mathcal{G}(V)/\mathcal{F}(V)$ gilt. Das bedeutet aber genau, daß $r_W^U(s) \in \mathcal{F}(V)$ gilt, also ist $s_x = r_x^W(r_W^U(s)) \in \mathcal{F}_x$.

Man kann dieses Resultat auch so interpretieren, daß für jeden Punkt $x \in X$ die Sequenz $0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von abel'schen Gruppen ist. Das motiviert die folgende Definition:

2.2. Definition. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Garben von abel'schen Gruppen über einem topologischen Raum X und seien $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Morphismen. Dann sagt man, die Sequenz $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}$ ist *exakt*, genau dann, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die Sequenz $\mathcal{A}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{B}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{C}_x$ der Halme eine exakte Sequenz von abel'schen Gruppen ist.

Eine Sequenz der Form $\dots \to \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_{i+1} \to \dots$ heißt exakt, wenn für jedes i die Sequenz $\mathcal{A}_{i-1} \to \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_{i+1}$ exakt ist.

Eine *kurze exakte Sequenz* von Garben ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0.$$

Bemerkung. Aus 2.1 wissen wir, daß für jede Teilgarbe $\mathcal{F}$ einer Garbe $\mathcal{G}$ die Sequenz $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to (\mathcal{G}/\mathcal{F}) \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben ist. Wir sehen aber auch, daß für eine kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ von Garben und $U \subseteq X$ offen die Sequenz $0 \to \mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U) \to \mathcal{C}(U) \to 0$ im allgemeinen nicht exakt ist. Die Garbenkohomologie wird im wesentlichen die Nichtexaktheit dieser Sequenz für $U = X$ messen.

2.3. Beispiel. Sei X eine topologische Mannigfaltigkeit, $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ die Garbe der stetigen komplexwertigen Funktionen auf X. Mit $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*$ bezeichnen wir die Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf X. Dies ist eine Garbe abel'scher Gruppen unter der (punktweisen) Multiplikation. Weiters sei $\mathbb{Z}$ die konstante Garbe zur abel'schen Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Dann ist $\mathbb{Z}$ eine Teilgarbe von $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ (nämlich gerade die Garbe der $\mathbb{Z}$–wertigen stetigen Funktionen). Definiere nun $\exp : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*$ durch $\exp(f)(x) = e^{2\pi i f(x)}$. Dann ist dies klarerweise ein Morphismus von Garben abel'scher Gruppen, und wir behaupten, daß

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\exp} \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^* \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben abel'scher Gruppen ist:

Sei $x \in X$ ein Punkt, $g_x \in (C_{\mathbb{C}}^*)_x$ und $g \in C(U, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ ein Repräsentant für g_x auf einer offenen Umgebung U von x. Wählt man U hinreichend klein, dann kann man erreichen, daß $g(U) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ganz in einer Halbebene liegt. Dann ist aber für einen Zweig log des Logarithmus $f = \log(g)$ eine wohldefinierte, stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und $\exp(f) = g$. Damit ist aber $\exp_x(f_x) = g_x$, also ist $\exp_x : (\mathcal{C}_{\mathbb{C}})_x \to (\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*)_x$ für jedes x surjektiv. Sei $f_x \in (\mathcal{C}_{\mathbb{C}})_x$. Dann ist $\exp_x(f_x) = 1$ äquivalent dazu, daß es einen Repräsentanten $f : U \to \mathbb{C}$ für f_x auf einer offenen Umgebung U von x gibt, für den $\exp(f)$ identisch 1 ist. Das ist aber äquivalent zu $f(U) \subset \mathbb{Z}$, also ist die Exaktheit bewiesen.

Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit, dann kann man genau die selbe Konstruktion mit $C^\infty(\_, \mathbb{C})$ und $C^\infty(\_, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ durchführen. Ist X sogar eine komplexe Mannigfaltigkeit, dann funktioniert es auch mit holomorphen Funktion mit Werten in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.4. Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X, $\mathcal{J}$ die Teilgarbe jener holomorphen Funktionen, die in $0 \in \mathbb{C}$ verschwinden, und $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ die Quotientengarbe. Nach 2.1 erhalten wir eine kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathcal{J} \to 0$ von Garben. Aus dieser Sequenz können wir nun die Halme von $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ leicht explizit beschreiben: Für einen Punkt $y \neq 0$ ist für eine hinreichend kleine Umgebung U (nämlich für jede Umgebung, die 0 nicht enthält) $\mathcal{J}(U) = \mathcal{O}(U)$. Nachdem jede Umgebung von y so eine Umgebung enthält, gilt $\mathcal{J}_y = \mathcal{O}_y$, also $(\mathcal{O}/\mathcal{J})_y = 0$ für $y \neq 0$.

Für $x = 0$ sei $f_0 \in \mathcal{O}_0$ ein Keim, und $f \in \mathcal{O}(U)$ ein Repräsentant auf einer offenen Umgebung U von 0. Ist $f(0) : U \to \mathbb{C}$ die konstante Funktion, dann ist $f - f(0) \in \mathcal{J}(U)$. Damit sieht man aber sofort, daß $(\mathcal{O}/\mathcal{J})_0 = \mathbb{C}$ gilt.

In diesem Fall ist auch die Sequenz $0 \to \mathcal{J}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to (\mathcal{O}/\mathcal{J})(\mathbb{C}) \to 0$ exakt. Ein globaler Schnitt der Garbe $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ ist einfach eine komplexe Zahl (nämlich der Wert des Schnittes in 0) und damit induziert $f \mapsto f(0)$ eine Isomorphismus $\mathcal{O}(\mathbb{C})/\mathcal{J}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} = (\mathcal{O}/\mathcal{J})(\mathbb{C})$.

Analog kann man das natürlich auch für allgemeinere Räume und glatte oder stetige Funktionen machen.

2.5. Beispiel. Sei X ein zusammenhängender Hausdorffraum, $\mathbb{Z}$ die konstante Garbe auf X, $a, b \in X$ zwei verschiedene Punkte und $\mathcal{G}$ die Teilgarbe von $\mathbb{Z}$ die aus jenen lokalkonstanten Funktionen besteht, die in a und b verschwinden. Dann erhalten wir wieder eine exakte Sequenz $0 \to \mathcal{G} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathcal{G} \to 0$. Wie in Beispiel 2.4 überlegt man sofort, daß die Halme von $\mathbb{Z}/\mathcal{G}$ gleich 0 für $x \neq a, b$ und gleich $\mathbb{Z}$ für $x = a, b$ sind.

In diesem Fall ist aber die Sequenz der globalen Schnitte nicht mehr exakt. Da X zusammenhängend ist, gilt nämlich $\mathbb{Z}(X) = \mathbb{Z}$ und $\mathcal{G}(X) = 0$. Andererseits ist $(\mathbb{Z}/\mathcal{G})(X) = \mathbb{Z}^2$. Insbesondere zeigt das auch, daß die Prägarbe $U \mapsto \mathbb{Z}(U)/\mathcal{G}(U)$ keine Garbe sein kann, denn sonst wäre diese Garbe gleich $\mathbb{Z}/\mathcal{G}$.

2.6. Definition. (1) Eine *graduierte Garbe* ist ein Folge $(\mathcal{G}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von Garben.
(2) Eine *Sequenz von Garben* ist eine graduierte Garbe $(\mathcal{G}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ zusammen mit Morphismen $\varphi^i : \mathcal{G}^i \to \mathcal{G}^{i+1}$.
(3) Ein *Garbenkomplex* ist eine Sequenz von Garben, sodaß $\varphi^{i+1} \circ \varphi^i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt.
(4) Eine *Auflösung* eine Garbe $\mathcal{G}$ ist eine exakte Sequenz von Garben der Form $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}^0 \to \mathcal{G}^1 \to \dots$. Für so eine Auflösung schreibt man kurz auch $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$.

Die singuläre Auflösung einer konstanten Garbe

2.7. Beispiel. Sei X eine topologische Mannigfaltigkeit, G eine abel'sche Gruppe. Wir wollen eine Auflösung der konstanten Garbe G über X konstruieren. Für $U \subset X$ offen sei $S_q(U)$ die freie abel'sche Gruppe, die von allen stetigen Funktionen $\sigma : \Delta_q \to U$ erzeugt wird, wobei Δ_q den Standard–q–Simplex in $\mathbb{R}^{q+1}$ bezeichnet. So eine stetige Funktion σ heißt ein *singulärer q–Simplex* in U. Dann setzen wir $S^q(U, G) := \operatorname{Hom}(S_q(U), G)$. Da $S_q(U)$ eine freie abel'sche Gruppe ist, kann man $S^q(U, G)$ auch mit der Menge aller Funktionen von der Menge der singulären q–Simplizes in U nach G identifizieren.

Für eine offene Menge $V \subset U$ ist jeder singuläre Simplex mit Werten in V auch ein singulärer Simplex mit Werten in U, also erhalten wir eine Inklusion $S_q(V) \hookrightarrow S_q(U)$ und damit eine Einschränkungsabbildung $r_V^U : S^q(U, G) \to S^q(V, G)$. Klarerweise ist $U \mapsto S^q(U, G)$ eine Prägarbe von abel'schen Gruppen auf X. Wir bezeichnen nun mit $\mathcal{S}^q(\_, G)$ die davon erzeugte Garbe von abel'schen Gruppen.

Sei $d : S_q(U) \to S_{q-1}(U)$ der übliche Randoperator aus der algebraischen Topologie. Dieser Operator ist einfach dadurch gegeben, daß man $\sigma : \Delta_q \to U$ auf die Seiten von Δ_q einschränkt und die Einschränkungen mit geeigneten Vorzeichen summiert. Dann induziert dieser Randoperator einen Operator $\delta : S^{q-1}(U, G) \to S^q(U, G)$ durch $\delta(\varphi)(\sigma) = \varphi(d(\sigma))$. Nach Konstruktion ist δ ein Morphismus von Prägarben, also erhalten wir einen Morphismus $\delta : \mathcal{S}^{q-1}(\_, G) \to \mathcal{S}^q(\_, G)$, siehe 1.13. Wegen $d^2 = 0$ ist (auf dem Prägarbenlevel) auch $\delta^2 = 0$ und wegen der Funktorialität der Garbifizierung gilt das auch auf dem Garbenlevel. Somit ist $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{S}^*(\_, G)$ ein Garbenkomplex. Wir behaupten nun, das dies sogar eine Auflösung der konstanten Garbe $\mathcal{G}$ ist.

Dazu sei $x \in X$ ein Punkt und U eine kontrahierbare Umgebung von x. Aus der algebraischen Topologie ist bekannt, daß für diese Menge die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in G trivial ist, also $H^0(U, G) = G$ und $H^q(U, G) = 0$ für $q > 0$ gilt. Das bedeutet aber gerade, daß $0 \to G \to S^0(U, G) \to S^1(U, G) \to \dots$ eine exakte Sequenz ist, wobei wir G als die konstanten Homomorphismen $S_0(U) \to G$ betrachten. Da X eine topologische Mannigfaltigkeit ist, enthält jede offene Umgebung von x eine kontrahierbare offene Umgebung, also ist auch $0 \to G \to S^0(\_, G)_x \to S^1(\_, G)_x \to \dots$ eine exakte Sequenz und damit $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{S}^*(\_, G)$ eine Auflösung.

2.8. Für eine C^∞–Mannigfaltigkeit X gibt es eine einfache Variation der singulären Auflösung. Sei nämlich für $U \subseteq X$ offen $S_q^\infty(U)$ die freie abel'sche Gruppe die von allen glatten singulären Simplizes in U erzeugt wird, d.h. von allen $\sigma : \Delta_q \to U$, die Einschränkungen von auf offenen Umgebungen von Δ_q definierten glatten Funktionen mit Werten in U sind. Wie in 2.7 erhalten wir daraus Prägarben $U \mapsto S^q_\infty(U, G)$. Der Rand eines glatten singulären Simplex ist nach Definition eine Linearkombination von glatten singulären Simplizes, also können wir wie in 2.7 Morphismen $\delta : S^q_\infty(\_, G) \to S^{q+1}_\infty(\_, G)$ definieren. Bezeichnen wir mit $\mathcal{S}^q_\infty(\_, G)$ die erzeugten Garben und mit δ die induzierten Morphismen, dann erhalten wir wie in 2.7 eine Auflösung $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{S}^*_\infty(\_, G)$ der konstanten Garbe G. (Man muß im Beweis nur beachten, daß es glatt kontrahierbare Umgebungen gibt.)

Die Inklusionen $S_q^\infty(U) \hookrightarrow S_q(U)$ induzieren Projektionen $S^q(U, G) \to S^q_\infty(U, G)$. Diese liefern wieder Garbenmorphismen, und man erhält einen *Homomorphismus von Auflösungen* von $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{S}^*(\_, G)$ nach $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{S}^*_\infty(\_, G)$.

Die de–Rham Auflösung

Als nächstes wollen wir die de–Rham Auflösung der konstanten Garbe $\mathbb{R}$ über einer glatten Mannigfaltigkeit besprechen und einen Homomorphismus von dieser Auflösung in die singuläre Auflösung konstruieren. Dies benötigt einigen Hintergrund aus der Differentialgeometrie (Differentialformen) den wir im folgenden kurz zusammenfassen werden.

2.9. Differentialgeometrischer Hintergrund. Sei M ein topologischer Raum. Eine *Karte* auf M ist eine offene Teilmenge $U \subset M$ zusammen mit einem Homöomorphismus $u : U \to u(U)$ auf eine offene Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$. Ein C^k*–Atlas* auf M ist eine Familie $\{(U_i, u_i)\}$ von Karten auf M, sodaß $M = \cup_i U_i$ gilt und für je zwei Karten U_i und U_j mit $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ die *Kartenwechselabbildungen* $u_{ij} : u_j(U_{ij}) \to u_i(U_{ij})$, $u_{ij} = u_i \circ u_j^{-1}$ C^k–Funktionen (auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$) sind. Zwei C^k–Atlanten heißen *äquivalent* falls ihre Vereinigung wieder ein Atlas ist. Eine C^k–Mannigfaltigkeit ist ein separabler, metrisierbarer Raum M zusammen mit einer Äquivalenzklasse von C^k–Atlanten auf M. Die Vereinigung aller Atlanten in der Klasse ist dann selbst ein (maximaler) Atlas und eine Karte auf M ist einfach eine Karte dieses maximalen Atlas.

Für C^k–Mannigfaltigkeiten M und N ist eine Funktion $f : M \to N$ eine C^k–Funktion, wenn f stetig ist und es für jeden Punkt $x \in M$ eine Karte (U, u) für M mit $x \in U$ und eine Karte (V, v) für N mit $f(x) \in V$ gibt, sodaß die *lokale Koordinatendarstellung* $v \circ f \circ u^{-1} : u(U \cap f^{-1}(V)) \to v(V)$ eine C^k–Funktion ist. Falls f eine C^k–Funktion ist, dann sind alle lokalen Koordinatendarstellungen von f C^k–Funktionen.

Wir werden im weiteren immer glatte (d.h. C^∞) Mannigfaltigkeiten und Funktionen betrachten. Ein fundamentales Resultat über glatte Funktionen auf glatten Mannigfaltigkeiten ist die Existenz von glatten *Partitionen der Eins*: Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offen Überdeckung von M, dann gibt es eine Familie $\{f_i : i \in I\}$ von glatten Funktionen $f_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, sodaß
(i) Für jedes $i \in I$ gibt es eine Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $\text{supp}(f_i) \subset U$.
(ii) Die Familie $\{\text{supp}(f_i) : i \in I\}$ ist lokal–endlich.
(iii) Für jedes $i \in I$ und $x \in M$ ist $0 \leq f_i(x) \leq 1$ und $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.

Hierbei bezeichnet $\text{supp}(f_i)$ den *Träger* von f_i, also den Abschluß der Menge aller $x \in M$ für die $f(x) \neq 0$ gilt. Die Bedingung (ii) bedeutet, daß jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung U besitzt, die nur endlich viele der Mengen in der Familie schneidet.

Für einen Punkt $x \in M$ sei nun $C^\infty_x(M, \mathbb{R})$ die Algebra der Keime von glatten, reellwertigen Funktionen bei x. Dann definiert man den *Tangentialraum* an M bei x als die Menge aller *Derivationen bei x* dieser Algebra, also als die Menge aller linearen Abbildungen $X : C^\infty_x(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, die $X(\varphi\psi) = X(\varphi)\psi(x) + \varphi(x)X(\psi)$ erfüllen. Das ist offensichtlich ein Vektorraum und für $M = \mathbb{R}^n$ (oder eine offene Teilmenge darin) liefert $X \mapsto (f \mapsto Df(x)(X))$ einen Isomorphismus zwischen dem "üblichen" Tangentialraum und dem hier definierten. Mit Hilfe von Partitionen der Eins zeigt man leicht, daß man in der Definition statt $C^\infty_x(M, \mathbb{R})$ auch $C^\infty(M, \mathbb{R})$ verwenden kann.

Für eine glatte Funktion $f : M \to N$ definiert man die Tangentialabbildung $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ zu f bei x durch $(T_x f \cdot X)(\varphi) = X(\varphi \circ f)$. Dies ist eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen.

Als nächstes betrachten wir das *Tangentialbündel* TM von M. Als Menge ist das einfach die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume und man erhält eine offensichtliche Projektion $\pi : TM \to M$. Ist (U, u) eine Karte auf M, dann liefern die Tangentialabbildungen zu u einen Homöomorphismus $\pi^{-1}(U) \cong u(U) \times \mathbb{R}^n$. Diese Kartenwechselabbildungen zu zwei solchen Karten sind die Kartenwechselabbildungen der Karten und ihre Ableitungen, also liefert das einen Atlas auf TM, der TM zu einer glatten Mannigfaltigkeit und zu einem glatten Vektorbündel über M macht. Für eine glatte Funktion $f : M \to N$ faßt man die Tangentialabbildungen in den Punkten von M zur Tangentialabbildung $Tf : TM \to TN$ zusammen, die ein glatter Vektorbündelhomomorphismus ist. Außerdem gilt die Kettenregel $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

Ein *Vektorfeld* auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Funktion $\xi : M \to TM$, die $\pi \circ \xi = \text{id}_M$ erfüllt, also ein glatter Schnitt des Tangentialbündels. Die Menge aller Vektorfelder auf M ist ein Modul über der Algebra $C^\infty(M, \mathbb{R})$, der mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet wird. Ist $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ und $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dann definiert $\xi(\varphi)(x) := \xi(x)(\varphi)$ eine glatte Funktion $\xi(\varphi) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Aus der Definition des Tangentialraumes folgert man relativ leicht, daß man dadurch einen Isomorphismus von $\mathfrak{X}(M)$ mit dem Raum aller Derivationen der Algebra $C^\infty(M, \mathbb{R})$, also aller linearen Abbildungen $\xi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$, die $\xi(\varphi\psi) = \xi(\varphi)\psi + \varphi\xi(\psi)$ erfüllen, erhält. Damit definiert man nun die *Lie–Klammer* $[\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(M)$ von zwei Vektorfeldern $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ durch $[\xi, \eta](f) = \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))$.

Eine *k–Form* ω auf M ordnet jedem Punkt $x \in M$ eine k–lineare, alternierende Funktion $\omega_x : T_x M \times \ldots \times T_x M \to \mathbb{R}$ zu, die glatt ist in dem Sinne, daß für glatte

Vektorfelder $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathfrak{X}(M)$ die Funktion $x \mapsto \omega_x(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x))$ glatt ist. Der Raum aller k–Formen auf M ist wieder ein Modul über $C^\infty(M, \mathbb{R})$, der mit $\Omega^k(M)$ bezeichnet wird. Mit Hilfe allgemeiner Konstruktionen mit Vektorbündeln (siehe Kapitel 5) kann man zum Vektorbündel TM das *duale Vektorbündel* T^*M, das *Kotangentialbündel* von M bilden. Dazu kann man für $k \in \mathbb{N}$ die äußeren Potenzen $\Lambda^k T^*M$ bilden, die wieder glatte Vektorbündel über M sind. Die k–Formen auf M sind dann genau die glatten Schnitte des Vektorbündels $\Lambda^k T^*M$. Der Vollständigkeit halber setzt man $\Omega^0(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$. Man kann auch beweisen, daß eine k–lineare, alternierende Funktion $\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ genau dann durch eine k–Form gegeben ist, wenn sie in jeder Variable linear über $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist.

Als nächstes definiert man die *äußere Ableitung* $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ durch

$$\begin{aligned} d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) = &\sum_{i=0}^{k} \xi_i(\omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_n)) + \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_n). \end{aligned}$$

In dieser Formel bedeutet ein Hut über einer Eintragung, das die entsprechende Eintragung auszulassen ist. Man zeigt, daß die äußere Ableitung einer k–Form tatsächlich eine $k+1$–Form ist (also $(k+1)$–linear über $C^\infty(M, \mathbb{R})$ und alternierend), und daß $d^2 = d \circ d = 0$ gilt. Da offensichtlich $\Omega^k(M) = 0$ für $k > \dim(M)$ gilt, erhält man also einen Komplex

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \to 0,$$

den *de–Rham Komplex* von M. Die Homologie dieses Komplexes heißt die *de–Rham Kohomologie* von M.

2.10. Die de–Rham Auflösung. Da Differentialformen Schnitte von glatten Vektorbündeln sind, ist $\Omega^k(\_)$ natürlich eine Garbe von Vektorräumen auf M, sogar eine Garbe von Moduln über der Garbe $C^\infty(\_, \mathbb{R})$. Die Formel für d aus 2.9 macht natürlich auch auf einer offenen Menge Sinn ("d ist ein lokaler Operator"), also ist

$$0 \to \Omega^0(\_) \xrightarrow{d} \Omega^1(\_) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(\_) \to 0$$

ein Garbenkomplex auf M. Für $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$ ist nach Definition $df(\xi) = \xi(f)$ für jedes Vektorfeld ξ auf U, also ist $df = 0$ äquivalent zu f lokal konstant. Für offene Teilmengen $U \subset M$ die diffeomorph zu einem offenen Ball in $\mathbb{R}^n$ sind, sagt das Lemma von Poincaré gerade daß für $\omega \in \Omega^k(U)$ mit $k \geq 1$ und $d\omega = 0$ immer ein $\tau \in \Omega^{k-1}(U)$ existiert, sodaß $d\tau = \omega$ gilt. Da jede offene Umgebung eines Punktes $x \in M$ so eine Umgebung enthält sehen wir, daß

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^0(\_) \xrightarrow{d} \Omega^1(\_) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(\_) \to 0$$

eine Auflösung der konstanten Garbe $\mathbb{R}$ ist, die sogenannte *de–Rham Auflösung*.

Diese Auflösung hat gegenüber der in 2.7 konstruierten singulären Auflösung einige Vorteile:

- Differentialformen sind wesentlich handlichere Objekte als Funktionen von der Menge aller singulären Simplices nach $\mathbb{R}$. Außerdem endet die de–Rham Auflösung bei der Dimension von M, während die singuläre Auflösung immer weiter geht.
- Auf den Differentialformen existiert eine einfache Produktstruktur

$$\wedge : \Omega^k(\_) \to \Omega^\ell(\_) \to \Omega^{k+\ell}(\_).$$

Dieses Produkt ist explizit gegeben durch

$$(\omega\wedge\tau)(\xi_1,\dots,\xi_{k+\ell})=\tfrac{1}{k!\ell!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+\ell}}\omega(\xi_{\sigma_1},\dots,\xi_{\sigma_k})\tau(\xi_{\sigma_{k+1}},\dots,\xi_{\sigma_{k+\ell}}),$$

wobei die Summe über alle Permutationen der Menge $\{1,\dots,k+\ell\}$ geht. Nun kann man direkt verifizieren, daß für $\omega\in\Omega^k$ die Formel $d(\omega\wedge\tau)=(d\omega)\wedge\tau+(-1)^k\omega\wedge d(\tau)$ gilt. Das impliziert aber, daß mit $d(\omega)=d(\tau)=0$ auch $d(\omega\wedge\tau)=0$ gilt, und für $d\omega=0$ die Gleichung $\omega\wedge d\tau=(-1)^k d(\omega\wedge\tau)$ erfüllt ist. Daraus folgt aber sofort, daß wir ein induziertes Produkt auf den Kohomologieklassen erhalten. Also bildet die de–Rham Kohomologie einer glatten Mannigfaltigkeit einen graduiert kommutativen Ring. Die entsprechende Struktur auf der singulären Kohomologie ("Cup–Produkt") ist wesentlich schwieriger zu beschreiben.

• Mit Hilfe von zusätzlichen Strukturen kann man sogar kanonische Repräsentanten für Kohomologieklassen bekommen: Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit und g eine Riemann–Metrik auf M. Dann kann man einen adjungierten Operator $d^*:\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$ zur äußeren Ableitung d konstruieren. Der Operator $\Delta:\Omega^k(M)\to\Omega^k(M)$, der gegeben ist durch $\Delta=d\circ d^*+d^*\circ d$ heißt dann der *Laplace–Beltrami* Operator auf M. Aus der Adjungiertheit von d und d^* schließt man, daß $\operatorname{Ker}(\delta)=\operatorname{Ker}(d)\cap\operatorname{Ker}(d^*)$ gilt, und das man eine Zerlegung $\Omega^k(M)=\operatorname{Im}(d)\oplus\operatorname{Ker}(\Delta)\oplus\operatorname{Im}(d^*)$ erhält. Das liefert aber einen Isomorphismus $\operatorname{Ker}(d)/\operatorname{Im}(d)\cong\operatorname{Ker}(\Delta)$, also ist die de–Rham Kohomologie isomorph zum Raum $\operatorname{Ker}(\Delta)$ der *harmonischen Formen* auf M.

Schließlich kann man auch noch einen Homomorphismus von Auflösungen von der de–Rham Auflösung in die glatte Version der singulären Auflösung aus 2.8 konstruieren: Ist $\omega\in\Omega^k(U)$ eine k–Form und $\sigma:\Delta_k\to U$ ein glatter singulärer k–Simplex, dann ist der Pullback $\sigma^*\omega$ eine glatte k–Form auf einer offenen Umgebung von Δ_k in $\mathbb{R}^{k+1}$. Explizit ist diese k–Form durch

$$(\sigma^*\omega)(x)(X_1,\dots,X_k)=\omega(\sigma(x))(T_x\sigma\cdot X_1,\dots,T_x\sigma\cdot X_k)$$

gegeben. Diese k–Form kann man aber über Δ_k integrieren und die Zuordnung $\sigma\mapsto\int_{\Delta_k}\sigma^*\omega\in\mathbb{R}$ ist ein Element von $S^k_\infty(U,\mathbb{R})$. Dies induziert aber einen Garbenhomomorphismus $\Omega^k(\_)\to\mathcal{S}^k_\infty(\_,\mathbb{R})$. Für $\omega\in\Omega^{k-1}(U)$ ist $\sigma^*(d\omega)=d(\sigma^*\omega)$, und nach dem Satz von Stokes gilt $\int_{\Delta_k}d(\sigma^*\omega)=\int_{d\Delta_k}\sigma^*\omega$, wobei $d\Delta_k$ den Rand des k–Simplex bezeichnet. Das bedeutet aber gerade, daß wir wirklich einen Homomorphismus von Auflösungen erhalten.

Liften von Schnitten von Garben

2.11. Lemma. *Sei $0\to\mathcal{A}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{B}\xrightarrow{\beta}\mathcal{C}\to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben über X. Dann ist $0\to\mathcal{A}(X)\xrightarrow{\alpha}\mathcal{B}(X)\xrightarrow{\beta}\mathcal{C}(X)\to 0$ exakt bei $\mathcal{A}(X)$ und $\mathcal{B}(X)$.*

Beweis. Es ist $\mathcal{A}(X)=\Gamma(X,\overline{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B}(X)=\Gamma(X,\overline{\mathcal{B}})$. Nach Voraussetzung ist $\alpha_x:\mathcal{A}_x\to\mathcal{B}_x$ injektiv für alle $x\in X$. Somit ist α_X injektiv und es bleibt zu zeigen, daß $\operatorname{Im}\alpha_X=\operatorname{Ker}\beta_X$.

$\subseteq$: Für jedes $x\in X$ ist $(\beta\circ\alpha)_x=\beta_x\circ\alpha_x=0$.

$\supseteq$: Sei $s\in\operatorname{Ker}\beta_X$. Dann gilt $s_x\in\operatorname{Ker}\beta_x=\operatorname{Im}\alpha_x$ $\forall x\in X$. Daher existiert ein nicht notwendig stetiger Schnitt $\overline{s}:X\to\overline{\mathcal{A}}$ mit $\alpha_x(\overline{s}(x))=s_x$ $\forall x\in X$. Wir werden zeigen, daß $\overline{s}$ stetig ist. Sei dazu $x_0\in X$. Da $\overline{s}(x_0)\in\mathcal{A}_{x_0}$ existiert eine offene Umgebung U von x_0 und ein $s'\in\mathcal{A}(U)$ mit $s'_{x_0}=\overline{s}(x_0)$. Dann ist $\alpha_U(s')_{x_0}=s_{x_0}$ und es existiert eine Umgebung V von x_0 mit

$$r^U_V\alpha_U(s')=r^U_V s\Rightarrow r^V_x r^U_V\alpha_U(s')=r^V_x r^U_V s\Rightarrow\alpha_x(s'_x)=s_x=\alpha_x(\overline{s}(x))\ \ \forall x\in V.$$

Da α_x injektiv ist, folgt $s'_x = \overline{s}(x)\ \forall x \in V$, woraus $r^U_V(s') = \overline{s}|_V$ und damit $\overline{s}$ stetig bei x_0 folgt. □

Bemerkung. Die Sequenz ist im allgemeinen *nicht* exakt bei $\mathcal{C}(X)$. Beispielsweise ist (vgl. 2.3) $\mathcal{O}(\mathbb{C}) \stackrel{\exp}{\to} \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$ nicht surjektiv. Auch 2.5 liefert ein Beispiel.

Die Garben-Kohomologie mißt die Abweichung der Sequenz von der Exaktheit. Wir benötigen daher eine Klasse von Garben, für die die Sequenz der globalen Schnitte immer exakt ist. Garbenkohomologie werden wir dann durch Auflösung durch solche Garben definieren.

2.12. Lemma. *Sei X ein parakompakter Hausdorffraum, $\mathcal{G}$ eine Garbe über X und $\overline{\mathcal{G}}$ der zugeordnete Garbenraum. Sei S abgeschlossen in X und $s \in \Gamma(S, \overline{\mathcal{G}})$. Dann läßt sich s zu einem stetigen Schnitt auf einer offenen Umgebung von S in X fortsetzen.*

Beweis. Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von S und $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$, sodaß

$$s_i|_{U_i \cap S} = s|_{U_i \cap S} \quad \forall i\,.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\{U_i\}$ lokalendlich ist. Wähle eine offene Überdeckung $\{V_i\}$ von S, sodaß $V_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i\ \forall i$ und setze

$$W := \{x \in X\ :\ x \in \overline{V}_i \cap \overline{V}_j \Rightarrow s_i(x) = s_j(x)\}$$

Wir behaupten nun, daß W eine Umgebung von S. Sei $x \in S$. Dann existiert eine offene Umgebung W_x von x, die nur $V_{i_1}, \dots V_{i_n}$ schneidet. Durch Verkleinerung von W_x (und ev. von n) kann man erreichen, daß $x \in \overline{V}_{i_j}\ \forall j$ und $W_x \subseteq U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$. Somit sind alle s_{i_j} bei x definiert und stimmen in x Überein, da $x \in S$. Damit stimmen sie aber sogar in einer Umgebung von x Überein und o.B.d.A sei diese Umgebung in W_x enthalten. Dann ist $W_x \subseteq W$ und die Behauptung folgt.

W^0 ist eine offene Umgebung von S in X und für $x \in W^0$ zieht $x \in \overline{V}_i \cap \overline{V}_j$ auch $s_i(x) = s_j(x)$ nach sich. Sei $W_1 := \bigcup\limits_i (W^0 \cap V_i) = \bigcup\limits_i \widetilde{V}_i$ und sei $\widetilde{s}_i := s_i|_{\widetilde{V}_i}$. Dann gilt

$$\widetilde{s}_i|_{\widetilde{V}_i \cap \widetilde{V}_j} = \widetilde{s}_j|_{\widetilde{V}_i \cap \widetilde{V}_j}\ \forall i,j \stackrel{(G2)}{\Rightarrow} \exists\, \widetilde{s} \in \mathcal{G}(W_1) \text{ mit } \widetilde{s}|_{\widetilde{V}_i} = \widetilde{s}_i\ \forall i\,.$$

Nach Konstruktion ist $\widetilde{s}|_S = s$, also ist $\widetilde{s}$ die gesuchte stetige Fortsetzung des Schnittes s. □

2.13. Korollar. *Seien X, $\mathcal{G}$, S wie in 2.12; dann gilt:*

$$\Gamma(S, \overline{\mathcal{G}}) = \varinjlim_{U \supseteq S} \Gamma(U, \overline{\mathcal{G}}) \stackrel{1.13}{\cong} \varinjlim_{U \supseteq S} \mathcal{G}(U)$$

Dabei ist $\varinjlim_{U \supseteq S} \mathcal{G}(U)$ der Raum der Keime bei S von lokalen Schnitten von $\overline{\mathcal{G}}$ über offenen Mengen.

Beweis. $\subseteq$: Sei $s \in \Gamma(S, \overline{\mathcal{G}})$. Dann existiert nach 2.12 ein offenes $U \supseteq S$ und ein $\widetilde{s} \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{G}})$ mit $\widetilde{s}|_S = s$. Sind nun $t_i \in \Gamma(U_i, \overline{\mathcal{G}})$ $(i = 1, 2)$, $t_1|_S = t_2|_S$, dann existiert ein offenes $U \subseteq U_1 \cap U_2$ mit $S \subseteq U$, sodaß $t_1|_U = t_2|_U$ (weil sowohl t_1 als auch t_2 lokal invers zu π sind). Somit bestimmt jedes $s \in \Gamma(S, \overline{\mathcal{G}})$ eindeutig ein Element von $\varinjlim_{U \supseteq S} \mathcal{G}(U)$. Die umgekehrte Inklusion ist aber klar. □

Konvention. Wir betrachten von nun an ausschließlich Garben abelscher Gruppen über parakompakten T_2-Räumen.

Weiche und feine Garben

2.14. Definition.

(1) Sei $\mathcal{G}$ eine Garbe über X, $S \subseteq X$ abgeschlossen;

$$\mathcal{G}(S) := \varinjlim_{U \supseteq S} \mathcal{G}(U)$$

(2) $\mathcal{G}$ heißt *weich* (soft), wenn gilt:

$$r_S^X : \mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}(S) \text{ ist surjektiv } \forall S \subseteq X \text{ abgeschlossen}$$

d.h. wenn sich jeder stetige Schnitt über S stetig auf ganz X fortsetzen läßt.

2.15. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine weiche Garbe über X und*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben über X. Dann ist

(1)
$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(X) \xrightarrow{g_X} \mathcal{B}(X) \xrightarrow{h_X} \mathcal{C}(X) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen.

Beweis. Wegen 2.11 ist nur mehr zu zeigen, daß h_X surjektiv ist. Sei $c \in \mathcal{C}(X)$. Wie im Beweis von 2.11 folgt:

$$\forall x \in X \; \exists U \text{offene Umg. v. } x \; \exists \, b \in \mathcal{B}(U) \, : \, h_U(b) = r_U^X(c) = c|_U \, .$$

Somit existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von X und $b_i \in \mathcal{B}(U_i)$ mit $h_{U_i}(b_i) = c|_{U_i}$. Es bleibt zu zeigen, daß sich diese b_i zu einem globalen Schnitt b zusammensetzen lassen. Da X parakompakt ist, existiert eine lokalendliche Verfeinerung S_i von U_i, sodaß S_i abgeschlossen und in U_i enthalten ist. Sei

$$\mathcal{M} = \{(b, S) \, : \, S = \bigcup_{j \in J} S_j, \; J \subseteq I, \; b \in \mathcal{B}(S), \; h(b) = c|_S\}$$

Wir definieren eine Halbordnung auf $\mathcal{M}$ durch

$$(b, S) \leq (b', S') \Leftrightarrow S \subseteq S' \text{ und } b'|_S = b$$

Sei nun (b_i, S_i) eine Kette in $\mathcal{M}$ und $S = \bigcup_i S_i$, $b(x) := b_i(x)$ für $x \in S_i$. Nach 2.13 definiert b einen stetigen Schnitt $b : S \to \overline{\mathcal{G}}$, also ein $b \in \mathcal{G}(S)$ und nach Konstruktion ist $h(b) = c|_S$. Somit besitzt jede Kette in $\mathcal{M}$ eine obere Schranke, also existiert nach dem Lemma von Zorn ein maximales Element (b, S) in $\mathcal{M}$.

Wir behaupten, daß $S = X$. Dazu nehmen wir indirekt an, es gäbe ein S_j mit $S_j \nsubseteq S$. Es gilt:

$$h(b|_{S \cap S_j} - b_j|_{S \cap S_j}) = c|_{S \cap S_j} - c|_{S \cap S_j} = 0 \, .$$

Nach 2.11 ist für alle $Y \subseteq X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(Y) \xrightarrow{g_Y} \mathcal{B}(Y) \xrightarrow{h_Y} \mathcal{C}(Y) \longrightarrow 0$$

exakt bei $\mathcal{B}(Y)$. Deshalb existiert ein $a \in \mathcal{A}(S \cap S_j)$ mit $g(a) = b|_{S \cap S_j} - b_j|_{S \cap S_j}$. Da $\mathcal{A}$ weich ist existiert ein $a' \in \mathcal{A}(X)$ mit $g(a')|_{S \cap S_j} = b|_{S \cap S_j} - b_j|_{S \cap S_j}$ Definiere nun $\widetilde{b} \in \mathcal{B}(S \cup S_j)$ durch

$$\widetilde{b}|_S = b, \; \widetilde{b}|_{S_j} = b_j + g(a') \, .$$

$\widetilde{b}$ ist wohldefiniert, weil $b|_{S \cap S_j} = b_j|_{S \cap S_j} + g(a')|_{S \cap S_j}$. Dann ist aber $h(\widetilde{b}) = c|_{S \cup S_j}$ und damit $\mathcal{M} \ni (\widetilde{b}, S \cup S_j) > (b, S)$, ein Widerspruch. □

2.16. Definition. Eine Garbe abelscher Gruppen $\mathcal{G}$ auf einem parakompakten Raum X heißt *fein*, wenn für jede lokalendliche Überdeckung $\{U_i\}$ von X eine Familie von Garben-Morphismen $\{\eta_i : \mathcal{G} \to \mathcal{G}\}$ existiert, sodaß

(i) $\sum_i \eta_i = \mathrm{Id}$

(ii) $\eta_i(\mathcal{G}_x) = 0 \ \forall x$ in einer Umgebung von $X \setminus U_i$.

$\{\eta_i\}$ heißt *Partition der Eins* von $\mathcal{G}$, die $\{U_i\}$ untergeordnet ist.

Beispiele. Feine Garben: $\mathcal{C}_{X,\mathbb{R}}$, $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}$ für X parakompakt, $\mathcal{E}_X$, Ω_X für X parakompakte $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit. Ist $\mathcal{R}$ eine feine Garbe von Ringen, so ist jede Garbe von Moduln über $\mathcal{R}$ fein.

2.17. Satz. *Feine Garben sind weich.*

Beweis. Sei $\mathcal{G}$ eine feine Garbe über X, $S \subseteq X$ abgeschlossen und $s \in \mathcal{G}(S) \cong \Gamma(S, \overline{\mathcal{G}})$. Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von S in X und $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$, sodaß $s_i|_{S\cap U_i} = s|_{S\cap U_i}$ für alle i. Sei $U_0 := X \setminus S$ und $s_0 := 0 \in \mathcal{G}(U_0)$. Dann ist $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von X, die wir o.B.d.A als lokalendlich annehmen dürfen. Laut Voraussetzung existiert eine Partition der Eins $\{\eta_i\}$, die $\{U_i\}$ untergeordnet ist. Jedes $\eta_i(s_i) \in \Gamma(U_i, \overline{\mathcal{G}})$ ist ein Schnitt, der durch 0 auf X fortgesetzt werden kann. Damit ist

$$\widetilde{s} := \sum_i \eta_i(s_i) \in \Gamma(X, \overline{\mathcal{G}}),$$

die gesuchte Fortsetzung von s. $\square$

2.18. Beispiel. $X = \mathbb{C}$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\mathbb{C}$ ist nicht weich: Sei $S = \{z : |z| \le \frac{1}{2}\}$, $f \in \mathcal{O}(S)$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Dann kann f nicht auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

2.19. Beispiel. Konstante Garben sind nicht weich, falls $|X| > 1$, $G \neq 0$: Seien $a \neq b \in X$, $s \in \mathcal{G}(\{a, b\})$, $s(a) = 0$, $s(b) \neq 0$. Dann kann s nicht fortgesetzt werden.

2.20. Korollar. **(zu 2.15)** *Sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ weich. Dann ist auch $\mathcal{C}$ weich.

Beweis. Sei $S \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist auch S parakompakt und durch Anwendung von 2.15 auf $\mathcal{A}|_S$, $\mathcal{B}|_S$, $\mathcal{C}|_S$ folgt, daß

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(S) \xrightarrow{g_S} \mathcal{B}(S) \xrightarrow{h_S} \mathcal{C}(S) \longrightarrow 0$$

exakt ist. Sei $c \in \mathcal{C}(S)$. Dann existiert $b \in \mathcal{B}(S)$ mit $h_S(b) = c$. Da $\mathcal{B}$ weich ist, existiert eine Fortsetzung $\widetilde{b}$ von b in $\mathcal{B}(X)$. Damit ist $h_X(\widetilde{b})$ eine Fortsetzung von c. $\square$

2.21. Korollar. *Sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{W}_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{W}_2 \xrightarrow{f_2} \dots$$

eine exakte Sequenz von weichen Garben auf X. Dann ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}_0(X) \longrightarrow \mathcal{W}_1(X) \longrightarrow \mathcal{W}_2(X) \longrightarrow \dots$$

exakt.

Beweis. $K_i := \operatorname{Ker}(f_i)$ ist eine Garbe und

$$0 \longrightarrow K_i \xrightarrow{\text{incl}} \mathcal{W}_i \xrightarrow{f_i} K_{i+1} \longrightarrow 0$$

ist eine kurze exakte Sequenz für jedes i. Für $i = 1$ folgt, daß

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}_0 = K_1 \xrightarrow{\text{incl}} \mathcal{W}_1 \xrightarrow{f_1} K_2 \longrightarrow 0$$

exakt ist, sodaß nach 2.20 K_2 weich ist. Induktiv folgt, daß jedes K_i weich ist. Nach 2.15 ist

$$0 \longrightarrow K_i(X) \xrightarrow{\text{incl}} \mathcal{W}_i(X) \xrightarrow{f_{iX}} K_{i+1}(X) \longrightarrow 0$$

für jedes i exakt und durch Zusammensetzen dieser Sequenzen folgt die Behauptung. □

Die kanonische feine Auflösung

2.22. Sei X parakompakt, $\mathcal{G}$ eine Garbe über X und $\overline{\mathcal{G}} \xrightarrow{\pi} X$ der zugehörige Garbenraum. Die *Garbe* $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ *der unstetigen Schnitte von* $\mathcal{G}$ ist definiert durch

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{G})(U) := \{f : U \to \overline{\mathcal{G}} \,:\, \pi \circ f = \mathrm{id}_U\}$$

$\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ ist trivialerweise eine weiche Garbe. Es ist $\mathcal{G} = \Gamma(\,.\,,\overline{\mathcal{G}}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ und somit $0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ exakt. Sei $\mathcal{F}^1(\mathcal{G}) := \mathcal{C}^0(\mathcal{G})/\mathcal{G}$, $\mathcal{C}^1(\mathcal{G}) := \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{G}))$ und induktiv

$$\mathcal{F}^i(\mathcal{G}) = \mathcal{C}^{i-1}(\mathcal{G})/\mathcal{F}^{i-1}(\mathcal{G}) \qquad \mathcal{C}^i(\mathcal{G}) := \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^i(\mathcal{G})).$$

Damit erhält man folgende kurze exakte Sequenzen von Garben:

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{F}^1(\mathcal{G}) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^i(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{C}^i(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{F}^{i+1}(\mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

woraus sich durch Zusammensetzen die lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{C}^2(\mathcal{G}) \longrightarrow \dots$$

Diese Sequenz, die man abgekürzt mit $0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ bezeichnet, heißt die *kanonische Auflösung* von $\mathcal{G}$. Sie ist nach Konstruktion weich.

Sei $h : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_1$ ein Garbenhomomorphismus. Dann induziert h einen Garbenraumhomomorphismus $\overline{h}$:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{G}} \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[d, "\pi"'] & \overline{\mathcal{G}}_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}$$

und damit einen Garbenhomomorphismus $\mathcal{C}^0(h) : \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1)$. Dieser induziert $\mathcal{F}^1(h) : \mathcal{F}^1(\mathcal{G}) \to \mathcal{F}^1(\mathcal{G}_1)$, und durch Rekursion folgt:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{C}^0(h)"] & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{C}^1(h)"] & \mathcal{C}^2(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{C}^2(h)"] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}_1 \arrow[r] & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) \arrow[r] & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}_1) \arrow[r] & \mathcal{C}^2(\mathcal{G}_1) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Für spezielle Garben kann die Einschränkung auf parakompakte Räume vermieden werden:

Definition: *Eine Garbe* $\mathcal{G}$ *heißt* wacklig (flabby), *falls* $r^X_U : \mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}(U)$ *surjektiv ist für alle* $U \subseteq X$ *offen.*

Man kann zeigen: Ist $\mathcal{G}$ wacklig und X parakompakt, dann ist $\mathcal{G}$ weich. Nun betrachtet man wacklige statt weicher Garbe. Problem: Einerseits sind viele interessante weiche Garben nicht wacklig, andererseits wird die Theorie aufwendiger.

2.23. Lemma. *Für jede Garbe $\mathcal{G}$ ist $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ eine feine Garbe. Daher ist $0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ eine feine Auflösung.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ eine lokalendliche offene Überdeckung von X, $\{V_i\}$ eine offene Überdeckung mit $V_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Auswahlfunktion $i : X \to I$, sodaß $x \in V_{i(x)}$ für alle $x \in X$. Sei

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & i(x) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_i : X \to \mathbb{Z}$, $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq U_i$ und $\sum_{i \in I} \varphi_i \equiv 1$. Setze $l_i : \mathcal{C}^0(\mathcal{G})(W) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{G})(W)$ ($W \subseteq X$ offen), $l_i(s)(x) := \varphi_i(x)s(x)$, $s \in \Gamma(W, \overline{\mathcal{C}^0(\mathcal{G})})$. l_i vertauscht mit Einschränkungen, $\sum l_i \equiv 1$ und $l_i(\mathcal{C}^0(\mathcal{G})_x) = 0$ für $x \notin \overline{V}_i$. Somit ist $\{l_i\}$ eine Partition der 1 für $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$. $\square$

KAPITEL 3

Garbenkohomologie

Bevor wir uns mit der Garbenkohomologie beschäftigen besprechen wir, um die Analogie deutlich zu machen, kurz die Konstruktion der Ext–Funktoren aus der homologischen Algebra, die als Spezialfälle die klassischen algebraischen Kohomologietheorien (für Gruppen, Ringe und Lie–Algebren) liefern.

3.0. Ext–Funktoren. Sei R ein (im Allgemeinen nicht kommutativer) Ring mit 1 und betrachte die Kategorie der Linksmoduln über R. Sind A, M zwei solche Moduln, dann ist die Menge $\mathrm{Hom}(A, M)$ eine abel'sche Gruppe unter punktweiser Addition. Ist B noch ein Modul und $\varphi : A \to B$ ein Modulhomomorphismus, dann erhalten wir einen induzierten Gruppenhomomorphismus $\varphi^* = \mathrm{Hom}(\varphi, M) : \mathrm{Hom}(B, M) \to \mathrm{Hom}(A, M)$, der definiert ist durch $\varphi^*(\psi) = \psi \circ \varphi$. Damit ist $\mathrm{Hom}(\_, M)$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der R–Linksmoduln in die Kategorie der abel'schen Gruppen.

Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R–Linksmoduln, dann betrachten wir die induzierte Sequenz $0 \to \mathrm{Hom}(C, M) \to \mathrm{Hom}(B, M) \to \mathrm{Hom}(A, M) \to 0$ von abel'schen Gruppen. Man zeigt, das diese Sequenz exakt bei $\mathrm{Hom}(C, M)$ und $\mathrm{Hom}(B, M)$ aber im Allgemeinen nicht exakt bei $\mathrm{Hom}(A, M)$ ist. Ein Beispiel dafür ist $R = \mathbb{Z}$ und die exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$. Wendet man darauf den Funktor $\mathrm{Hom}(\_, \mathbb{Z}_2)$ an, dann müssen wir zeigen, daß die Funktion $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ die einfach durch die Einschränkung von Homomorphismen gegeben ist, nicht surjektiv ist. Nun gilt aber für einen Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_2$, $0 = \varphi(q) + \varphi(q) = \varphi(2q)$. Da aber $q = 2(q/2)$ ist, ist der Nullhomomorphismus der einzige Homomorphismus $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_2$. Die kanonische Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist aber ein nichttrivialer Homomorphismus.

Ein R–Modul A heißt *projektiv*, falls es für jeden surjektiven Homomorphismus $\varphi : M \to N$ von R–Moduln und jeden Homomorphismus $\psi : A \to N$ einen Lift $\tilde{\psi} : A \to M$ gibt, d.h. $\varphi \circ \tilde{\psi} = \psi$. Man sieht leicht, daß jeder freie R–Modul projektiv ist, also gibt es viele solche Moduln. (Die projektiven Moduln hier sind die Analoga der weichen Garben.) Ist der Modul C in der obigen Sequenz projektiv, dann ist die induzierte Sequenz der Homomorphismengruppen exakt: Dann gibt es nämlich zum Homomorphismus $p : B \to C$ aus der Sequenz einen Schnitt, einen Homomorphismus $\sigma = \widetilde{\mathrm{id}} : C \to B$ mit $p \circ \sigma = \mathrm{id}$. Dann ist aber $\rho(b) = b - \sigma(p(b))$ ein Homomorphismus $B \to A$, der $\rho \circ i = \mathrm{id}_A$ erfüllt, wobei $i : A \to B$ die Abbildung aus der Sequenz ist. Damit ist aber $i^* \circ \rho^* = \mathrm{id}$, also i^* surjektiv. (Das ist das Analogon von Satz 2.15.)

Sei nun C wieder ein beliebiger R–Modul. Eine *projektive Auflösung* von C ist eine exakte Sequenz der Form $\cdots \to A_n \to A_{n-1} \to \cdots \to A_1 \to C$, in der alle A_i projektiv sind. Man zeigt leicht, das so eine Auflösung (sogar eine freie Auflösung) immer existiert. Wir bezeichnen die Auflösung mit $A_* \to C \to 0$. Für so eine Auflösung ist dann $0 \to \mathrm{Hom}(A_0, M) \to \mathrm{Hom}(A_1, M) \to \dots$ ein Komplex. Die i–te Kohomologiegruppe dieses Komplexes heiß $\mathrm{Ext}^i(C, M)$.

Seien C und D Moduln, $A_* \to C \to 0$ und $B_* \to D \to 0$ projektive Auflösungen, und $\varphi : C \to D$ ein Modulhomomorphismus. Aus der Projektivität der Moduln A_i schließt man leicht, daß φ einen Homomorphismus von Auflösungen $\varphi_* : A_* \to B_*$ induziert, d.h. man erhält Homomorphismen $\varphi_i : A_i \to B_i$ sodaß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_n"'] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & \dots \arrow[r] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & 0 \\
\dots \arrow[r] & B_n \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Weiters zeigt man, das je zwei solche Fortsetzungen von ϕ kettenhomotop sind. Wendet man auf dieses Diagramm den Funktor $\mathrm{Hom}(\_, M)$ an, dann erhält man wieder ein kommutatives Diagramm und auch die Eigenschaft kettenhomotop zu sein bleibt erhalten. Insbesondere erhält man für zwei projektive Auflösungen von C und $\varphi = \mathrm{id}$, daß die Gruppen $\mathrm{Ext}^*(C, M)$ unabhängig von der Wahl der projektiven Auflösungen sind. Der allgemeine Fall zeigt dann, daß ein Homomorphismus $\varphi : C \to D$ eindeutige Homomorphismen $\varphi^* : \mathrm{Ext}^*(D, M) \to \mathrm{Ext}^*(C, M)$ induziert. Andererseits induziert ein Homomorphismus $\psi : M \to N$ Homomorphismen $\psi_* : \mathrm{Ext}^*(C, M) \to \mathrm{Ext}^*(C, N)$, also ist $\mathrm{Ext}^*(\_, \_)$ ein Bifunktor.

Wählt man den Ring R geeignet, dann liefert diese Konstruktion die klassischen algebraischen Kohomologietheorien. Für eine diskrete Gruppe G setzt man $R = \mathbb{Z}[G]$, den Gruppenring. Dann sind R–Moduln genau G–Moduln, und $\mathrm{Ext}^*(\mathbb{Z}, M)$ liefert in diesem Fall die Gruppenkohomologie $H^*(G, M)$. Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie–Algebra über einem Körper $\mathbb{K}$, dann setzt man $R = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, die universelle Einhüllende (über $\mathbb{K}$) von $\mathfrak{g}$. Dann sind R–Moduln das selbe wie $\mathfrak{g}$–Moduln, und $\mathrm{Ext}^*(\mathbb{K}, M)$ ist die Chevalley–Eilenberg Kohomologie $H^*(\mathfrak{g}, M)$. Ist schließlich A eine $\mathbb{K}$–Algebra, dann setzt man $R = A \oplus A^{\mathrm{op}}$, wobei A^{op} die Algebra A mit der umgekehrten Multiplikation bezeichnet. Dann sind R–Moduln genau A–Bimoduln, und $\mathrm{Ext}^*(\mathbb{K}, M)$ ist die Hochschild Kohomologie $H^*(A, M)$.

3.1. Sei X parakompakt, $\mathcal{G}$ eine Garbe abelscher Gruppen über X, $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ die kanonische feine Auflösung von $\mathcal{G}$. ($\mathcal{C}^i(G) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^i(\mathcal{G}))$, $\mathcal{F}^i(\mathcal{G}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^{i-1}(\mathcal{G}))/\mathcal{F}^{i-1}(\mathcal{G})$, $\mathcal{F}^1(\mathcal{G}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{G})/\mathcal{G}$, siehe 2.22 und 2.23.)

- Betrachte die Sequenz der globalen Schnitte:

$$0 \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{G})(X) \to \mathcal{C}^1(\mathcal{G})(X) \to \dots \tag{2}$$

- Bei $\mathcal{G}(X)$ und $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})(X)$ ist die Sequenz für jede Garbe $\mathcal{G}$ nach 2.11 exakt.
- Ist $\mathcal{G}$ weich, dann sind alle Garben in der Sequenz weich, weil die $\mathcal{C}^i$ fein sind. Damit ist die Sequenz der globalen Schnitte nach 2.21 ist überall exakt.
- Die Sequenz der globalen Schnitte ist immer ein Kokettenkomplex. (Alle Keime werden durch die Komposition von zwei aufeinanderfolgenden Morphismen auf 0 abgebildet, also ist diese Komposition immer 0.)
- Sei $C^q(X, \mathcal{G}) = \mathcal{C}^q(\mathcal{G})(X) (= \Gamma(X, \mathcal{C}^q(\mathcal{G})))$. Die Sequenz (2) wird zu $0 \to \mathcal{G}(X) \to C^*(X, \mathcal{G})$. Betrachte jetzt $0 \to C^0(X, \mathcal{G}) \to C^1(X, \mathcal{G}) \to \dots$.

Definition. Die q–te Homologiegruppe der Garbe $\mathcal{G}$ auf X

$$\mathrm{H}^q(X, \mathcal{G}) := \mathrm{H}^q(C^*(X, \mathcal{G})) = \frac{\ker(C^q(X, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(X, \mathcal{G}))}{\mathrm{Im}\,(C^{q-1}(X, \mathcal{G}) \to C^q(X, \mathcal{G}))}.$$

Sie heißt auch Garben–Kohomologiegruppe des Raumes X vom Grad q mit Koeffizienten in $\mathcal{G}$.

3.2. Satz. *Sei X ein T_2–Raum und parakompakt. Dann gilt:*

(1) *Für jede Garbe $\mathcal{G}$ auf X ist $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}(X)$. Ist $\mathcal{G}$ eine weiche Garben, dann ist $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{G}) = 0$ für alle $q > 0$.*

(2) *Ein Garbenhomomorphismus* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *induziert einen Gruppenhomomorphismus* $h_\# = \mathrm{H}^q(X,h) : \mathrm{H}^q(X,\mathcal{A}) \to \mathrm{H}^q(X,\mathcal{B})$ *mit* $\mathrm{H}^0(X,h) = h_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X)$*,* $\mathrm{H}^q(X,\mathrm{id}) = \mathrm{id}$*,* $\mathrm{H}^q(X,h) \circ \mathrm{H}^q(X,g) = \mathrm{H}^q(X,h\circ g)$*.*
Also ist jedes H^q *ein kovarianter Funktor.*

(3) *Sei* $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ *exakt. Dann gibt es natürliche Homomorphismen* $\delta^q : \mathrm{H}^q(X,\mathcal{C}) \to \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathcal{A})$ *sodaß*

$$0 \to \mathrm{H}^0(X,\mathcal{A}) \to \mathrm{H}^0(X,\mathcal{B}) \to \mathrm{H}^0(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{H}^1(X,\mathcal{A}) \to \dots$$
$$\dots \to \mathrm{H}^q(X,\mathcal{A}) \to \mathrm{H}^q(X,\mathcal{B}) \to \mathrm{H}^q(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^q} \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathcal{A}) \to \dots$$

exakt ist. (Das ist die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz.)

Beweis. (1) Die Sequenz $0 \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{G})(X) \to \mathcal{C}^1(\mathcal{G})(X) \to \dots$ ist an den ersten beiden Stellen exakt also ist $\ker(C^0(X,\mathcal{G}) \to C^1(X,\mathcal{G})) = \mathcal{G}(X)$. Wegen $\mathrm{Im}\,(0 \to C^0(X,\mathcal{G})) = 0$ gilt $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$. Wenn $\mathcal{G}$ weich ist, ist die Sequenz überall exakt, also ist $\mathrm{H}^q(X,\mathcal{G}) = 0$ für alle $q > 0$.

(2) Sei $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Garbenhomomorphismus. Dann erhalten wir wie in 2.22 das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \big\downarrow h & & \big\downarrow \mathcal{C}^0(h) & & \big\downarrow \mathcal{C}^1(h) & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Das ist funktoriell in h, also erhalten wir einen Homomorphismus von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) & \longrightarrow & C^0(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & C^1(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \big\downarrow h_X & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) & \longrightarrow & C^0(X,\mathcal{B}) & \longrightarrow & C^1(X,\mathcal{B}) & \longrightarrow & \dots.
\end{array}$$

Das ergibt $\mathrm{H}^q(X,h)$ (homologische Algebra).

(3) Ist $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ exakt, so auch $0 \to \mathcal{C}^0(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{B}) \to \mathcal{C}^0(\mathcal{C}) \to 0$ (unstetige Schnitte). Aus der Exaktheit dieser beiden Sequenzen folgt aber, daß auch $0 \to \mathcal{F}^1(\mathcal{A}) \to \mathcal{F}^1(\mathcal{B}) \to \mathcal{F}^1(\mathcal{C}) \to 0$ eine exakte Sequenz ist. Induktiv erhält man, daß für jedes i die Sequenz $0 \to \mathcal{C}^i(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}^i(\mathcal{B}) \to \mathcal{C}^i(\mathcal{C}) \to 0$ exakt ist. Weil $\mathcal{C}^i(\mathcal{A})$ eine weiche Garben ist, überträgt sich die Exaktheit auf die globalen Schnitte, siehe 2.15. Damit ist aber $0 \to C^*(X,\mathcal{A}) \to C^*(X,\mathcal{B}) \to C^*(X,\mathcal{C}) \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen, und wir erhalten die gesuchten Homomorphismen.

□

Bemerkung. Die δ^q in (3) heißen *Bockstein–Operatoren.*

3.3. Satz. *Durch die Eigenschaften (1)–(3) in Satz 3.2 ist die Garbenkohomologie eindeutig bestimmt.*

Genauer: Sei X *parakompakt,* T_2*,* $\mathcal{G} \to \mathcal{H}^q(X,\mathcal{G})$ *eine Folge additiver kovarianter Funktoren von der Kategorie der Garben abelscher Gruppen über* X *in die Kategorie der abelschen Gruppen, die (1)–(3) erfüllt. Dann existiert ein (in* X *und in* $\mathcal{G}$*) natürlicher Isomorphismus* $T^q : \mathcal{H}^q(X,\mathcal{G}) \to H^q(X,\mathcal{G})$*, der mit* δ^q *kompatibel ist.*

Beweis ("Azyklische Modelle"). Verwende Induktion nach q. Wegen (1) muß $T^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{G}(X)}$ gelten.

Sei jetzt T^{q-1} schon definiert. Betrachte $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \to \mathcal{F}^1(\mathcal{G}) \to 0$. (Exakt nach 2.22.)

Fall 1: $q = 1$: Da $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ eine weiche Garbe ist, gilt $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{C}^0(\mathcal{G})) = \mathcal{H}^1(X, \mathcal{C}^0(\mathcal{G})) = 0$ nach Eigenschaft (2). Damit liefert Eigenschaft (3) liefert folgendes Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \mathcal{H}^0(X,\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^0(X,\mathcal{C}^0(\mathcal{G})) & \longrightarrow & \mathcal{H}^0(X,\mathcal{F}^1(\mathcal{G})) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1(X,\mathcal{G}) & \longrightarrow 0 \\
& \| & & \| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle T^1} & \\
0 \longrightarrow & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{C}^0(\mathcal{G})) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{F}^1(\mathcal{G})) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(X,\mathcal{G}) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Dadurch wird T^1 definiert und T^1 ist natürlich.

Fall 2: $q > 1$: Da $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ eine weich ist, gilt $\mathrm{H}^k(X, \mathcal{C}^0(\mathcal{G})) = \mathcal{H}^k(X, \mathcal{C}^0(\mathcal{G})) = 0$ für $k = q-1, q$. Eigenschaft (3) liefert dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow & \mathcal{H}^{q-1}(X,\mathcal{F}^1(\mathcal{G})) & \longrightarrow & \mathcal{H}^q(X,\mathcal{G}) & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle T^{q-1}} & & \downarrow{\scriptstyle T^q} & \\
0 \longrightarrow & \mathrm{H}^{q-1}(X,\mathcal{F}^1(\mathcal{G})) & \longrightarrow & \mathrm{H}^q(X,\mathcal{G}) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Dies definiert T^q und T^q ist natürlich. □

Bemerkung. (i) Ersetzt man weich durch wacklig, so gelten 3.2 und 3.3 für allgemeine topologische Räume.

(ii) Ersetzt man in 3.2 (1) weich durch fein, so gilt 3.3 immer noch. (Denn wir brauchen 3.2 (1) nur für die kanonische Auflösung, die auch fein ist.)

Azyklische Auflösungen und der abstrakte Satz von de–Rham

3.4. Definition. Eine Auflösung $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1 \to \mathcal{A}^2 \to \dots$ von $\mathcal{G}$ über X heißt *azyklisch* $\Leftrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathcal{A}^p) = 0 \quad \forall q > 0,\ p \geq 0$. Insbesondere sind weiche Auflösungen azyklisch.

Jede azyklische Auflösung liefert die Garben–Kohomologiegruppen, denn es gilt:

3.5. Satz (**abstrakter Satz von de Rham**). *Sei X parakompakt, T_2, $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X. Für jede Auflösung $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{A}^*$ von $\mathcal{G}$ existieren natürliche Homomorphismen* $\gamma^p : \mathrm{H}^p(\mathcal{A}^*(X)) \to \mathrm{H}^p(X, \mathcal{G}) \quad \forall p \geq 0$. *Ist die Auflösung azyklisch, so sind alle γ^p Isomorphismen. Hierbei bezeichnet* $\mathrm{H}^p(\mathcal{A}^*(X))$ *ist die p–te Kohomologiegruppe des Kokettenkomplexes* $0 \to \mathcal{A}^0(X) \to \mathcal{A}^1(X) \to \mathcal{A}^2(X) \to \dots$.

Beweis. Wir definieren eine Folge $\mathcal{K}^p$ von Garben.

$$\mathcal{K}^p := \ker(\mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{p+1}), \qquad \mathcal{K}^0 = \mathcal{G}.$$

Dann ist $0 \to \mathcal{K}^{p-1} \to \mathcal{A}^{p-1} \to \mathcal{K}^p \to 0$ exakt für alle $p \geq 1$, weil $\mathcal{A}^*$ exakt ist.

Nach 3.2 (3) ergibt das eine lange exakte Sequenz für die $\mathrm{H}^p(X, \mathcal{G})$:

$$\begin{array}{cccccc}
0 \to & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{K}^{p-1}) \to & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{A}^{p-1}) \to & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{K}^p) \overset{\delta^0}{\to} & \mathrm{H}^1(X,\mathcal{K}^{p-1}) \to \mathrm{H}^1(X,\mathcal{A}^{p-1}) \\
& \| & \| & \| & \\
0 \to & \mathcal{K}^{p-1}(X) \to & \mathcal{A}^{p-1}(X) \to & \mathcal{K}^p(X) &
\end{array}$$

An den ersten beiden Stellen überträgt sich die Exaktheit obigen Sequenz auf die globalen Schnitte. Also ist die Sequenz $0 \to \mathcal{K}^p(X) \to \mathcal{A}^p(X) \to \mathcal{K}^{p+1}(X)$ exakt. Damit ist aber auch die Abbildung $\mathcal{K}^{p+1}(X) \to \mathcal{A}^{p+1}(X)$ injektiv, also ist auch

$$0 \to \mathcal{K}^p(X) \to \mathcal{A}^p(X) \to \mathcal{A}^{p+1}(X)$$

eine exakte Sequenz. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^p(\mathcal{A}^*(X)) &= \mathcal{K}^p(X)/\mathrm{Im}\,(\mathcal{A}^{p-1}(X) \to \mathcal{A}^p(X))\\ &= \mathcal{K}^p(X)/\mathrm{Im}\,(\mathcal{A}^{p-1}(X) \to \mathcal{K}^p(X))\\ &= \mathcal{K}^p(X)/\ker(\delta^0).\end{aligned}$$

Daher induziert δ^0 einen injektiven, natürlichen Homomorphismus

$$\gamma_1^p : \mathrm{H}^p(\mathcal{A}^*(X)) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{K}^{p-1}).$$

Für $\mathcal{A}^*$ azyklisch ist $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{A}^{p-1}) = 0$, also δ^0 surjektiv und damit γ_1^p ein Isomorphismus.

Wir betrachten jetzt $0 \to \mathcal{K}^{p-r} \to \mathcal{A}^{p-r} \to \mathcal{K}^{p-r+1} \to 0 \quad 2 \le r \le p$. Nach 3.2 (3) erhalten wir die folgende lange exakte Sequenz.

$$\ldots \to \mathrm{H}^{r-1}(X, \mathcal{A}^{p-r}) \to \mathrm{H}^{r-1}(X, \mathcal{K}^{p-r+1}) \overset{\delta^{p-r+1}}{\to} \mathrm{H}^r(X, \mathcal{K}^{p-r}) \to \mathrm{H}^r(X, \mathcal{A}^{p-r}) \to \ldots$$

Für azyklische $\mathcal{A}^*$ sind der erste und der letzte Term in der Gleichung 0, also ist δ^{p-r+1} in diesem Fall ein Isomorphismus.

Setze $\gamma_r^p := \delta^{p-r+1} : \mathrm{H}^{r-1}(X, \mathcal{K}^{p-r+1}) \to \mathrm{H}^r(X, \mathcal{K}^{p-r})$. Das ist für azyklische $\mathcal{A}^*$ ein Isomorphismus. Sei

$$\gamma^p := \gamma_p^p \circ \gamma_{p-1}^p \circ \gamma_{p-2}^p \circ \cdots \circ \gamma_2^p \circ \gamma_1^p$$
$$\gamma^p : \mathrm{H}^p(\mathcal{A}^*(X)) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{K}^{p-1}) \to \mathrm{H}^2(X, \mathcal{K}^{p-2}) \to \ldots \to \mathrm{H}^p(X, \mathcal{K}^0 = \mathcal{G})$$

Dann ist $\gamma^p ; \mathrm{H}^p(\mathcal{A}^*(X)) \to \mathrm{H}^p(X, \mathcal{G})$ ein natürlicher Homomorphismus und für azyklische $\mathcal{A}^*$ ein Isomorphismus. □

3.6. Korollar. *Sei* $(f, f^0, f^1, \ldots)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{A}^0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^1 & \longrightarrow & \mathcal{A}^2 & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f^0} & & \downarrow{\scriptstyle f^1} & & \downarrow{\scriptstyle f^2} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{B}^0 & \longrightarrow & \mathcal{B}^1 & \longrightarrow & \mathcal{B}^2 & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

ein Homomorphismus von Auflösungen von Garben. Dann induziert $(f, f^0, f^1, \ldots)$ *Homomorphismen* $\mathrm{H}^p(f_X^*) : \mathrm{H}^p(\mathcal{A}^*(X)) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{B}^*(X)) \quad \forall p \ge 0$. *Ist* f *ein Isomorphismus von Garben und sind* $\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*$ *azyklisch, so sind alle* $\mathrm{H}^p(f_X^*)$ *Isomorphismen.*

Beweis. Die f^i induzieren Homomorphismen f_X^i zwischen den globalen Schnitten. f_X^* ist also eine Komplexabbildung also erhalten wir $\mathrm{H}^p(f_X^*) : \mathrm{H}^p(\mathcal{A}^*(X)) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{B}^*(X))$.

Seien $\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*$ azyklisch, f ein Isomorphismus. Dann erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\cong (\gamma^p)^{-1}} & \mathrm{H}^p(\mathcal{A}^*(X)) \\ \cong \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^p(X,f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^p(f_X^*)} \\ \mathrm{H}^p(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow[\cong (\gamma^p)^{-1}]{} & \mathrm{H}^p(\mathcal{B}^*(X)) \end{array}$$

Die Zeilen entsprechen Isomorphismen, weil $\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*$ azyklisch sind, die erste Spalte, weil f selbst ein Isomorphismus ist. Das Diagramm ist kommutativ, weil die Funktionen γ^p natürlich sind. Damit ist $\mathrm{H}^p(f_X^*)$ ist ein Isomorphismus. □

Der Satz von de–Rham

3.7. Satz (de Rham). *Sei X eine C^∞–Mannigfaltigkeit. Dann gilt: $I : \mathrm{H}^p(\Omega^*(X)) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{S}^*_\infty(X,\mathbb{R}))$ ist ein Isomorphismus, wobei I der Homomorphismus ist, der durch die Integration von Differentialformen über glatte singuläre Ketten induziert wird (siehe 2.10).*

Auch der Homomorphismus $h : \mathrm{H}^p(\mathcal{S}^*(X,\mathbb{R})) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{S}^*_\infty(X,\mathbb{R}))$, der von der Einbettung erzeugt wird (siehe 2.8), ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir haben zwei Auflösungen von $\mathbb{R}$ (vergleiche 2.10).

$$\begin{array}{ccccccc} & & \Omega^0(\_) & \longrightarrow & \Omega^1(\_) & \longrightarrow & \dots \\ & \overset{i}{\nearrow} & \Big\downarrow I & & \Big\downarrow I & & \\ 0 \to \mathbb{R} & & & & & & \\ & \underset{i}{\searrow} & & & & & \\ & & \mathcal{S}^0_\infty(\_,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}^1_\infty(\_,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Die obere Auflösung ist fein (weil es Partitionen der 1 gibt). Die untere Auflösung ist weich, denn $\mathcal{S}^0_\infty(\_,\mathbb{R}) \cong \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ist weich und jedes $\mathcal{S}^p_\infty(\_,\mathbb{R})$ ist eine Garbe von Moduln über $\mathcal{S}^0_\infty(\_,\mathbb{R})$ und daher nach dem folgenden Lemma ebenfalls weich. Beide Auflösungen sind also azyklisch, und aus Korollar 3.6 folgt, daß I einen Isomorphismus induziert.

Analog erhält man, daß $\mathcal{S}^*(\_,\mathbb{R})$ weich ist und daher die Einbettung einen Isomorphismus induziert. □

3.8. Lemma. *Sei $\mathcal{M}$ eine Garbe von Moduln über einer weichen Garbe $\mathcal{R}$ von Ringen mit Eins. Dann ist auch $\mathcal{M}$ weich.*

Beweis. Sei $S \subset X$ abgeschlossen, $s \in \gamma(S, \bar{\mathcal{M}})$. Nach 2.12 läßt sich s auf eine offene Umgebung U von S stetig fortsetzen. Definiere $\rho \in \gamma(S \cup (X \setminus U), \bar{\mathcal{R}})$ durch $\rho|_S = 1$, $\rho|_{X\setminus U} = 0$. Dann ist ρ ist stetig. Da $\mathcal{R}$ weich ist, gibt es eine Fortsetzung auf ganz X. $\rho \cdot s$ ist dann die gesuchte Fortsetzung von s auf X. □

3.9. Nach Satz 3.7 wissen wir nun, daß die de–Rham Kohomologie einer glatten Mannigfaltigkeit M mit der Garbenkohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{R}$ übereinstimmt. Diese Kohomologie kann man auch mit Hilfe der Singulären Auflösung aus 2.7 berechnen. Um wirklich zu sehen, daß die de–Rham Kohomologie mit der singulären Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ übereinstimmt, müssen wir also noch zeigen, daß diese singuläre Auflösung tatsächlich die singuläre Kohomologie berechnet. Dazu müssen wir die Kohomologie des singulären Komplexes $S^*(X,\mathbb{R})$ mit der Kohomologie des Komplexes der globalen Schnitte $\mathcal{S}^*(X,\mathbb{R})$ vergleichen.

Betrachten wir noch einmal die Prägarbe $U \mapsto S^q(U,\mathbb{R})$. Nach Definition ist $S^q(U,\mathbb{R})$ die Gruppe aller Funktionen von der Menge der singulären q–Simplices in U nach $\mathbb{R}$. Ist $V \subset U$ ebenfalls offen, dann ist der Homomorphismus r^U_V einfach durch die Einschränkung auf singuläre Simplizes in V gegeben. Ist $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von U und $s \in S^q(U,\mathbb{R})$, dann bestimmen die Einschränkungen $r^U_{U_i}(s)$ nur die Werte von s auf singulären Simplizes die ganz in einem U_i liegen. Da es aber singuläre Simplizes in U gibt, die diese Eigenschaft nicht haben, ist das Garbenaxiom (G1) verletzt. Gibt man andererseits (in konsistenter Weise) Werte auf singulären Simplizes vor, die ganz in einem U_i liegen, dann kann man natürlich ein $s \in S^q(U,\mathbb{R})$ finden, das diese Werte hat, also ist das Garbenaxiom (G2) erfüllt. Daraus schließt man aber leicht, daß für jede offene Teilmenge $U \subset M$ die Abbildung $S^q(U,\mathbb{R}) \to \mathcal{S}^q(U,\mathbb{R})$ surjektiv ist. Insbesondere gilt das für $U = M$.

Sei nun $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Dann definiert man $S^{\mathcal{U}}_q(M)$ als die freie abel'sche Gruppe, die von allen singulären q–Simplizes in M erzeugt wird, deren Bild ganz in einem Element der Überdeckung $\mathcal{U}$ enthalten ist. Dann ist $S_*^{\mathcal{U}}(M)$ ein Teilkomplex von $S_*(M)$, und in der algebraischen Topologie beweist man, daß die Inklusion dieses Teilkomplexes einen Isomorphismus in der Homologie induziert.

Nun definieren wir $S^q_{\mathcal{U}}(M,\mathbb{R})$ als die Menge aller Homomorphismen $S_q^{\mathcal{U}}(M) \to \mathbb{R}$. Wir erhalten damit eine Projektion $\pi_{\mathcal{U}} : S^*(M,\mathbb{R}) \to S^*_{\mathcal{U}}(M,\mathbb{R})$ und diese Projektion induziert Isomorphismen in allen Kohomologiegruppen.

Satz. *Die Surjektion $p : S^*(M,\mathbb{R}) \to \mathcal{S}^*(M,\mathbb{R})$ induziert einen Isomorphismus in der Kohomologie.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{S}^k(M,\mathbb{R})$ mit $\delta(\varphi) = 0$. Dann gibt es ein Element $\psi \in S^k(M,\mathbb{R})$ mit $p(\psi) = \varphi$, aber im Allgemeinen ist $\delta(\psi) \neq 0$. Es gilt aber $p(\delta(\psi)) = \delta(\varphi) = 0$. Das bedeutet aber, daß für jedes $x \in M$ der Keim von $\delta(\psi)$ bei x Null ist, also gibt es eine Umgebung U_x von x, sodaß $r^M_{U_x}(\delta(\psi)) = 0$ gilt. Diese Umgebungen bilden eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von M und nach Konstruktion ist $\pi_{\mathcal{U}}(\delta(\psi)) = \delta(\pi_{\mathcal{U}}(\psi)) = 0$. Damit gibt es die Klasse $[\pi_{\mathcal{U}}(\psi)] \in H^k(S^*_{\mathcal{U}}(M,\mathbb{R}))$. Da $\pi_{\mathcal{U}}$ einen Isomorphismus in der Kohomologie induziert, gibt es ein $\psi' \in S^k(M,\mathbb{R})$ mit $\delta(\psi') = 0$ sodaß $[\pi_{\mathcal{U}}(\psi')] = [\pi_{\mathcal{U}}(\psi)]$. Daher gibt es ein Element $\eta \in S^{k-1}_{\mathcal{U}}(M,\mathbb{R})$ mit $\pi_{\mathcal{U}}(\psi') = \pi_{\mathcal{U}}(\psi) + \delta(\eta)$. Wählt man nun $\eta' \in S^{k-1}(M,\mathbb{R})$ mit $\pi_{\mathcal{U}}(\eta') = \eta$, dann ist $\pi_{\mathcal{U}}(\psi + \delta(\eta')) = \pi_{\mathcal{U}}(\psi')$. Da aber $\mathcal{S}^k(M,\mathbb{R})$ eine Garbe ist, impliziert das $p(\psi') = p(\psi + \delta(\eta')) = \varphi + \delta(p(\eta'))$, also ist $p_*([\psi']) = [\varphi]$ und die induzierte Abbildung in der Kohomologie ist surjektiv.

Für die Injektivität sei $\psi \in S^k(M,\mathbb{R})$ so, daß $\delta(\psi) = 0$ und $p(\psi) = \delta(\varphi)$ für ein $\varphi \in \mathcal{S}^{k-1}(M,\mathbb{R})$ gilt. Dann finden wir $\varphi' \in S^{k-1}(M,\mathbb{R})$ mit $p(\varphi') = \varphi$, also ist $p(\psi+\delta(\varphi')) = 0$. Wie im vorigen Schritt finden wir eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von M, sodaß $\pi_{\mathcal{U}}(\psi+\delta(\varphi')) = 0$ gilt. Damit ist aber $\pi_{\mathcal{U}}([\psi]) = 0$, also $[\psi] = 0$ weil $\pi_{\mathcal{U}}$ eine Injektion in der Kohomologie induziert. □

3.10. Höhere direkte Bilder. Zum Abschluß dieses Kapitels erwähnen wir noch eine einfache Verallgemeinerung der Garbenkohomologie. Sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann definiert man eine Garbe $f_*\mathcal{G}$ auf Y durch $f_*\mathcal{G}(U) := \mathcal{G}(f^{-1}(U))$. Ist $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben, dann erhält man einen induzierten Homomorphismus $f_*\varphi : f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$ durch $(f_*\varphi)_U = \varphi_{f^{-1}(U)}$. Sei nun $\mathcal{G}$ eine Garbe und $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ die kanonische feine Auflösung. Dann ist $0 \to f_*\mathcal{C}^0(\mathcal{G})(Y) \to f_*\mathcal{C}^1(\mathcal{G})(Y) \to \dots$ ein Komplex. Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes heißen die *höheren direkten Bilder* unter f von $\mathcal{G}$. Die Garbenkohomologie ist genau der Spezialfall wo $f : X \to pt$ die eindeutige stetige Funktion von X in den einpunktigen Raum ist. Die Theorie für diese höheren direkten Bilder ist ganz analog zur Garbenkohomologie.

KAPITEL 4

Klassische Kohomologietheorien

In diesem Kapitel behandeln wir zwei klassische Kohomologietheorien, die Alexander–Spanier Kohomologie und die Čech–Kohomologie.

4.1. Alexander-Spanier-Garben-Kohomologie. Sei X parakompakt, T_2, R ein Ring mit 1 Für $U \subseteq X$ offen, und $p \geq 0$ definieren wir $A^p(U,R) := \{f : U^{p+1} \to R\}$. Dann ist jedes $A^p(U,R)$ ein R–Modul.

Wir definieren $d : A^p(U,R) \to A^{p+1}(U,R)$ durch

$$df(x_0,\dots,x_{p+1}) := \sum(-1)^i f(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{p+1}),$$

wobei der Hut wie üblich bedeutet, daß die entsprechende Eintragung ausgelassen wird. Man verifiziert leicht durch eine direkte Rechnung, daß dann $d^2 = 0$ gilt, also ist $A^*(U,R) = 0 \to A^0(U,R) \xrightarrow{d} A^1(U,R) \xrightarrow{d} \dots$ ein Kokettenkomplex.

Für eine offene Teilmenge $V \subseteq U$ ist $V^p \subseteq U^p$ also erhält man Einschränkungshomomorphismen $r^U_V : A^p(U,R) \to A^p(V,R)$. Damit wird $A^p(\_,R)$ zu einer Prägarbe von R–Modulen auf X. Diese erfüllt (G2) aber nicht (G1) für $p \geq 1$. Sei $\mathcal{A}^p(\_,R)$ die von $A^p(\_,R)$ erzeugte Garbe.

Sei $R \to \mathcal{A}^0(\_,R)$ die Einbettung der konstanten Funktionen. Dann haben wir eine Sequenz von Garben $0 \to R \to \mathcal{A}^0(\_,R) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(\_,R) \xrightarrow{d} \dots$.

Proposition. *Das ist eine weiche Auflösung der konstanten Garbe R.*

Beweis. Aus der Definition durch Mengenfunktionen folgt sofort, daß die Garben $\mathcal{A}^p$weich sind. Die Sequenz $0 \to R \to A^0(\_,R) \xrightarrow{d} A^1(\_,R) \xrightarrow{d} \dots$ von Prägarben ist exakt: $df(x_0,x_1) = f(x_0) - f(x_1) = 0$ ist äquivalent zu f konstant. Für $p \geq 1$ sei $f \in A^p(U,R)$ mit $df = 0$. Sei $x \in U$ ein fixer Punkt und definiere $g \in A^{p-1}(U,R)$ durch $g(x_0,\dots,x_{p-1}) = f(x,x_0,\dots,x_{p-1})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} dg(x_0,\dots,x_p) &= \sum_{i=0}^{p} f(x,x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_p) = \\ &= f(x_0,\dots,x_p) - df(x,x_0,\dots,x_p), \end{aligned}$$

also $dg = f$. Damit ist auch die Sequenz der erzeugten Garben exakt. □

Die *Alexander-Spanier-Garbenkohomologie* $H^q_{A-S-G}(X,R) := H^q(\mathcal{A}^*(X,R))$ stimmt daher mit der Garbenkohomologie der konstanten Garbe R überein.

4.2. Die klassische Alexander-Spanier-Kohomologie. Seien X, R und $A^p(\_,R)$ wie oben. Definiere $A^p_0(X,R)$ als die Menge aller $f \in A^p(X,R)$, die in jedem Punkt $x \in X$ Keim 0 haben. Dann ist $A^p_0(X,R)$ genau der Kern von

$$\tau_X : A^p(X,R) \to \Gamma(X; \overline{A^p(\_,R)}).$$

Da $A^p(\_,R)$ das Garbenaxiom (G2) erfüllt, ist $A^p_0(X,R)$ ein Maß dafür, wie sehr $A^p(\_,R)$ von einer Garbe abweicht. $A^p_0(X,R)$ ist ein Teilmodul von $A^p(X,R)$ und invariant unter

d. Daher ist

$$0 \to A^0(X,R)/A^0_0(X,R) \xrightarrow{d} A^1(X,R)/A^1_0(X,R) \xrightarrow{d} \dots$$

ein Kokettenkomplex. Seine Kohomologie ist die *Alexander-Spanier-Kohomologie* von X mit Werten in R, $H^q_{AS}(X,R) := H^q(A^*(X,R)/A^*_0(X,R))$.

Satz. *$H^q_{A-S}(X,R) \cong H^q(X,R)$.*

Beweis. Wie wir bereits bemerkt haben ist $A^p_0(X,R)$ der Kern der Komplexabbildung $\tau_X : A^*(X,R) \to \mathcal{A}^*(X,R)$. Da aber $A^p(\_,R)$ (G2) erfüllt ist τ_X surjektiv (siehe den zweiten Teiles des Beweises von 1.12), also induziert τ_X einen Isomorphismus $A^*(X,R)/A^*_0(X,R) \to \mathcal{A}^*(X,R)$ von Komplexen. □

Čech–Kohomologie

4.3. Sei X ein parakompakter T_2 Raum, R kommutativer Ring mit 1 und $\mathcal{G}$ eine Prägarbe von R-Modulen über X.

Sei $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Ein *q–Simplex* von $\mathcal{U}$ ist ein (q+1)-Tupel $(U_0,\dots,U_q)$ von Mengen $U_i \in \mathcal{U}$, sodaß $U_0 \cap \dots \cap U_q \neq \emptyset$. Der *Träger* dieses Simplex ist die offenen Teilmenge $|(U_0,\dots,U_q)| := U_0 \cap \dots \cap U_q$ von X. Die i-te Seite σ^i des Simplex $\sigma = (U_0,\dots,U_q)$ ist der $(q-1)$-Simplex $\sigma^i = (U_0,\dots,\widehat{U}_i,\dots,U_q)$.

Sei $C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ der R-Modul aller Funktionen f, die jedem q-Simplex σ von $\mathcal{U}$ ein Element $f(\sigma) \in \mathcal{G}(|\sigma|)$ zuordnen. So ein f heißt eine *q–Kokette*.

Dann definiere $d : C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{G})$ durch

$$df(\sigma) := \Sigma_{i=0}^{q+1}(-1)^i r^{|\sigma^i|}_{|\sigma|} f(\sigma^i) = \Sigma(-1)^i f(\sigma^i)|_{|\sigma|}.$$

(Beachte, daß $|\sigma| \subseteq |\sigma^i|$ für alle i gilt.) Eine direkte Rechnung zeigt, daß $d^2 = 0$ gilt, also ist $C^*(\mathcal{U},\mathcal{G})$ ein Kokettenkomplex. Seine Kohomologiegruppen $\check{H}^*(\mathcal{U},\mathcal{G}) := H^*(C^*(\mathcal{U},\mathcal{G}))$ heißen die Čech–Kohomologiegruppen von $(X,\mathcal{U})$ mit Werten in $\mathcal{G}$.

Sei $f \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{G})$. Dann ist $f(U) \in \mathcal{G}(U) \forall U \in \mathcal{U}$. Dann ist

$$d_f(U_0,U_1) = r^{U_0}_{U_0\hat{U}_1} f(U_0) - r^{U_1}_{U_0\hat{U}_1} f(U_1)$$

für alle (U_0,U_1) mit $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$. Damit ist $df = 0$ äquivalent zu $f(U_0)|_{U_0\cap U_1} = f(U_1)|_{U_0\cap U_1}$. Falls $\mathcal{G}$ eine Garbe ist, dann folgt aus dem Garbenaxiom (G2), daß f einen globalen Schnitt von $\mathcal{G}$ liefert, und nach (G1) ist dieser Schnitt eindeutig bestimmt. Damit ist für eine Garbe $\mathcal{G}$ und jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ die 0–te Čech–Kohomologie durch $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}(X)$ gegeben.

4.4. Sei $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung der Überdeckung $\mathcal{U}$. Dann gibt es eine Abbildung $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ sodaß $V \subseteq \mu(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$ gilt. So eine Abbildung heißt eine *Verfeinerungsabbildung*. Ist $\sigma_q = (V_0,\dots,V_q)$ ein q-Simplex in $\mathcal{V}$ dann ist $\mu(\sigma_q) := (\mu(V_0),\dots,\mu(V_q))$ der Bildsimplex. Dann gilt $|\sigma_q| \subseteq |\mu(\sigma_q)|$, also induziert μ induziert einen Homomorphismus $\mu^* : C^*(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^*(\mathcal{V},\mathcal{G})$ durch $\mu^*(f)(\sigma_q) = r^{|\mu(\sigma_q)|}_{|\sigma_q|} f(\mu(\sigma_q))$. Nach der Definition von d kommutiert μ mit d, also erhalten wir einen Homomorphismus $\mu^\# : \check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$.

Sei ν eine weitere Verfeinerungsabbildung, das heißt $V \in \nu(V) \forall V \in \mathcal{V}$.

Lemma. *$\mu^\# = \nu^\# : \check{H}(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \check{H}(\mathcal{V},\mathcal{G})$.*

Beweis. Wir konstruieren einen Homotopieoperator: Sei $\sigma = (V_0, \dots, V_{q-1})$ ein (q-1)-Simplex von $\mathcal{V}$. Setze $\widetilde{\sigma_j} := (\mu(V_0), \dots, \mu(V_j), \nu(V_j), \dots, \nu(V_{q-1}))$. Dies ist ein q-Simplex von $\mathcal{U}$. Definiere $h_q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ durch

$$h_q(f)(\sigma) = \Sigma_{j=0}^{q-1}(-1)^j r_{|\sigma|}^{|\tilde{\sigma}_j|} f(\tilde{\sigma}_j).$$

Sei $(\widetilde{\sigma_j})^i$ die i–te Seite von $\widetilde{\sigma_j}$. Aus den Definitionen folgt sofort, daß $(\widetilde{\sigma_j})^i = \widetilde{(\sigma^i)}_{j-1}$ für $i < j$ und $(\widetilde{\sigma_j})^i = \widetilde{(\sigma^{i-1})}_j$ für $i > j+1$ gilt. Für $i = j$ und $i = j+1$ erhält man $(\mu(V_0), \dots, \mu(V_{j-1}), \nu(V_j), \dots \nu(V_{q-1}))$ bzw. $(\mu(V_0), \dots, \mu(V_j), \nu(V_{j+1}), \dots \nu(V_{q-1}))$. Sei nun $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ und $\sigma = (V_0, \dots, V_q)$ ein q–Simplex von $\mathcal{V}$. Dann gilt (wobei wir die Einschränkungen auf $|\sigma|$ unterdrücken)

$$\begin{aligned}
h_{q+1}(df)(\sigma) &= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j df(\widetilde{\sigma_j}) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0}^{q}(-1)^{i+j} f((\widetilde{\sigma_j})^i) = \\
&= \sum_{j=0}^{q}\sum_{i<j}(-1)^{i+j} f(\widetilde{(\sigma^i)}_{j-1}) + \sum_{j=0}^{q}\sum_{i>j+1}(-1)^{i+j} f(\widetilde{(\sigma^{i-1})}_j) + \\
&+ \sum_{j=0}^{q} f(\mu(V_0), \dots, \mu(V_{j-1}), \nu(V_j), \dots \nu(V_{q-1})) + \\
&- \sum_{j=0}^{q} f(\mu(V_0), \dots, \mu(V_j), \nu(V_{j+1}), \dots \nu(V_{q-1})).
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme bilden eine Teleskopsumme von der nur die Randterme überleben, und liefern damit $\mu^*(f)(\sigma) - \nu^*(f)(\sigma)$. Ersetzt man in der ersten Summe j durch $j-1$ und in der zweiten i durch $i-1$, dann kann man die beiden Summen zusammenfassen. Vertauscht man im Resultat noch die Summationsreihenfolge, dann erhält man

$$-\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{i+j} f(\widetilde{(\sigma^i)}_j) = -\sum_{i=0}^{q}(-1)^i h_q(f)(\sigma^i) = -d(h_q(f))(\sigma).$$

Damit gilt $h_{q+1} \circ d + d \circ h_q = \nu^* - \mu^*$, also ist $\mu^\# = \nu^\#$. □

4.5. Sind $\mathcal{W} < \mathcal{V} < \mathcal{U}$ Verfeinerungen, dann kann man als Verfeinerungsabbildung $\mathcal{W} \to \mathcal{U}$ die Komposition einer Verfeinerungsabbildung $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ mit einer Verfeinerungsabbildung $\mathcal{W} \to \mathcal{V}$ wählen, also kommutiert nach Lemma 4.4 das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\check{H}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \check{H}(\mathcal{W}, \mathcal{G}) \\
& \check{H}(\mathcal{V}, \mathcal{G}). \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Da die Überdeckungen von X unter Verfeinerungen eine gerichtete Menge bilden, können wir den direkten Limes betrachten: $\check{H}^q(X, \mathcal{G}) := \lim \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Dieser heißt der q–te *Čech–Kohomologie–Modul* der Prägarbe $\mathcal{G}$ auf X. Die klassische Čech–Kohomologie mit Werten in einem R-Modul M ist nach Definition gerade $\check{H}^q(X, M)$ wo M die konstante Garbe auf X ist.

4.6. Lemma. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Prägarben auf X, sodaß für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Sequenz $0 \to \mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U) \to \mathcal{C}(U) \to 0$ exakt ist. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz in der Čech–Kohomologie der Form*

$$\dots \to \check{H}^k(X, \mathcal{A}) \to \check{H}^k(X, \mathcal{B}) \to \check{H}^k(X, \mathcal{C}) \to \check{H}^{k+1}(X, \mathcal{A}) \to \dots$$

Beweis. $0 \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{A}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{B}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{C}) \to 0$ ist offensichtlich exakt. ($C^q(\mathcal{U},\mathcal{A}) = \{f : (i_0,\dots,i_q) \to f_{i_0,\dots,i_q} \in \mathcal{A}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q})\}$). Damit ist aber $0 \to C^*(\mathcal{U},\mathcal{A}) \to C^*(\mathcal{U},\mathcal{B}) \to C^*(\mathcal{U},\mathcal{C}) \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, also folgt die Existenz einer langen exakte Sequenz für die Gruppen $\check{H}(\mathcal{U},\_)$ für jede Überdeckung $\mathcal{U}$ aus dem Standardresultat der homologischen Algebra.

Wegen der Natürlichkeit der langen exakten Kohomologiesequenz erhalten wir damit ein großes Kommutatives Diagramm von exakten Sequenzen. Geht man in jeder Stufe dieser Sequenzen zum direkten Limes über, so erhält man die gesuchte Sequenz der Čech–Kohomologiegruppen von X. Das dieser direkte Limes ebenfalls exakt ist, kann man leicht direkt überlegen (Diagrammjagd). □

4.7. Lemma. *Sei $\mathcal{G}$ eine Prägarbe auf X mit folgender Eigenschaft: Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$, jedes Element $s \in \mathcal{G}(U)$ und jeden Punkt $x \in U$ gibt es eine offene Umgebung W von x, sodaß $r^U_W(s) = 0$ ist. Dann ist $\check{H}(X,\mathcal{G}) = 0$*

Beweis. Sei $f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$, oBdA $\mathcal{U}$ lokal endlich, und $x \in X$ fix. Dann liegt x nur in endlich vielen q-Simplices $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ von $\mathcal{U}$. Nach Voraussetzung gibt es daher eine offene Umgebung W_x von x, sodaß $f(\sigma_i)|_{W_x} = 0$ für alle $i = 1,\dots,n$ gilt. Setze nun $\mathcal{V} = \{U \cap W_x : U \in \mathcal{U}, x \in X\}$. Dann ist $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ und nach Konstruktion bildet der Homomorphismus $C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$ das Element f auf 0 ab. Insbesondere ist damit die Klasse von f in $\check{H}(X,\mathcal{G})$ trivial. □

4.8. Satz. *Sei $\mathcal{G}$ eine Prägarbe, $\tilde{\mathcal{G}}$ die erzeugte Garbe. Dann induziert der kanonische Morphismus $\tau : \mathcal{G} \to \tilde{\mathcal{G}}$ (siehe 1.11) Isomorphismen $\check{H}^q(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \check{H}^q(X,\tilde{\mathcal{G}})$.*

Beweis. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ sind die Sequenzen

$$0 \to \operatorname{Ker}(\tau_U) \to \mathcal{G}(U) \to \operatorname{Im}(\tau_U) \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Im}(\tau_U) \to \tilde{\mathcal{G}}(U) \to \tilde{\mathcal{G}}(U)/\operatorname{Im}(\tau_U) \to 0$$

nach Definition exakt.

Für $x \in U$ und $s \in \operatorname{Ker}(\tau_U)$ ist $s_x = 0$, also gibt es eine offene Umgebung W von x mit $r^U_W(s) = 0$. Ist andererseits $s \in \tilde{\mathcal{G}}(U)$, dann ist $s(x)$ ein Keim bei x, also gibt es eine offene Umgebung W von x und ein Element $s' \in \mathcal{G}(W)$ mit $r^U_W(s) = \tau(s')$. Das bedeutet aber, daß die Klasse $[s] \in \tilde{\mathcal{G}}(U)/\operatorname{Im}(\tau_U)$ die Gleichung $r^U_W([s]) = 0$ erfüllt. Damit erfüllen die Prägarben $U \mapsto \operatorname{Ker}(\tau_U)$ und $U \mapsto \tilde{\mathcal{G}}(U)/\operatorname{Im}(\tau_U)$ die Voraussetzungen von Lemma 4.7. Aus den langen exakten Kohomologiesequenzen für zu den beiden kurzen exakten Sequenzen von oben folgt dann direkt, daß τ eine Isomorphismus $\check{H}^q(X,\mathcal{G}) \cong \check{H}^q(X,\operatorname{Im}(\tau))$ und die Inklusion einen Isomorphismus $\check{H}^q(X,\operatorname{Im}(\tau)) \cong \check{H}^q(X,\tilde{\mathcal{G}})$ induziert. □

4.9. Satz. *Sei X ein parakompakter T_2–Raum, $\mathcal{G}$ eine Garbe abel'scher Gruppen auf X dann gilt $\check{H}^q(X,\mathcal{G}) = H^q(X,\mathcal{G})$. Also stimmt die Čech–Kohomologie mit der Garbenkohomologie überein.*

Beweis. Nach Satz 3.3 genügt zu zeigen, daß $\check{H}^q$ die Eigenschaften (1)–(3) aus 3.2 erfüllt.
(1): $\check{H}^0(X,\mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$ haben wir bereits in 4.3 gezeigt. Als nächstes müssen wir zeigen, daß für eine feine Garbe $\mathcal{G}$ $\check{H}^q(X,\mathcal{G}) = 0$ für $q > 0$ gilt: Sei $\mathcal{G}$ fein, $q > 0$. Es genügt zu zeigen daß $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) = 0$ für jede lokal endliche Überdeckung $\mathcal{U}$ gilt, da jede Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt. Da $\mathcal{G}$ fein ist, gibt es eine Partition der Eins $\{\eta_\alpha\}$, die der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnet ist, siehe 2.16.

Sei $f \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$ und $\sigma = (U_0,\ldots,U_{p-1})$ ein (p-1)-Simplex von $\mathcal{U}$. Dann hat für jedes $U_\alpha \in \mathcal{U}$ der Schnitt $\eta_\alpha(f(U_\alpha,U_0,\ldots,U_{p-1}))$ Träger in $U_\alpha \cap U_0 \cap \ldots \cap U_{p-1}$. Daher kann man $\eta_\alpha(f(U_\alpha,U_0,\ldots,U_{p-1}))$ zu einem stetigen Schnitt von $\mathcal{G}$ über $U_0 \cap \ldots \cap U_{p-1}$ fortsetzen, indem man es außerhalb von $U_\alpha \cap U_0 \cap \ldots \cap U_{p-1}$ Null setzt. Nun definiere für $p \geq 1$ einen Homomorphismus $h_p : C^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{G})$ durch $h_p(f)(\sigma) = \sum_\alpha \eta_\alpha(f(U_\alpha,U_0,\ldots,U_{p-1}))$. Dann rechnet man leicht direkt nach, daß $d \circ h_p + h_p \circ d = \mathrm{id}$ für alle $p \geq 1$ gilt. Daher ist die Identität kettenhomotop zu 0, also $\mathrm{id}^\# = \mathrm{id} = 0$, also gilt $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) = 0$.

(2): Ein Garbenhomomorphismus $h : \mathcal{G} \to \mathcal{B}$ liefert Homomorphismen $h_* : C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{B})$ für jede Überdeckung $\mathcal{U}$ durch $(h_*f)(\sigma) = h(f(\sigma))$, die mit d vertauschen. Daher erhält man induzierte Homomorphismen $h_\# : \check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{B})$ für jede Überdeckung $\mathcal{U}$, die mit Verfeinerungen vertauschen. Das wiederum liefert Homomorphismen $h_\# : \check{H}^q(X,\mathcal{G}) \to \check{H}^q(X,\mathcal{B})$ nach Definition des direkten Limes. Die funktorielle Eigenschaft ist klar.

(3): Ist $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben, dann ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Sequenz $0 \to \mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U) \to \mathrm{Im}(g_U) \to 0$ exakt nach Lemma 2.11. Nach Lemma 4.6 erhalten wir eine lange exakte Sequenz in der Kohomologie für $\check{H}(X,\mathcal{A})$, $\check{H}(X,\mathcal{B})$ und $\check{H}(X,\mathrm{Im}(g))$. Aber die Bedingung, daß $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben ist bedeutet genau, daß $\mathcal{C}$ die von $U \mapsto \mathrm{Im}(g_U)$ erzeugte Garbe ist. Daher folgt das Resultat aus Satz 4.8. □

KAPITEL 5

Vektorbündel und Garben

5.1. Im folgenden sei V ein endlichdimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum. Sei $p : E \to X$ stetig. (U, ψ) heißt *Vektorbündelkarte* für $p : E \to X$, falls $U \subseteq X$ offen und $\psi : p^{-1}(U) \to U \times V$ ein Homöomorphismus ist, sodaß $pr_1 \circ \psi = p$ gilt. Zwei Vektorbündelkarten (U_1, ψ_1) und (U_2, ψ_2) heißen *kompatibel* falls eine Funktion $\psi_{12} : U_{12} := U_1 \cap U_2 \to GL(V)$ existiert sodaß

$$\psi_1|_{p^{-1}(U_{12})} \circ \big(\psi_2|_{p^{-1}(U_{12})}\big)^{-1}(x, v) = (x, \psi_{12}(x) \cdot v) \qquad \forall x \in U_{12} \quad \forall v \in V$$

So ein ψ_{12} ist, falls es existiert, eindeutig bestimmt und stetig und heißt *Transitionsfunktion* zum Kartenwechsel von (U_2, ψ_2) nach (U_1, ψ_1). Ein *Vektorbündelatlas* ist ein Menge von Vektorbündelkarten $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ die paarweise kompatibel sind und so daß die U_α ganz X überdecken, also $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$ gilt. Die Transitionsfunktionen $\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \to GL(V)$ heißen die *Transitionsfunktionen des Vektorbündelatlas* $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$. Sie erfüllen offensichtlich die folgende *Kozykelbedingung*:

$$\psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x) \in GL(V) \qquad \forall x \in U_{\alpha\beta\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$\psi_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{id} \quad \forall x \in U_\alpha \qquad \text{und} \qquad \psi_{\beta\alpha}(x) = \big(\psi_{\alpha\beta}(x)\big)^{-1} \quad \forall x \in U_{\alpha\beta}$$

Zwei Vektorbündelatlanten heißen *äquivalent* falls ihre Vereinigung wieder ein Vektorbündelatlas ist, das heißt die Karten des einen Atlas sind mit den Karten des anderen kompatibel.

Definition. Ein Vektorbündel mit Faser V ist eine stetige Funktion $p : E \to X$ zusammen mit einer Äquivalenzklasse von Vektorbündelatlanten mit Faser V. Ein Vektorbündel kann also durch einen Vektorbündelatlas angegeben werden.

Ist $p : E \to X$ ein Vektorbündel dann ist offenbar p surjektiv und offen. Weiters tragen die Fasern $E_x := p^{-1}(x)$ eine kanonische Vektorraumstruktur, denn die Kartenwechselabbildungen sind faserweise linear. Insbesondere hat jedes Vektorbündel einen kanonischen Nullschnitt.

5.2. Lemma. *Sei X topologischer Raum $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von X und $\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(V)$ stetig sodaß die Kozykelbedingung erfüllt ist. Dann existiert ein Vektorbündel $p : E \to X$ und ein Vektorbündelatlas $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ von $p : E \to X$ mit Transitionsfunktionen $\psi_{\alpha\beta}$.*

Beweis. Sei $E := \big(\bigcup_{\alpha \in A} \{\alpha\} \times U_\alpha \times V\big)\big/\sim$ wobei

$$(\alpha, x, v) \sim (\beta, y, w) \quad \Leftrightarrow \quad x = y \text{ und } \psi_{\alpha\beta}(x) \cdot w = v$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation, da die $\psi_{\alpha\beta}$ die Kozykelbedingung erfüllen. Außerdem haben wir eine stetige Abbildung $p : E \to X$, gegeben durch $p\big([(\alpha, x, v)]\big) := x$.

Für $\alpha \in A$ definieren wir eine Vektorbündelkarte $\psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times V$ durch $\psi_\alpha\big([(\gamma, x, v)]\big) := (x, \psi_{\alpha\gamma}(x) \cdot v)$. Dies ist ein Homöomorphismus, da man ein stetiges

Inverses angeben kann, nämlich $(x,v) \mapsto [(\alpha, x, v)]$. Der Kartenwechsel ist dann

$$\psi_\alpha|_{p^{-1}(U_{\alpha\beta})} \circ \big(\psi_\beta|_{p^{-1}(U_{\alpha\beta})}\big)^{-1}(x,v) = \psi_\alpha\big([(\beta, x, v)]\big) = (x, \psi_{\alpha\beta}(x) \cdot v),$$

also sind die Transitionsfunktionen gerade $\psi_{\alpha\beta}$. □

5.3. Beispiele. (1) Sei M eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit und $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein C^∞-Atlas für M. Dann ist $Tu_\alpha : TU_\alpha \to T(u_\alpha(U_\alpha)) \cong u_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $(\varphi_\alpha^{-1} \times \mathrm{id}) \circ T\varphi_\alpha : TU_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ eine Vektorbündelkarte für das Tangentialbündel $p : TM \to M$. Die Transitionsfunktionen sind dann $x \mapsto D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(x))$, wie eine leichte Rechnung zeigt.
(2) Betrachte $\mathbb{R}P^n$ den Raum aller eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ und

$$p = pr_1 : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \supseteq \{(L, v) : v \in L\} =: \lambda^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}P^n$$

Für $0 \le i \le n$ sei $U_i := \{[x_0 : \cdots : x_n] : x_i \ne 0\} \subseteq \mathbb{R}P^n$. Dann überdecken klarerweise die U_i ganz $\mathbb{R}P^n$. Man definiert

$$\psi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R} \qquad \big([x_0 : \cdots : x_n], (v_0, \ldots, v_n)\big) \mapsto \big([x_0 : \cdots : x_n], v_i\big)$$

und überlegt sich daß

$$\big([x_0 : \cdots : x_n], t\big) \mapsto \big([x_0 : \cdots : x_n], t(\tfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_i})\big)$$

ein wohldefiniertes stetiges Inverses ist. Also sind die ψ_i Vektorbündelkarten. Die Kartenwechsel sind dann

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1}\big([x_0 : \cdots : x_n], t\big) = \psi_i\big([x_0 : \cdots : x_n], t(\tfrac{x_0}{x_j}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_j})\big) = \big([x_0 : \cdots : x_n], t\tfrac{x_i}{x_j}\big)$$

also sind die Vektorbündelkarten kompatibel und die Transitionsfunktionen gegeben durch $\psi_{ij}([x_0 : \cdots : x_n]) = \frac{x_i}{x_j} \in \mathbb{R} \setminus 0 \cong GL(\mathbb{R})$. Dieses Vektorbündel heißt das *kanonische Linienbündel* über $\mathbb{R}P^n$. Für $n = \infty$ liefert diese Konstruktion das sogenannte *universelle Linienbündel* $\lambda^\infty_{\mathbb{R}}$ über $\mathbb{R}P^\infty$.

Genauso konstruiert man ein *kanonisches komplexes Linienbündel* $\lambda^n_{\mathbb{C}}$ über $\mathbb{C}P^n$, sowie ein *universelles komplexes Linienbündel* $\lambda^\infty_{\mathbb{C}}$ über $\mathbb{C}P^\infty$.

5.4. Pullback. Sei $p : E \to X$ ein Vektorbündel und $f : Y \to X$ stetig. Sei

$$f^*E := \{(y, e) : f(y) = p(e)\} \subseteq Y \times E$$

und sei $f^*p : f^*E \to Y$ die Projektion auf die erste Koordinate. Ist $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Vektorbündelatlas von $p : E \to X$. Dann sind

$$\big(f^{-1}(U_\alpha), (y, e) \mapsto (y, pr_2(\psi_\alpha(e))\big)$$

Vektorbündelkarten von $f^*p : f^*E \to Y$ mit Inversen $(y, v) \mapsto (y, \psi_\alpha^{-1}(f(y), v))$. Die Kartenwechsel sind

$$(y, v) \mapsto \big(y, pr_2(\psi_\alpha(\psi_\beta^{-1}(f(y), v)))\big) = (y, \psi_{\alpha\beta}(f(y)) \cdot v)$$

Also ist $f^*p : f^*E \to Y$ ein Vektorbündel mit Transitionsfunktionen $\psi_{\alpha\beta} \circ f$.

Der Pullback f^*E hat folgende universelle Eigenschaft: Ist $q : F \to Y$ ein weiteres Vektorbündel und $g : F \to E$ eine faserweise lineare Abbildung, so existiert ein eindeutig bestimmter Vektorbündelhomomorphismus $h : F \to f^*E$ mit $(p^*f) \circ h = f$, gegeben durch $h(v) := (q(v), g(v))$.

Weiters gilt $(f \circ g)^*E = g^*f^*E$ und $\mathrm{id}^*E = E$. Außerdem kann man zeigen daß $f^*E \cong g^*F$, falls f und g homotop sind. Die Umkehrung stimmt im Allgemeinen klarerweise nicht.

5.5. Definition. Seien $p : E \to X$ und $q : F \to X$ zwei Vektorbündel über X. Eine stetige Abbildung $f : E \to F$ heißt *Vektorbündelhomomorphismus* falls $q \circ f = p$ und f faserweise linear ist. Man erhält die Kategorie der Vektorbündel und Vektorbündelhomomorphismen über X.

Ist $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Vektorbündelatlas von $p : E \to X$ mit Faser V weiters $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Vektorbündelatlas von $q : F \to X$ mit Faser W und $f : E \to F$ ein Vektorbündelhomomorphismus dann kann man $f_\alpha : U_\alpha \to L(V, W)$ durch

$$(\varphi_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1})(x, v) =: (x, f_\alpha(x) \cdot v)$$

definieren. Die f_α sind dann stetig und erfüllen folgende Kompatibilitätsbedingung:

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) f_\beta(x) = f_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x) \in L(V, W)$$

Man nennt f_α die *lokalen Daten* von f.

5.6. Lemma. *Seien $p : E \to X$ und $q : F \to X$ Vektorbündel mit Fasern V und W und Vektorbündelatlanten $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$. Sind weiters $\tau_\alpha : U_\alpha \to L(V, W)$ stetig und erfüllen $\varphi_{\alpha\beta}(x)\tau_\beta(x) = \tau_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x)$ dann existiert ein eindeutiger Vektorbündelhomomorphismus $f : E \to F$ sodaß $f_\alpha = \tau_\alpha$.*

Beweis. Man definiert $f|_{p^{-1}(U_\alpha)}$ durch:

$$\big(\varphi_\alpha \circ f|_{p^{-1}(U_\alpha)} \circ \psi_\alpha^{-1}\big)(x, v) := (x, \tau_\alpha(x) \cdot v)$$

Dies definiert ein stetiges $f : E \to F$ wegen der Kompatibilitätsbedingung. □

5.7. Korollar. *Ist $f : E \to F$ ein faserweise bijektiver Vektorbündelhomomorphismus über X dann ist f ein Vektorbündelisomorphismus, das heißt die inverse Abbildung ist ebenfalls ein Vektorbündelhomomorphismus.*

Beweis. Da f faserweise bijektiv ist $V \cong W$ also o.B.d.A. $W = V$. Wähle Vektorbündelatlanten $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ und betrachte die lokalen Daten $f_\alpha : U_\alpha \to L(V, V)$ von f. Da f faserweise bijektiv haben die f_α Werte in $GL(V)$. Aus der Kompatibilitätsbedingung für f_α bekommt man damit:

$$(f_\alpha(x))^{-1}\varphi_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha\beta}(x)(f_\beta(x))^{-1} \in GL(V)$$

Die $(f_\alpha)^{-1} : U_\alpha \to GL(V)$ sind stetig weil die Inversion in $GL(V)$ stetig ist. Also sind das nach Lemma 5.6 die lokalen Daten eines Vektorbündelhomomorphismus $g : F \to E$, der klarerweise invers zu f ist. □

Aus der universellen Eigenschaft des Pullbacks und Korollar 5.7 erhält man sofort:

5.8. Korollar. *Sind $p : E \to X$ und $q : F \to Y$ zwei Vektorbündel und $f : E \to F$ stetig, faserweise linearer Isomorphismus dann ist $\bar{f}^*F = E$, wo $\bar{f} : X \to Y$ die von f induzierte Abbildung ist.*

Für einen Vektorraum V ist $C(\_, GL(V))$ eine Garbe von im Allgemeinen nicht abelschen Gruppen. Wir haben also keine Čech Kohomologiegruppen dazu. Man kann aber trotzdem wie folgt eine erste Čech Kohomologie definieren, die allerdings im Allgemeinen keine algebraische Struktur mehr trägt.

5.9. Definition. Sei X topologischer Raum, $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Überdeckung von X und V ein reeller oder komplexer Vektorraum. Dann ist

$$\check{H}^1\big(\mathcal{U}, C(\cdot, GL(V))\big) := \big\{((\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(V))_{\alpha\beta} : \psi_{\alpha\beta}\psi_{\beta\gamma} = \psi_{\alpha\gamma}\big\}/\sim$$

wobei $(\psi_{\alpha\beta}) \sim (\varphi_{\alpha\beta})$ wenn stetige $\tau_\alpha : U_\alpha \to GL(V)$ existieren mit

$$\varphi_{\alpha\beta}(x)\tau_\beta(x) = \tau_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x) \qquad \forall x \in U_{\alpha\beta} \quad \forall\alpha, \beta \in A$$

Ist V reell oder komplex 1-dimensional, dann ist $GL(V)$ abelsch und das ist die übliche Čech Kohomologiegruppe von X bezüglich $\mathcal{U}$. Ist $\mathcal{W} = (W_i)_{i\in I}$ feiner als $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $\varepsilon : I \to A$ eine Verfeinerungsabbildung dann haben wir eine induzierte Abbildung

$$\varepsilon^* : \check{H}^1\big(\mathcal{U}, C(\cdot, GL(V))\big) \to \check{H}^1\big(\mathcal{W}, C(\cdot, GL(V))\big)$$

gegeben durch $\varphi_{ij} := (\varepsilon^*\psi_{\alpha\beta})_{ij} := \psi_{\varepsilon(i)\varepsilon(j)}|_{W_{ij}}$ Dies hängt nicht von der Wahl von ε ab, denn ist η eine andere Verfeinerungsabbildung und $\bar\varphi_{ij} := \psi_{\eta(i)\eta(j)}|_{W_{ij}}$ dann gilt mit $\tau_i := \psi_{\varepsilon(i)\eta(i)}|_{W_i}$

$$\tau_i\bar\varphi_{ij} = \psi_{\varepsilon(i)\eta(i)}\psi_{\eta(i)\eta(j)} = \psi_{\varepsilon(i)\eta(j)} = \psi_{\varepsilon(i)\varepsilon(j)}\psi_{\varepsilon(j)\eta(j)} = \varphi_{ij}\tau_j$$

auf W_{ij} und damit $(\varphi_{ij}) \sim (\bar\varphi_{ij})$. Also können wir definieren

$$\check{H}^1\big(X, C(\cdot, GL(V))\big) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1\big(\mathcal{U}, C(\cdot, GL(V))\big)$$

wobei der induktive Limes über alle Überdeckungen von X genommen wird. Für abelsches $GL(V)$ ist das die übliche erste Čech Kohomologiegruppe von X mit Werten in der Garbe $C(\cdot, \mathbb{R}\setminus 0)$ oder $C(\cdot, \mathbb{C}\setminus 0)$, je nachdem ob V reell oder komplex ist.

Für eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ und eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von X haben wir eine induzierte Abbildung

$$f^* : \check{H}^1\big(\mathcal{U}, C(\cdot, GL(V))\big) \to \check{H}^1\big((f^{-1}(\mathcal{U}), C(\cdot, GL(V))\big)$$

gegeben durch $f^*(\psi_{\alpha\beta}) := (\psi_{\alpha\beta} \circ f)$ und die induziert:

$$f^* : \check{H}^1\big(X, C(\cdot, GL(V))\big) \to \check{H}^1\big(Y, C(\cdot, GL(V))\big)$$

Offensichtlich gilt $(f\circ g)^* = g^*f^*$ und $\mathrm{id}^* = id$, das heißt $\check{H}^1\big(X, C(\cdot, GL(V))\big)$ ist ein kontravarianter Funktor in X.

5.10. Definition. Sei $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(X)$ die Menge der Isomorphieklassen von reellen n-dimensionalen Vektorbündeln und $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(X)$ die Menge der Isomorphieklassen von komplexen n-dimensionalen Vektorbündeln über X. Dies sind kontravariante Funktoren in X, siehe Beispiel 5.4.

5.11. Satz. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ existiert eine natürliche Bijektion*

$$\Phi : \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{K}}(X) \to \check{H}^1\big(X, C(\cdot, GL(\mathbb{K}^n))\big)$$

das heißt $\Phi(f^*E) = f^*\Phi(E)$, gegeben durch $\Phi(E) := [\psi_{\alpha\beta}]$ wo $\psi_{\alpha\beta}$ die Transitionsfunktionen eines beliebigen Vektorbündelatlas von E sind.

Beweis. Surjektivität folgt aus Lemma 5.2, Injektivität aus Lemma 5.6 und Natürlichkeit aus Beispiel 5.4. □

5.12. Definition. Sei $p : E \to X$ ein Vektorbündel und $\psi_{\alpha\beta}$ die Transitionsfunktionen bezüglich eines Vektorbündelatlas. Dann heißt das Vektorbündel $E^* \to X$ zu den Transitionsfunktionen $x \mapsto (\psi_{\alpha\beta}(x)^*)^{-1} \in GL(V^*)$ das duale Vektorbündel von $p : E \to X$. Ist F ein weiteres Vektorbündel mit Transitionsfunktionen $\varphi_{\alpha\beta}$ dann ist $E\otimes F \to X$ das Vektorbündel zu den Transitionsfunktionen $x \mapsto \psi_{\alpha\beta}(x) \otimes \varphi_{\alpha\beta}(x) \in GL(V\otimes W)$. $\big(\mathrm{Vect}^1(X), \otimes\big)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem trivialen Vektorbündel als neutrales Element und E^* als Inversen von E. Es gilt $E\otimes F = F\otimes E$ und $f^*(E\otimes F) = f^*E\otimes f^*F$ sowie $f^*(E^*) = (f^*E)^*$ für stetiges $f : Y \to X$.

Stiefel–Whitney und Chern–Klassen

5.13. Satz. *Für parakompakte X existieren natürliche Gruppenisomorphismen*

$$w_1 : \mathrm{Vect}^1_{\mathbb{R}}(X) \cong H^1(X, \mathbb{Z}_2) \quad \text{und} \quad c_1 : \mathrm{Vect}^1_{\mathbb{C}}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$$

das heißt $w_1(f^*E) = f^*w_1(E)$ für reelle Linienbündel E und $c_1(f^*F) = f^*c_1(F)$ für komplexe Linienbündel F. Man nennt $w_1(E) \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ die erste Stiefel-Whitney Klasse des reellen Linienbündels E und $c_1(F) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ die erste Chern Klasse des komplexen Linienbündels F.

Beweis. Nach Satz 5.11 haben wir eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{R}}(X) \cong \check{H}^1\big(X, C(\cdot, \mathbb{R} \setminus 0)\big)$$

die nach Definition des Tensorbündels ein Gruppenisomorphismus ist. Betrachte jetzt die kurze exakte Sequenz von Garben

$$0 \to C(\cdot, \{\pm 1\}) \to C(\cdot, \mathbb{R} \setminus 0) \xrightarrow{|\cdot|_*} C(\cdot, \mathbb{R}^+) \to 0$$

Da $C(\cdot, \mathbb{R}^+) \cong C(\cdot, \mathbb{R})$ eine weiche Garbe ist, liefert die lange exakte Kohomologiesequenz

$$H^q(X, \mathbb{Z}_2) \cong \check{H}^q\big(X, C(\cdot, \mathbb{R} \setminus 0)\big) \qquad \forall q \geq 1$$

als abelsche Gruppen. (Für $q = 1$ verwende man, daß $H^0(X, C(\cdot, \mathbb{R}\setminus 0)) = C(X, \mathbb{R}\setminus 0) \to C(X, \mathbb{R}^+) = H^0(X, C(\cdot, \mathbb{R}^+))$ offensichtlich surjektiv ist.)

Im komplexen Fall haben wir wie oben einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{C}}(X) \cong \check{H}^1\big(X, C(\cdot, \mathbb{C} \setminus 0)\big)$$

Wir betrachten jetzt die kurze exakte Sequenz von Garben aus 2.3:

$$0 \to C(\cdot, \mathbb{Z}) \to C(\cdot, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)_*} C(\cdot, \mathbb{C} \setminus 0) \to 0$$

Da $C(\cdot, \mathbb{C})$ eine weiche Garbe ist liefert die lange exakte Kohomologiesequenz

$$\check{H}^q\big(X, C(\cdot, \mathbb{C} \setminus 0)\big) \cong H^{q+1}(X, \mathbb{Z}) \qquad \forall q \geq 1$$

als abelsche Gruppen. □

5.14. Beispiel. Weil $H^1(S^1, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ gilt, gibt es genau zwei nicht isomorphe Linienbündel auf S^1, das triviale und $\lambda^1_{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}P^1 \cong S^1$). Letzteres ist homöomorph zum Möbiusband und nicht trivial, weil es nicht in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt wenn man den Nullschnitt wegnimmt, ein triviales Vektorbündel müßte aber in zwei Zusammenhangskomponenten zerfallen.

Für $n \geq 2$ ist $H^1(S^n, \mathbb{Z}_2) = 0$ und daher gibt es auf diesen Sphären keine nichttrivialen reellen Linienbündel.

Wir benötigen nun folgende Resultate aus der algebraischen Topologie:

5.15. Lemma. *Sei $t := w_1(\lambda^n_{\mathbb{R}}) \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ wo $\lambda^n_{\mathbb{R}}$ das kanonische Linienbündel über $\mathbb{R}P^n$ ist. Dann gilt:*

$$H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t]/\langle t^{n+1} \rangle \qquad \deg t = 1$$

Genauso gilt

$$H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[s]/\langle s^{n+1} \rangle \qquad \deg s = 2$$

wo $\lambda^n_{\mathbb{C}}$ das kanonische Linienbündel über $\mathbb{C}P^n$ und $s := c_1(\lambda^n_{\mathbb{C}}) \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$. Beide Aussagen bleiben für $n = \infty$ richtig (in diesem Fall keine Relationen).

5.16. SATZ (Leray-Hirsch). *Sei $\pi : E \to X$ ein lokal triviales Faserbündel und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq H^*(E, \mathbb{Z}_2)$ sodaß $\{j_x^*\alpha_1, \dots, j_x^*\alpha_n\}$ eine Basis für $H^*(E_x, \mathbb{Z}_2)$ ist, für alle $x \in X$, wo $j_x : E_x := \pi^{-1}(x) \to E$ die Inklusion der Faser bezeichnet. Dann ist $H^*(E, \mathbb{Z}_2)$ ein freier $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$–Modul mit Basis $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, wobei die Wirkung von $t \in H^*(X, \mathbb{Z}_2)$ auf $\beta \in H^*(E, \mathbb{Z}_2)$ durch $t \cdot \alpha := \pi^*(t)\alpha$ gegeben ist. Das heißt, für jedes $\gamma \in H^*(E, \mathbb{Z}_2)$ existieren eindeutig bestimmte $t_1, \dots, t_n \in H^*(X, \mathbb{Z}_2)$ sodaß*

$$\gamma = (\pi^* t_1)\alpha_1 + \cdots + (\pi^* t_n)\alpha_n.$$

5.17. Sei nun $p : E \to X$ ein n-dimensionales reelles Vektorbündel und bezeichne $E \setminus 0$ den Raum E ohne dem Nullschnitt. Auf $E \setminus 0$ wirkt die Gruppe $\mathbb{R} \setminus 0$. Wir betrachten nun $PE := (E \setminus 0)/(\mathbb{R} \setminus 0)$, die *Projektivierung von* E. Die von p induzierte Abbildung $\pi : PE \to X$ ist ein lokal triviales Faserbündel über X mit Faser $\mathbb{R}P^{n-1}$. Der Pullback π^*E hat ein kanonisches Teillinienbündel S

$$\{(L, e) : e \in L\} =: S \subseteq \pi^*E = \{(L, e) : \pi(L) = p(e)\}$$

Für $x \in X$ bezeichne $j : (PE)_x := \pi^{-1}(x) \to PE$ die Inklusion der Faser. Dann ist

$$j^*\pi^*E = (\pi \circ j)^*E = \text{const}^*E = (PE)_x \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}^n$$

und j^*S ist das kanonische Linienbündel über $\mathbb{R}P^{n-1}$. Setzen wir also $\alpha := -w_1(S) \in H^1(PE, \mathbb{Z}_2)$, dann bildet nach Lemma 5.15 $\{j^*1, j^*\alpha, \dots, j^*\alpha^{n-1}\}$ eine Basis des $\mathbb{Z}_2$-Vektorraumes $H^*((EP)_x, \mathbb{Z}_2)$. Nach dem Leray-Hirsch Theorem ist daher $H^*(PE, \mathbb{Z}_2)$ ein freier $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$–Modul mit Basis $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$. Das heißt, es gibt eindeutige Kohomologieklassen $w_i(E) \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$, die

$$\alpha^n + \pi^*(w_1(E))\alpha^{n-1} + \cdots + \pi^*(w_{n-1}(E))\alpha + \pi^*(w_n(E)) = 0$$

erfüllen. Diese heißen die *Stiefel-Whitney Klassen von* E und

$$w(E) := 1 + w_1(E) + \cdots + w_n(E)$$

heißt die *totale Stiefel-Whitney Klasse* von E.

Für ein Linienbündel E haben wir jetzt zwei Definitionen von $w_1(E)$. Wir wollen zeigen, daß sie übereinstimmen. Sei also $w_1^{\text{alt}}(E)$ die alte und $w_1^{\text{neu}}(E)$ die neue. Für ein Linienbündel gilt offenbar $PE = X$, $\pi^*E = E$ und $S = E$. Wir haben also $\alpha = -w_1^{\text{alt}}(S) = -w_1^{\text{alt}}(E)$ und die definierende Gleichung für $w_1^{\text{neu}}(E)$ war $\alpha + w_1^{\text{neu}}(E) = 0$. Folglich gilt $w_1^{\text{neu}}(E) = w_1^{\text{alt}}(E)$.

Sei nun $f : X \to Y$ stetig und $p_E : E \to Y$ ein Vektorbündel. Dies gibt uns eine Abbildung $p^*f : f^*E \to E$ die faserweise bijektiv ist. Also induziert sie ein Abbildung $\tilde{f} : P(f^*E) \to PE$ die über f "sitzt", das heißt $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi'$, wo $\pi' : P(f^*E) \to Y$ die Projektivierung von f^*E bezeichnet. Außerdem ist $\tilde{f}^*S_E = S_{f^*E}$, wo S_E das kanonische Teillinienbündel von π^*E und S_{f^*E} das kanonische Teillinienbündel von $(\pi')^*(f^*E)$ ist. Nach Satz 5.13 gilt dann:

$$\tilde{f}^*\alpha_E = -\tilde{f}^*w_1(S_E) = -w_1(\tilde{f}^*S_E) = -w_1(S_{f^*E}) = \alpha_{f^*E}$$

Ist also

$$\alpha_E^n + \pi^*(w_1(E))\alpha^{n-1} + \cdots + \pi^*(w_n(E)) = 0$$

dann folgt wegen obigen und $\tilde{f}^*\pi^* = (\pi \circ \tilde{f})^* = (f \circ \pi')^* = (\pi')^*f^*$:

$$\alpha_{f^*E}^n + (\pi')^*f^*w_1(E)\alpha_{f^*E}^{n-1} + \cdots + (\pi')^*f^*w_n(E) = 0$$

Also erfüllen die $f^*w_i(E)$ die definierende Gleichung für die Stiefel-Whitney Klassen von f^*E und wir erhalten $w_i(f^*E) = f^*w_i(E)$ und somit auch $w(f^*E) = f^*w(E)$. Die Stiefel-Whitney Klassen sind also natürlich.

Ist $E \cong X \times \mathbb{R}^n$ ein triviales Vektorbündel dann gilt $E \cong \mathrm{const}^*\big(\{\mathrm{Punkt}\} \times \mathbb{R}^n\big)$. Mit der Natürlichkeit und $H^*(\{\mathrm{Punkt}\}, \mathbb{Z}_2)$ für $* > 0$ erhalten wir $w(E) = 1$. Die Stiefel-Whitney Klassen messen also in gewissem Sinn, wie nichttrivial ein Vektorbündel ist.

5.18. Whitney Summe. Sei $p : E \to X$ ein n-dimensionales und $q : F \to X$ ein m-dimensionales Vektorbündel. Dann ist

$$E \oplus F := \{(e, f) \in E \times F : p(e) = q(f)\} \xrightarrow{\pi := p = q} X$$

ein $(n + m)$-dimensionales Vektorbündel. Man nennt $E \oplus F$ die *Whitney Summe* von E und F. Ist nämlich (U_α, ψ_α) ein Vektorbündelatlas für E und $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ einer für F so sind

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times (V \oplus W) \qquad (e, f) \mapsto \big(p(e) = q(f), pr_2(\psi_\alpha(e)), pr_2(\varphi_\alpha(f))\big)$$

Vektorbündelkarten mit Inversen

$$(x, v, w) \mapsto \big(\psi_\alpha^{-1}(x, v), \varphi_\alpha^{-1}(x, w)\big)$$

Der Kartenwechsel ist dann

$$(x, v, w) \mapsto \big(x, \psi_{\alpha\beta}(x) \cdot v, \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot w\big)$$

also hat $E \oplus F$ Transitionsfunktionen

$$U_{\alpha\beta} \to GL(V \oplus W) \qquad x \mapsto \psi_{\alpha\beta}(x) \oplus \varphi_{\alpha\beta}(x)$$

Es gilt $E \oplus F \cong F \oplus E$ und $(E \oplus F)^* \cong E^* \oplus F^*$ sowie $f^*(E \oplus F) \cong f^*E \oplus f^*F$ für stetiges $f : Y \to X$.

5.19. Lemma. *Ist $p : E \to X$ ein n-dimensionales Vektorbündel dann existiert $f : Y \to X$ stetig, sodaß $f^*E \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$, wo die L_i Linienbündel sind und so, daß $f^* : H^*(X, \mathbb{Z}_2) \to H^*(Y, \mathbb{Z}_2)$ injektiv ist. So ein f heißt eine* Splittingabbildung *für E.*

Beweis. Mittels Induktion nach n, der Faserdimension von E. Für $n = 1$ nehme man $f = \mathrm{id}$. Angenommen wir haben die Aussage für $n - 1$ bereits gezeigt. Betrachte wieder die Projektivierung $\pi : PE \to X$ von E. Da $H^*(PE, \mathbb{Z}_2)$ ein freier $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$-Modul ist, ist π^* injektiv. Außerdem hatten wir ein Teillinienbündel S von π^*E. Es ist nicht schwer zu zeigen jedes Teilvektorbündel ein Komplement besitzt (wähle eine Metrik auf E und nimm das orthogonale Komplement von S), also existiert ein Vektorbündel $Q \to PE$ sodaß $E = S \oplus Q$ gilt. Q ist jetzt $n - 1$ dimensional und besitzt daher eine Splittingabbildung $g : Y \to PE$. Setzt man jetzt $f := \pi \circ g$ so ist $f^* = g^*\pi^* : H^*(X, \mathbb{Z}_2) \to H^*(Y, \mathbb{Z}_2)$ injektiv weil g^* und π^* es sind. Weiters gilt

$$f^*E = g^*\pi^*E = g^*(S \oplus Q) = (g^*S) \oplus (g^*Q) = (g^*S) \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n$$

Also ist f eine Splittingabbildung für E. □

5.20. Lemma. *Für Vektorbündel E und F über X gilt $w(E \oplus F) = w(E)w(F)$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst

$$w(E := L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) = \prod_{i=1}^{n} w(L_i)$$

für Linienbündel L_i. Sei wieder $\pi : PE \to X$ die Projektivierung von E und $S \subseteq \pi^*E = \pi^*L_1 \oplus \cdots \oplus \pi^*L_n$ das kanonische Teillinienbündel. Seinen $s_i : S \to \pi^*L_i$ die Projektionen und

$$U_i := \{y \in PE : s_i(y) \neq 0\}.$$

Dann ist U_i eine offene Überdeckung von PE und $(S^* \otimes \pi^*(L_i))|_{U_i}$ ist ein triviales Linienbündel da es einen nichtverschwindenden Schnitt, nämlich s_i, hat. Also ist

$$w_1\big((S^* \otimes \pi^* L_i)|_{U_i}\big) = 0 \in H^1(U_i, \mathbb{Z}_2)$$

Bezeichnet $j_i : U_i \to PE$ die Inklusion, so folgt aus der Natürlichkeit der Stiefel-Whitney Klassen

$$j_i^* w_1(S^* \otimes \pi^* L_i) = w_1\big((S^* \otimes \pi^* L_i)|_{U_i}\big) = 0 \in H^1(U_i, \mathbb{Z}_2)$$

Aus der langen exakten Kohomologiesequenz des Paares (X, U_i)

$$\cdots \to H^1(X, U_i, \mathbb{Z}_2) \to H^1(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_i^*} H^1(U_i, \mathbb{Z}_2) \to \cdots$$

sieht man daß $w_1(S^* \otimes \pi^* L_i)$ als Element von $H^1(X, U_i, \mathbb{Z}_2)$ aufgefaßt werden kann (Es kommt zumindest von dort). Also haben wir

$$\prod_{i=1}^n w_1(S^* \otimes \pi^* L_i) \in H^1(PE, \cup_{i=1}^n U_i, \mathbb{Z}_2) = H^1(PE, PE, \mathbb{Z}_2) = 0$$

Ist also $\alpha = -w_1(S) = w_1(S^*)$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \prod_{i=1}^n w_1(S^* \otimes \pi^* L_i) &= \prod_{i=1}^n \big(w_1(S^*) + w_1(\pi^* L_i)\big) \\ = \prod_{i=1}^n \big(\alpha + \pi^* w_1(L_i)\big) &= \alpha^n + \sigma_1 \alpha^{n-1} + \cdots + \sigma_n \end{aligned}$$

wobei σ_i die elementarsymmetrischen Polynome in den Variablen $\pi^* w_1(L_1)$ bis $\pi^* w_1(L_n)$ sind. Aus der definierenden Gleichung für $w_i(E)$ folgt $\pi^*(w_i(E)) = \sigma_i$ und damit

$$\begin{aligned} \pi^*(w(E)) &= \pi^*(1 + w_1(E) + \cdots + w_n(E)) = 1 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_n \\ &= \prod_{i=1}^n \big(1 + \pi^* w_1(L_i)\big) = \pi^*\Big(\prod_{i=1}^n w(L_i)\Big) \end{aligned}$$

Weil π^* injektiv ist folgt also $w(E) = \prod_{i=1}^n w(L_i)$.

Sind jetzt E und F beliebige Vektorbündel dann wählen wir eine Splittingabbildung $f : Y \to X$ sodaß $f^*E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ und $f^*F = L_{n+1} \oplus \cdots \oplus L_{n+m}$ ist. Es gilt dann

$$f^*(w(E \oplus F)) = w(f^*(E \oplus F)) = w(L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n+m}) = w(L_1) \cdots w(L_{n+m})$$

und

$$f^*(w(E)) = w(f^*E) = w(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) = w(L_1) \cdots w(L_n)$$

und genauso $f^*(w(F)) = w(L_{n+1}) \cdots w(L_{n+m})$. Insgesamt erhalten wir

$$f^*(w(E \oplus F)) = f^*(w(E)) f^*(w(F)) = f^*(w(E) w(F))$$

und da f^* injektiv ist gilt auch $w(E \oplus F) = w(E) w(F)$. □

Fassen wir alles zusammen erhalten wir folgenden

5.21. Satz. *Für jedes reelle Vektorbündel $p : E \to X$ existieren $w_i(E) \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$, die sogenannten* Stiefel-Whitney Klassen *von E, sodaß gilt:*

(1) $w_i(E) = 0$ *falls* $i > \dim(E)$
(2) $w(f^*E) = f^* w(E)$ *wo* $w(E) = 1 + w_1(E) + \cdots + w_n(E)$, $n = \dim E$
(3) $w(E \oplus F) = w(E) w(F)$
(4) $w_1(\lambda_{\mathbb{R}}^\infty) \neq 0 \in H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2)$, *wo* $\lambda_{\mathbb{R}}^\infty$ *das universelle Linienbündel über* $\mathbb{R}P^\infty$ *ist.*

5.22. Korollar. *Besitzt ein n-dimensionales Vektorbündel E einen nirgends verschwindenden Schnitt so muß $w_n(E) = 0$ gelten.*

Beweis. Da E einen nirgendwo verschwindenden Schnitt besitzt erhalten wir $E = L \oplus F$, wo L ein triviales Linienbündel ist. Mit der Produktformel folgt $w(E) = w(L)w(F) = w(F)$, weil $w(L) = 1$ gilt. Da F nur $n-1$-dimensional ist muß $w_n(E) = w_n(F) = 0$ sein. □

5.23. Beispiel. Man nennt zwei Vektorbündel E und F *stabil äquivalent* falls triviale Vektorbündel S und T existieren, sodaß $E \oplus T = F \oplus S$. Wegen

$$w(E) = w(E)w(T) = w(E \oplus T) = w(F \oplus S) = w(F)w(S) = w(F)$$

können die Stiefel-Whitney Klassen also nicht zwischen stabil äquivalenten Vektorbündeln unterscheiden.

Damit erhalten wir zum Beispiel $w(TS^n) = 1$, weil $TS^n \oplus N = S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, wo N das Normalenbündel an die Sphäre ist, und N trivial. Die Stiefel-Whitney Klassen "sehen" also nicht wie verwickelt die Tangentialbündel an die Sphären sind. Diese sind aber verwickelt, da zum Beispiel TS^{2n} keinen nirgends verschwindenden Schnitt besitzt (Satz vom gekämmten Igel).

5.24. Korollar. *Für ein reelles Vektorbündel E gilt: E ist orientierbar genau dann, wenn $w_1(E) = 0$. Dabei heißt ein Vektorbündel orientierbar, falls es einen Vektorbündelatlas besitzt, dessen Transitionsfunktionen Werte in $GL^+(V) := \{A : \det A > 0\}$ haben.*

Beweis. Man überlegt sich leicht, daß E genau dann orientierbar ist, wenn $\bigwedge^n E$ ein triviales Linienbündel ist, wo $n = \dim E$ ($\bigwedge^n E$ hat die Transitionsfunktionen $x \mapsto \det \psi_{\alpha\beta}(x)$). Nach Satz 5.13 ist also E genau dann orientierbar, wenn $w_1(\bigwedge^n E) = 0$ gilt. Es genügt jetzt noch $w_1(\bigwedge^n E) = w_1(E)$ zu zeigen.

Dazu sei zuerst $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$, wo L_i Linienbündel sind. Betrachtet man die Transitionsfunktion, so sieht man sofort, daß $\bigwedge^n E = L_1 \otimes \cdots \otimes L_n$, also erhalten wir

$$w_1(\textstyle\bigwedge^n E) = w_1(L_1 \otimes \cdots \otimes L_n) = w_1(L_1) + \cdots + w_1(L_n) = w_1(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) = w_1(E)$$

Ist E jetzt wieder beliebig und f eine Splittingabbildung für E, dann gilt

$$f^* w_1(\textstyle\bigwedge^n E) = w_1(\bigwedge^n f^* E) = w_1(f^* E) = f^* w_1(E)$$

und weil f^* injektiv ist, folgt $w_1(\bigwedge^n E) = w_1(E)$. □

5.25. Lemma. *Ist $p : E \to X$ ein Linienbündel über einem parakompakten Raum X so existiert ein stetiges $f : X \to \mathbb{R}P^\infty$ sodaß $f^* \lambda_{\mathbb{R}}^\infty = E$.*

Beweis. Da X parakompakt ist, kann man zeigen daß E einen abzählbaren Vektorbündelatlas $(U_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt. Wähle eine Partition der Eins $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die U_i untergeordnet ist und $\operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq U_i$ erfüllt. Die Abbildungen

$$f_i : E \to \mathbb{R} \qquad e \mapsto \eta_i(p(e)) pr_2(\psi_i(e))$$

sind global definiert und stetig, weil dort wo ψ_i nicht definiert ist, $\eta_i \circ p$ verschwindet. Da $\operatorname{supp}(\eta_i)$ lokal endlich ist, definieren diese f_i eine Abbildung

$$\tilde f : E \to \lambda_{\mathbb{R}}^\infty \qquad e \mapsto \big([f_1(e) : f_2(e) : \cdots], (f_1(e), f_2(e), \dots)\big)$$

Diese ist faserweise linear und bijektiv, also nach Korollar 5.8 $f^* \lambda_{\mathbb{R}}^\infty = E$, wo $f : X \to \mathbb{R}P^\infty$ die von $\tilde f$ induzierte Abbildung ist. □

5.26. Satz. *Die Eigenschaften (1)-(4) in Satz 5.21 bestimmen die Stiefel-Whitney Klassen eindeutig.*

Beweis. Sei $\bar{w}_i$ ein weiterer Satz von Klassen, die (1)-(4) erfüllen. Sei zuerst $p : L \to X$ ein Linienbündel. Nach Lemma 5.25 existiert $f : X \to \mathbb{R}P^\infty$ mit $f^*\lambda^\infty_\mathbb{R} = L$. Wegen (2) und $H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ (hat also nur ein Element ungleich 0, folglich $\bar{w}_1(\lambda^\infty_\mathbb{R}) = w_1(\lambda^\infty_\mathbb{R})$ wegen (4)), gilt daher

$$\bar{w}_1(L) = \bar{w}_1(f^*\lambda^\infty_\mathbb{R}) = f^*\bar{w}_1(\lambda^\infty_\mathbb{R}) = f^*w_1(\lambda^\infty_\mathbb{R}) = w_1(f^*\lambda^\infty_\mathbb{R}) = w_1(L)$$

und wegen (1) daher auch $\bar{w}(L) = w(L)$. Sei nun $p : E \to X$ ein beliebiges Vektorbündel und $g : Y \to X$ eine Splittingabbildung. Dann gilt wegen (2), (3) und obigem

$$\begin{aligned} g^*\bar{w}(E) &= \bar{w}(g^*E) = \bar{w}(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) = \bar{w}(L_1)\cdots\bar{w}(L_n) \\ &= w(L_1)\cdots w(L_n) = w(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) = w(g^*E) = g^*w(E) \end{aligned}$$

und weil g^* injektiv ist auch $\bar{w}(E) = w(E)$. □

Analoge Konstruktionen und Argumente liefern

5.27. Satz. *Für jedes komplexe Vektorbündel $p : E \to X$ gibt es $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, die sogenannten* Chern Klassen *von E, sodaß gilt*

(1) $c_i(E) = 0$ *falls* $i > \dim_\mathbb{C} E$
(2) $c(f^*E) = f^*c(E)$, *wo* $c(E) := 1 + c_1(E) + \cdots + c_n(E)$, $n = \dim_\mathbb{C} E$
(3) $c(E \oplus F) = c(E)c(F)$
(4) $c_1(\lambda^\infty_\mathbb{C})$ *ist ein ausgezeichneter Erzeuger von* $H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, *wo* $\lambda^\infty_\mathbb{C}$ *das universelle Linienbündel über* $\mathbb{C}P^\infty$ *ist.*

Weiters gilt, daß die Eigenschaften (1)-(4) die Chern Klassen eindeutig bestimmen.

Anwendungen

5.28. Beispiel. Wir wollen $w(T\mathbb{R}P^n)$ berechnen. Man überlegt sich leicht, daß

$$T\mathbb{R}P^n = \{(x,v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1, \langle x, v\rangle = 0\}/(x,v) \sim (-x,-v)$$

und

$$\lambda^n_\mathbb{R} = \{(x,v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1, v \in \mathbb{R}x\}/(x,v) \sim (-x,v)$$

Für $0 \neq x \in \mathbb{R}^{n+1}$ definieren wir Abbildungen $\pi_x : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ und $\nu_x : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch $v = \nu_x(v) + \pi_x(v)x$ und $\langle \nu_x(v), x\rangle = 0$. Außerdem bezeichnen $p_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ die Projektionen auf die i-te Koordinate. Damit erhalten wir einen Vektorbündelisomorphismus

$$T\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R} \to \underbrace{\lambda^n_\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \lambda^n_\mathbb{R}}_{(n+1)\text{ Stück}} \qquad ((x,v),t) \mapsto \big((x, p_0(v+tx)x), \ldots, (x, p_n(v+tx)x)\big)$$

mit Inversem

$$\big((x,\alpha_0 x), \ldots, (x, \alpha_n x)\big) \mapsto \big((x, \nu_x(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)), \pi_x(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\big)$$

Also gilt nach Lemma 5.15

$$w(T\mathbb{R}P^n) = w(T\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}) = w(\lambda^n_\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \lambda^n_\mathbb{R}) = w(\lambda^n_\mathbb{R})^{n+1} = (1+t)^{n+1}$$

wo $t = w_1(\lambda^\infty_\mathbb{R}) \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$.

Also ist $w_1(T\mathbb{R}P^{2n}) = t \neq 0$ und daher $\mathbb{R}P^{2n}$ nicht orientierbar nach Korollar 5.24. Weiters ist $w_{2n}(T\mathbb{R}P^{2n}) = t^{2n} \neq 0$ und daher besitzt $T\mathbb{R}P^{2n}$ keinen nirgendsverschwindenden Schnitt nach Korollar 5.22.

5.29. Beispiel. Es gibt keine Immersion von $\mathbb{R}P^4$ in $\mathbb{R}^6$, also insbesondere auch keine Einbettung. Wäre nämlich $f : \mathbb{R}P^4 \to \mathbb{R}^6$ so eine Immersion dann ist

$$Tf : T\mathbb{R}P^4 \to T\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$$

ein injektiver Vektorbündelhomomorphismus und daher $T\mathbb{R}P^4$ ein Teilbündel von dem trivialen Bündel $f^*T\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}^6$. Dieses besitzt ein 2-dimensionales Komplement $F \to \mathbb{R}P^4$, also $T\mathbb{R}P^4 \oplus F = \mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}^6$. Aus der Produktformel erhalten wir $1 = w(T\mathbb{R}P^4)w(F)$. Da F 2-dimensional ist, ist $w(F) = 1 + \alpha t + \beta t^2$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ und daher unter Verwendung von Beispiel 5.28

$$\begin{aligned} w(T\mathbb{R}P^4)w(F) &= (1+t)^5(1 + \alpha t + \beta t^2) \\ &= 1 + (1+\alpha)t + (\alpha+\beta)t^2 + \beta t^3 + t^4 \neq 1 \in \mathbb{Z}_2[t]/\langle t^5 \rangle \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

5.30. Beispiel. Sei $G_k(\mathbb{R}^\infty)$ die *Grassmannmannigfaltigkeit* der k-dimensionalen Teilräume in $\mathbb{R}^\infty$. Man zeigt leicht, daß

$$\gamma_k^\infty := \{(V, v) \in G_k(\mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty : v \in V\} \to G_k(\mathbb{R}^\infty)$$

ein Vektorbündel ist. Es gilt klarerweise $\gamma_1^\infty = \lambda_\mathbb{R}^\infty$. Außerdem verallgemeinert sich Lemma 5.25, also gibt es zu jedem k-dimensionalen Vektorbündel $p : E \to X$, mit X parakompakt, ein stetiges $f : X \to G_k(\mathbb{R}^\infty)$ sodaß $f^*\gamma_k^\infty = E$ ist. Weiters kann man zeigen daß $f^*\gamma_k^\infty = g^*\gamma_k^\infty$ genau dann wenn f und g homotop sind. Deshalb heißt γ_k^∞ das *universelle k-dimensionale reelle Vektorbündel*. Anders ausgedrückt haben wir eine natürliche Äquivalenz der kontravarianten Funktoren $\mathrm{Vect}_\mathbb{R}^k(\cdot)$ und $[\cdot, G_k(\mathbb{R}^\infty)]$, wo $[X, Y]$ die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $X \to Y$ bezeichnet. Wir wollen zeigen:

$$H^*(G_k(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1(\gamma_k^\infty), \dots, w_k(\gamma_k^\infty)]$$

Dies verallgemeinert Lemma 5.15, wir werden dieses aber verwenden. Sei dazu

$$f : \mathbb{R}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}P^\infty \to G_k(\mathbb{R}^\infty)$$

die (bis auf Homotopie eindeutige) stetige Abbildung mit

$$f^*\gamma_k^\infty = p_1^*\lambda_\mathbb{R}^\infty \oplus \cdots \oplus p_k^*\lambda_\mathbb{R}^\infty$$

wo $p_i : \mathbb{R}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}P^\infty \to \mathbb{R}P^\infty$ die Projektion auf den i-ten Faktor bezeichnet. Wir zeigen zuerst, daß f eine Splittingabbildung für γ_k^∞ ist. Es ist nur zu zeigen, daß f^* injektiv ist. Sei $g : Y \to G_k(\mathbb{R}^\infty)$ eine beliebige Splittingabbildung für γ_k^∞ mit $g^*\gamma_k^\infty = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$. Für jedes L_i existiert $h_i : Y \to \mathbb{R}P^\infty$ sodaß $h_i^*\lambda_\mathbb{R}^\infty = L_i$. Betrachte

$$h := (h_1, \dots, h_n) : Y \to \mathbb{R}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}P^\infty$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (f \circ h)^*\gamma_k^\infty &= h^*f^*\gamma_k^\infty = h^*(p_1^*\lambda_\mathbb{R}^\infty \oplus \cdots \oplus p_k^*\lambda_\mathbb{R}^\infty) \\ &= h_1^*\lambda_\mathbb{R}^\infty \oplus \cdots \oplus h_k^*\lambda_\mathbb{R}^\infty = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k = g^*\gamma_k^\infty \end{aligned}$$

und daher sind $(f \circ h)$ und g homotop. Also $g^* = (f \circ h)^* = h^*f^*$ und da g^* injektiv ist, muß auch f^* injektiv sein.

Wollen als nächstes

$$f^*\big(H^*(G_k(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2)\big) \subseteq H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2)$$

beschreiben. Nach Lemma 5.15 haben wir $H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t]$ wo $t = w_1(\lambda_\mathbb{R}^\infty)$. Nach der Künneth Formel also

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_k]$$

wo $t_i = p_i^* t = p_i^* w_1(\lambda_\mathbb{R}^\infty) = w_1(p_i^* \lambda_\mathbb{R}^\infty)$. Eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_k$ induziert eine Abbildung

$$\tau : \mathbb{R}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}P^\infty \to \mathbb{R}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}P^\infty$$

die einfach die Faktoren permutiert. Es gilt $p_i \circ \tau = p_{\tau^{-1}(i)}$ und daher

$$\begin{aligned}(f \circ \tau)^* \gamma_k^\infty = \tau^* f^* \gamma_k^\infty &= \tau^*\big(p_1^* \lambda_\mathbb{R}^\infty \oplus \cdots \oplus p_k^* \lambda_\mathbb{R}^\infty\big) \\ &= p_{\tau^{-1}(1)}^* \lambda_\mathbb{R}^\infty \oplus \cdots \oplus p_{\tau^{-1}(k)}^* \lambda_\mathbb{R}^\infty = f^* \gamma_k^\infty\end{aligned}$$

also sind $f \circ \tau$ und f homotop und damit $\tau^* f^* = f^*$. Da $\tau^*(t_i) = \tau^* p_i^* w_1(\lambda_\mathbb{R}^\infty) = p_{\tau^{-1}(i)}^* w_1(\lambda_\mathbb{R}^\infty) = t_{\tau^{-1}(i)}$ erhalten wir:

$$f^*\big(H^*(G_k(\mathbb{R}^\infty))\big) \subseteq \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_k]^{\mathrm{sym}}$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned}f^* w(\gamma_k^\infty) = w(f^* \gamma_k^\infty) &= w(p_1^* \lambda_\mathbb{R}^\infty \oplus \cdots \oplus p_k^* \lambda_\mathbb{R}^\infty) = w(p_1^* \lambda_\mathbb{R}^\infty) \cdots w(p_k^* \lambda_\mathbb{R}^\infty) \\ &= (1 + t_1) \cdots (1 + t_k) = 1 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_k\end{aligned}$$

wo σ_i die elementarsymmetrischen Polynome in den Variablen $t_1, \dots, t_k$ bezeichnen. Da jedes symmetrische Polynom eindeutig als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen geschrieben werden kann erhalten wir einen Isomorphismus (f^* ist injektiv haben wir oben gezeigt)

$$f^* : H^*(G_k(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_k]^{\mathrm{sym}} \cong \mathbb{Z}_2[\sigma_1, \dots, \sigma_k]$$

mit $f^* w_i(\gamma_k^\infty) = \sigma_i$ und damit $H^*(G_k(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1(\gamma_k^\infty), \dots, w_k(\gamma_k^\infty)]$.

5.31. Beispiel. Das Tangentialbündel von $\mathbb{R}P^2$ ist nicht Summe von zwei Linienbündeln. Insbesondere hat $\mathbb{R}P^2$ keine 1-dimensionale Blätterung. Denn wäre $T\mathbb{R}P^2 = E \oplus F$, dann gäbe es $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ die

$$(1 + t)^3 = w(T\mathbb{R}P^2) = w(E)w(F) = (1 + \alpha t)(1 + \beta t) \in \mathbb{Z}_2[t]/\langle t^3 \rangle$$

erfüllen. Durch eine leichte Rechnung kann man sich aber davon überzeugen das solche α, β nicht existieren.

5.32. Beispiel. $T\mathbb{R}P^4$ ist nicht Summe von zwei Vektorbündeln. Insbesondere hat $\mathbb{R}P^4$ keine nichttriviale Blätterung. Gäbe es ein 1-dimensionales Teilbündel so müßte die Gleichung

$$(1 + t)^5 = w(T\mathbb{R}P^4) = (1 + \alpha t)(1 + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3) \in \mathbb{Z}_2[t]/\langle t^5 \rangle$$

eine Lösung mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_2$ haben, dies ist aber nicht der Fall. Es gibt aber auch kein 2-dimensionales Teilbündel, da die Gleichung

$$(1 + t)^5 = w(T\mathbb{R}P^4) = (1 + \alpha t + \beta t^2)(1 + \gamma t + \delta t^2) \in \mathbb{Z}_2[t]/\langle t^5 \rangle$$

keine Lösung $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_2$ hat.