(19) Verwenden Sie Differenzenquotienten und deren Eigenschaft

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h} = f'(x),$$

um die Ableitung $f'(4533414141/111231321)$ für die Funktion

$$f(x) := x \sin x$$

möglichst genau zu approximieren. Untersuchen Sie die dabei auftretenden Effekte und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat, das Sie mit Hilfe der Ableitungsfunktion erhalten. (Berechnen Sie den Differenzenquotienten für geeignete $h > 0$.)

(20) Vergleichen Sie die Stabilität der beiden angegebenen Methoden, den Ausdruck $(1-x)^3$ zu berechnen:

$$(1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3.$$

Wie ist die Kondition des Problems?

(21) Bestimmen Sie möglichst genau die Ableitung $f'(3)$ für die Funktion

$$f(x) = \frac{-\frac{441}{3125}x + x\sin x}{\sqrt{e^{6x} - 7295544.5708\, x^2 - 17x - 17}}.$$

(22) Seien $n_0 = 1$, $m_0 = 1$. Man definiere rekursiv die Folgen

$$m_{k+1} = m_k + 2n_k, \quad n_{k+1} = m_k + n_k.$$

Man zeige, daß die Folge der Brüche $\left\{\frac{m_k}{n_k}\right\}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Wie schnell konvergiert das Verfahren?

(23) Seien x_0, y_0 zwei Zahlen mit $0 < y_0 < x_0$ und $x_0 y_0 = 2$. Man definiere rekursiv die beiden Folgen

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2}{x_{n+1}}.$$

Man zeige, daß die Folge $\{y_n\}$ monoton wächst und die Folge $\{x_n\}$ monoton fällt, und daß weiters für alle n gilt, daß $\sqrt{2} \in [y_n, x_n]$. Die Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ definieren also eine Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$. Bestimmen Sie die Konvergenzordnung des Iterationsverfahrens, wenn z.B. die Folge $\{x_n\}$ oder die Folge $\{y_n\}$ als Approximation für $\sqrt{2}$ herangezogen wird.

(24) Betrachten Sie das folgende Iterationsverfahren für gegebene positive reelle Zahlen x, w_0 und für $n \geq 2 \in \mathbb{N}$:

$$v_i = x/w_i^{n-1},$$
$$w_{i+1} = \frac{(n-1)w_i + v_i}{n}.$$

(a) Führen Sie mehrere Tests mit verschiedenen Werten von x, w_0 und n durch, um zu erkennen, gegen welchen Wert die Folgen $\{v_k\}$ und $\{w_k\}$ konvergieren. (Hinweis: für $n = 2$ ist das Verfahren analog zu Beispiel 23.)
(b) Beweisen Sie, daß für den Grenzwert s gilt $s \in [v_k, w_k]$ für alle k, und daß die Folgen eine Intervallschachtelung für den Grenzwert bilden.
(c) Führen Sie das Iterationsverfahren für die Werte $x = 4$, $w_0 = 2$, $n = 3, 10, 25, 50, 100$ aus und vergleichen Sie die Ergebnisse. Schließen Sie, für welche Werte von n das Verfahren tatsächlich verwendbar ist.

(25) Vergleichen Sie die Approximationsverfahren für $\sqrt{2}$ aus den Beispielen 22 und 23. Testen Sie, wie viele Folgenglieder benötigt werden, um $\sqrt{2}$ auf 3, 6, 9, 12 Stellen genau zu bestimmen. Wie viele Folgenglieder benötigt man jeweils, um die Genauigkeit auf 100 bzw. 1000 Stellen zu heben?

(26) Die Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

sind bekannterweise

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bestimmen Sie die Kondition des Problems abhängig von den Parametern a, b, c. Wo ist die Kondition schlecht, wo ist sie gut?

(27) Wann sind die Berechnungsformeln aus Beispiel 26 stabil, und wann sind sie instabil? Führen Sie im Fall von Instabilitäten algebraische Umformungen durch, um stabilere Lösungsformeln zu erhalten. (Hinweis: untersuchen Sie die Lösungen der Gleichung $x = (1 - \alpha x)^2$)

(28) Schreiben Sie eine Matlab–Funktion `x = rsolve(R, b)`, die ein lineares Gleichungssystem $Rx = b$ lst, wobei R eine obere Dreiecksmatrix sei.

(29) Schreiben Sie eine Matlab–Funktion `x = lsolve(L, b)`, die ein lineares Gleichungssystem $Lx = b$ lst, wobei L eine untere Dreiecksmatrix sei.

(30) Testes Sie die Funktionen aus den Beispielen 28 und 29, indem Sie jeweils zehn dreieckige Zufallsmatrizen der Dimensionen 1 bis 100 erzeugen und das Ergebnis mit dem Resultat vergleichen, das Sie mit dem \–Operator von Matlab berechnen. Überprüfen Sie die Aussage über den Aufwand $O(n^2)$ aus der Vorlesung empirisch.

(31) Schreiben Sie eine Funktion `[P, L, R] = lr(A)`, die eine LR–Zerlegung der Matrix A berechnet.

(32) Testen Sie die Funktion aus Beispiel 31 an jeweils zehn Zufallsmatrizen der Dimensionen 1 bis 100, und überprüfen Sie wieder den asymptotischen Aufwand $O(n^3)$.

(33) Schreiben Sie eine Matlab–Funktion `x = lrsolve(A, b)`, die mit Hilfe der Funktionen `lr`, `lsolve` und `rsolve` ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

(34) Erzeugen Sie wieder jeweils zehn Zufallsmatrizen und Zufallsvektoren der Dimensionen 1 bis 100, testen Sie die Funktion aus Beispiel 33, indem Sie mit dem \–Operator von Matlab vergleichen, und untersuchen Sie wieder den asymptotischen Aufwand.