

PROSEMINAR ZU NUMERISCHE MATHEMATIK 1 (SS 2009)

- (66) Beweisen Sie die Rekursion (5.1) und (5.2) auf Seite 123 im Skriptum sowie die rekursive Darstellung von $f_{i_0 i_1 \dots i_k}$ auf Seite 125.
- (67) Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Neville den Wert des Interpolationspolynoms zu den Punkten $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, -1)$ und $(3, 1)$ an der Stelle $\frac{3}{2}$.
- (68) Berechnen Sie die Koeffizienten des newtonschen Interpolationspolynoms zu den Punkten $(-1, 2)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$.
- (69) Berechnen Sie das Hermitsche Interpolationspolynom p zu $(-1, 1)$, $(0, 2)$ und $(1, 3)$ mit $p'(0) = 2$ und $p''(0) = 2$.
- (70) Berechnen Sie den Thieleschen Kettenbruch zu den Punkten $(1; 4)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(5; 8)$.
- (71) Berechnen Sie den Wert des Thieleschen Kettenbruchs an der Stelle $x = 4$ zu den Interpolationspunkten $(1; 4)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(5; 8)$, $(0; 5)$.
- (72) Für die Funktion $f(x) = \cos x$ bestimmen Sie den Wert $\cos 0$, indem Sie den Thieleschen Kettenbruch T zu den Funktionswerten $(h; \cos h)$ für $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ berechnen und T bei 0 auswerten. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert des Interpolationspolynoms zu denselben Funktionswerten.
- (73) Studieren Sie den Abschnitt in Kapitel 5 auf Seite 128 des Skriptums über das Restglied der Polynominterpolation. Beweisen Sie die Abschätzung aus Theorem 5.1.1.7. Diskutieren Sie, wie sich das Restglied der Polynominterpolation verhält, wenn der Punkt x innerhalb des Intervalls $[x_0, x_n]$ liegt, das von den Stützstellen erzeugt wird, und wenn er außerhalb liegt. Für welchen Wert außerhalb des Intervalls bleibt die Polynominterpolation brauchbar?
- (74) Verwenden Sie die zusammengesetzte Trapezregel, um das Integral

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$$

anzunähern, indem Sie einige Unterteilungen verwenden. Versuchen Sie $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{24}$. Wieviele verschiedene Punkte müssen Sie auswerten? Versuchen Sie, den wahren Wert herauszufinden.

- (75) Setzen Sie Beispiel 74 fort, indem Sie die berechneten Werte in einer polynomialen Extrapolation verwenden, um den Wert für $h = 0$ zu schätzen.
- (76) Wie Beispiel 75 nur mit rationaler Extrapolation.

- (77) Versuchen Sie das Integral aus Beispiel 74 mit Hilfe der zusammengesetzten Simpson-Formel und Extrapolation zu bestimmen. Wie viele Punkte benötigen Sie, um 8 approximative Werte zu berechnen? Wie genau wird das Ergebnis?
- (78) Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen aus Beispiel 19 und 21 mittels automatischer Differentiation (vorwärts). Vergleichen Sie Aufwand und Genauigkeit der automatischen und numerischen Differentiation anhand der Beispiele.
- (79) Bestimmen Sie die Formeln für die Differentialzahlen zweiter Ordnung, d.h. für Tripel (f, f', f'') , und überprüfen Sie die Formeln, indem sie die ersten beiden Ableitungen von

$$f(x) = x^2 + 3\sqrt{\sin x - xe^{3x+4}}$$

an der Stelle $x = 1$ berechnen.

- (80) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung für die Funktion aus Beispiel 79 numerisch, d.h. mit Differenzenquotienten.
- (81) Verwenden Sie Polynom- und rationale Extrapolation zur Berechnung der zweiten Ableitung der Funktion f aus Beispiel 79 an $x = 1$. Vergleichen Sie Aufwand und Genauigkeit mit den Methoden zur automatischen Differentiation