35. Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 \\ -12 & 5 & -12 \\ 18 & 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie damit durch Vorwärts- und Rückwartseinsetzen das Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$b = \left(\frac{41}{12}, -\frac{22}{3}, \frac{29}{2}\right)^T.$$

Für die Zwischenschritte sollen keine Dezimalzahlen verwendet werden, sondern Brüche!

36. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix

$$A = \left(\begin{array}{c|c} R & v \\ \hline u^T & 0 \end{array}\right).$$

Es sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix und $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $x, b \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- Geben Sie die LR-Zerlegung der Matrix A an.
- Zeigen Sie: A ist genau dann regulär, wenn $u^T R^{-1} v \neq 0$.

37. Formulieren Sie einen Algorithmus mit möglichst wenigen Operationen zur Lösung des Gleichungssystems aus Aufgabe (36). Wie groß ist der numerische Aufwand?

38. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass für alle $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ gilt:

$$|a_{ij}| < \sqrt{a_{ii}a_{jj}} \leq \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj}).$$

39. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe (38)

$$\max_{i\neq j} |a_{ij}| \leq \max_i a_{ii}.$$

40. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Ist es möglich eine vollständige Pivotsuche mit Aufwand $\mathcal{O}(n^2)$ durchzuführen (anstelle von $\mathcal{O}(n^3)$)