Übungen zu Numerische Mathematik (SS 2014), Teil 1

(1) Geben Sie elegante Matlab-Anweisungen zum Erzeugen folgender Vektoren an:

a) $(-1, -0.8, \dots, 0.6, 0.8, 1)$

b) $(2, -2, 4, -4, 6, -6, \dots, 16, -16)$

c) $(1, 2, \dots, 8, 10, 13, 14, 15, \dots, 19, 20)$

d) $(1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots, 19, 20, 22, 23)$

(2) Bestimmen Sie mit Matlab die Maschinengenauigkeit ε und berechnen Sie $1 + \varepsilon$ und $1 + \varepsilon/2$.

(3) Erzeugen Sie eine 10×10 Zufallsmatrix in Matlab und berechnen Sie ihr Inverses. Bestimmen Sie weiters die Zeilen- und Spaltensumme.

(4) Geben Sie möglichst elegante Matlab-Befehle zum Abspeichern der folgenden Matrizen an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -6 & 7 & -8 & 9 \\ 11 & -12 & 13 & -14 \\ -16 & 17 & -18 & 19 \end{pmatrix}$$

(5) Erzeugen Sie eine 100×100–Diagonalmatrix A mit den Einträgen $A_{ii} = 1/i^2$.

(6) Erzeugen Sie eine Vandermonde–Matrix zum Vektor $x \in \mathbb{R}^{18}$ mit $x_n = \sqrt{n}$. Bestimmen Sie ihre Diagonale und den oberen Dreiecksteil. Berechnen Sie ihre Determinante.

Extrahieren Sie die obere 9×9 Untermatrix. Ist das auch eine Vandermonde–Matrix?

(7) Erzeugen Sie eine Vandermonde–Matrix zum Vektor $x \in \mathbb{R}^{25}$ mit $x_n = 1/n$. Bestimmen Sie ihr charakteristisches Polynom, ihren Rang und ihre Eigenwerte und Eigenvektoren.

(8) Erzeugen Sie eine 100×100–Zufallsmatrix mit $N(0, 1)$–normalverteilten Einträgen. Bestimmen Sie Wert und Koordinaten des größten und kleinsten Elements.

(9) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Matlab:

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z &= 5 \\ 2x + 2y + 3z &= 7 \\ x + 3y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

(10) Erzeugen Sie eine 100×100 Zufallsmatrix M, deren Einträge gleichverteilt im Intervall $[-2, 2]$ sind. Bilden Sie auf möglichst einfache Weise die Matrizen M_- und M_+, die definiert sind

durch

$$M_{-\,ij} := (M_{ij})_- = \max\{0, -M_{ij}\}$$
$$M_{+\,ij} := (M_{ij})_+ = \max\{0, M_{ij}\}$$

(11) Erzeugen Sie eine 150×150 Zufallsmatrix M, deren Einträge gleichverteilt im Intervall $[-2, 2]$ sind. Bilden Sie auf möglichst einfache Weise die Matrizen M_1 und M_2, die definiert sind durch

$$M_{1\,ij} := \begin{cases} M_{ij} & \text{falls } M_{ij} \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$M_{2\,ij} := \begin{cases} \text{NaN} & \text{falls } M_{ij} \in [-1, 1] \\ -abs(M_{ij}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Ersetzen Sie danach alle NaN in M_2 durch -1 und bilden Sie so die Matrix M_3.

(12) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, um die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen. Die Funktion soll drei Eingabeparameter a, b, c haben und die Werte der zwei Wurzeln ausgeben. Sie sollten die folgenden Fälle berücksichtigen:
a) keine reellen Wurzeln,
b) reelle und verschiedene Wurzeln,
c) gleiche Wurzeln,
d) lineare Gleichung,
e) $a = b = 0$ (sinnlose Eingabe).

(13) Verändern Sie die Funktion aus Beispiel 12 so, dass sie auch die Nullstellen komplexer quadratischer Polynome berechnen kann. Was ist zu tun?

(14) Plotten Sie mit MATLAB die Funktionen, die durch die folgenden drei arithmetischen Ausdrücke definiert sind:
a) $f(x) := \dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x}$ für $-1 < x \le 1$ und für $|x| \le 10^{-15}$,
b) $f(x) := \sqrt{x + 1/x} - \sqrt{x - 1/x}$ für $1 \le x \le 10$ und für $2 \cdot 10^7 \le x \le 2 \cdot 10^8$,
c) $f(x) := \dfrac{\tan x - \sin x}{x}$ für $0 < x \le 1$ und für $10^{-8} \le x \le 10^{-7}$.

Beachten Sie die starke Ungenauigkeit jeweils für die zweite Wahl.

(15) Versehen Sie die Plots aus Beispiel 14 jeweils mit Beschriftungen (des gesamten Graphen, der x- und y–Achse) und erzeugen Sie vom entstehenden Plot ein PostScript–File, das Sie zum Drucker senden könnten.

(16) Verwenden Sie Matlab, um für die drei Funktionen aus Bsp. 14 die folgenden Sätze auszudrucken:
„Die Antwort für f(x) auf 5 signifikante Stellen ist y"
„Die Antwort für f(x) auf 16 signifikante Stellen ist y",
aber mit x und y ersetzt durch die numerischen Werte $x = 0.1111$ und $y = f(0.1111)$.

(17) Plotten Sie die Kurve

$$r(t) = (t \sin(4t), t \cos(2t), t), \quad t \in [-5\pi, 5\pi]$$

dreidimensional. Üben Sie, die entstehende Graphik zu drehen und von allen Seiten zu betrachten.

(18) Plotten Sie die Funktion

$$f(x, y) = xy \sin(x/y), \quad x, y \in [-2\pi, 2\pi]$$

dreidimensional in Matlab. Verwenden Sie dazu die Funktionen `mesh`, `surf`, `surfl` und `surfc`. Üben Sie, die entstehende Figur zu drehen und von allen Seiten zu betrachten.