2016 г. май — июнь *т. 71, вып. 3 (429)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.955+517.958

Посвящается памяти Бориса Моисеевича Левитана

Об уточнении дисперсионных оценок для одномерных уравнений Шрёдингера и Клейна–Гордона

И. Е. Егорова, Е. А. Копылова, В. А. Марченко, Г. Тешль

Доказывается, что для одномерного оператора Шрёдингера с потенциалом, имеющим первый интегрируемый момент, элементы матрицы рассеяния принадлежат унитальной винеровской алгебре функций с интегрируемыми преобразованиями Фурье. С использованием этого факта выводятся новые дисперсионные оценки для решений соответствующих уравнений Шрёдингера и Клейна–Гордона. В частности, мы избавляемся от условия более сильного убывания потенциала в случае наличия резонанса в конце непрерывного спектра.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера, уравнение Клейна–Гордона, дисперсионные оценки, рассеяние.

DOI: 10.4213/rm9708

Содержание

1. Введение

Мы рассматриваем одномерное уравнение Шрёдингера

$$\mathrm{i}\dot{\psi}(x,t)=H\psi(x,t), \qquad H:=-\frac{d^2}{dx^2}+V(x), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

Работа выполнена при поддержке FWF грантов Y330 и P27492-N25 и РФФИ гранта 16-01-00100

с вещественным интегрируемым потенциалом V и уравнение Клейна–Гордона

$$\ddot{\psi}(x,t) = -(H + m^2)\psi(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad m > 0. \tag{1.2}$$

Мы будем использовать векторную форму уравнения (1.2):

$$\mathrm{i}\dot{\Psi}(t) = \mathbf{H}\Psi(t), \tag{1.3}$$

где

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -H - m^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Нашей целью является получение дисперсионного убывания для этих уравнений. Это хорошо изученная область, и главным вкладом данной работы является существенное упрощение доказательств, которое вместе с тем позволяет улучшить предыдущие результаты. Наш подход базируется на том, что разность матрицы рассеяния и единичной матрицы принадлежит винеровской алгебре, т. е. преобразование Фурье этой разности является интегрируемым. Так как данный результат представляет независимый интерес, мы приводим его в отдельном разделе 2. Используя этот факт, мы доказываем затем наши основные результаты. Чтобы их сформулировать, введем весовые пространства $L^p_\sigma = L^p_\sigma(\mathbb{R})$, $\sigma \in \mathbb{R}$, с конечными нормами

$$\|\psi\|_{L^p_\sigma} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^{p\sigma} |\psi(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^{\sigma} |\psi(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Очевидно, что $\sigma = 0$ соответствует обычным пространствам L^p без веса. Напомним (см. [14] или [23; раздел 9.7]), что при $V \in L^1_1$ абсолютно непрерывный спектр оператора H совпадает с интервалом $[0,\infty)$. Кроме того, на интервале $(-\infty, 0)$ может находиться конечное число собственных значений. Концевая точка непрерывного спектра называется резонансом, если существует ограниченное решение уравнения $-\psi'' + V\psi = 0$ (это эквивалентно тому, что определитель Вронского для решений Йоста обращается в нуль в этой точке).

Для уравнения Шрёдингера справедливы следующие две теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть $V \in L^1_1(\mathbb{R})$. Тогда справедлива следующая асимптотика*:

$$\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} P_c\|_{L^1 \to L^\infty} = \mathscr{O}(t^{-1/2}), \qquad t \to \infty, \tag{1.5}$$

где $P_c = P_c(H)$ – ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{R})$ на непрерывный спектр оператора H.

Теорема 1.2. *Пусть $V \in L^1_2(\mathbb{R})$ и концевая точка спектра оператора H не является резонансом. Тогда справедлива следующая асимптотика*:

$$\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} P_c\|_{L^1_1 \to L^\infty_{-1}} = \mathscr{O}(t^{-3/2}), \qquad t \to \infty. \tag{1.6}$$

Отметим, что для свободного уравнения Шрёдингера (1.1) с $V = 0$ оценка (1.5) вытекает непосредственно из точной формулы для решения (см., например, [23; раздел 7.3]). Дисперсионное убывание (1.5) для возмущенного уравнения Шрёдингера получили М. Гольдберг и В. Шлаг [8], улучшив предыдущий результат Р. Ведера [25] при условии $V \in L^1_1$ в нерезонансном случае и при более ограничительном условии $V \in L^1_2$ в резонансном случае (см. также [4]). Подчеркнем, что наш подход не требует дополнительного убывания потенциала в резонансном случае. Более того, наше доказательство теоремы 1.1 является простым приложением теоремы Фубини. Чтобы показать, что дополнительное убывание V в резонансном случае не является необходимым, мы обобщили старый (но не очень известный) результат И. М. Гусейнова [9]. Отметим также, что на полуоси аналогичный результат для данных рассеяния хорошо известен (см. [14; задача 3.2.1]) и был использован Р. Ведером [27] для получения дисперсионных оценок на полуоси.

В силу унитарности оператора $\exp\{-\mathrm{i}tH\}\colon L^2 \to L^2$ и оценки (1.5), из интерполяционной теоремы Риса–Торина следует оценка

$$\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} P_c\|_{L^{p'} \to L^p} = \mathscr{O}(t^{-1/2+1/p}), \tag{1.7}$$

справедливая для любых p и p' таких, что $p \in [2, \infty]$ и $1/p + 1/p' = 1$. Используя (1.7), мы можем также вывести соответствующие оценки Стрихарца (см. [10; теорема 1.2]).

Дисперсионное убывание (1.6) установлено В. Шлагом [21] в случае $V \in L^1_4$ и затем М. Гольдбергом [7] в случае $V \in L^1_3$. Для $V \in L^1_2$ оценка (1.6) получена Х. Мицутани в работе [17]. В настоящей работе мы приводим доказательство (1.6), основанное на несколько ином подходе.

Из (1.6) немедленно следует дисперсионное убывание в весовых нормах:

$$\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} P_c\|_{L^2_\sigma \to L^2_{-\sigma}} = \mathscr{O}(t^{-3/2}), \qquad t \to \infty, \tag{1.8}$$

для любого $\sigma > 3/2$. Асимптотика вида (1.8) получена М. Мюратой [18] в нерезонансном случае для более общих (в том числе и многомерных) операторов типа Шрёдингера. В частности, в одномерном случае эти асимптотики установлены в предположении, что $\sigma > 5/2$ и $|V(x)| \leqslant C(1 + |x|)^{-\rho}$ при некотором $\rho > 4$ (см. также обзор [21]).

Во второй части настоящей работы мы доказываем новые дисперсионные оценки для уравнения Клейна–Гордона. Чтобы их сформулировать, определим потенциал Бесселя

$$\mathscr{J}_\alpha = \mathscr{F}^{-1}(1 + |\cdot|^2)^{\alpha/2}\mathscr{F},$$

где $\mathscr{F}$ обозначает преобразование Фурье. Определим также обобщенное пространство Соболева $H^{\alpha,1}_\sigma(\mathbb{R})$ (ср. [1; определение 6.2.2]) как пространство распределений $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^{\alpha,1}_\sigma} = \|\mathscr{J}_\alpha f\|_{L^1_\sigma}, \qquad \alpha, \sigma \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Как и ранее, $H^{\alpha,1} = H^{\alpha,1}_0$.

Теорема 1.3. (i) *Пусть $V \in L^1_1(\mathbb{R})$. Тогда имеет место следующая асимптотика*:

$$\|\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12}\|_{H^{1/2,1}\to L^\infty} = \mathscr{O}(t^{-1/2}), \qquad t \to \infty. \tag{1.10}$$

(ii) *Пусть $V \in L^1_2(\mathbb{R})$ и концевая точка спектра оператора H не является резонансом. Тогда*

$$\|\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12}\|_{H^{1/2,1}_1\to L^\infty_{-1}} = \mathscr{O}(t^{-3/2}), \qquad t \to \infty. \tag{1.11}$$

Здесь $\mathbf{P}_c$ – ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ на непрерывный спектр $\mathbf{H}^2$ и $[\,\cdot\,]^{ij}$ обозначает (i,j)-й элемент соответствующего матричного оператора.

Отметим, что соответствующие оценки для других элементов матричного оператора $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c$ могут быть получены аналогично.

Теорема 1.3, (i) зачастую формулируется в терминах пространств Бесова $B^{1/2}_{1,1}(\mathbb{R})$ (см. [1; определение 6.2.2]). А именно, вложение $B^{1/2}_{1,1} \subset H^{1/2,1}$ (см. [1; теорема 6.2.4]) показывает, что (1.10) выполняется с $B^{1/2}_{1,1}$ вместо $H^{1/2,1}$. Аналогично, (1.11) выполняется с $B^{1/2}_{1,1,1}$ вместо $H^{1/2,1}$, где $B^{1/2}_{1,1,1}$ – соответствующее пространство Бесова с весом (чтобы определить $B^{1/2}_{1,1,1}$, нужно в определении $B^{1/2}_{1,1}$ заменить L^1 на L^1_1). Как и ранее, требуемая оценка следует из того, что $B^{1/2}_{1,1,1} \subset H^{1/2,1}_1$ (см., например, [16; предложение 3.12]).

Кроме того, из (1.10) вытекает, что

$$\big\|\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12}\big\|_{B^{1/2-3/p}_{p',p'}\to L^p} = \mathscr{O}(t^{-1/2+1/p}), \qquad t \to \infty, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1, \tag{1.12}$$

для любого $p \in [2,\infty]$ при том же предположении $V \in L^1_1(\mathbb{R})$ (см. следствие 5.3).

В трехмерном случае $W^{k,p} \to L^q$ оценки для уравнения Клейна–Гордона установлены А. Соффером и М. И. Вайнштейном [22] (см. также [29] для пространств размерности $n \geqslant 3$). В одномерном случае $W^{k,p} \to W^{k,q}$ оценки получены Р. Ведером [26] для $V \in L^1_\gamma$, где $\gamma > 3/2$ в нерезонансном случае и $\gamma > 5/2$ в резонансном случае. Дисперсионные оценки типа (1.12) (с $B^{1/2-3/p}_{p',p}(V)$ вместо $B^{1/2-3/p}_{p',p'}$) приведены в [4], но они также требуют $V \in L^1_2$ в резонансном случае.

Для одномерного уравнения Клейна–Гордона убывание $t^{-3/2}$ в весовых энергетических нормах $H^1_\sigma \oplus L^2_\sigma \to H^1_{-\sigma} \oplus L^2_{-\sigma}$, где $\sigma > 5/2$, было получено А. И. Комечем и Е. А. Копыловой [11] (см. также обзор [12]).

Отметим, что дисперсионные оценки типа (1.5)–(1.8) и (1.10)–(1.12) играют важную роль в доказательстве асимптотической устойчивости солитонов для соответствующих одномерных нелинейных уравнений [2], [13], а также для их дискретных аналогов [6].

2. Непрерывность матрицы рассеяния

Определим банахову алгебру $\mathscr{A}$ функций с интегрируемыми преобразованиями Фурье:

$$\mathscr{A} = \left\{ f\colon f(k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kp} \widehat{f}(p)\, dp,\ \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}$$

с нормой $\|f\|_{\mathscr{A}} = \|\widehat{f}\|_{L^1}$, а также соответствующую унитальную банахову алгебру $\mathscr{A}_1$:

$$\mathscr{A}_1 = \left\{ f\colon f(k) = c + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kp} \widehat{g}(p)\, dp,\ \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{C} \right\}$$

с нормой $\|f\|_{\mathscr{A}_1} = |c| + \|\widehat{g}\|_{L^1}$. Очевидно, что $\mathscr{A}$ является подалгеброй $\mathscr{A}_1$. Алгебра $\mathscr{A}_1$ может трактоваться как алгебра функций, преобразования Фурье которых имеют вид $c\delta(\,\cdot\,) + \widehat{g}(\,\cdot\,)$, где δ – дельта-функция, а $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Отметим, что по теореме Винера, если $f \in \mathscr{A}_1 \setminus \mathscr{A}$ и $f(k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{R}$, то $f^{-1}(k) \in \mathscr{A}_1$ (см. [28]).

Напомним некоторые факты теория рассеяния [5], [14] для оператора Шрёдингера H, определенного в (1.1). В предположении $V \in L^1_1$ существуют решения Йоста $f_\pm(x,k)$ уравнения

$$H\psi = k^2\psi, \qquad k \in \overline{\mathbb{C}_+},$$

где $\mathbb{C}_+ = \{k\colon \operatorname{Im} k > 0\}$. Эти решения нормализованы так, что

$$f_\pm(x,k) \sim \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}, \qquad x \to \pm\infty,$$

и могут быть записаны в виде

$$f_\pm(x,k) = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx} h_\pm(x,k), \qquad h_\pm(x,k) = 1 \pm \int_0^{\pm\infty} B_\pm(x,y)\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}ky}\, dy, \tag{2.1}$$

с вещественнозначной функцией $B_\pm(x,y)$, удовлетворяющей следующим условиям (см. [5; § 2] или [14; § 3.1]):

$$|B_\pm(x,y)| \leqslant \mathrm{e}^{\gamma_\pm(x)}\eta_\pm(x+y), \tag{2.2}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} B_\pm(x,y) \pm V(x+y) \right| \leqslant 2\mathrm{e}^{\gamma_\pm(x)}\eta_\pm(x+y)\eta_\pm(x), \tag{2.3}$$

где

$$\gamma_\pm(x) = \int_x^{\pm\infty} (y-x)|V(y)|\, dy, \qquad \eta_\pm(x) = \pm\int_x^{\pm\infty} |V(y)|\, dy. \tag{2.4}$$

Так как $\eta_\pm(x+\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$, то очевидно, что

$$h_\pm(x,\,\cdot\,) - 1, h'_\pm(x,\,\cdot\,) \in \mathscr{A} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Обозначим через

$$W(\varphi(x,k),\psi(x,k)) = \varphi(x,k)\psi'(x,k) - \varphi'(x,k)\psi(x,k)$$

обычный вронскиан. Положим

$$W(k) = W(f_-(x,k), f_+(x,k)), \qquad W_\pm(k) = W(f_\mp(x,k), f_\pm(x,-k)).$$

Решения Йоста $f_\pm(x,k)$, а также их производные и вронскиан $W(k)$ не принадлежат $\mathscr{A}_1$. Тем не менее элементы матрицы рассеяния, т. е. коэффициенты прохождения и отражения,

$$T(k) = \frac{2\mathrm{i}k}{W(k)}, \qquad R_\pm(k) = \mp\frac{W_\pm(k)}{W(k)},$$

являются элементами этой алгебры.

Теорема 2.1. *Если $V \in L^1_1$, то $T(k) - 1 \in \mathscr{A}$ и $R_\pm(k) \in \mathscr{A}$.*

Доказательство. Так как $|T(k)| \leqslant 1$ при $k \in \mathbb{R}$, то вронскиан $W(k)$ может обращаться в нуль только на границе непрерывного спектра, т. е. при $k = 0$, что соответствует резонансному случаю. Кроме того, это нуль не выше первого порядка.

Шаг (i). Рассмотрим сначала нерезонансный случай $W(0) \neq 0$. Обозначим $h_\pm(k) := h_\pm(0,k)$, $h'_\pm(k) := h'_\pm(0,k)$. Тогда из (2.1) следует, что

$$W(k) = 2\mathrm{i}k h_+(k)h_-(k) + \widetilde{W}(k), \qquad \widetilde{W}(k) := h_-(k)h'_+(k) - h'_-(k)h_+(k), \tag{2.6}$$

$$W_\pm(k) = h_\mp(k)h'_\pm(-k) - h_\pm(-k)h'_\mp(k). \tag{2.7}$$

Кроме того, $\widetilde{W}(k), W_\pm(k) \in \mathscr{A}$. Положим

$$\nu(k) := \frac{1}{\mathrm{i}k - 1} = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{e}^{-y}\,dy \tag{2.8}$$

и заметим, что $\nu(k) \in \mathscr{A}$, $k\nu(k) \in \mathscr{A}_1$, а значит, $\nu(k)W(k) \in \mathscr{A}_1$. Так как $\nu(k)W(k) \to 2$ при $k \to \infty$, то $\nu(k)W(k) \in \mathscr{A}_1 \setminus \mathscr{A}$. Более того, $\nu(k)W(k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{R}$, следовательно, $(\nu(k)W(k))^{-1} \in \mathscr{A}_1$. Далее, $\nu(k)W_\pm(k) \in \mathscr{A}$, и мы имеем

$$R_\pm(k) = \mp\frac{\nu(k)W_\pm(k)}{\nu(k)W(k)} \in \mathscr{A}, \qquad T(k) = \frac{2\mathrm{i}k\nu(k)}{\nu(k)W(k)} \in \mathscr{A}_1.$$

Кроме того, так как $T(k) \to 1$ при $k \to \infty$, то $T(k) - 1 \in \mathscr{A}$.

Шаг (ii). Резонансный случай доказывается сложнее. Введем функции

$$\Phi_\pm(k) := h_\pm(k)h'_\pm(0) - h'_\pm(k)h_\pm(0), \tag{2.9}$$

$$K_\pm(x) := \pm\int_x^{\pm\infty} B_\pm(0,y)\,dy, \qquad D_\pm(x) := \pm\int_x^{\pm\infty} \frac{\partial}{\partial x}B_\pm(0,y)\,dy, \tag{2.10}$$

где $B_\pm(x,y)$ – операторы преобразования из (2.1). Интегрируя второе равенство в (2.1) формально по частям, получим

$$\begin{aligned} h'_\pm(k) &= \pm\int_0^{\pm\infty} \frac{\partial}{\partial x}B_\pm(0,y)\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}ky}\,dy = D_\pm(0) + 2\mathrm{i}k\int_0^{\pm\infty} D_\pm(y)\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}ky}\,dy \\ &= h'_\pm(0) + 2\mathrm{i}k\int_0^{\pm\infty} D_\pm(y)\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}ky}\,dy, \\ h_\pm(k) &= h_\pm(0) + 2\mathrm{i}k\int_0^{\pm\infty} K_\pm(y)\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}ky}\,dy. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что интегралы здесь понимаются как несобственные. Их подстановка в (2.9) дает

$$\Phi_\pm(k) = 2\mathrm{i}k\Psi_\pm(k), \qquad \Psi_\pm(k) := \int_0^{\pm\infty} \big(D_\pm(y)h_\pm(0) - K_\pm(y)h'_\pm(0)\big)\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}ky}\,dy.$$

Лемма 2.2. *Если* $V \in L^1_1$, *то* $\Psi_\pm(k) \in \mathscr{A}$.

Доказательство. Следуя [9], мы докажем, что функции

$$H_\pm(y) := D_\pm(y)h_\pm(0) - K_\pm(y)h'_\pm(0)$$

принадлежат пространству $L^1(\mathbb{R}_\pm) \cap L^\infty(\mathbb{R}_\pm)$. Оригинальное доказательство этого факта, приведенное в работе [9], можно значительно упростить, используя уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко в форме, предложенной в [5] (см. также [14; § 3.5]). А именно, ядра $B_\pm(x,y)$ являются решениями уравнений

$$F_\pm(x+y) + B_\pm(x,y) \pm \int_0^{\pm\infty} B_\pm(x,t)F_\pm(x+y+z)\,dz = 0, \tag{2.11}$$

где функции $F_\pm(x)$ абсолютно непрерывны, причем $F'_\pm \in L^1(\mathbb{R}_\pm)$, и имеют место оценки

$$|F_\pm(x)| \leqslant C\eta_\pm(x), \qquad \pm x \geqslant 0, \tag{2.12}$$

где $\eta_\pm$ определены в (2.4). Продифференцируем теперь (2.11) по x и положим $x = 0$. Кроме того, положим $x = 0$ в самом уравнении (2.11) и затем проинтегрируем оба уравнения по y от x до $\pm\infty$. Тогда из (2.10) следует, что

$$\begin{aligned}
&\pm \int_x^{\pm\infty} F_\pm(y)\,dy + K_\pm(x) + \int_0^{\pm\infty} B_\pm(0,z) \int_x^{\pm\infty} F_\pm(y+z)\,dy\,dz = 0,\\
&\mp F_\pm(x) + D_\pm(x) + \int_0^{\pm\infty} \frac{\partial}{\partial x}B_\pm(0,z) \int_x^{\pm\infty} F_\pm(y+z)\,dy\,dz\\
&\qquad - \int_0^{\pm\infty} B_\pm(0,z)F_\pm(x+z)\,dz = 0.
\end{aligned}$$

Чтобы избавиться от двойного интегрирования, используем (2.10) и равенства

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_x^{\pm\infty} F_\pm(y+z)\,dy = -F_\pm(x+z).$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
&\pm (1 + K_\pm(0)) \int_x^{\pm\infty} F_\pm(y)\,dy + K_\pm(x) \mp \int_0^{\pm\infty} K_\pm(z)F_\pm(x+z)\,dz\\
&\qquad = K_\pm(x) \pm h_\pm(0) \int_x^{\pm\infty} F_\pm(y)\,dy \mp \int_0^{\pm\infty} K_\pm(z)F_\pm(x+z)\,dz = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

и

$$\begin{aligned}
&\mp F_\pm(x) + D_\pm(x) \pm h'_\pm(0) \int_x^{\pm\infty} F_\pm(y)\,dy \mp \int_0^{\pm\infty} D_\pm(z)F_\pm(x+z)\,dz\\
&\qquad - \int_0^{\pm\infty} B_\pm(0,z)F_\pm(x+z)\,dz = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Умножая (2.13) на $h'_\pm(0)$, а (2.14) на $h_\pm(0)$, и вычитая первое уравнение из второго, получим интегральные уравнения

$$H_\pm(x) \mp \int_0^{\pm\infty} H_\pm(y) F_\pm(x+y)\,dy = G_\pm(x), \tag{2.15}$$

где

$$G_\pm(x) = h_\pm(0)\biggl(\int_0^{\pm\infty} B_\pm(0,y) F_\pm(x+y)\,dy \pm F_\pm(x)\biggr).$$

Из оценок (2.2) и (2.12) следует, что

$$|G_\pm(x)| \leqslant C\eta_\pm(x), \qquad \pm x \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Далее, для достаточно большого $N>0$ представим (2.15) в виде

$$H_\pm(x) \mp \int_{\pm N}^{\pm\infty} H_\pm(y) F_\pm(x+y)\,dy = G_\pm(x,N), \tag{2.17}$$

где

$$G_\pm(x,N) = G_\pm(x) \pm \int_0^{\pm N} H_\pm(y) F_\pm(x+y)\,dy.$$

Из формул (2.10) и оценок (2.2)–(2.4) следует, что $H_\pm \in L^\infty(\mathbb{R}_\pm)\cap C(\mathbb{R}_\pm)$. Поэтому $|G_\pm(x,N)| \leqslant C(N)\eta_\pm(x)$ в силу (2.16) и монотонности $\eta_\pm(x)$. Применяя к (2.17) метод последовательных приближений (см. [14; гл. 3, § 2]), получим, что $H_\pm \in L^1(\mathbb{R}_\pm)$. Лемма 2.2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.1 в резонансном случае. Так как решения Йоста линейно зависимы при $k=0$, т. е. $h_+(x,0)=ch_-(x,0)$, то мы будем различать два случая: $h_+(0)h_-(0)\neq 0$ и $h_+(0)=h_-(0)=0$. В первом случае имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(k) = \widetilde{W}(k) - \widetilde{W}(0) &= \frac{h_+(k)}{h_-(0)}\Phi_-(k) - \frac{h_-(k)}{h_+(0)}\Phi_+(k)\\ &= 2\mathrm{i}k\biggl(\frac{h_+(k)}{h_-(0)}\Psi_-(k) - \frac{h_-(k)}{h_+(0)}\Psi_+(k)\biggr).\end{aligned}$$

Аналогичным образом, во втором случае $h_+(0)=h_-(0)=0$ (и, следовательно, $h'_+(0)h'_-(0)\neq 0$), мы имеем $\Phi_\pm(k) = h_\pm(k)h'_\pm(0) = 2\mathrm{i}k\Psi_\pm(k)$ и, значит,

$$\widetilde{W}(k) = 2\mathrm{i}k\biggl(\frac{h'_+(k)}{h'_-(0)}\Psi_-(k) - \frac{h'_-(k)}{h'_+(0)}\Psi_+(k)\biggr).$$

Таким образом,

$$\frac{W(k)}{2\mathrm{i}k} = h_-(k)h_+(k) + \begin{cases} \dfrac{h_+(k)}{h_-(0)}\Psi_-(k) - \dfrac{h_-(k)}{h_+(0)}\Psi_+(k), & h_+(0)h_-(0)\neq 0,\\ \dfrac{h'_+(k)}{h'_-(0)}\Psi_-(k) - \dfrac{h'_-(k)}{h'_+(0)}\Psi_+(k), & h_+(0)h_-(0)=0,\end{cases}$$

где правая часть лежит в $\mathscr{A}_1$ в силу (2.5) и леммы 2.2. Так как $W(k)/(2\mathrm{i}k) = T(k)^{-1} \neq 0$, то мы заключаем, что $T(k)-1 \in \mathscr{A}$. Аналогично,

$$\frac{W_\pm(k)}{2\mathrm{i}k} = \begin{cases} \dfrac{h_\pm(-k)}{h_\mp(0)}\Psi_\mp(k) - \dfrac{h_\mp(k)}{h_\pm(0)}\Psi_\pm(-k), & h_+(0)h_-(0) \neq 0, \\ \dfrac{h'_\pm(-k)}{h'_\mp(0)}\Psi_\mp(k) - \dfrac{h'_\mp(k)}{h'_\pm(0)}\Psi_\pm(-k), & h_+(0)h_-(0) = 0, \end{cases}$$

где правая часть лежит в $\mathscr{A}$, и, значит,

$$R_\pm(k) = \mp\frac{W_\pm(k)}{2\mathrm{i}k}T(k) \in \mathscr{A}.$$

Теорема 2.1 доказана.

Рассмотрим теперь функцию $\psi(x,y,k)$, определенную следующим образом:

$$\psi(x,y,k) = h_+(y,k)h_-(x,k)T(k) - 1 \quad \text{при } y \geqslant x \tag{2.18}$$

и $\psi(x,y,k) = \psi(y,x,k)$ при $y < x$. Из теоремы 2.1 и формулы (2.5) следует, что $\psi(x,y,\,\cdot\,) \in \mathscr{A}$.

Лемма 2.3. *Справедлива следующая оценка*:

$$\|\psi(x,y,\,\cdot\,)\|_{\mathscr{A}} \leqslant C, \tag{2.19}$$

где константа C не зависит от x и y.

Доказательство. Введем величины

$$\sup_{\pm x \geqslant 0}\biggl(\pm\int_0^{\pm\infty} |B_\pm(x,y)|\,dy\biggr) = C_\pm,$$

которые конечны в силу (2.2). Тогда

$$\|h_\pm(x,\,\cdot\,)\|_{\mathscr{A}_1} \leqslant 1 + C_\pm, \quad \|h_\pm(x,\,\cdot\,) - 1\|_{\mathscr{A}} \leqslant C_\pm \quad \text{при } \pm x \geqslant 0. \tag{2.20}$$

Рассмотрим три возможных случая: (a) $x \leqslant y \leqslant 0$, (b) $0 \leqslant x \leqslant y$, (c) $x \leqslant 0 \leqslant y$. В случае (c) оценка $\|\psi(x,y,\,\cdot\,)\|_{\mathscr{A}} \leqslant C$ следует непосредственно из (2.20) и теоремы 2.1. В двух других случаях используем соотношения рассеяния

$$T(k)f_\pm(x,k) = R_\mp(k)f_\mp(x,k) + f_\mp(x,-k) \tag{2.21}$$

для получения представления

$$\psi(k,x,y) = \begin{cases} h_-(x,k)\bigl(R_-(k)h_-(y,k)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}yk} + h_-(y,-k)\bigr) - 1, & x \leqslant y \leqslant 0, \\ h_+(y,k)\bigl(R_+(k)h_+(x,k)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}xk} + h_+(x,-k)\bigr) - 1, & 0 \leqslant x \leqslant y. \end{cases} \tag{2.22}$$

Так как для любой функции $g(k) \in \mathscr{A}$ и любого вещественного s функция $g(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}$ принадлежит $\mathscr{A}$, а ее $\mathscr{A}$-норма не зависит от s, то мы приходим к (2.19). Лемма доказана.

3. Уравнение Шрёдингера

Теперь мы можем доказать дисперсионное убывание (1.5) для уравнения Шрёдингера (1.1). Из спектральной теоремы следует, что

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_c = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}(\mathscr{R}(\omega+\mathrm{i}0)-\mathscr{R}(\omega-\mathrm{i}0))\,d\omega, \tag{3.1}$$

где $\mathscr{R}(\omega)=(H-\omega)^{-1}$ – резольвента оператора H и предел понимается в строгом смысле [23]. Выражая ядро резольвенты $R(\omega)$ при $\omega=k^2\pm\mathrm{i}0$, $k>0$, через решения Йоста, получим (см. [5], [23])

$$[\mathscr{R}(k^2\pm\mathrm{i}0)](x,y) = -\frac{f_+(y,\pm k)f_-(x,\pm k)}{W(\pm k)} = \mp\frac{f_+(y,\pm k)f_-(x,\pm k)T(\pm k)}{2\mathrm{i}k}$$

при всех $x\leqslant y$ (при $x>y$ нужно поменять местами переменные x и y).

Таким образом, в случае $x\leqslant y$ интегральное ядро оператора $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_{k_0}(H)$ выражается формулой

$$\begin{aligned}
[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_{k_0}](x,y) &= \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-k_0}^{k_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tk^2}\,\frac{f_+(y,k)f_-(x,k)T(k)}{2\mathrm{i}k}k\,dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-k_0}^{k_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(tk^2-|y-x|k)}h_+(y,k)h_-(x,k)T(k)\,dk,
\end{aligned}$$

где $P_{k_0}=P_H([0,k_0^2])$ – спектральный проектор на интервал $[0,k_0^2]$. Переходя к пределу при $k_0\to\infty$, получим

$$\begin{aligned}
[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_c](x,y) &= \lim_{k_0\to\infty}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_{k_0}](x,y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(tk^2-|y-x|k)}h_+(y,k)h_-(x,k)T(k)\,dk,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где при $t\in\mathbb{R}$ интеграл понимается как несобственный (если $\operatorname{Im}t<0$, то интеграл сходится абсолютно). На самом деле сходимость интеграла при $t\in\mathbb{R}$ обеспечивается нижеследующей леммой 3.1, а из леммы 2.3 следует, в свою очередь, оценка $\big|[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_{k_0}](x,y)\big|\leqslant C|t|^{-1/2}$. Таким образом, мы можем применить теорему о мажорируемой сходимости и заключить, что правая часть равенства (3.2) действительно является ядром оператора $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_c$ на $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$.

Лемма 3.1. *При $\operatorname{Im}t\leqslant 0$ справедливо следующее представление*:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_c](x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathrm{i}t}}\biggl(&\exp\Bigl\{-\frac{|x-y|^2}{4\mathrm{i}t}\Bigr\} \\
&+\int_{\mathbb{R}}\exp\Bigl\{-\frac{(p+|x-y|)^2}{4\mathrm{i}t}\Bigr\}\widehat{\psi}(x,y,p)\,dp\biggr),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\widehat{\psi}(x,y,p)$ – преобразование Фурье функции $\psi(x,y,k)$, определенной в (2.18).

Доказательство. Из (3.2) следует, что

$$[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_c](x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(tk^2-|y-x|k)}(1+\psi(x,y,k))\,dk.$$

Так как первое слагаемое в интеграле легко вычисляется, то мы рассмотрим только второе слагаемое, содержащее ψ. Используя теорему Фубини, представим это слагаемое в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\lim_{k_0\to\infty}&\int_{-k_0}^{k_0}\int_{\mathbb{R}}\exp\{-\mathrm{i}(tk^2-|y-x|k-kp)\}\widehat{\psi}(x,y,p)\,dp\,dk\\
&=\frac{1}{2\pi}\lim_{k_0\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\exp\biggl\{\mathrm{i}\frac{(p+|y-x|)^2}{4t}\biggr\}\\
&\qquad\times\int_{-k_0}^{k_0}\exp\biggl\{-\mathrm{i}\frac{(2kt-|y-x|-p)^2}{4t}\biggr\}\,dk\,\widehat{\psi}(x,y,p)\,dp\\
&=\frac{1}{2\sqrt{4\pi\mathrm{i}t}}\lim_{k_0\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\exp\biggl\{\mathrm{i}\frac{(p+|y-x|)^2}{4t}\biggr\}\bigl(\operatorname{erf}(q_+)+\operatorname{erf}(q_-)\bigr)\widehat{\psi}(x,y,p)\,dp,
\end{aligned}$$

где

$$q_\pm=\frac{k_0}{2}\sqrt{4\mathrm{i}t}\pm\mathrm{i}\frac{p+|x-y|}{\sqrt{4\mathrm{i}t}},$$

а $\operatorname{erf}(z)$ – функция ошибок (см. [19; § 7.2]). Так как $\operatorname{erf}(z)=1+\mathscr{O}(\mathrm{e}^{-z^2})$ при $z\to\infty$ и $|\arg(z)|<3\pi/4$ (см. [19; формула (7.12.1)]), то утверждение теоремы следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Доказательство теоремы 1.1. Так как

$$\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_c\|_{L^1\to L^\infty}=\sup_{\|f\|_{L^1}=1,\ \|g\|_{L^1}=1}\langle f,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_cg\rangle=\sup_{x,y}\bigl|[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_c](x,y)\bigr|,$$

то теорема 1.1 следует из лемм 3.1 и 2.3.

В действительности мы установили несколько более сильный результат.

Следствие 3.2. *Пусть* $V\in L^1_1(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_{k_0}\|_{L^1\to L^\infty}\leqslant C|t|^{-1/2},\qquad \operatorname{Im}t\leqslant 0,$$

при каждом $0\leqslant k_0\leqslant\infty$.

Доказательство. Данная оценка вытекает из полученного при доказательстве леммы 3.1 представления для $[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_{k_0}](x,y)$, ограниченности $\operatorname{erf}(q_\pm)$ в рассматриваемой области, а также оценки (2.19).

4. Уравнение Шрёдингера (нерезонансный случай)

В этом разделе мы рассмотрим нерезонансный случай и докажем дисперсионное убывание (1.6). Мы будем использовать следующее представление для скачка резольвенты на непрерывном спектре:

$$[\mathscr{R}(k^2+\mathrm{i}0)-\mathscr{R}(k^2-\mathrm{i}0)](x,y)=\frac{T(k)f_+(y,k)f_-(x,k)+\overline{T(k)f_+(y,k)f_-(x,k)}}{-2\mathrm{i}k}$$

при $x\leqslant y$ и $k>0$. Из соотношений рассеяния (2.21) следует, что

$$\begin{aligned}
f_-(x,k)&=T(-k)f_+(x,-k)-R_-(-k)f_-(x,-k),\\
\overline{f_+(y,k)}&=T(k)f_-(y,k)-R_+(k)f_+(y,k),
\end{aligned}$$

и, используя условие согласования $T\overline{R}_- + \overline{T}R_+ = 0$, мы приходим к следующей формуле (см. [21; с. 13]):

$$[\mathscr{R}(k^2+\mathrm{i}0) - \mathscr{R}(k^2-\mathrm{i}0)](x,y) = \frac{|T(k)|^2}{-2\mathrm{i}k}[f_+(y,k)f_+(x,-k) + f_-(y,k)f_-(x,-k)]. \tag{4.1}$$

Подставив эту формулу в (3.1), получим

$$[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_c](x,y) = [\mathscr{K}_+(t)](x,y) + [\mathscr{K}_-(t)](x,y),$$
$$[\mathscr{K}_\pm(t)](x,y) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(tk^2 \mp |y-x|k)}|T(k)|^2 h_\pm(y,k)h_\pm(x,-k)\,dk.$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned}[\mathscr{K}_\pm(t)](x,y) = \pm\frac{|y-x|}{8\pi t}&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(tk^2\mp|y-x|k)}\frac{|T(k)|^2}{k}h_\pm(y,k)h_\pm(x,-k)\,dk \\ &-\frac{1}{8\pi\mathrm{i}t}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(tk^2\mp|y-x|k)}\frac{|T(k)|^2}{k^2}h_\pm(y,k)h_\pm(x,-k)\,dk \\ &+\frac{1}{8\pi\mathrm{i}t}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(tk^2\mp|y-x|k)}\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial k}\big[\,|T(k)|^2h_\pm(y,k)h_\pm(x,-k)\big]\,dk.\end{aligned}$$

Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 3.1, мы приходим к представлению

$$[\mathscr{K}_\pm(t)](x,y) = \frac{t^{-3/2}}{8\sqrt{\pi\mathrm{i}}}\int_{\mathbb{R}}\exp\biggl\{\mathrm{i}\frac{(p+|x-y|)^2}{4t}\biggr\}\sum_{j=1}^{3}\widehat{\psi}_j^\pm(x,y,p)\,dp, \tag{4.2}$$

где $\widehat{\psi}_j^\pm(x,y,p)$, $j=1,2,3$, – преобразования Фурье функций

$$\begin{aligned}\psi_1^\pm(x,y,k) &= \pm|y-x|\,\frac{|T(k)|^2}{k}h_\pm(y,k)h_\pm(x,-k),\\ \psi_2^\pm(x,y,k) &= \mathrm{i}\frac{|T(k)|^2}{k^2}h_\pm(y,k)h_\pm(x,-k),\\ \psi_3^\pm(x,y,k) &= -\mathrm{i}\frac{1}{k}\,\frac{\partial}{\partial k}\big[\,|T(k)|^2h_\pm(y,k)h_\pm(x,-k)\big].\end{aligned}$$

Далее мы оценим $\mathscr{A}$-нормы этих функций. Начнем со следующей леммы.

Лемма 4.1. *Пусть* $V \in L^1_2$ *и* $W(0) \neq 0$. *Тогда* $T(k)h_\pm(x,k)/k \in \mathscr{A}$ *и*

$$\biggl\|\frac{T(k)h_\pm(x,k)}{k}\biggr\|_{\mathscr{A}} \leqslant C(1+|x|), \qquad x\in\mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Так как

$$\frac{T(k)}{k} = \frac{2\mathrm{i}\nu(k)}{\nu(k)W(k)} \in \mathscr{A}$$

(см. (2.8)), то при $x\in\mathbb{R}_\pm$ оценка (4.3) следует из (2.20). Рассмотрим случай $x\in\mathbb{R}_\mp$. Из соотношений рассеяния (2.21) следует, что

$$\begin{aligned}T(k)h_\pm(x,k) = (R_\mp(k)+1)h_\mp(x,k)\mathrm{e}^{\mp2\mathrm{i}kx} - (h_\mp(x,k) - h_\mp(x,-k))\mathrm{e}^{\mp2\mathrm{i}kx}\\ + h_\mp(x,-k)(1-\mathrm{e}^{\mp2\mathrm{i}kx}).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Используя (2.1), получим

$$\begin{aligned}\frac{h_\mp(x,k)-h_\mp(x,-k)}{k} &= \mp\int_0^{\mp\infty} B_\mp(x,r)\frac{\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}kr}-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kr}}{k}\,dr \\ &= \mathrm{i}\int_0^{\mp\infty} B_\mp(x,r)\int_{-r}^{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\,dy\,dr \\ &= \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\mp|y|}^{\mp\infty} B_\mp(x,r)\,dr\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\,dy.\end{aligned}$$

Далее, заметим, что при $V \in L_2^1$ из формулы (2.2) следует, что $B_\mp(x,\cdot) \in L_1^1(\mathbb{R}_\mp)$ при любом фиксированном x и, соответственно,

$$S_\mp(x,y) = \int_y^{\mp\infty} |B_\mp(x,r)|\,dr \in L^1(\mathbb{R}_\mp).$$

Основываясь на этом наблюдении, получим

$$\left\|\frac{h_\mp(x,k)-h_\mp(x,-k)}{k}\right\|_{\mathscr{A}} \leqslant C, \qquad x\in\mathbb{R}_\mp. \tag{4.5}$$

По тем же причинам формула (2.3) влечет включение

$$\frac{h'_\mp(0,k)-h'_\mp(0,-k)}{k} \in \mathscr{A}. \tag{4.6}$$

Далее, из (2.6) и (2.7) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{W(k)\mp W_\pm(k)}{k} &= 2\mathrm{i}h_+(k)h_-(k) \\ &\quad + \frac{h_-(k)h'_+(k)-h'_-(k)h_+(k)\mp h_\mp(k)h'_\pm(-k)\pm h_\pm(-k)h'_\mp(k)}{k} \\ &= 2\mathrm{i}h_+(k)h_-(k)\pm h_\mp(k)\frac{h'_\pm(k)-h'_\pm(-k)}{k}\mp h'_\mp(k)\frac{h_\pm(k)-h_\pm(-k)}{k}.\end{aligned}$$

Применяя (2.5), (4.5) и (4.6), получаем

$$\frac{W(k)\mp W_\pm(k)}{k} - 2\mathrm{i} \in \mathscr{A}.$$

Как показано в теореме 2.1, в нерезонансном случае $W^{-1}(k)\in\mathscr{A}$. Поэтому

$$\frac{R_\pm(k)+1}{k} = \frac{1}{W(k)}\,\frac{W(k)\mp W_\mp(k)}{k} \in \mathscr{A}. \tag{4.7}$$

Далее, функция $(1-\mathrm{e}^{\mp2\mathrm{i}kx})/(\mathrm{i}k)$ является преобразованием Фурье характеристической функции интервала $[0,2x]$, а значит,

$$\left\|\frac{1-\mathrm{e}^{\mp2\mathrm{i}kx}}{k}\right\|_{\mathscr{A}} \leqslant 2|x|. \tag{4.8}$$

Подставляя (4.5), (4.7) и (4.8) в (4.4), мы получим (4.3). Лемма доказана.

Так как оценка $\|T(k)h_\pm(x,k)\|_{\mathscr{A}} \leqslant C$ уже получена при доказательстве теоремы 1.1, то из леммы 4.1 следует, что

$$\|\widehat{\psi}_j^{\pm}(x,y,\,\cdot\,)\|_{L^1} \leqslant C(1+|x|)(1+|y|), \qquad j=1,2. \tag{4.9}$$

Чтобы оценить $\|\widehat{\psi}_3^{\pm}(x,y,\,\cdot\,)\|_{L^1}$, нам потребуется еще одна лемма.

Лемма 4.2. *Пусть* $V \in L^1_2$ *и* $W(0) \neq 0$. *Тогда* $\dfrac{\partial}{\partial k}(T(k)h_\pm(x,k)) \in \mathscr{A}$ *и*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial k}(T(k)h_\pm(x,k))\right\|_{\mathscr{A}} \leqslant C(1+|x|), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Из представления (2.1) и оценок (2.2), (2.3) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial k}h_\pm(x,k) = \dot h_\pm(x,k) \in \mathscr{A}, \qquad \frac{\partial}{\partial k}h'_\pm(x,k) \in \mathscr{A}, \quad \text{если} \quad V \in L^1_2, \tag{4.10}$$

при этом

$$\left\|\frac{\partial}{\partial k}h'_\pm(x,\,\cdot\,)\right\|_{\mathscr{A}} + \|\dot h_\pm(x,\,\cdot\,)\|_{\mathscr{A}} \leqslant C, \qquad x \in \mathbb{R}_\pm. \tag{4.11}$$

Следовательно, $\dfrac{d}{dk}W_\pm(k) := \dot W_\pm(k) \in \mathscr{A}$. Далее, из (2.6) и (4.10) вытекает, что $\nu(k)\dot W(k) \in \mathscr{A}$, где $\nu(k)$ определено формулой (2.8). Так как в нерезонансном случае $(\nu(k)W(k))^{-1} \in \mathscr{A}_1$ и $W^{-1}(k) \in \mathscr{A}$, то

$$\dot T(k) = \frac{1}{W(k)}\big(2\mathrm{i} - \dot W(k)T(k)\big) \in \mathscr{A}, \qquad \dot R_\pm(k) \in \mathscr{A}. \tag{4.12}$$

Поэтому утверждение леммы при $x \in \mathbb{R}_\pm$ следует из (2.20), (4.12) и (4.11). Чтобы доказать его при $x \in \mathbb{R}_\mp$, мы применим (2.21), (4.11), (4.12) и получим

$$\frac{\partial}{\partial k}(T(k)h_\pm(x,k)) = \mathrm{e}^{\mp 2\mathrm{i}kx}\left(\frac{\partial}{\partial k}(R_\mp(k)h_\mp(x,k)) \mp 2\mathrm{i}xR_\mp(k)h_\mp(x,k)\right) + \dot h_\mp(x,-k).$$

Лемма доказана.

Как было отмечено в доказательстве теоремы 1.1, при всех $x \in \mathbb{R}$ справедлива оценка $\|T(k)h_\pm(x,k)\|_{\mathscr{A}_1} \leqslant C$. Из этой оценки и леммы 4.2 следует, что

$$\|\widehat{\psi}_3^{\pm}(x,y,\,\cdot\,)\|_{L^1} \leqslant C(1+|x|)(1+|y|). \tag{4.13}$$

Наконец, объединяя (4.2), (4.9), (4.13) и лемму 3.1, получаем

$$|[\mathscr{K}_\pm(t)](x,y)| \leqslant Ct^{-3/2}(1+|x|)(1+|y|), \qquad t \geqslant 1,$$

что доказывает (1.6) и завершает доказательство теоремы 1.2.

5. Уравнение Клейна–Гордона

В этом разделе мы докажем теорему 1.3, (i), т. е. асимптотику (1.10) для уравнения Клейна–Гордона (1.3). Мы оценим низкочастотную и высокочастотную компоненты решения отдельно. Утверждение (i) теоремы 1.3 следует непосредственно из двух нижеследующих теорем.

Теорема 5.1. *Пусть $V \in L_1^1(\mathbb{R})$ и ζ – произвольная гладкая функция с компактным носителем. Тогда*

$$\big\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c\zeta(\mathbf{H}^2)\big\|_{L^1\to L^\infty} = \mathscr{O}(t^{-1/2}), \qquad t\to\infty.$$

Теорема 5.2. *Пусть $V \in L_1^1(\mathbb{R})$, и пусть гладкая функция $\xi(x)$ такова, что $\xi(x)=0$ при $x \leqslant m^2+1$ и $\xi(x)=1$ при $x \geqslant m^2+2$. Тогда*

$$\big\|\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}]^{12}\xi(\mathbf{H}^2)\big\|_{H^{1/2,1}\to L^\infty} = \mathscr{O}(t^{-1/2}), \qquad t\to\infty.$$

Из теоремы 1.3, (i) немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.3. *Пусть $V \in L_1^1(\mathbb{R})$. Тогда при всех $p\in[2,\infty]$ справедлива асимптотика* (1.12):

$$\big\|\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12}\big\|_{B^{1/2-3/p}_{p',p'}\to L^p} = \mathscr{O}(t^{-1/2+1/p}), \qquad t\to\infty, \quad \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1. \tag{5.1}$$

Доказательство. Напомним, что уравнение Клейна–Гордона сохраняет энергию:

$$\|\dot\psi\|_{L^2}^2 + \langle\psi, H\psi\rangle_{L^2} + m^2\|\psi\|_{L^2}^2 = \mathrm{const}.$$

Так как $[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12}\pi_0$ соответствует начальным условиям $(\psi(0),\dot\psi(0)) = (0,\pi_0)$, где $\pi_0 = P_c(H)\pi_0$, то в этом случае мы получим $\langle\psi, H\psi\rangle_{L^2} + m^2\|\psi\|_{L^2}^2 \leqslant \|\pi_0\|_{L^2}^2$. Кроме того, при условии $V\in L^1$ оператор умножения на V как форма H_0-ограничен с относительной гранью 0 (см. [23; лемма 9.33]) и нормы графиков операторов H и H_0 эквивалентны. Следовательно, $\|\psi\|_{H^1} \leqslant C\|\pi_0\|_{L^2}$. В силу дуальности мы также имеем

$$\big\|\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12}\big\|_{H^{-1}\to L^2} = \mathscr{O}(1), \qquad t\to\infty, \quad H^{-1}=H^{-1,2}. \tag{5.2}$$

Так как $H^{-1} = B^{-1}_{2,2}$ (см. [24; теорема 2.3.2, (d)], то вещественная интерполяция между (1.10) и (5.2) дает (5.1). Следствие доказано.

5.1. Убывание низкочастотной компоненты. Здесь мы докажем теорему 5.1. Нам потребуется некоторая модификация леммы ван дер Корпута, представляющая независимый интерес.

Лемма 5.4. *Пусть*

$$I(t) = \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(k)} f(k)\,dk,$$

где $\phi(k)$ – некоторая вещественнозначная функция. Если $\phi''(k)\neq 0$ на $[a,b]$ и $f\in\mathscr{A}_1$, то

$$|I(t)| \leqslant C_2\Big[t\min_{a\leqslant k\leqslant b}|\phi''(k)|\Big]^{-1/2}\|f\|_{\mathscr{A}_1}, \qquad t\geqslant 1,$$

где $C_2 \leqslant 2^{8/3}$ – оптимальная константа из леммы ван дер Корпута.

Доказательство. Полагая $f(k) = c + \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}ky}\widehat{g}(y)\,dy$, получаем

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y) I_{y/t}(t)\,dy + cI_0(t), \qquad I_v(t) = \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\phi(k)+vk)}\,dk.$$

По лемме ван дер Корпута

$$|I_v(t)| \leqslant C_2\Big[t \min_{a\leqslant k\leqslant b} |\phi''(k)|\Big]^{-1/2}, \qquad t \geqslant 1,$$

где $C_2 \leqslant 2^{8/3}$ (см. [20]). Утверждение леммы следует теперь из определения $\mathscr{A}_1$-нормы.

Отметим, что эта лемма обобщается на производные высших порядков и на бесконечные интервалы (в последнем случае интеграл следует понимать как несобственный интеграл Римана).

Резольвента $\mathbf{R}(\omega)$ оператора $\mathbf{H}$, определенного в (1.4), может быть выражена в терминах резольвенты оператора Шрёдингера $\mathscr{R}(\omega) = (H-\omega)^{-1}$ следующим образом:

$$\mathbf{R}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i}\omega^2 & \omega \end{pmatrix} \mathscr{R}(\omega^2 - m^2).$$

Для ядра оператора $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c\zeta(\mathbf{H}^2)$ справедливо спектральное представление вида (3.1):

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c\zeta(\mathbf{H}^2) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\zeta(\omega^2)(\mathbf{R}(\omega+\mathrm{i}0) - \mathbf{R}(\omega-\mathrm{i}0))\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\zeta(\omega^2) \begin{pmatrix} \omega & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i}\omega^2 & \omega \end{pmatrix} \big(\mathscr{R}((\omega+\mathrm{i}0)^2 - m^2) \\ &\qquad - \mathscr{R}((\omega-\mathrm{i}0)^2 - m^2)\big)\,d\omega, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где $\Gamma = (-\infty, -m) \cup (m, \infty)$. Обозначим

$$\mathscr{M}_t(k) = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{k^2+m^2}\,) & \dfrac{\sin(t\sqrt{k^2+m^2}\,)}{\sqrt{k^2+m^2}} \\ -\sqrt{k^2+m^2}\,\sin(t\sqrt{k^2+m^2}\,) & \cos(t\sqrt{k^2+m^2}\,) \end{pmatrix}.$$

Тогда (5.3) может быть переписано в виде

$$[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c\zeta(\mathbf{H}^2)](x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{M}_t(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}|y-x|k}\zeta(k^2+m^2)(\psi(x,y,k)+1)\,dk, \tag{5.4}$$

где функция $\psi(x,y,k)$ определена в (2.18). Мы получили осцилляторный интеграл с фазовой функцией $\phi_\pm(k) = \pm\sqrt{k^2+m^2} - vk$, где $v = |y-x|/t$. Для второй производной фазовой функции имеет место оценка

$$|\phi''_\pm(k)| = \frac{m^2}{\sqrt{(k^2+m^2)^3}} \geqslant C(m,\zeta), \qquad k^2+m^2 \in \operatorname{supp}\zeta.$$

Так как $(k^2+m^2)^{j/2}\zeta(k^2+m^2) \in \mathscr{A}$ при $j = -1, 0, 1$ и $\|\psi(x,y,k)\|_{\mathscr{A}} \leqslant C$ в силу (2.19), то из леммы 5.4 следует, что

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \big|\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c\zeta(\mathbf{H}^2)](x,y)\big| \leqslant Ct^{-1/2}, \qquad t \geqslant 1.$$

5.2. Убывание высокочастотной компоненты. Здесь мы докажем теорему 5.2. Наше доказательство базируется на следующем варианте леммы 2 работы [15].

Лемма 5.5. *Пусть гладкая функция $\eta(k)$ удовлетворяет условию $|\eta^{(j)}(k)| \leqslant k^{-j}$ при $j = 0, 1$ и $k \geqslant 1$. Тогда для любых $g(k) \in \mathscr{A}_1$, $\alpha > 3/2$ и $t \geqslant 1$*

$$\sup_{p\in\mathbb{R}}\left|\int_1^\infty \eta(k)\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}t\sqrt{k^2+m^2}+\mathrm{i}kp}}{k^\alpha} g(k)\,dk\right| \leqslant C\|g\|_{\mathscr{A}_1} t^{-1/2}. \tag{5.5}$$

Более того,

$$\sup_{p\in\mathbb{R}}\left|\int_1^\infty \eta(k)\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}t\sqrt{k^2+m^2}+\mathrm{i}kp}}{k^{3/2}}\,dk\right| \leqslant Ct^{-1/2}. \tag{5.6}$$

Здесь константы C зависят только от параметров m и α.

Доказательство. Рассмотрим “+”-случай и положим $v = -p/t$. Чтобы доказать (5.5), нам нужно оценить осцилляторный интеграл

$$I_\alpha(t) = \int_1^\infty k^{-\alpha}\eta(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(k)} g(k)\,dk$$

с фазовой функцией $\phi(k) = \sqrt{k^2+m^2} - vk$. Разобьем интеграл на две части:

$$I_\alpha(t) = I_\alpha^1(t) + I_\alpha^2(t) = \int_1^t + \int_t^\infty .$$

Так как $\|g\|_\infty \leqslant \|g\|_{\mathscr{A}_1}$, то

$$|I_\alpha^2(t)| \leqslant \|g\|_{\mathscr{A}_1}\int_t^\infty k^{-\alpha}\,dk \leqslant C\|g\|_{\mathscr{A}_1} t^{1-\alpha}. \tag{5.7}$$

Оценим $I_\alpha^1(t)$. Обозначим

$$\Psi(k,t) = \int_1^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(\tau)} g(\tau)\,d\tau.$$

Так как

$$\min_{1\leqslant\tau\leqslant k}\phi''(\tau) = \phi''(k) = \frac{m^2}{(\sqrt{k^2+m^2}\,)^3} \geqslant \frac{C}{k^3}\,,$$

то из леммы 5.4 следует, что

$$|\Psi(k,t)| \leqslant C\|g\|_{\mathscr{A}_1} t^{-1/2}k^{3/2}. \tag{5.8}$$

Интегрируя $I_\alpha^1(t)$ по частям, получим

$$|I_\alpha^1(t)| \leqslant |\Psi(t,t)|t^{-\alpha} + \int_1^t |\Psi(k,t)|\,|\Lambda(k)|\,dk,$$

где $\Lambda(k) = (k\eta'(k) - \alpha\eta(k))/k^{\alpha+1}$ – гладкая ограниченная функция и $\Lambda(k) = \mathscr{O}(k^{-\alpha-1})$ при $k\to\infty$. В силу (5.8)

$$|I_\alpha^1(t)| \leqslant C\|g\|_{\mathscr{A}_1}\left(t^{1-\alpha} + (1+\alpha)t^{-1/2}\int_1^t k^{1/2-\alpha}\,dk\right) \leqslant C\|g\|_{\mathscr{A}_1} t^{-1/2}.$$

Вместе с (5.7) это доказывает (5.5).

Вернемся теперь к (5.6). Так как (5.7) выполнено при $\alpha = 3/2$ и $g(k) = 1$, то требуемая оценка вытекает из леммы 7.1. Лемма доказана.

Чтобы доказать теорему 5.2, мы должны показать, что для любой гладкой функции f с компактным носителем справедлива оценка

$$\big\| [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}]^{12}\xi(\mathbf{H^2})f\big\|_{L^\infty} \leqslant Ct^{-1/2}\|f\|_{H^{1/2,1}}, \qquad t \geqslant 1. \tag{5.9}$$

Ядро резольвенты оператора Шрёдингера с нулевым потенциалом имеет следующий вид (см. [23; § 7.4]):

$$[\mathscr{R}_0(k^2 \pm \mathrm{i}0)](x,y) = \frac{\pm\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k|x-y|}}{2k}, \qquad k > 0.$$

Подставляя второе резольвентное тождество $\mathscr{R}(\lambda) = \mathscr{R}_0(\lambda) - \mathscr{R}_0(\lambda)V\mathscr{R}(\lambda)$ в правый верхний элемент матрицы (5.4) и принимая во внимание, что $\xi(x) = 0$ при $x \leqslant m^2+1$, получим

$$[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}]^{12}\xi(\mathbf{H}^2) = \mathbf{K}_0(t) + \mathbf{K}_1(t),$$

где ядра операторов $\mathbf{K}_0(t)$ и $\mathbf{K}_1(t)$ имеют вид

$$[\mathbf{K}_0(t)](x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{|k|\geqslant 1}\xi(k^2+m^2)\frac{\sin(t\sqrt{k^2+m^2}\,)}{\sqrt{k^2+m^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}\,dk, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}[\mathbf{K}_1(t)](x,y) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}V(z)\biggl(\int_{|k|\geqslant 1}\xi(k^2+m^2) \\ \times\frac{\sin(t\sqrt{k^2+m^2}\,)}{\sqrt{k^2+m^2}}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(|x-z|+|z-y|)}}{k}(\psi(y,z,k)+1)\,dk\biggr)\,dz.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Заметим, что носитель производной $\xi'(x)$ лежит в интервале $[m^2+1, m^2+2]$. Следовательно, функция

$$\eta(k) := \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\xi(k^2+m^2)\frac{k}{\sqrt{k^2+m^2}} \tag{5.12}$$

удовлетворяет условиям леммы 5.5. Применяя эту лемму с $\alpha = 2$, $g(k) = \psi(y,z,k)+1$, $p = |x-z|+|z-y|$ и принимая во внимание (2.19), получим

$$\|\mathbf{K}_1(t)f\|_{L^\infty} \leqslant Ct^{-1/2}\|f\|_{L^1} \leqslant C|t|^{-1/2}\|f\|_{H^{1/2,1}}, \qquad t \geqslant 1, \tag{5.13}$$

так как $H^{1/2,1} \subset L^1$ в силу теоремы 6.2.3 из [3]. Остается получить оценку (5.9) для $\mathbf{K}_0(t)$.

Лемма 5.6. *Пусть $V \in L^1_1$. Тогда*

$$\|\mathbf{K}_0(t)f\|_{L^\infty} \leqslant C|t|^{-1/2}\|f\|_{H^{1/2,1}}, \qquad |t| \geqslant 1.$$

Доказательство. Из формулы (5.10) следует, что при каждом $f \in C_0^\infty$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}}[\mathbf{K}_0(t)](x,y)f(y)\,dy = \sum_{\mp}\int_{|k|\geqslant 1}\frac{\eta(k)}{k(1+k^2)^{1/4}}\mathrm{e}^{\pm t\sqrt{k^2+m^2}+\mathrm{i}kx}(1+k^2)^{1/4}\widehat{f}(k)\,dk,$$

где $\eta(k)$ – функция из (5.12). Обозначим $g = \mathscr{J}_{1/2} f$. По определению (1.9)

$$\|g\|_{L^1} = \|f\|_{H^{1/2,1}}. \tag{5.14}$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{K}_0(t)f\|_{L^\infty} \leqslant C \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \sup_{x,y\in\mathbb{R}} \left| \int_1^\infty \eta(k) \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}t\sqrt{k^2+m^2}+\mathrm{i}k(x-y)}}{k^{3/2}}\, dk \right| dy,$$

что вместе с (5.14) и (5.6) обеспечивает требуемую оценку для $\mathbf{K}_0$. Лемма доказана.

Вместе с (5.13) лемма 5.6 влечет утверждение теоремы 5.2 и завершает доказательство утверждения (i) теоремы 1.3.

6. Уравнение Клейна–Гордона (нерезонансный случай)

В этом разделе мы предполагаем, что у оператора H, определенного в (1.4), нет резонанса на конце непрерывного спектра. Чтобы доказать теорему 1.3, (ii), оценим сначала низкочастотную компоненту решения. Используя представление (4.1), перепишем (5.4) в виде

$$\begin{aligned}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c\zeta(\mathbf{H}^2)](x,y) = \sum_{\sigma_1,\sigma_2\in\{\pm\}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty A_{\sigma_1}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{k^2+m^2}} \\ \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}|y-x|k}\zeta(k^2+m^2)\mathscr{T}_{\sigma_2}(x,y,k)\, dk,\end{aligned}$$

где

$$A_\pm(k) = \begin{pmatrix} 1 & \mp\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{k^2+m^2}} \\ \pm\mathrm{i}\sqrt{k^2+m^2} & 1 \end{pmatrix}$$

и $\mathscr{T}_\pm(x,y,k) = |T(k)|^2 f_\pm(k) f_\pm(-k)$. Пусть $[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c\zeta(\mathbf{H}^2)]_{++}(x,y)$ обозначает слагаемое с A_+ и $\mathscr{T}_+$. Применяя к нему интегрирование по частям, находим, что

$$\begin{aligned}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c\zeta(\mathbf{H}^2)]_{++}(x,y) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}t} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{k^2+m^2}} \\ \times \frac{\partial}{\partial k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}|y-x|k}\zeta(k^2+m^2)\frac{\sqrt{k^2+m^2}}{k} A_+(k)\mathscr{T}_+(x,y,k)\right] dk.\end{aligned}$$

Используя аргументы из доказательства теоремы 1.2 (см. раздел 4), получаем

$$\left| [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c\zeta(\mathbf{H}^2)]_{++}(x,y)\right| \leqslant Ct^{-3/2}(1+|x|)(1+|y|), \qquad t \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\left\| [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]_{++}\zeta(\mathbf{H}^2)\right\|_{L^1_1\to L^\infty_{-1}} = \mathscr{O}(|t|^{-3/2}), \qquad t\to\infty.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично. В результате мы имеем

$$\left\| [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]\zeta(\mathbf{H}^2)\right\|_{L^1_1\to L^\infty_{-1}} = \mathscr{O}(t^{-3/2}), \qquad t\to\infty. \tag{6.1}$$

Рассмотрим теперь высокочастотную компоненту решения. Обозначим

$$c(k,t) := \cos(t\sqrt{k^2+m^2}\,), \qquad \chi(k) := \xi(k^2+m^2).$$

Применяя интегрирование по частям к (5.10) и (5.11), получаем

$$\begin{aligned}[\mathbf{K}_0(t)](x,y) &= \frac{1}{2\pi t}\int_{|k|\geqslant 1} c(k,t)\frac{\partial}{\partial k}\,\frac{\chi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}}{k}\,dk,\\ [\mathbf{K}_1(t)](x,y) &= \frac{\mathrm{i}}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}} V(z)\int_{|k|\geqslant 1} c(k,t)\\ &\qquad\times\frac{\partial}{\partial k}\,\frac{\chi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(|x-z|+|z-y|)}(1+\psi(y,z,k))}{k^2}\,dk\,dz. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Согласно (4.9) и (4.13),

$$\left\|\frac{\partial}{\partial k}\psi(z,y,k)\right\|_{\mathscr{A}} \leqslant C(1+|z|)(1+|y|).$$

Кроме того, $|x-z|+|z-y| \leqslant (1+|x|)(1+|y|)(1+2|z|)$. Следовательно, $\mathscr{A}_1$-норма производной по переменной k подынтегрального выражения во внутреннем интеграле (6.2) не превосходит $C(1+|x|)(1+|y|)(1+|z|)$. Отметим также, что гладкая функция $\chi'(k)$ имеет компактный носитель. Применяя лемму 5.5 к внутреннему интегралу и принимая во внимание, что $|V(z)| \in L^1_1(\mathbb{R})$, получим

$$[\mathbf{K}_1(t)](x,y)| \leqslant Ct^{-3/2}(1+|x|)(1+|y|), \qquad t \geqslant 1. \tag{6.3}$$

Далее,

$$\begin{aligned}[\mathbf{K}_0(t)](x,y) &= \frac{1}{2\pi t}\int_{|k|\geqslant 1} c(k,t)\chi'(k)k^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}\,dk\\ &\qquad - \frac{1}{2\pi t}\int_{|k|\geqslant 1} c(k,t)\chi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}k^{-2}\,dk\\ &\qquad + \frac{\mathrm{i}}{2\pi t}\int_{|k|\geqslant 1}(x-y)c(k,t)\chi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}k^{-1}\,dk\\ &= [\mathbf{K}_{01}(t)](x,y) + [\mathbf{K}_{02}(t)](x,y) + [\mathbf{K}_{03}(t)](x,y).\end{aligned}$$

Применение леммы 5.5 к $\mathbf{K}_{01}$ и $\mathbf{K}_{02}$ дает

$$\|\mathbf{K}_{0j}(t)f\|_{L^\infty} \leqslant Ct^{-3/2}\|f\|_{L^1}, \qquad j=1,2, \quad t \geqslant 1. \tag{6.4}$$

Осталось оценить $\mathbf{K}_{03}$. Обозначим $g = \mathscr{J}_{1/2}f$. Тогда $\widehat{f}(k) = (1+k^2)^{-1/4}\widehat{g}(k)$. Так как $\mathscr{F}[\cdot f(\,\cdot\,)] = \widehat{f}'$ и $\widehat{f}'(k) = (1+k^2)^{-1/4}\widehat{g}'(k) - (k/2)(1+k^2)^{-5/4}\widehat{g}(k)$, то

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}[\mathbf{K}_{03}(t)](x,y)f(y)\,dy\\ &\quad= \frac{\mathrm{i}x}{4\pi t}\sum_{\pm}\int_{|k|\geqslant 1}\frac{\chi(k)}{k(1+k^2)^{1/4}}\mathrm{e}^{\pm t\sqrt{k^2+m^2}+\mathrm{i}kx}(1+k^2)^{1/4}\widehat{f}(k)\,dk\\ &\qquad+ \frac{\mathrm{i}}{4\pi t}\sum_{\pm}\int_{|k|\geqslant 1}\frac{\chi(k)}{k(1+k^2)^{1/4}}\mathrm{e}^{\pm t\sqrt{k^2+m^2}+\mathrm{i}kx}\widehat{g}'(k)\,dk\\ &\qquad- \frac{\mathrm{i}}{8\pi t}\sum_{\pm}\int_{|k|\geqslant 1}\frac{\chi(k)}{(1+k^2)^{5/4}}\mathrm{e}^{\pm t\sqrt{k^2+m^2}+\mathrm{i}kx}\widehat{g}(k)\,dk.\end{aligned}$$

Применяя те же аргументы, что при доказательстве леммы 5.6, получим

$$\begin{aligned}\big\|(1+|\cdot|)^{-1}\mathbf{K}_{03}(t)f\big\|_{L^\infty} &\leqslant Ct^{-3/2}\big(\|g\|_{L^1}+\big\||\cdot|g\big\|_{L^1}\big)\\ &\leqslant Ct^{-3/2}\big(\|f\|_{H^{1/2,1}}+\|f\|_{H_1^{1/2,1}}\big).\end{aligned}$$

Из этой оценки и оценки (6.4) следует, что

$$\|\mathbf{K}_0(t)\|_{H_1^{1/2,1}\to L^\infty_{-1}} \leqslant Ct^{-3/2}.$$

Вместе с (6.3) это означает, что

$$\big\|\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathbf{H}}]^{12}\xi(\mathbf{H}^2)f\big\|_{L^\infty_{-1}} \leqslant C|t|^{-3/2}\|f\|_{H_1^{1/2,1}}.$$

Эта оценка вместе с (6.1) завершает доказательство утверждения (ii) теоремы 1.3. Теорема 1.3 полностью доказана.

7. Приложение. Оценка убывания

Следующая лемма является адаптированной версией леммы 2 из [15]. Ее доказательство можно найти в [3; лемма 6.7]), но мы приведем его для полноты изложения.

Лемма 7.1 [3], [15]. *Пусть гладкая функция $\Lambda(k)$, определенная при $k\geqslant 0$, удовлетворяет условию $\Lambda(k)=\mathscr{O}(k^{-5/2})$, $k\to\infty$, и пусть*

$$\Psi(k,t):=\int_0^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(\tau)}\,d\tau, \qquad t\geqslant 1,\quad k\geqslant 0,$$

где $\phi(\tau)=\sqrt{\tau^2+1}+v\tau$ с некоторым $v\in\mathbb{R}$. Тогда справедлива следующая равномерная по v оценка:

$$J(t):=\int_1^t |\Psi(k,t)\Lambda(k)|\,dk \leqslant Ct^{-1/2}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Для краткости изложения будем ссылаться на леммы ван дер Корпута для первой и второй производной как на леммы vdC-1 и vdC-2 соответственно (см. [20; следствие 5 и лемма 7]). Прежде всего заметим, что для второй производной фазовой функции $\phi(\tau)$ справедлива оценка

$$\min_{0\leqslant\tau\leqslant k}\phi''(\tau)=\min_{0\leqslant\tau\leqslant k}(1+\tau^2)^{-3/2}=(1+k^2)^{-3/2}. \tag{7.2}$$

Следовательно, из леммы vdC-2 вытекает, что

$$|\Psi(k,t)|\leqslant Ct^{-1/2}(k+1)^{3/2}, \qquad k\geqslant 0,\quad t\geqslant 1. \tag{7.3}$$

Первая производная фазовой функции монотонно возрастает и оценивается снизу следующим образом:

$$|\phi'(\tau)|\geqslant\begin{cases}2^{-1/2}, & v\geqslant 0,\ \tau\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{2(\tau^2+1)}, & v\leqslant -1,\ \tau\geqslant 0.\end{cases} \tag{7.4}$$

Кроме того, при $v \in (-1,0)$ функция ϕ' обращается в нуль в точке $\tau_0 = -v(1-v^2)^{-1/2}$. Рассмотрим отдельно три случая: $v \geqslant 0$, $v \leqslant -1$ и $v \in (-1,0)$.

При $v \geqslant 0$ и $k \geqslant 1$ из леммы vdC-1 и оценки (7.4) следует, что

$$|\Psi(k,t) - \Psi(1,t)| \leqslant Ct^{-1}.$$

Так как $|\Psi(1,t)| \leqslant Ct^{-1/2}$ в силу (7.3), то мы получаем отсюда (7.1) при $v \geqslant 0$. Аналогично, при $v \leqslant -1$ из (7.4) и (7.3) следует, что

$$|\Psi(k,t)| \leqslant Ck^2t^{-1} + |\Psi(1,t)| \leqslant C(k^2t^{-1} + t^{-1/2}), \qquad k \geqslant 1. \tag{7.5}$$

Поэтому (7.1) выполняется также и в этом случае.

Осталось рассмотреть случай $v \in (-1,0)$, что эквивалентно $\tau_0 \in (0,\infty)$. В частности, мы будем оценивать $J(t)$ в терминах τ_0, а не v. Из монотонности ϕ' и равенства (7.2) следует, что при всех $\tau \in (0, \tau_0/2]$ справедлива оценка

$$|\phi'(\tau)| = \frac{\tau_0}{\sqrt{\tau_0^2+1}} - \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} \geqslant \phi'(2\tau) - \phi'(\tau) \geqslant \phi''(2\tau)\tau \geqslant \frac{C}{\tau^2}\,.$$

Поэтому при $\tau_0/2 \geqslant 1$ аналогично (7.5) получаем

$$|\Psi(k,t)| \leqslant C(k^2t^{-1} + t^{-1/2}), \qquad 1 \leqslant k \leqslant \frac{\tau_0}{2}\,. \tag{7.6}$$

Кроме того, при всех $\tau \geqslant 2\tau_0$

$$\phi'(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} - \frac{\tau_0}{\sqrt{\tau_0^2+1}} \geqslant \phi'(\tau) - \phi'\left(\frac{\tau}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\phi''(\tau)\tau \geqslant \frac{C}{\tau^2}\,.$$

Следовательно,

$$|\Psi(k,t)| \leqslant C(k^2t^{-1} + t^{-1/2}), \qquad \max\{1, 2\tau_0\} \leqslant k. \tag{7.7}$$

Далее, из (7.3) следует, что

$$\int_{\tau_0/2}^{2\tau_0} |\Psi(k)\Lambda(k)|\,dk \leqslant Ct^{-1/2}, \tag{7.8}$$

так как $\displaystyle\int_{y/2}^{2y} k^{-1}\,dk$ не зависит от $y > 0$. Аналогично доказывается, что $J(t) - J(t/4) \leqslant Ct^{-1/2}$. Кроме того, в случае $4 \leqslant t \leqslant 2\tau_0$ из (7.6) следует, что $J(t/4) \leqslant Ct^{-1/2}$, и мы имеем (7.1) для $4 \leqslant t \leqslant 2\tau_0$. Заметим, что в случае $1 \leqslant t \leqslant 4$ оценка (7.1) справедлива при всех $\tau_0 \in (0,\infty)$.

Далее рассмотрим случай $1 \leqslant 2\tau_0 \leqslant t$. Если, кроме того, $\tau_0/2 \leqslant 1$, то

$$J(t) \leqslant \int_{\tau_0/2}^{2\tau_0} |\Psi(k)\Lambda(k)|\,dk + \int_{2\tau_0}^{t} |\Psi(k)\Lambda(k)|\,dk \leqslant Ct^{-1/2}$$

в силу (7.8) и (7.7). Если же $1 \leqslant \tau_0/2 \leqslant 2\tau_0 \leqslant t$, то

$$J(t) \leqslant \int_{1}^{\tau_0/2} |\Psi(k)\Lambda(k)|\,dk + \int_{\tau_0/2}^{2\tau_0} |\Psi(k)\Lambda(k)|\,dk + \int_{2\tau_0}^{t} |\Psi(k)\Lambda(k)|\,dk \leqslant Ct^{-1/2}$$

в силу (7.6), (7.8) и (7.7). Наконец, в случае $2\tau_0 \leqslant 1$ оценка (7.1) следует из (7.7). Лемма доказана.

Мы благодарим А. И. Комеча за полезные замечания. Первый автор выражает искреннюю признательность за гостеприимство факультету математики Университета Вены.

Список литературы

[1] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980, 264 с.; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren Math. Wiss., **223**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, x+207 pp.

[2] V. S. Buslaev, C. Sulem, "On asymptotic stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations", *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **20**:3 (2003), 419–475.

[3] S. Cuccagna, "On dispersion for Klein Gordon equation with periodic potential in 1D", *Hokkaido Math. J.*, **37**:4 (2008), 627–645.

[4] P. D'Ancona, L. Fanelli, "L^p-boundedness of the wave operator for the one dimensional Schrödinger operator", *Comm. Math. Phys.*, **268**:2 (2006), 415–438.

[5] P. Deift, E. Trubowitz, "Inverse scattering on the line", *Comm. Pure Appl. Math.*, **32**:2 (1979), 121–251.

[6] I. Egorova, E. A. Kopylova, G. Teschl, "Dispersion estimates for one-dimensional discrete Schrödinger and wave equations", *J. Spectr. Theory*, **5**:4 (2015), 663–696.

[7] M. Goldberg, "Transport in the one-dimensional Schrödinger equation", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:10 (2007), 3171–3179.

[8] M. Goldberg, W. Schlag, "Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimensions one and three", *Comm. Math. Phys.*, **251**:1 (2004), 157–178.

[9] И. М. Гусейнов, "О непрерывности коэффициента отражения одномерного уравнения Шредингера", *Дифференц. уравнения*, **21**:11 (1985), 1993–1995.

[10] M. Keel, T. Tao, "Endpoint Strichartz estimates", *Amer. J. Math.*, **120**:5 (1998), 955–980.

[11] A. I. Komech, E. A. Kopylova, "Weighted energy decay for 1D Klein–Gordon equation", *Comm. Partial Differential Equations*, **35**:2 (2010), 353–374.

[12] Е. А. Копылова, "Дисперсионные оценки для уравнений Шредингера и Клейна–Гордона", *УМН*, **65**:1(391) (2010), 97–144; англ. пер.: E. A. Kopylova, "Dispersive estimates for the Schrödinger and Klein–Gordon equations", *Russian Math. Surveys*, **65**:1 (2010), 95–142.

[13] E. Kopylova, A. I. Komech, "On asymptotic stability of kink for relativistic Ginzburg–Landau equation", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **202**:1 (2011), 213–245.

[14] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977, 331 с.; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, rev. ed., AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011, xiv+396 pp.

[15] B. Marshall, W. Strauss, S. Wainger, "$L^p - L^q$ estimates for the Klein–Gordon equation", *J. Math. Pures Appl.* (9), **59**:4 (1980), 417–440.

[16] M. Meyries, M. Veraar, "Sharp embedding results for spaces of smooth functions with power weights", *Studia Math.*, **208**:3 (2012), 257–293.

[17] H. Mizutani, "Dispersive estimates and asymptotic expansions for Schrödinger equations in dimension one", *J. Math. Soc. Japan*, **63**:1 (2011), 239–261.

[18] M. Murata, "Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations", *J. Funct. Anal.*, **49**:1 (1982), 10–56.

[19] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, Ch. W. Clark (eds.), *NIST handbook of mathematical functions*, Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, Washington, DC; Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, xvi+951 pp.

[20] K. M. Rogers, “Sharp van der Corput estimates and minimal divided differences”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:12 (2005), 3543–3550.

[21] W. Schlag, “Dispersive estimates for Schrödinger operators: a survey”, *Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations*, Ann. of Math. Stud., **163**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007, 255–285.

[22] A. Soffer, M. I. Weinstein, “Resonances, radiation damping and instability in Hamiltonian nonlinear wave equations”, *Invent. Math.*, **136**:1 (1999), 9–74.

[23] G. Teschl, *Mathematical methods in quantum mechanics. With applications to Schrödinger operators*, 2nd ed., Grad. Stud. Math., **157**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, xiv+358 pp.

[24] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980, 664 с.; пер. с англ.: H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Math. Library, **18**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978, 528 pp.; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978, 528 pp.

[25] R. Weder, “$L^p - L^{\dot p}$ estimates for the Schrödinger equation on the line and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential”, *J. Funct. Anal.*, **170**:1 (2000), 37–68.

[26] R. Weder, “Inverse scattering on the line for the nonlinear Klein–Gordon equation with a potential”, *J. Math. Anal. Appl.*, **252**:1 (2000), 102–123.

[27] R. Weder, “The $L^p - L^{p'}$ estimate for the Schrödinger equation on the half-line”, *J. Math. Anal. Appl.*, **281**:1 (2003), 233–243.

[28] N. Wiener, “Tauberian theorems”, *Ann. of Math. (2)*, **33**:1 (1932), 1–100.

[29] K. Yajima, “The $W^{k,p}$-continuity of wave operators for Schrödinger operators”, *J. Math. Soc. Japan*, **47**:3 (1995), 551–581.

Ирина Евгеньевна Егорова
(Irina E. Egorova)
Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина
E-mail: iraegorova@gmail.com

Поступила в редакцию
21.12.2015

Елена Андреевна Копылова
(Elena A. Kopylova)
University of Vienna, Vienna, Austria;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: Elena.Kopylova@univie.ac.at

Владимир Александрович Марченко
(Vladimir A. Marchenko)
Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина
E-mail: marchenko@ilt.kharkov.ua

Геральд Тешль
(Gerald Teschl)
University of Vienna, Vienna, Austria;
International Erwin Schrödinger Institute for
Mathematical Physics, Vienna, Austria
E-mail: Gerald.Teschl@univie.ac.at