(46) Beweisen Sie, daß für den Wachstumsfaktor ρ der LR–Zerlegung die Abschätzung $\rho(A) \leq 2^{n-1}$ gilt, wenn $A \in \mathbb{K}^{n \times x}$.

(47) Untersuchen Sie, was die Wirkung von Nachiterationsschritten ist, wenn man sie auf das (falsche) Ergebnis aus Beispiel 3.2.1.5 im Vorlesungsskriptum anwendet.

(48) Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor $\rho(A)$ für je 10 Zufallsmatrizen der Größen 5×5 bis 100×100 in Fünferschritten und stellen Sie das Ergebnis und die Kurve $\sqrt{n}$ in einem Diagramm dar.

(49) Wiederholen Sie Beispiel 48, stellen Sie aber statt $\rho(A)$ die Konditionszahl $\kappa_\infty(A)$ dar.

(50) Wenn man anstellen der Cholesky–Zerlegung einer hermiteschen positiv definiten Matrix A der Form $A = LL^*$ eine Zerlegung in obere Dreiecksmatrizen macht, erhält man als Ergebnis $A = R^*R$. Gibt es einen Zusammenhang zwischen L und R?

(51) Führen Sie mit der Hand eine Cholesky–Zerlegung der Matrix A durch und lösen Sie mit Hilfe der Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(52) Betrachten Sie das Polynom

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Um ein Polynominterpolationsproblem der Form $p(x_i) = p_i$ für $i = 0, \ldots, n$ zu lösen, könnte man ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a_i von p aufstellen. Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor b.

(53) Lösen Sie mit der Methode aus Beispiel 52 das Interpolationsproblem mit den Daten $n = 10$, $x_i = (i-5)/5$, $p_i = (-1)^i \sin(x_i)$, bestimmen Sie die Konditionszahl der Matrix A und schätzen Sie den Aufwand, den die Berechnung des Ergebnisses gekostet hat. Interpretieren Sie das Resultat.

(54) Sei $v \in \mathbb{K}^n$. Beweisen Sie, dass

$$S_v := \mathbb{I} - \frac{2}{v^*v} vv^*$$

eine Spiegelungsmatrix definiert. Bestimmen Sie auch, woran gespiegelt wird.

(55) Seien $v, w \in \mathbb{K}^n$. Welche Operation wird durch die Matrix $S_v S_w$ bewirkt?

(56) Berechnen Sie die QR–Zerlegung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Householder–Schmidt–Verfahrens und lösen Sie das Kleinste–Quadrate–Problem mit dem Vektor $b = (-1, 1, 1)^T$.

(57) Berechnen Sie die QR–Zerlegung von

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Givens–Rotationen und lösen Sie das Kleinste–Quadrate–Problem mit dem Vektor $b = (0, -1, 2)^T$..

(58) Schreiben Sie ein Matlab–Programm `qrG`, das die QR–Zerlegung einer Matrix A mit Hilfe des Gram-Schmidt–Verfahrens berechnet.

(59) Schreiben Sie ein Matlab–Programm `qrH`, das die QR–Zerlegung einer Matrix A mit Hilfe des Householder–Verfahrens berechnet.

(60) Vergleichen Sie die Verfahren aus Beispiel 58 und 59 mit verschiedenen Zufallsmatrizen in Dimensionen bis 1000. Testen Sie die Orthogonalität der berechneten orthogonalen Faktoren.