Дисперсионные оценки для уравнений Шредингера и Клейна-Гордона

Е.А. КОПЫЛОВА[1]
ek@iitp.ru

Аннотация

Статья посвящена обзору результатов по долговременной асимптотике в весовых энергетических нормах для решений уравнений Шредингера и Клейна-Гордона. Мы излагаем результаты спектральной теории рассеяния Агмона, Йенсена-Като, Йенсена-Ненсиу и Мюраты, полученные в 1975-2001 годах для уравнения Шредингера, а также результаты автора [20, 21, 22] для уравнения Клейна-Гордона, полученные недавно совместно с А.И.Комечем. Наши методы развивают спектральный подход применительно к релятивистским уравнениям.

Ключевые слова: уравнения Шредингера и Клейна-Гордона, задача Коши, долговременная асимптотика, весовые пространства.

2000 Mathematics Subject Classification: 39A11, 35L10.

1 Введение

Мы рассматриваем уравнение Шредингера

$$i\dot{\psi}(x,t) = H\psi(x,t) := (-\Delta + V(x))\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

где $n = 1, 2, 3$, а также уравнение Клейна-Гордона

$$\ddot{\psi}(x,t) = (\Delta - m^2 - V(x))\,\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m > 0 \tag{1.2}$$

Запишем уравнение (1.2) в матричной форме:

$$i\dot{\Psi}(t) = \mathcal{H}\Psi(t) \tag{1.3}$$

где

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i(\Delta - m^2 - V) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

[1] Институт Проблем Передачи Информации РАН.
Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, FWF и DFG

Для произвольных $s, \sigma \in \mathbb{R}$ обозначим через $H^s_\sigma = H^s_\sigma(\mathbb{R}^n)$ весовые пространства Соболева, введенные Агмоном [5], с конечными нормами

$$\|\psi\|_{H^s_\sigma} = \|\langle x\rangle^\sigma \langle\nabla\rangle^s \psi\|_{L^2} < \infty, \qquad \langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2} \tag{1.5}$$

где $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$. Будем обозначать $L^2_\sigma = H^0_\sigma$. Мы предполагаем, что $V(x)$ является вещественной функцией и

$$|V(x)| + |\nabla V(x)| \le C\langle x\rangle^{-\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

где $\beta > 3$ при $n = 3$ и $\beta > 5$ при $n = 1, 2$. Тогда умножение на $V(x)$ является ограниченным оператором из H^1_s в $H^1_{s+\beta}$ для любого $s \in \mathbb{R}$.

Мы ограничиваемся "регулярным случаем" в терминологии [16] (или "несингулярным случаем" в терминологии [29]) когда усеченная резольвента оператора Шредингера $H = -\Delta + V(x)$ ограничена в концевой точке $\lambda = 0$ непрерывного спектра. Другими словами, точка $\lambda = 0$ не является ни собственным значением, ни резонансом для оператора H.

Определение 1.1. *Обозначим через $\mathcal{F}_\sigma$ комплексное гильбертово пространство $H^1_\sigma \oplus H^0_\sigma$ векторных функции $\Psi = (\psi, \pi)$ с конечной нормой*

$$\|\,\Psi\|_{\mathcal{F}_\sigma} = \|\psi\|_{H^1_\sigma} + \|\pi\|_{H^0_\sigma} < \infty \tag{1.7}$$

В "регулярном случае" справедливы следующие долговременные асимптотики для решений $\psi(t)$ уравнения Шредингера (1.1) и $\Psi(t)$ уравнения Клейна-Гордона (1.3): при $\sigma > 5/2$

$$\|P_c\psi(t)\|_{L^2_{-\sigma}} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{O}(|t|^{-3/2}), & n = 1,3 \\ \\ \mathcal{O}(|t|^{-1}\log^{-2}|t|), & n = 2 \end{array} \right| \qquad t \to \pm\infty \tag{1.8}$$

$$\|\mathcal{P}_c\Psi(t)\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{O}(|t|^{-3/2}), & n = 1,3 \\ \\ \mathcal{O}(|t|^{-1}\log^{-2}|t|), & n = 2 \end{array} \right| \qquad t \to \pm\infty \tag{1.9}$$

для начальных данных $\psi_0 = \psi(0) \in L^2_\sigma$, $\Psi_0 = \Psi(0) \in \mathcal{F}_\sigma$. Здесь через P_c и $\mathcal{P}_c$ обозначены проекторы Рисса на непрерывные спектры операторов H и $\mathcal{H}$ соответственно.

Убывание типа (1.8)-(1.9) находит важное применение при изучении асимптотической устойчивости и рассеяния для решений нелинейных гиперболических уравнений. А именно, асимптотическая устойчивость выводится по методу Ляпунова из убывания решений линеаризованных уравнений, а асимптотические состояния строятся при помощи метода Кука. Решающее значение при этом имеет тот факт, что правые части оценок (1.8)-(1.9) суммируемы на бесконечном интервале $0 < t < \infty$. Отметим, что спектр линеаризованных гиперболических уравнений, как правило, является чисто мнимым, поэтому классический рецепт асимптотической устойчивости $\mathrm{Re}\lambda < 0$ к нелинейным гиперболическим задачам неприложим.

Изучение этих задач началось в 90-х годах для нелинейного уравнения Шредингера в работах [9, 30, 31, 33, 34], и продолжилось в последнее десятилетие в работах

[10, 11, 19]. Нелинейное уравнение Клейна-Гордона рассматривалось в работах [13, 35]. Дальнейшее изучение нелинейных уравнений Клейна-Гордона [23, 24] потребовало более точной информации об убывании решений соответствующих линеаризованных уравнений, что и явилось побудительной причиной наших исследований [20] - [22].

Прокомментируем предыдущие результаты в данном направлении. Убывание локальной энергии было впервые установлено для линейного уравнения Шредингера в теории рассеяния, развивавшейся с 50-х годов Бирманом, Като, Саймоном и другими.

Для свободного 3-х мерного уравнения Клейна-Гордона убывание порядка $\sim t^{-3/2}$ в норме L^∞ было впервые доказано в работе Моравец и Штраусса [28]. Убывание локальной энергии было установлено Вайнбергом [1, 36] для волнового уравнения и широкого класса гиперболических уравнений и систем с начальными данными, имеющими компактный носитель. Вайнбергом также получено убывание локальной энергии $\sim t^{-3/2}$ для уравнения Клейна-Гордона с магнитным потенциалом [37]. Убывание решений в нормах L^p для волнового уравнения и уравнения Клейна-Гордона рассматривалось в работах [7, 8, 12, 18, 27, 39, 40].

Однако, для доказательства асимптотической устойчивости решений нелинейных уравнений требуются более точные характеристики убывания решений соответствующих линеаризованных уравнений в весовых нормах (см. например, работы [9, 10, 11, 35, 23, 24]).

Для трехмерного уравнения Шредингера убывание вида (1.8) в весовых нормах впервые было получено в работе Йенсена и Като [16]. Этот результат был распространен на другие размерности Йенсеном и Ненсиу [14, 15, 17], а также Мюратой [29] для более общих уравнений Шредингеровского типа.

Для свободного волнового уравнения некоторые оценки в весовых L^p нормах были доказаны в [6]. Весовые оценки Стрихарца для возмущенного уравнения Клейна-Гордона были установлены в [25].

Для свободного трехмерного уравнения Клейна-Гордона убывание вида (1.9) в весовых энергетических нормах было доказано в [13, лемма 18.2]. Однако для релятивистских уравнений с потенциалом подобное убывание до последнего времени не было известно. Это обусловлено тем, что подход Йенсена и Като непосредственно неприменим к релятивистским уравнениям ввиду различного характера распространения особенностей для релятивистских и нерелятивистских уравнений. А именно, подход Йенсена и Като [16] основан на спектральном представлении Фурье-Лапласа

$$P_c\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty e^{-i\omega t}\Big[R(\omega+i0) - R(\omega-i0)\Big]\psi_0 d\omega, \qquad t\in\mathbb{R} \tag{1.10}$$

где через $R(\omega)$ обозначена резольвента оператора Шредингера $H = -\Delta + V$. Убывание вида (1.8) для уравнения Шредингера получается при помощи интегрирования по частям, так как резольвента $R(\omega)$ является достаточно гладкой функцией, а ее производные $\partial_\omega^k R(\omega)$ при больших k хорошо убывают в весовых нормах при $|\omega|\to\infty$. В случае уравнения Клейна-Гордона, гладкость резольвенты также следует из результатов [16]. Однако, производные резольвенты вообще не убывают.

Проиллюстрируем это на примере трехмерных свободных уравнений ($n = 3$):
i) резольвента свободного уравнения Шредингера представляет из себя интегральный

оператор с ядром

$$R_{\rm S}(\omega,x-y)=\frac{e^{i\sqrt{\omega}|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

ii) резольвента свободного уравнения Клейна-Гордона является интегральным оператором с ядром

$$R_{\rm KG}(\omega,x-y)=\left(\begin{array}{cc}0 & 0\\ -i\delta(x-y) & 0\end{array}\right)+\frac{e^{i\sqrt{\omega^2-m^2}|x-y|}}{4\pi|x-y|}\left(\begin{array}{cc}\omega & i\\ -i\omega^2 & \omega\end{array}\right) \tag{1.11}$$

и область интегрирования в формуле (1.10) нужно заменить на $|\omega|>m$. Главные сингулярности для обеих резольвент в концевых точках непрерывного спектра имеют одинаковый характер: $\sqrt{\omega}$ при $\omega\to 0$ для $R_{\rm S}$, и $\sqrt{\omega\mp m}$ при $\omega\to\pm m$ для $R_{\rm KG}$. Следовательно, вклад низких частот в интеграл (1.10) убывает как $t^{-3/2}$ в обоих случаях.

Рассмотрим теперь вклад высоких частот в интеграл (1.10). В случае уравнения Шредингера, этот вклад убывает как $\sim t^{-N}$ с любым $N>0$. Это получается при помощи интегрирования по частям, так как производные $\partial_\omega^k R_{\rm S}(\omega,x-y)$ убывают как $|\omega|^{-k/2}$ при $\omega\to\infty$.

С другой стороны, функция $R_{\rm KG}(\omega,x-y)$ не убывает при больших $|\omega|$, и дифференцирование по ω не улучшает ее убывание (см. оценки (4.9) и (4.14)). Следовательно, для уравнения Клейна-Гордона интегрирование по частям ничего не дает.

Это различие не только методическое. Оно означает, что умножение на t^N, при больших N улучшает гладкость решений уравнения Шредингера, но не улучшает гладкость решений уравнения Клейна-Гордона. Это соответствует различному характеру распространения волн для релятивистских и нерелятивистских уравнений:
i) для решения уравнения Шредингера, главная сингулярность сосредоточена в точке $t=0$ и исчезает на бесконечности при $t\neq 0$ из-за бесконечной скорости распространения.
ii) для решения уравнения Клейна-Гордона, сингулярности движутся с конечной скоростью, поэтому они сохраняются при всех временах.

Следовательно, техника Йенсена и Като для доказательства убывания высокочастотной компоненты требует существенной модификации. Наш подход [22] к решению данной задачи основан на "ослабленной"версии строгого принципа Гюйгенса, борновских разложениях и их представлениях в виде сверток. А именно, для резольвенты $\mathcal{R}(\omega)$ уравнения Клейна-Гордона с потенциалом справедливо следующее борновское разложение

$$\mathcal{R}(\omega)=\mathcal{R}_0(\omega)-\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)+\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}(\omega) \tag{1.12}$$

Здесь через $\mathcal{R}_0(\omega)$ обозначена свободная резольвента, соответствующая $V=0$ с интегральным ядром (1.11), и $\mathcal{V}=\left(\begin{array}{cc}0 & 0\\ -iV & 0\end{array}\right)$. Применив обратное преобразование Фурье-Лапласа, мы получаем соответствующее представление динамической группы $\mathcal{U}(t)$ оператора Клейна-Гордона в виде свертки (1.3),

$$\mathcal{U}(t)=\mathcal{U}_0(t)+i\int_0^t\mathcal{U}_0(t-s)\mathcal{V}\mathcal{U}_0(s)ds-iF^{-1}_{\omega\to t}\Big[\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}(\omega)\Big] \tag{1.13}$$

где через $\mathcal{U}_0(t)$ обозначена свободная динамическая группа, соответствующая $V=0$. Иначе данное разложение получается методом последовательных приближений, если потенциал рассматривать как возмущение.

Далее мы рассматриваем отдельно каждое слагаемое в правой части (1.13):

I. Как уже говорилось ранее, для первого слагаемого $\mathcal{U}_0(t)$ мы не можем получить долговременное убывание при помощи спектрального представления вида (1.10). Это убывание получено в [13, лемма 18.2] для трехмерного уравнения Клейна-Гордона при помощи "ослабленной"версии строгого принципа Гюйгенса, обобщающей метод Вайнберга , примененный в [1] для волнового уравнения.

II. Для второго слагаемого мы также не можем получить долговременное убывание при помощи спектрального представления. Однако мы можем теперь получить это убывание из стандартных оценок для свертки. При этом мы используем ранее полученное убывание первого слагаемого и условие (1.6) для потенциала.

III. Наконец, долговременное убывание для последнего слагаемого получается из спектрального представления вида (1.10) при помощи техники Йенсена и Като, так как $\|\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\| \sim |\omega|^{-2}$ при $|\omega| \to \infty$. Это оказалось возможным благодаря удачной структуре матрицы $\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}$ (см. (4.19)).

В работах [20] и [21] мы распространили наш подход [22] на одномерные и двумерные уравнения Клейна-Гордона. Это оказалось связанным с дополнительными сложностями в виду того, что для свободных одномерных и двумерных уравнений Клейна-Гордона, соответствующих $V(x) = 0$ долговременное убывание типа (1.9) отсутствует. А именно, решение одномерного уравнения убывает как $\sim t^{-1/2}$, а решение двумерного уравнения убывает как $\sim t^{-1}$. Следовательно убывание (1.9) для уравнений с потенциалами не могут быть получены посредством теории возмущений из соответствующих оценок для свободных уравнений. Эта хорошо известная проблема препятствовала доказательству асимптотической устойчивости решений для многих важных нелинейных одномерных и двумерных задач. Такое медленное убывание обусловлено наличием “резонанса” для свободного оператора Шредингера в концевой точке $\lambda = 0$ непрерывного спектра.

Основная идея нашего метода для одномерной (соответственно двумерной) задачи заключается в спектральном анализе “плохого” члена, со слабым убыванием $\sim t^{-1/2}$ (соответственно $\sim t^{-1}$). А именно, мы показываем, что “плохой” член не влияет на убывание высокочастотной компоненты, поскольку его спектр сосредоточен в концевой точке непрерывного спектра. Следовательно, “хорошее” убывание высокочастотной компоненты доказывается аналогично трехмерному случаю. С другой стороны, в “регулярном случае” убывание вида (1.8)-(1.9) для низкочастотной компоненты получается при помощи надлежащего уточнения методов [16, 29].

Наш обзор организован следующим образом. В параграфах 2 и 3 мы излагаем классические результаты, полученные в работах [5, 16, 29] для уравнения Шредингера, из которых выводится асимптотическая полнота в задаче рассеяния. В параграфах 4 и 5 излагаются недавно полученные обобщения этих результатов на уравнения Клейна-Гордона.

Как уже отмечалось выше, мы ограничиваемся рассмотрением “регулярного” случая, наиболее важного для приложений из-за “хорошего” долговременного убывания (1.8)-(1.9), в то время как в основополагающих работах [16, 17, 29] рассмотрены все возможные случаи, что приводит к довольно громоздким доказательствам. Кроме того, доказательства некоторых ключевых оценок в оригинальных статьях отсутствуют. Например, оценка (A.2’) в работе Агмона [5] (оценка (3.32) в нашей статье) сформулирована в [5] только в виде замечания, хотя она используется почти во всех работах по спектральной теории рассеяния. Аналогичная ситуация сложилась с оценкой (2.20).

Поэтому для удобства читателей мы приводим адаптированное доказательство фундаментальной оценки (A.2'), а также доказательства практически всех вспомогательных результатов для наиболее важного "регулярного" случая. Кроме того, в работах [16, 17, 29] для уравнения Шредингера и в наших работах [20, 21, 22] для уравнения Клейна-Гордона размерности $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$ рассматриваются отдельно и доказательства многих утверждений для разных размерностей значительно отличаются друг от друга. Здесь мы впервые приводим общую универсальную схему, подходящую для всех размерностей.

2 Свободное уравнение Шредингера

Рассмотрим свободное уравнение Шредингера

$$i\dot{\psi}(x,t) = H_0\psi(x,t) = -\Delta\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

В данном параграфе мы дадим сводку спектральных свойств уравнения (2.1), полученных в работах [5, 16, 29]. Для $t > 0$ и $\psi_0 = \psi(0) \in L^2$, решение $\psi(t)$ уравнения (2.1) может быть получено при помощи спектрального представления Фурье-Лапласа. А именно, для любого $\varepsilon > 0$

$$\theta(t)\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i(\zeta+i\varepsilon)t} R_0(\zeta+i\varepsilon)\psi_0 \, d\zeta, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

где $\theta(t)$ -функция Хевисайда, $R_0(\zeta) = (H_0-\zeta)^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{C}^+ := \{\zeta \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ \zeta > 0\}$ - резольвента оператора H_0. Представление (2.2) получается из стационарного уравнения $\zeta\tilde{\psi}^+(\zeta) = H_0\tilde{\psi}^+(\zeta) + i\psi_0$, где $\tilde{\psi}^+(\zeta) := \int\limits_{\mathbb{R}} \theta(t)e^{i\zeta t}\psi(t)dt$, $\zeta \in \mathbb{C}^+$. Решение $\psi(t)$ является непрерывной ограниченной функцией переменной $t \in \mathbb{R}$ со значениями в L^2, что следует из закона сохранения нормы ($\|\psi(t)\|_{L^2}$) для решений уравнения (2.1). Следовательно, функция $\tilde{\psi}^+(\zeta) = -iR(\zeta)\psi_0$ является аналитической функцией переменной $\zeta \in \mathbb{C}^+$ со значениями в L^2, ограниченной при $\zeta \in \mathbb{R} + i\varepsilon$. Поэтому, интеграл (2.2) сходится в смысле распределений переменной $t \in \mathbb{R}$ со значениями в L^2. Аналогично (2.2),

$$\theta(-t)\psi(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i(\zeta-i\varepsilon)t} R_0(\zeta-i\varepsilon)\psi_0 \, d\zeta, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

Свободная резольвента $R_0(\zeta)$ оператора Шредингера является интегральным оператором с интегральным ядром (см. [16, 17])

$$R_0(\zeta, x-y) = \left\{ \begin{array}{c} -\exp(i\zeta^{1/2}|x-y|)/2i\zeta^{1/2}, \ n=1 \\ \\ \frac{i}{4}H_0^{(1)}(\zeta^{1/2}|x-y|) = \frac{1}{2\pi}K_0(-i\zeta^{1/2}|x-y|), \ n=2 \\ \\ \exp(i\zeta^{1/2}|x-y|)/4\pi|x-y|, \ n=3 \end{array} \right| \quad \zeta \in \mathbb{C}^+, \quad \mathrm{Im}\,\zeta^{1/2} > 0 \tag{2.4}$$

где $H_0^{(1)}$ -модифицированная функция Ганкеля, а K_0 - функция Макдональда.

2.1 Принцип предельного поглощения

Будем обозначать через $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2.

Лемма 2.1. *(см. теорему 4.1 из [5] и лемму 2.1 из [16])*
i) $R_0(\zeta)$ является аналитической функцией от $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(H_0^{-1}, H_0^1)$;
ii) Для всех $\zeta > 0$ и $\sigma > 1/2$ справедлив **принцип предельного поглощения**

$$R_0(\zeta \pm i\varepsilon) \to R_0(\zeta \pm i0), \quad \varepsilon \to 0+ \tag{2.5}$$

в пространстве $\mathcal{L}(H_\sigma^{-1}, H_{-\sigma}^1)$. Сходимость является равномерной в области $\zeta \geq \rho$ для любого $\rho > 0$.
iii) Для любого $\sigma > 1/2$ и для любого $\rho > 0$, операторная функция $R_0(\zeta \pm i0) : H_\sigma^{-1} \to H_{-\sigma}^1$ равномерно непрерывна в области $\zeta \geq \rho$.

Доказательство. i) Из явных формул (2.4) следует, что резольвента $R_0(\zeta)$, будучи оператором умножения в пространстве Фурье, является аналитической функцией от $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ со значениями в $\mathcal{L}(H_0^s, H_0^s)$ для любого $s \in \mathbb{R}$. Так как

$$(1 - \Delta)R_0(\zeta) = 1 + (\zeta + 1)R_0(\zeta) \tag{2.6}$$

то $R_0(\zeta)$ также является аналитической функцией от $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ со значениями в $\mathcal{L}(H_0^{s-2}, H_0^s)$. Положив $s = 1$, получим первое утверждение леммы.

ii) Второе утверждение леммы доказано в теореме 4.1 из [5] для $\sigma > 1/2$. Мы приведем упрощенное доказательство для $\sigma > n/2$, $n = 1, 2, 3$, что вполне достаточно для наших дальнейших целей. Вначале докажем неравенство

$$\|R_0(\zeta)\|_{\mathcal{L}(L^2_\sigma, L^2_{-\sigma})} \leq \left\{ \begin{array}{c} C/|\zeta|^{1/2}, \quad n = 1 \\ \\ C(\alpha)/|\zeta|^\alpha, \ \forall 0 < \alpha \leq 1/4, \quad n = 2 \\ \\ C, \quad n = 3 \end{array} \right| \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \tag{2.7}$$

По определению (1.5) весовых норм, это неравенство означает, что оператор

$$\tilde{R}_0(\zeta) := \langle x \rangle^{-\sigma} R_0(\zeta) \langle x \rangle^{-\sigma} : L^2 \to L^2$$

ограничен при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

a) Рассмотрим случай $n = 1$. Согласно (2.4), $\tilde{R}_0(\zeta)$ при $n = 1$ является оператором с интегральным ядром

$$\tilde{R}_0(\zeta, x, y) = -\langle x \rangle^{-\sigma} \frac{e^{i\sqrt{\zeta}|x-y|}}{2i\sqrt{\zeta}} \langle y \rangle^{-\sigma}, \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

Так как мы выбрали $\operatorname{Im} \sqrt{\zeta} > 0$ для $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, то при $\sigma > 1/2$

$$\int |\tilde{R}_0(\zeta, x, y)|^2 dx dy \leq \frac{C}{|\zeta|} \int \langle x \rangle^{-2\sigma} \langle y \rangle^{-2\sigma} dx dy \leq C(\zeta) \tag{2.9}$$

т.е. норма Гильберта-Шмидта ограничена. Откуда вытекает (2.7) при $n = 1$, так как норма оператора в L^2 оценивается его нормой Гильберта-Шмидта.

б) Рассмотрим случай $n = 2$. Из свойств функции Макдональда (см. [2]) следует, что

$$|R_0(\zeta,x,y)| \le \frac{C(\alpha)}{|\zeta|^\alpha |x-y|^{2\alpha}}, \quad \forall 0<\alpha\le 1/4, \quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty), \quad x,y\in\mathbb{R}^2$$

Следовательно, для $2\sigma > 2$

$$\begin{aligned}
\int |\tilde R_0(\zeta,x,y)|^2 dxdy &\le \frac{C(\alpha)}{|\zeta|^{2\alpha}} \int \frac{\langle x\rangle^{-2\sigma}\langle y\rangle^{-2\sigma}}{|x-y|^{4\alpha}} dxdy \\
&\le \frac{C(\alpha)}{|\zeta|^{2\alpha}} \Big(\int_{|x-y|\ge 1} \langle x\rangle^{-2\sigma}\langle y\rangle^{-2\sigma} dxdy + \int_{|x-y|\le 1} \frac{\langle x\rangle^{-2\sigma}\langle y\rangle^{-2\sigma}}{|x-y|^{4\alpha}} dxdy \Big) \\
&\le \frac{C(\alpha)}{|\zeta|^{2\alpha}} \Big(C_1 + \int_{|z|\le 1} \frac{\langle y+z\rangle^{-2\sigma}\langle y\rangle^{-2\sigma}}{|z|^{4\alpha}} dydz \Big) \qquad (2.10)\\
&\le \frac{C(\alpha)}{|\zeta|^{2\alpha}} \Big(C_1 + \int_{|z|\le 1} \frac{\langle y\rangle^{-2\sigma}}{|z|^{4\alpha}} dydz \Big) \le \frac{C_2(\alpha)}{|\zeta|^{2\alpha}}
\end{aligned}$$

Оценка (2.7) при $n = 2$ доказана.

c) Наконец, рассмотрим случай $n = 3$. Аналогично (2.10), из (2.4) для $n = 3$ следует, что

$$\begin{aligned}
\int |\tilde R_0(\zeta,x,y)|^2 dxdy &\le \int \frac{\langle x\rangle^{-2\sigma}\langle y\rangle^{-2\sigma}}{|x-y|^2} dxdy \\
&\le \int_{|x-y|\ge 1} \langle x\rangle^{-2\sigma}\langle y\rangle^{-2\sigma} dxdy + \int_{|x-y|\le 1} \frac{\langle x\rangle^{-2\sigma}\langle y\rangle^{-2\sigma}}{|x-y|^2} dxdy \qquad (2.11)\\
&\le C + \int_{|z|\le 1} \frac{\langle y\rangle^{-2\sigma}}{|z|^2} dydz \le C_1
\end{aligned}$$

так как $2\sigma > 3$. Оценка (2.7) при $n = 3$ доказана.

Теперь (2.5) вытекает из оценки нормы Гильберта-Шмидта. Действительно,

$$\int |\tilde R_0(\zeta\pm i\varepsilon,x,y) - \tilde R_0(\zeta\pm i0,x,y)|^2 dxdy \to 0, \quad \varepsilon\to 0+, \quad \zeta>0 \qquad (2.12)$$

в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, так как

a) Подынтегральное выражение стремится к нулю для почти всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ в силу формул (2.4).

b) В силу (2.9)-(2.11) существует суммируемая мажоранта

Распространение данного результата на $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma, H^1_{-\sigma})$ делается так же, как в пункте i).
iii) Третье утверждение леммы доказывается аналогично второму. □

Замечание 2.2. *Если оператор* $G \in \mathcal{L}(H^s_\sigma, H^{s'}_{-\sigma})$ *при всех* $\sigma > \alpha$ *с некоторым* $\alpha > 0$ *и* $s, s' \in \mathbb{R}$, *то* $G \in \mathcal{L}(H^s_{\sigma_1}, H^{s'}_{-\sigma_2})$ *при всех* $\sigma_1, \sigma_2 > \alpha$.

2.2 Поведение резольвенты при $\zeta \to 0$

Из формул (2.4) легко получить сходящиеся ряды для интегральных ядер

$$R_0(\zeta, x-y) = \left\{ \begin{array}{c} A_0(x-y)\zeta^{-1/2} + \sum\limits_{j=0}^{\infty} B_j(x-y)\zeta^{j/2}, \quad n=1 \\ \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j(x-y)\zeta^j \log\zeta + \sum\limits_{j=0}^{\infty} B_j(x-y)\zeta^j, \quad n=2 \\ \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} B_j(x-y)\zeta^{j/2}, \quad n=3 \end{array} \right| \quad \zeta \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$$

Можно показать, что соответствующие операторные ряды являются асимптотическими рядами в весовых соболевских пространствах с нормами (1.5). Ниже мы доказываем соответствующие оценки, ограничиваясь одним или двумя членами асимптотики, поскольку этого достаточно для наших целей. Мы рассматриваем отдельно случаи $n=1$, $n=2$ и $n=3$. Будем обозначать через A_0 и B_0 операторы, соответствующие интегральным ядрам $A_0(x-y)$ и $B_0(x-y)$.

Лемма 2.3. *При $n=1$ для любого $\sigma > 5/2$ справедливы асимптотики*

$$\left. \begin{array}{r} R_0(\zeta) = A_0\zeta^{-1/2} + B_0 + \mathcal{O}(\zeta^{1/2}) \\ \\ R_0'(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-3/2}) \\ \\ R_0''(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-5/2}) \end{array} \right| \quad \zeta \to 0, \quad \zeta \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty) \tag{2.13}$$

в пространстве $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma; H^1_{-\sigma})$, где

$$\begin{array}{rcl} A_0 &=& \mathrm{Op}\Big[\dfrac{i}{2}\Big] \in \mathcal{L}(H^{-1}_\sigma; H^1_{-\sigma}), \quad \sigma > 1/2 \\ B_0 &=& \mathrm{Op}\Big[-\dfrac{|x-y|}{2}\Big] \in \mathcal{L}(H^{-1}_\sigma; H^1_{-\sigma}), \quad \sigma > 3/2 \end{array} \tag{2.14}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из разложения Тейлора для экспоненты в формуле (2.4) и того факта, что при $k = 0, 1, 2...$ оператор с интегральным ядром $|x-y|^k$ является оператором Гильберта-Шмидта в пространстве $\mathcal{L}(L^2_\sigma; L^2_{-\sigma})$ при условии, что $\sigma > n/2 + k$, так как

$$|x-y|^{2k} \le C\big((1+|x|)^{2k} + (1+|y|)^{2k}\big)$$

Принадлежность операторов A_0 и B_0 пространству $\mathcal{L}(H^s_\sigma, H^s_{-\sigma})$, а затем пространству $\mathcal{L}(H^s_\sigma, H^{s+2}_{-\sigma})$ делается так же, как в пункте i) доказательства леммы 2.1. А именно, из тождества (2.6) и асимптотики (2.13) следует, что $(1-\Delta)A_0 = A_0$, $(1-\Delta B_0) = 1 + B_0$. Поэтому, $\forall \psi \in H^s_\sigma$

$$\|A_0\psi\|_{H^{s+2}_{-\sigma}} = \|\langle x\rangle^{-\sigma}\langle\nabla\rangle^{s+2}A_0\psi\|_{L^2} \le C\|\langle x\rangle^{-\sigma}\langle\nabla\rangle^{s}(1-\Delta)A_0\psi\|_{L^2}$$

$$= C\|(1-\Delta)A_0\psi\|_{H^s_{-\sigma}} = C\|A_0\psi\|_{H^s_{-\sigma}} \le C_1\|\psi\|_{H^s_\sigma}$$

и аналогично для оператора B_0. □

Лемма 2.4. *При $n = 2$ для любого $\sigma > 5/2$ справедливы следующие асимптотики*

$$
\left.\begin{aligned}
R_0(\zeta) &= A_0 \log\zeta + B_0 + \mathcal{O}(\zeta^{3/4})\\
R_0'(\zeta) &= A_0\zeta^{-1} + \mathcal{O}(\zeta^{-1/4})\\
R_0''(\zeta) &= -A_0\zeta^{-2} + \mathcal{O}(\zeta^{-5/4})
\end{aligned}\right|\quad \zeta\to 0,\ \zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty) \tag{2.15}
$$

в пространстве $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma; H^1_{-\sigma})$, где

$$
A_0 = \mathrm{Op}\Big[-\frac{1}{4\pi}\Big],\ B_0 = \mathrm{Op}\Big[-\frac{\gamma}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\log\frac{|x-y|}{2} + \frac{i}{4}\Big] \in \mathcal{L}(H^{-1}_\sigma; H^1_{-\sigma}),\quad \sigma > 1 \tag{2.16}
$$

Доказательство. Из асимптотики функции Макдональда [2] следует, что

$$
K_0(z) = -\log\frac{z}{2} - \gamma + \mathcal{O}(z^{3/2}),\quad K_1(z) = z^{-1} + \mathcal{O}(z^{1/2}),\quad K_2(z) = 2z^{-2} + \mathcal{O}(z^{-1/2}),\quad iz\in\mathbb{C}^+ \tag{2.17}
$$

где γ -константа Эйлера. Дифференцируя вторую строку равенства (2.4), получаем

$$
R_0'(\zeta, x-y) = -\frac{i}{4\pi}\zeta^{-1/2}|x-y|K_0'(-i\zeta^{1/2}|x-y|) = \frac{i}{4\pi}\zeta^{-1/2}|x-y|K_1(-i\zeta^{1/2}|x-y|)
$$

$$
R_0''(\zeta, x-y) = -\frac{i|x-y|}{8\pi\,\zeta^{3/2}}K_1(-i\zeta^{1/2}|x-y|) - \frac{|x-y|^2}{16\pi\,\zeta}\big[K_0(-i\zeta^{1/2}|x-y|) + K_2(-i\zeta^{1/2}|x-y|)\big]
$$

Отсюда и из асимптотик (2.17) вытекают асимптотики (2.15). □

Лемма 2.5. *При $n = 3$ справедливы асимптотики*

$$
\left.\begin{aligned}
R_0(\zeta) &= B_0 + \mathcal{O}(\zeta^{1/2})\\
R_0'(\zeta) &= \mathcal{O}(\zeta^{-1/2})\\
R_0''(\zeta) &= \mathcal{O}(\zeta^{-3/2})
\end{aligned}\right|\quad \zeta\to 0,\quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty) \tag{2.18}
$$

в пространстве $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma; H^1_{-\sigma})$, где $\sigma > 3/2$ для первых двух строчек, и $\sigma > 5/2$ для последней строчки. При этом

$$
B_0 = \mathrm{Op}\Big[\frac{1}{4\pi|x-y|}\Big] \in \mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma_1}; H^1_{-\sigma_2}),\quad \sigma_1,\sigma_2 > 1/2,\quad \sigma_1+\sigma_2 > 2 \tag{2.19}
$$

Доказательство. Асимптотики (2.18) следуют из разложения Тейлора для экспоненты в формуле (2.4). Проверим принадлежность оператора B_0 пространству $\mathcal{L}(L^2_{\sigma_1}; L^2_{-\sigma_2})$. Для этого достаточно доказать, что для любых $\psi_1\in L^2_{\sigma_1}$ и $\psi_2\in L^2_{\sigma_2}$

$$
|\langle B_0\psi_1,\psi_2\rangle| \le C\|\psi_1\|_{L^2_{\sigma_1}}\|\psi_2\|_{L^2_{\sigma_2}}. \tag{2.20}
$$

В самом деле,

$$
\langle B_0\psi_1,\psi_2\rangle = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\hat\psi_1(k)\overline{\hat\psi_2(k)}}{k^2}dk = \int\limits_{|k|\le 1}\dots + \int\limits_{|k|\ge 1}\dots = I_1 + I_2
$$

Очевидно, что $I_2 \le C\|\psi_1\|_{L^2}\|\psi_2\|_{L^2}$. Осталось оценить I_1:

$$I_1 \le C\|\psi_1\|_{L^2_{\sigma_1}}\|\psi_2\|_{L^2_{\sigma_2}} \tag{2.21}$$

Из неравенства Гельдера следует, что

$$|I_1| \le C\Big(\int\limits_{|k|\le 1} k^{-2q}\,dk\Big)^{1/q}\|\hat\psi_1\overline{\hat\psi_2}\|_{L^p} \le C_1\|\hat\psi_1\|_{L^{p_1}}\|\hat\psi_2\|_{L^{p_2}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p}$$

если $1<q<3/2$, что эквивалентно $p>3$. Заметим, что условия

$$p>3, \quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p}, \quad p_i>1, \;\; i=1,2$$

эквивалентны условиям

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}<\frac{1}{3}, \quad p_i>3, \;\; i=1,2 \tag{2.22}$$

Используя непрерывность преобразования Фурье, получим:

$$\|\hat\psi_i\|_{L^{p_i}} \le C\|\psi_i\|_{L^{r_i}}, \quad \frac{1}{p_i}+\frac{1}{r_i}=1, \quad i=1,2$$

Далее, по неравенству Коши-Буняковского

$$\|\psi_i\|_{L^{r_i}} \le C\|(1+|x|)^{-\sigma_i}\|_{L^{s_i}}\|\psi_i\|_{L^2_{\sigma_i}} \le C_1\|\psi_i\|_{L^2_{\sigma_i}}, \;\frac{1}{s_i}+\frac{1}{2}=\frac{1}{r_i}$$

если $\sigma_i s_i>3$ или

$$\frac{1}{s_i}<\frac{\sigma_i}{3} \tag{2.23}$$

Так как $\dfrac{1}{s_i}=\dfrac{1}{r_i}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p_i}$, то мы получим нужное нам неравенство (2.21) при выполнении условий (2.22)-(2.23), т.е.

$$\frac{1}{2}-\frac{\sigma_i}{3}<\frac{1}{p_i}<\frac{1}{3}, \quad i=1,2, \quad \text{и} \quad 1-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{3}<\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}<\frac{1}{3} \tag{2.24}$$

Осталось подобрать параметры p_i, удовлетворяющие этим условиям. Они существуют, так как $\sigma_i>1/2$ и $\sigma_1+\sigma_2>2$. □

Следствие 2.6. *Пусть $n=3$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ семейство функций $\{R_0(\zeta),\ |\zeta|<\varepsilon,\ \zeta\in\mathbb{C}\setminus(0,\infty)\}$ ограничено в операторной норме пространства $\mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma_1}; H^1_{-\sigma_2})$, где $\sigma_1,\sigma_2>1/2$ такие, что $\sigma_1+\sigma_2>2$*

Доказательство. Это следует из леммы 2.5 и оценки

$$|R_0(\zeta,x,y)| = \frac{|e^{i\zeta^{1/2}|x-y|}|}{4\pi|x-y|} \le \frac{C(\varepsilon)}{4\pi|x-y|}$$

так как мы выбрали $\operatorname{Im}\zeta^{1/2}>0$ при $\zeta\in\mathbb{C}\setminus(0,\infty)$. □

2.3 Убывание резольвенты при $\zeta \to \infty$

Изучим асимптотику резольвенты $R_0(\zeta)$ оператора H_0 в $\mathbb{R}^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ при больших значениях ζ.

Теорема 2.7. *(см. [5, (A.2')], [16, (8.1)])*
Для $k = 0, 1, 2, ...$ и $\sigma > k + 1/2$, справедлива асимптотика

$$\|R_0^{(k)}(\zeta)\|_{\mathcal{H}^s_\sigma \to \mathcal{H}^{s+l}_{-\sigma}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\frac{1-l+k}{2}}), \quad |\zeta| \to \infty, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty), \qquad s \in \mathbb{R}, \quad l = -1, 0, 1, ... \tag{2.25}$$

Замечание 2.8. *i) Асимптотика (*2.25*) не вытекает непосредственно из явных формул (*2.4*). Например, в трехмерном случае $R_0(\zeta, x, y) = \dfrac{e^{i\sqrt{\zeta}|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ и убывание (*2.25*) не очевидно.*
ii) С другой стороны, для производных $R_0(\zeta, x, y)$ по переменной ζ степень убывания улучшается на $1/2$ с каждым дифференцированием, в то время как степень роста по $|x - y|$ увеличивается на 1.

Предварительно докажем несколько лемм. Первые две леммы хорошо известны (см. [5, леммы A.1 и A.2], и [3, леммы 3 и 4 на с. 192]).

Лемма 2.9. *Для $\sigma > 1/2$ справедливо неравенство:*

$$\|v\|_{L^2_{-\sigma}(\mathbb{R})} \le C_\sigma \big\|[\frac{d}{dx} - \lambda]v\big\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R})}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \tag{2.26}$$

Доказательство. Обозначим $f(x) = [\frac{d}{dx} - \lambda]v(x)$. Достаточно рассмотреть случай $\mathrm{Re}\lambda \le 0$. Тогда

$$v(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y) e^{\lambda(x-y)} dy$$

Применим неравенство Коши-Шварца:

$$|v(x)|^2 \le \Big(\int\limits_{-\infty}^{x} |f(y)| dy\Big)^2 \le C_\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+y^2)^\sigma |f(y)|^2 dy, \qquad C_\sigma = \int (1+y^2)^{-\sigma} dy < \infty \tag{2.27}$$

так как $\sigma > 1/2$. Умножим (2.27) на $(1 + x^2)^{-\sigma}$ и интегрируя по $\mathbb{R}$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2 (1 + x^2)^{-\sigma} dx \le C_\sigma^2 \int (1 + y^2)^\sigma |f(y)|^2 dy$$

Это завершает доказательство леммы. □

Обозначим $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, ..., n$.

Лемма 2.10. *Для $\sigma > 1/2$ и $j = 1, 2, ..., n$ справедливо неравенство:*

$$\int (1 + x_j^2)^{-\sigma} |\partial_j u|^2 dx \le C_\sigma^2 \int (1 + x_j^2)^\sigma |(\Delta + \zeta)u|^2 dx, \quad \zeta \in \mathbb{C}\ , \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{2.28}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $j = 1$. Обозначим через $\tilde{u}(x_1, \xi')$, $\xi' = (\xi_2, \xi_3, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ преобразование Фурье функции $u(x_1, x')$ по отношению к переменной $x' = (x_2, x_3, ..., x_n)$. Тогда неравенство (2.28) может быть преобразовано с помощью равенства Парсеваля следующим образом

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int (1+x_1^2)^{-\sigma} |\partial_1 \tilde{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \le C_\sigma^2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int (1+x_1^2)^{-\sigma} |[\partial_1^2 - \xi_2^2 - ... - \xi_n^2 + \zeta]\tilde{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \tag{2.29}$$

Следовательно, достаточно доказать, что для почти всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\int (1 + x_1^2)^{-\sigma} |\partial_1 \tilde{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \le C_\sigma^2 \int (1 + x_1^2)^{\sigma} |[\partial_1^2 - \xi_2^2 - ... - \xi_n^2 + \zeta]\tilde{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \tag{2.30}$$

Разложим выражение в квадратных скобках на множители

$$\partial_1^2 - \xi_2^2 - ... - \xi_n^2 + \zeta = [\partial_1 - \lambda_1(\xi')][\partial_1 - \lambda_2(\xi')], \qquad \lambda_{1,2}(\xi') = \pm\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2 + ... + \xi_n^2 - \zeta} \tag{2.31}$$

Применяя лемму 2.9 для $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2$, к функциям $v_j(x_1) = [\partial_1 - \lambda_j(\xi')]\tilde{u}(x_1, \xi')$ при $j \ne k$, мы получим

$$\begin{aligned} & \int (1 + x_1^2)^{-\sigma} |[\partial_1 - \lambda_j(\xi')]\tilde{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \\ \le\ & C_\sigma^2 \int (1 + x_1^2)^{\sigma} |[\partial_1 - \lambda_k(\xi')][\partial_1 - \lambda_j(\xi')]\tilde{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \\ =\ & C_\sigma^2 \int (1 + x_1^2)^{\sigma} |[\partial_1^2 - \xi_2^2 - ... - \xi_n^2 + \zeta]\tilde{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1, \qquad \xi' \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.32}$$

Осталось заметить, что

$$2\partial_1 \tilde{u}(x_1, \xi') = [\partial_1 - \lambda_1(\xi'))\tilde{u}(x_1, \xi'] + [\partial_1 - \lambda_2(\xi'))\tilde{u}(x_1, \xi'] \tag{2.33}$$

так как $\lambda_1(\xi') + \lambda_2(\xi') = 0$. Неравенство (2.30) следует теперь из (2.32) для $j = 1, 2$. $\square$

Следующая лемма (и ее доказательство) является упрощенной версией соответствующей Леммы A.3 из [5]. Мы докажем эту лемму для $B \ge 1$ так как это достаточно для наших применений. Доказательство для маленьких $B > 0$ можно найти в [5, Lemma A.3].

Лемма 2.11. *Для любых $p \in \mathbb{R}$, $B > 0$ и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, справедлива оценка*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_p^l} \le C(p)|\zeta|^{-\frac{1-l}{2}} \Big(\|(\Delta + \zeta)\psi\|_{\mathcal{H}_p^0} + \sum_{j=1}^n \|\partial_j \psi(x)\|_{\mathcal{H}_p^0} \Big), \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad |\zeta| \ge B, \quad l = 0, 1 \tag{2.34}$$

Доказательство. i) Вначале мы докажем оценку (2.34) для $p = 0$. Для доказательства применим неравенство

$$(1 + |\xi|^l)^2 \le C|\zeta|^{-(1-l)} \Big(||\xi|^2 - \zeta|^2 + |\xi|^2 \Big), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\zeta| \ge 1, \quad l = 0, 1 \tag{2.35}$$

Для $l=1$ это неравенство очевидно. Для $l=0$ оно сводится к квадратному неравенству для $y=|\xi|^2-|\zeta|$ так как в этом случае

$$\begin{aligned} ||\xi|^2-\zeta|^2+|\xi|^2 &\geq ||\xi|^2-|\zeta||^2+|\xi|^2=y^2+y+|\zeta| \\ &\geq \min(y^2+y)+|\zeta|=|\zeta|-1/4\geq\frac{|\zeta|}{2}, \qquad |\zeta|\geq 1 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Далее, умножим обе части неравенства (2.35) на $|\hat{\psi}(\xi)|^2$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^n$. Тогда из равенства Парсеваля для $|\zeta|\geq 1$ мы получим, что

$$\sum_{|\alpha|\leq l}\|\partial^\alpha\psi\|^2\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^l)^2|\hat{\psi}(\xi)|^2d\xi\leq C_0(r)|\zeta|^{-(1-l)}\Big(\|(\Delta+\zeta)\psi\|^2+\sum_{j=1}^n\|\partial_j\psi(x)\|^2\Big) \tag{2.37}$$

Неравенство (2.34) для $p=0$ доказано.
ii) Для произвольного $p\in\mathbb{R}$, перепишем неравенство (2.34) следующим образом

$$\sum_{|\alpha|\leq l}\|\rho(x)\partial^\alpha\psi(x)\|\leq C(p)|\zeta|^{-\frac{1-l}{2}}\Big(\|\rho(x)(\Delta+\zeta)\psi(x)\|+\sum_{j=1}^n\|\rho(x)\partial_j\psi(x)\|\Big) \tag{2.38}$$

где $\rho(x)=(1+|x|^2)^{p/2}$. С другой стороны, применив неравенство (2.37) к функции $\rho(x)\psi(x)$, получим

$$\sum_{|\alpha|\leq l}\|\partial^\alpha[\rho\psi]\|^2\leq C|\zeta|^{-(1-l)}\Big(\|(\Delta+\zeta)[\rho\psi]\|^2+\sum_{j=1}^n\|\partial_j[\rho\psi]\|^2\Big),\qquad |\zeta|\geq 1 \tag{2.39}$$

Для того, чтобы вывести (2.38) из (2.39), рассмотрим коммутаторы

$$\partial^\alpha(\rho\psi)-\rho\partial^\alpha\psi=\sum_{0\leq\beta_j\leq\alpha_j,\ |\beta|\ \geq 1}C_{\alpha,\beta}\partial^\beta\rho\cdot\partial^{\alpha-\beta}\psi,\quad 0\leq|\alpha|\leq 2 \tag{2.40}$$

Основная идея Агмона заключается в доказательстве того, что коммутаторы малы при больших значениях $|\zeta|$ и их вклад пренебрежимо мал. Заметим, что

$$|\partial_j\rho(x)|=\Big|\frac{p}{2}(1+|x|^2)^{p/2-1}2x_j\Big|\leq\frac{|p|}{2}(1+|x|^2)^{p/2-1}(1+x_j^2)\leq C\rho(x)$$

где $C=C(p)$. Аналогично $|\partial^\alpha\rho(x)|\leq C\rho(x)$ при $x\in\mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$\|\partial^\alpha(\rho\psi)-\rho\partial^\alpha\psi\|\leq C_1\sum_{|\gamma|\leq|\alpha|-1}\|\rho\partial^\gamma\psi\| \tag{2.41}$$

Поэтому

$$\|(\Delta+\zeta)(\rho\psi)-\rho(\Delta+\zeta)\psi\|\leq C_2\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\rho\partial^\alpha\psi\| \tag{2.42}$$

iii) Докажем (2.34) для $l = 0$. Применяя (2.39) при $l = 0$ к функции $\rho\psi$ вместо ψ, и используя (2.42) и (2.41) при $|\alpha| = 1$, получим

$$\begin{aligned}\|\rho\psi\| &\le C|\zeta|^{-1/2}\Big(\|(\Delta+\zeta)(\rho\psi)\| + \sum_{j=1}^{n}\|\partial_j(\rho\psi)\|\Big)\\ &\le C|\zeta|^{-1/2}\Big(\|\rho(\Delta+\zeta)\psi\| + C_2(\|\rho\psi\| + \sum_{j=1}^{n}\|\rho\partial_j\psi\|) + \sum_{j=1}^{n}\|\rho\partial_j\psi\| + C_1\|\rho\psi\|\Big)\\ &\le C_3|\zeta|^{-1/2}\Big(\|\rho(\Delta+\zeta)\psi\| + \sum_{j=1}^{n}\|\rho\partial_j\psi\|\Big) + |\zeta|^{-1/2}C_4\|\rho\psi\|, \qquad |\zeta| \ge 1\end{aligned}$$

Выбирая $B > 0$ достаточно большим, таким что $B^{-1/2}C_4 < 1$, получим

$$\|\rho\psi\| \le C_5|\zeta|^{-1/2}\Big(\|\rho(\Delta+\zeta)\psi\| + \sum_{j=1}^{n}\|\rho\partial_j\psi\|\Big), \qquad |\zeta| \ge B \tag{2.43}$$

Следовательно, оценки (2.38)и (2.34) при $l = 0$ доказаны.

iv) Докажем (2.34) для $l = 1$. Применяя (2.41) при $|\alpha| = 1$ и (2.39) при $l = 1$, а также неравенство (2.42), получим

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\le 1}\|\rho\partial^\alpha\psi\| &\le \sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha(\rho\psi)\| + C_1\|\rho\psi\|\\ &\le C_6\Big(\|(\Delta+\zeta)(\rho\psi)\| + \sum_{j=1}^{n}\|\partial_j(\rho\psi)\|\Big) + C_1\|\rho\psi\|\\ &\le C_7\Big(\|\rho(\Delta+\zeta)\psi\| + \sum_{j=1}^{n}\|\rho\partial_j\psi\|\Big) + C_8(r)\|\rho\psi\|\end{aligned}$$

Далее, из (2.43) следует, что

$$\sum_{|\alpha|\le 1}\|\rho\partial^\alpha\psi\| \le C_9\Big(\|\rho(\Delta+\zeta)\psi\| + \sum_{j=1}^{3}\|\rho\partial_j\psi\|\Big)$$

Вместе с (2.43), это доказывает (2.38) и (2.34) при $l = 1$. □

Доказательство Теоремы 2.7 при $k = 0$. Достаточно доказать теорему в случае $s = 0$, так как оператор $R_0(\zeta)$ коммутирует с оператором $\langle\nabla\rangle^s$. Мы должны проверить, что при $\sigma > 1/2$

$$\|R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_\sigma\to\mathcal{H}^l_{-\sigma}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\frac{1-l}{2}}), \quad |\zeta|\to\infty, \quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty) \qquad l = -1, 0, 1, ... \tag{2.44}$$

i) Рассмотрим случай $l = 0, 1$. Применяя лемму 2.11 при $p = -\sigma$, получим

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^l_{-\sigma}} \le C(\sigma)|\zeta|^{-\frac{1-l}{2}}\Big(\|(\Delta+\zeta)\psi\|_{\mathcal{H}^0_{-\sigma}} + \sum_{j=1}^{n}\|\partial_j\psi\|_{\mathcal{H}^0_{-\sigma}}\Big), \quad |\zeta| \ge 1 > 0, \quad l = 0, 1 \tag{2.45}$$

для всех $\psi \in \mathcal{H}^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$. С другой стороны, из леммы 2.10 следует, что

$$\sum_{j=1}^n \|\partial_j \psi\|_{\mathcal{H}^0_{-\sigma}} \le C(\sigma)\|(\Delta+\zeta)\psi\|_{\mathcal{H}^0_\sigma} \tag{2.46}$$

Комбинируя (2.45) и (2.46), получим

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^l_{-\sigma}} \le C(\sigma)|\zeta|^{-\frac{1-l}{2}}\Big(\|(\Delta+\zeta)\psi\|_{\mathcal{H}^0_{-\sigma}} + C_1(\sigma)\|(\Delta+\zeta)\psi\|_{\mathcal{H}^0_\sigma}\Big) \le C_2(\sigma)|\zeta|^{-\frac{1-l}{2}}\|(\Delta+\zeta)\psi\|_{\mathcal{H}^0_\sigma}$$

Асимптотика (2.44) при $l = 0, 1$ доказана.

ii) Пусть $l = 2$. Тогда, используя тождество $(1-\Delta)R_0(\zeta) = 1 + (\zeta+1)R_0(\zeta)$, и оценку (2.44) при $l = 0$, получим

$$\begin{aligned} \|R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_\sigma \to \mathcal{H}^2_{-\sigma}} &= \|(1-\Delta)R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_\sigma \to \mathcal{H}^0_{-\sigma}} = \|1+(\zeta+1)R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_\sigma \to \mathcal{H}^0_{-\sigma}} \\ &= 1 + \mathcal{O}(|\zeta|)\|R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_\sigma \to \mathcal{H}^0_{-\sigma}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{1/2}) \end{aligned}$$

Асимптотики (2.44) при $l > 2$ доказывается аналогично.

iii) При $l = -1$ используем тождество $R_0(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} - \frac{\Delta R_0(\zeta)}{\zeta}$. Из оценки (2.44) при $l = 1$ следует, что $\|R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_\sigma \to \mathcal{H}^1_{-\sigma}} = \mathcal{O}(1)$, поэтому $\|\Delta R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_\sigma \to \mathcal{H}^{-1}_{-\sigma}} = \mathcal{O}(1)$. Следовательно,

$$\|R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_\sigma \to \mathcal{H}^{-1}_{-\sigma}} = \Big\| -\frac{1}{\zeta} - \frac{\Delta R_0(\zeta)}{\zeta}\Big\|_{\mathcal{H}^0_\sigma \to \mathcal{H}^{-1}_{-\sigma}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-1})$$

Теорема 2.7 в случае $k = 0$ доказана.

Доказательство теоремы 2.7 случае $k > 0$ Докажем убывание (2.25) для производных $R_0^{(k)}(\zeta)$. Как и ранее, достаточно проверить случай $s = 0$, т.е. доказать, что при $\sigma > k + 1/2$

$$\|R_0^{(k)}(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_\sigma \to \mathcal{H}^l_{-\sigma}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\frac{1-l+k}{2}}), \quad |\zeta| \to \infty, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty), \qquad l = -1, 0, 1, .. \tag{2.47}$$

i) Вначале мы докажем лемму, устанавливающую соотношение между $R_0'(\zeta)$ и $R_0(\zeta)$ (см. [16, (8.2)])

Лемма 2.12. *Справедливо следующее тождество (тождество Лавина)*

$$\zeta R_0'(\zeta) = -R_0(\zeta) + \frac{1}{2}[x \cdot \nabla, R_0(\zeta)], \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty) \tag{2.48}$$

где $[\cdot,\cdot]$ *обозначает коммутатор.*

Доказательство. Применим к обеим частям (2.48) преобразование Фурье:

$$\zeta \frac{1}{(\xi^2-\zeta)^2} = -\frac{1}{\xi^2-\zeta} + \frac{1}{2}[\nabla \cdot \xi, \frac{1}{\xi^2-\zeta}], \qquad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty) \tag{2.49}$$

Заметим, что коммутатор $[\nabla, f(\xi)]$ совпадает с оператором умножения на $\nabla f(\xi)$. Следовательно, правая часть равенства (2.49) равна

$$-\frac{1}{\xi^2-\zeta} + \frac{\xi^2}{(\xi^2-\zeta)^2}$$

что совпадает с левой частью равенства (2.49). $\square$

ii) Далее нам понадобится следующая лемма

Лемма 2.13. *Для любых $\sigma, s \in \mathbb{R}$*
1) Оператор умножения на x_j непрерывен из H^s_σ в $H^s_{\sigma-1}$;
2) Оператор дифференцирования ∂_j непрерывен из H^s_σ в H^{s-1}_σ.

Доказательство. 1) Мы должны проверить, что $\|x_j\psi\|_{H^s_{\sigma-1}} \le C\|\psi\|_{H^s_\sigma}$. Другими словами,

$$\|\langle x\rangle^{\sigma-1}\langle\nabla\rangle^s x_j\psi\| \le C\|\langle x\rangle^\sigma\langle\nabla\rangle^s\psi\| \tag{2.50}$$

Обозначим $f = \langle x\rangle^\sigma\langle\nabla\rangle^s\psi$. Тогда $\psi = \langle\nabla\rangle^{-s}\langle x\rangle^{-\sigma}f$, и из (2.50) следует, что

$$\|\langle x\rangle^{\sigma-1}\langle\nabla\rangle^s x_j\langle\nabla\rangle^{-s}\langle x\rangle^{-\sigma}f\| \le C\|f\|$$

Произведение операторов $\langle x\rangle^{\sigma-1}\langle\nabla\rangle^s x_j\langle\nabla\rangle^{-s}\langle x\rangle^{-\sigma}$ является непрерывным оператором в L^2 в силу теорем о композиции и ограниченности псевдодифференциальных операторов (ПДО). Эти теоремы для соответствующих классов ПДО, порожденных операторами $\langle x\rangle^\sigma$ и $\langle\nabla\rangle^s$ при любых $\sigma, s \in \mathbb{R}$, доказываются при помощи стандартной техники ПДО (см., например, [4]).
2) Непрерывность $\partial_j : H^s_\sigma \to H^{s-1}_\sigma$ доказывается аналогично. □

Для $k = 1$ и $\sigma > 3/2$, асимптотика (2.47) следует из (2.48) и (2.25). Действительно, $\|R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_{\sigma-1}\to\mathcal{H}^{1+l}_{-\sigma+1}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\frac{1-(1+l)}{2}})$ в силу (2.25) при $s = 0$, так как $0 \le 1 + l$ и $\sigma - 1 > 1/2$. Аналогично, $\|R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^{-1}_{\sigma-1}\to\mathcal{H}^{l}_{-\sigma+1}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\frac{1-(1+l)}{2}})$ в силу (2.25) при $s = -1$. Следовательно,

$$\|x\cdot\nabla R_0(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_{\sigma-1}\to\mathcal{H}^l_{-\sigma}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\frac{1-(1+l)}{2}}), \qquad \|R_0(\zeta)x\cdot\nabla\|_{\mathcal{H}^0_{\sigma}\to\mathcal{H}^l_{-\sigma+1}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\frac{1-(1+l)}{2}})$$

Окончательно, из (2.48) и (2.25) следует, что

$$\|R_0'(\zeta)\|_{\mathcal{H}^0_\sigma\to\mathcal{H}^l_{-\sigma}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\frac{1-l+1}{2}})$$

что соответствует (2.47) при $k = 1$.

iii) Для $k \ge 2$ асимптотика (2.47) получается при помощи индукции из рекуррентного соотношения

$$2\zeta R_0^{(k)}(\zeta) = -(2k-n)R_0^{(k-1)}(\zeta) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n [x_j, [x_j, R_0^{(k-2)}(\zeta)]], \quad k \ge 2 \tag{2.51}$$

Для доказательства этого соотношения, применим к правой части преобразование Фурье аналогично (2.49):

$$-(2k-n)\frac{(k-1)!}{(\xi^2-\zeta)^k} + \frac{1}{2}\nabla^2\frac{(k-2)!}{(\xi^2-\zeta)^{k-1}} = -(2k-n)\frac{(k-1)!}{(\xi^2-\zeta)^k} - \nabla\cdot\frac{(k-1)!\,\xi}{(\xi^2-\zeta)^k}$$

$$= -(2k-n)\frac{(k-1)!}{(\xi^2-\zeta)^k} - n\frac{(k-1)!}{(\xi^2-\zeta)^k} + \frac{2k!\xi^2}{(\xi^2-\zeta)^{k+1}} = -\frac{2k!}{(\xi^2-\zeta)^k} + \frac{2k!\xi^2}{(\xi^2-\zeta)^{k+1}} = 2\zeta\frac{k!}{(\xi^2-\zeta)^{k+1}}$$

что совпадает с преобразованием Фурье левой части (2.51). Теорема 2.7 полностью доказана.

Следствие 2.14. *При $t \in \mathbb{R}$ и $\psi_0 \in L^2_\sigma$ с $\sigma > n/2$, для решения $\psi(t)$ уравнения (2.1) справедливо интегральное представление*

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty e^{-i\zeta t} \Big[R_0(\zeta + i0) - R_0(\zeta - i0) \Big] \psi_0 \; d\zeta \tag{2.52}$$

Интеграл сходится в смысле распределений переменной $t \in \mathbb{R}$ со значениями в $L^2_{-\sigma}$.

Доказательство. Суммируя представления (2.2) и (2.3), и устремляя $\varepsilon \to 0+$, мы получим представление (2.52) при помощи теоремы Коши, оценки (2.7) и теоремы 2.7. □

3 Уравнение Шредингера с потенциалом

Рассмотрим уравнение Шредингера с ненулевым потенциалом $V(x)$:

$$i\dot{\psi}(x,t) = H\psi(x,t) = (-\Delta + V(x))\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 1,2,3 \tag{3.1}$$

Обозначим через $R(\zeta) = (H - \zeta)^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ резольвенту оператора H. Нижеперечисленные свойства резольвенты для потенциалов, удовлетворяющих условию (1.6) получены в работах [5, 16, 29]. Заметим, что в [16] рассмотрен трехмерный случай, однако при других размерностях соответствующие свойства доказываются аналогичным образом.

R1. Резольвента $R(\zeta)$ является голоморфной функцией от $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty) \cup \Sigma(V))$ со значениями в $\mathcal{L}(H_0^{-1}, H_0^1)$; где $\Sigma(V) = \{\omega_j \in [V_0, 0] : j = 1,2,...\}$ -дискретный спектр оператора H.

R2. Для $\zeta > 0$ имеет место сходимость (принцип предельного поглощения):

$$R(\zeta \pm i\varepsilon) \to R(\zeta \pm i0), \quad \varepsilon \to 0+$$

в пространстве $\mathcal{L}(H_\sigma^{-1}, H_{-\sigma}^1)$ с $\sigma > 1/2$, причем сходимость является равномерной в области $\zeta \geq \rho$ для любого $\rho > 0$ (см. теорему 9.1 из [5] , а также лемму 9.1 из [16]).

Так же как и в работе [29], (см. формулу (3.1)), рассмотрим обобщенное собственное подпространство $\mathbf{M}$ оператора $H = -\Delta + V$, соответствующее спектральному параметру $\zeta = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \{\psi \in H^1_{-n/2-0} : \; (1 + B_0 V)\psi \in \Re(A_0),\; A_0 V\psi = 0\}, \quad n = 1,2 \\ \mathbf{M} &= \{\psi \in H^1_{-1/2-0} : \; (1 + B_0 V)\psi = 0\}, \quad n = 3 \end{aligned} \tag{3.2}$$

где A_0 и B_0 определены в (2.14), (2.16), (2.19), и через $\Re(A_0)$ обозначен образ оператора A_0. Ниже мы будем предполагать, что

$$\mathbf{M} = 0 \tag{3.3}$$

Условие (3.3) соответствует “несингулярному случаю”, определенному в [29, Параграф 7]. Заметим, что условие (3.3) выполнено для “общих потенциалов” коразмерности 1 (см. [16], с.589).

Замечание 3.1. *Обозначим через $N(H)$ собственное подпространство, соответствующее нулевому собственному значению. В лемме 3.2 из [29] доказано, что $N(H) \subset \mathbf{M}$. Функции из $\mathbf{M}\setminus N(H)$ называются нулевыми резонансами. Таким образом, спектральное условие* (3.3) *означает, что нуль не является ни собственным значением, ни резонансом оператора H.*

Из условия (3.3) вытекает ограниченность резольвенты $R(\zeta)$ в концевой точке $\zeta = 0$ непрерывного спектра:

Предложение 3.2. *[см. [29, Теорема 7.2]] Пусть выполняются условия* (1.6) *и* (3.3) *и $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда*
i) при $n = 3$ и σ_1, $\sigma_2 > 1/2$, таких, что $\sigma_1 + \sigma_2 > 2$ семейство функций $\{R(\zeta),\ |\zeta| < \varepsilon,\ \zeta \in \mathbb{C} \setminus (0, \infty)\}$ ограничено в операторной норме пространства $\mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma_1}, H^1_{-\sigma_2})$
ii) при $n = 1, 2$ и $\sigma > 2 - n/2$ семейство функций $\{R(\zeta),\ |\zeta| < \varepsilon,\ \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)\}$ ограничено в операторной норме пространства $\mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma}, H^1_{-\sigma})$.

Доказательство. i) Пусть $n = 3$. Воспользуемся борновским разложением:

$$R(\zeta) = [1 + R_0(\zeta)V]^{-1}R_0(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \tag{3.4}$$

Из спектрального условия (3.3) следует, что оператор $1 + R_0(0)V$ обратим в пространстве $H^1_{-\sigma_2}$ в силу теоремы Фредгольма. Поэтому, операторная функция $[1 + R_0(\zeta)V]^{-1}$: $H^1_{-\sigma_2} \to H^1_{-\sigma_2}$ ограничена при маленьких $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (0, \infty)$, и ограниченность резольвенты $R(\zeta)$ при маленьких ζ вытекает из следствия 2.6 и разложения (3.4).

ii) Рассмотрим только случай $n = 1$, т.к. доказательство в случае $n = 2$ аналогично. Предположим, что семейство функций $\{R(i\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ неограничено в $\mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma}, H^1_{-\sigma})$ с некоторым $\sigma > 3/2$. Тогда найдутся $f \in H^{-1}_{\sigma}$ и ε_j такие, что

$$\varepsilon_j \to 0 \quad \text{и} \quad \|R(i\varepsilon_j)f\|_{H^1_{-\sigma}} \to \infty \quad \text{при} \quad j \to \infty$$

Положив $\psi_j = R(i\varepsilon_j)f/\|R(i\varepsilon_j)f\|_{H^1_{-\sigma}}$ и $f_j = f/\|R(i\varepsilon_j)f\|_{H^1_{-\sigma}}$, получим, что

$$(H - i\varepsilon_j)\psi_j = f_j \tag{3.5}$$

и

$$\|f_j\|_{H^{-1}_{\sigma}} \to 0, \quad j \to \infty \tag{3.6}$$

Из (3.5) следует, что

$$\psi_j = (i\varepsilon_j)^{-1/2}A_0(f_j - V\psi_j) + \Big(R_0(i\varepsilon_j) - (i\varepsilon_j)^{-1/2}A_0\Big)(f_j - V\psi_j) \tag{3.7}$$

где A_0 определено в (2.14). Так как $\|\psi_j\|_{H^1_{-\sigma}} = 1$, мы можем предположить, что

$$\psi_j \to \psi, \quad j \to \infty \tag{3.8}$$

слабо в пространстве $H^1_{-\sigma}$.

Шаг i) Рассмотрим второе слагаемое в правой части (3.7). В силу (2.13),

$$R_0(i\varepsilon_j) - (i\varepsilon_j)^{-1}A_0 \to B_0, \quad \varepsilon_j \to 0$$

в пространстве $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma, H^1_{-\sigma})$, поэтому из (3.6) следует, что

$$\|(R_0(i\varepsilon_j) - (i\varepsilon_j)^{-1/2}A_0)f_j\|_{H^1_{-\sigma}} \to 0, \quad j \to \infty \tag{3.9}$$

Далее, оператор $(R_0(i\varepsilon_j) - (i\varepsilon_j)^{-1/2}A_0)V$ является компактным оператором в пространстве $H^1_{-\sigma}$. Поэтому

$$\Big(R_0(i\varepsilon_j) - (i\varepsilon_j)^{-1/2}A_0\Big)(f_j - V\psi_j) \to -B_0V\psi, \quad j \to \infty$$

сильно в пространстве $H^1_{-\sigma}$, т.е. по норме этого пространства.

Шаг ii) Рассмотрим первое слагаемое в правой части (3.7). Это слагаемое слабо сходится в пространстве $H^1_{-\sigma}$ в силу (3.8) и (3.9). С другой стороны, из (2.14) следует, что

$$A_0(f_j - V\psi_j) = \frac{i}{2}\langle f_j - V\psi_j, 1\rangle$$

Поэтому,

$$(i\varepsilon_j)^{-1/2}A_0(f_j - V\psi_j) \to a, \quad j \to \infty \tag{3.10}$$

с некоторой постоянной a. Это означает, что первое слагаемое в правой части (3.7) сходится сильно в пространстве $H^1_{-\sigma}$.

Шаг iii) Теперь (3.8) сходиться по норме пространства $H^1_{-\sigma}$. Следовательно,

$$\|\psi\|_{H^1_{-\sigma}} = 1 \tag{3.11}$$

С другой стороны, в силу (3.7) и (3.10)

$$(1 + B_0V)\psi = a \in \Re(A_0) \quad \text{и} \quad A_0V\psi = 0$$

Значит, $\psi \in \mathbf{M} = 0$, что противоречит (3.11). □

Также из условий (3.3) и **R1** вытекает

Лемма 3.3. *Пусть выполняются условия (*1.6*) и (*3.3*). Тогда резольвента $R(\zeta)$ является строго мероморфной функцией $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ со значениями в $\mathcal{L}(H^{-1}_0, H^1_0)$; полюса $R(\zeta)$ совпадают с конечным множеством собственных значений $\zeta_j < 0$, $j = 1, ..., N$, оператора H с соответствующими собственными функциями $\psi^1_j(x), ...\psi^{k_j}_j(x)$, принадлежащими H^2_σ с любым $\sigma \in \mathbb{R}$, где через k_j обозначена кратность собственного значения ζ_j.*

Доказательство. Точка $\zeta = 0$ не может быть предельной точкой для дискретного спектра $\Sigma(V)$ в силу борновского разложения (3.4). Следовательно, множество $\Sigma(V)$, будучи дискретным подмножеством $[V_0, 0)$, является конечным множеством. Принадлежность собственных функций пространству H^2_σ с любым $\sigma \in \mathbb{R}$ доказана в теореме 3.3 и лемме 4.2 из [5]). □

3.1 Поведение резольвенты при $\zeta \to 0$

Получим асимптотики для резольвенты $R(\zeta)$ и ее производных $R'(\zeta)$, $R''(\zeta)$ при маленьких ζ.

Предложение 3.4. *(см. формулы 4.3 и 4.5 из [29], а также формулу 6.1 из [16]) Пусть выполняются условия (1.6) и (3.3). Тогда в пространстве $\mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma}, H^{1}_{-\sigma})$ с $\sigma > 5/2$ при $\zeta \to 0$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ справедливы асимптотики*

$$\left.\begin{aligned} &R(\zeta) = A + \mathcal{O}(\zeta^{1/2}) \\ &R'(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-1/2}) \\ &R''(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-3/2}) \end{aligned}\right| \quad n = 1, 3 \tag{3.12}$$

$$\left.\begin{aligned} &R(\zeta) = A + B\log^{-1}\zeta + \mathcal{O}(\log^{-2}\zeta) \\ &R'(\zeta) = -B\zeta^{-1}\log^{-2}\zeta + \mathcal{O}(\zeta^{-1}\log^{-3}\zeta) \\ &R''(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-2}\log^{-2}\zeta) \end{aligned}\right| \quad n = 2 \tag{3.13}$$

где $A, B \in \mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma}, H^{1}_{-\sigma})$ с $\sigma > 5/2$. В трехмерном случае асимптотики для $R(\zeta)$ и $R'(\zeta)$ справедливы в $\mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma}, H^{1}_{-\sigma})$ с $\sigma > 3/2$.

Прежде чем доказывать предложение, получим формулы для производных. Из борновских разложений

$$R(\zeta) = [1 + R_0(\zeta)V]^{-1}R_0(\zeta), \quad R(\zeta) = R_0(\zeta)[1 + VR_0(\zeta)]^{-1} \tag{3.14}$$

вытекают равенства

$$[1 + R_0(\zeta)V]R(\zeta) = R_0(\zeta), \quad R(\zeta)[1 + VR_0(\zeta)] = R_0(\zeta) \tag{3.15}$$

Поэтому

$$R(\zeta) = R_0(\zeta) - R(\zeta)VR_0(\zeta) = R_0(\zeta) - R_0(\zeta)VR(\zeta) \tag{3.16}$$

Далее, из (3.14) следует, что

$$R(\zeta)(H_0 - \zeta) = [1 + R_0(\zeta)V]^{-1}, \quad (H_0 - \zeta)R(\zeta) = [1 + VR_0(\zeta)]^{-1}$$

Подставив в последние равенства выражения (3.16) для $R(\zeta)$, получим

$$1 - R(\zeta)V = [1 + R_0(\zeta)V]^{-1}, \quad 1 - VR(\zeta) = [1 + VR_0(\zeta)]^{-1} \tag{3.17}$$

Дифференцируем второе равенство (3.15):

$$R'(1 + VR_0) + RVR_0' = R_0' \tag{3.18}$$

Откуда, применяя (3.17), получим

$$R' = (1-RV)R_0'(1+VR_0)^{-1} = (1-RV)R_0'(1-VR) = R_0' - RVR_0' - R_0'VR + RVR_0'VR \tag{3.19}$$

Чтобы получить тождество для второй производной, дифференцируем (3.18):

$$R''(1+VR_0) + 2R'VR_0' + RVR_0'' = R_0''$$

Откуда вытекает

$$\begin{aligned} R'' &= (1-RV)R_0''(1-VR) - 2R'VR_0'(1-VR) \\ &= R_0'' - RVR_0'' - R_0''VR + RVR_0''VR - 2R'VR_0' + 2R'VR_0'VR \end{aligned} \tag{3.20}$$

Доказательство предложения 3.4 при $n = 3$

i) Из леммы 3.2 следует, что для любых $\sigma_1,\ \sigma_2 > 1/2$, таких что $\sigma_1 + \sigma_2 > 2$

$$\|R(\zeta)\|_{\mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma_1}, H^1_{-\sigma_2})} = \mathcal{O}(1), \quad \zeta \to 0, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty) \tag{3.21}$$

ii) Покажем, что из тождества (3.19) для первой производной и из оценок (1.6), (2.18) и (3.21) следует асимптотика (3.12) для $R'(\zeta)$. Действительно, для первого слагаемого в правой части (3.19) асимптотика уже получена в (2.18). Рассмотрим второе слагаемое. Для $\beta > 3$ и $\sigma > 3/2$ выберем $\sigma' \in (3/2, \beta - 3/2)$. Тогда для любого $\psi \in H^{-1}_\sigma$ и маленьких $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$, используя замечание 2.2, получим

$$\|RVR_0'\psi\|_{H^1_{-\sigma}} \le C\|VR_0'\psi\|_{H^{-1}_{\sigma'}} \le C_1\|R_0'\psi\|_{H^{-1}_{\sigma'-\beta}} \le C_2|\zeta|^{-1/2}\|\psi\|_{H^{-1}_\sigma} \tag{3.22}$$

так как $-\sigma' + \beta > 3/2$. Асимптотика для остальных слагаемых получается аналогично. Следовательно,

$$\|R'(\zeta)\|_{\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma, H^1_{-\sigma})} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-1/2}), \quad \zeta \to 0, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty) \tag{3.23}$$

iii) Далее, при помощи тождества (3.20) докажем асимптотику (3.12) для $R''(\zeta)$, используя оценки (1.6), (2.18), (3.21) и (3.23). Для первого слагаемого в правой части (3.20) асимптотика вытекает из (2.18). Для последних двух слагаемых аналогично (3.22) получается оценка $\mathcal{O}(|\zeta|^{-1})$ в норме пространства $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma, H^1_{-\sigma})$ с $\sigma > 3/2$. Рассмотрим оставшиеся слагаемые. Мы предполагаем ниже, что $\beta > 3$, $\sigma > 5/2$, $\psi \in H^{-1}_\sigma$ и рассматриваем маленькие $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$. Тогда:

1) Выбирая $\sigma' \in (5/2, \beta - 1/2)$, получаем

$$\|RVR_0''\psi\|_{H^1_{-\sigma}} \le C\|VR_0''\psi\|_{H^{-1}_{-\sigma'+\beta}} \le C_1\|R_0''\psi\|_{H^{-1}_{-\sigma'}} \le C_2|\zeta|^{-3/2}\|\psi\|_{H^{-1}_\sigma}$$

$$\|R_0''VR\psi\|_{H^1_{-\sigma}} \le C|\zeta|^{-3/2}\|VR\psi\|_{H^{-1}_{\sigma'}} \le C_1|\zeta|^{-3/2}\|R\psi\|_{H^{-1}_{\sigma'-\beta}} \le C_2|\zeta|^{-3/2}\|\psi\|_{H^{-1}_\sigma}$$

так как $-\sigma' + \beta > 1/2$, $\sigma + \beta - \sigma' > 2$.

2) Выбирая $\sigma' \in (1/2, \beta - 5/2)$, получаем

$$\begin{aligned} \|RVR_0''VR\psi\|_{H^1_{-\sigma}} &\le C\|VR_0''VR\psi\|_{H^{-1}_{\sigma'}} \le C_1\|R_0''VR\psi\|_{H^{-1}_{\sigma'-\beta}} \le C_2|\zeta|^{-3/2}\|VR\psi\|_{H^{-1}_{-\sigma'+\beta}} \\ &\le C_3|\zeta|^{-3/2}\|R\psi\|_{H^{-1}_{-\sigma'}} \le C_4|\zeta|^{-3/2}\|\psi\|_{H^{-1}_\sigma} \end{aligned}$$

так как $\beta-\sigma'>5/2$, $\sigma'+\sigma>2$. Асимптотика (3.12) для R'' доказана.
iv) Интегрируя асимптотику (3.12) для R', получим асимптотику (3.12) для R, что завершает доказательство предложения 3.4 при $n=3$.

Доказательство предложения 3.4 при $n=1$ **и** $n=2$
Из леммы 3.2 и равенств (3.17) немедленно вытекает

Следствие 3.5. *Для любого* $2-n/2<\sigma<\beta/2$, *операторы* $(1+R_0(\zeta)V)^{-1}=1-R(\zeta)V$ *и* $(1+VR_0(\zeta))^{-1}=1-VR(\zeta)$ *ограничены в пространствах* $\mathcal{L}(H^1_{-\sigma},H^1_{-\sigma})$ *и* $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma,H^{-1}_\sigma)$, *соответственно, при* $|\zeta|<\varepsilon$, $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ *и достаточно малых значениях* $\varepsilon>0$.

Далее докажем 2 леммы.

Лемма 3.6. *i) При* $\sigma>5/2$ *справедливы оценки*

$$\|(1+R_0(\lambda)V)^{-1}[1]\|_{H^1_{-\sigma}}=\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{O}(\zeta^{1/2}), & n=1\\[2ex] \mathcal{O}(\log^{-1}\zeta), & n=2\end{array}\right| \quad \zeta\to 0,\quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty) \tag{3.24}$$

где 1 *обозначает постоянную функцию* $f(x)\equiv 1$.
ii) Для любой функции $f\in H^{-1}_\sigma$ *с* $\sigma>5/2$

$$\int[(1+VR_0(\zeta))^{-1}f](y)dy=\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{O}(\zeta^{1/2}), & n=1\\[2ex] \mathcal{O}(\log^{-1}\zeta), & n=2\end{array}\right| \quad \zeta\to 0,\quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty) \tag{3.25}$$

Доказательство. Докажем лемму для случая $n=1$. В случае $n=2$ лемма доказывается аналогично. Из первой строчки асимптотики (2.13) следует, что

$$\begin{aligned}R(\zeta)&=(1+R_0(\zeta)V)^{-1}R_0(\zeta)=(1+R_0(\zeta)V)^{-1}[A_0\zeta^{-1/2}+B_0+\mathcal{O}(\zeta^{1/2})]\\ R(\zeta)&=R_0(\zeta)(1+VR_0(\zeta))^{-1}=[A_0\zeta^{-1/2}+B_0+\mathcal{O}(\zeta^{1/2})](1+VR_0(\zeta))^{-1}\end{aligned} \tag{3.26}$$

Поэтому, из ограниченности $R(\zeta)$, $(1+R_0(\zeta)V)^{-1}$ и $(1+VR_0(\zeta))^{-1}$ при $\zeta=0$ в соответствующих нормах следует, что

$$(1+R_0(\zeta)V)^{-1}A_0=\mathcal{O}(\zeta^{1/2}),\quad A_0(1+VR_0(\zeta))^{-1}=\mathcal{O}(\zeta^{1/2}),\quad \zeta\to 0,\quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$$

в $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma,H^1_{-\sigma})$ с $\sigma>5/2$. Отсюда и из определения (2.14) оператора A_0 вытекают асимптотики (3.24) и (3.25). □

Теперь получим асимптотики для производных $R'(\zeta)$ и $R''(\zeta)$ при $\zeta\to 0$.

Лемма 3.7. *В пространстве* $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma,H^1_{-\sigma})$ *с* $\sigma>5/2$ *справедливы асимптотики*

$$R'(\zeta)=\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{O}(\zeta^{-1/2}), & n=1\\[2ex] \mathcal{O}(\zeta^{-1}\log^{-2}\zeta), & n=2\end{array}\right| \quad \zeta\to 0,\quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty) \tag{3.27}$$

$$R''(\zeta)=\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{O}(\zeta^{-3/2}), & n=1\\[2ex] \mathcal{O}(\zeta^{-2}\log^{-2}\zeta), & n=2\end{array}\right| \quad \zeta\to 0,\quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty) \tag{3.28}$$

Доказательство. Эти асимптотики следуют из асимптотик (2.13)-(2.15) для производных $R_0'(\zeta)$ и $R_0''(\zeta)$, асимптотик (3.24)-(3.25) и формул (3.19)-(3.20):

$$R' = (1 + R_0 V)^{-1} R_0' (1 + V R_0)^{-1}, \quad R'' = \Big[(1 + R_0 V)^{-1} R_0'' - 2R' V R_0'\Big](1 + V R_0)^{-1} \tag{3.29}$$

□

Таким образом, асимптотики (3.12) для производных в одномерном случае доказаны. Асимптотика (3.12) для самой резольвенты при $n = 1$ получается интегрированием асимптотики для первой производной.

Осталось рассмотреть двумерный случай. В лемме 3.7 получена требуемая в (3.13) асимптотика для второй производной, но для первой производной нам нужно получить более точную асимптотику, чем (3.27). Интегрируя (3.27) при $n = 2$, получим

$$R(\zeta) = A + \mathcal{O}(\log^{-1} \zeta), \quad \zeta \to 0, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \tag{3.30}$$

в пространстве $\mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma}, H^1_{-\sigma})$ с $\sigma > 5/2$. Теперь мы можем уточнить асимптотики (3.24)-(3.25). А именно, из формулы (3.26) и асимптотики (3.30) следует, что

$$(1+R_0(\lambda)V)^{-1} A_0 = G_1 \log^{-1} \zeta + \mathcal{O}(\log^{-2} \zeta), \quad A_0(1+VR_0(\zeta))^{-1} = G_2 \log^{-1} \zeta + \mathcal{O}(\log^{-2} \zeta), \tag{3.31}$$

при $\zeta \to 0$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Применяя (3.31) к (3.29), при помощи (2.15) получим асимптотику (3.13) для первой производной. в пространстве $\mathcal{L}(H^{-1}_{\sigma}, H^1_{-\sigma})$ при $\sigma > 5/2$. Интегрируя асимптотику (3.13) для первой производной получим асимптотику (3.13) для резольвенты. Предложение 3.4 полностью доказано.

3.2 Убывание резольвенты при $\zeta \to \infty$

Теперь мы получим убывание возмущенной резольвенты (см. [16, (9.5)]).

Теорема 3.8. *Пусть $k = 0, 1, 2$, $\sigma > 1/2 + k$ и потенциал $V(x)$ удовлетворяет условию (1.6) с $\beta > 3$. Тогда для $s = 0, 1$ и $l = -1, 0, 1$ таких, что $s + l \in \{0; 1\}$ справедлива асимптотика*

$$\|R^{(k)}(\zeta)\|_{H^s_{\sigma} \to H^{s+l}_{-\sigma}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\frac{1-l+k}{2}}), \quad |\zeta| \to \infty, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \tag{3.32}$$

Доказательство. I. Сначала рассмотрим случай $s = l = 0$. При $k = 0$ асимптотика (3.32) вытекает из Борновского разложения (3.14):

$$R(\zeta) = R_0(\zeta)[1 + V R_0(\zeta)]^{-1}$$

Действительно, в силу (2.25) резольвента $R_0(\zeta)$ убывает при $\zeta \to \infty$, следовательно оператор $[1 + V R_0(\zeta)]^{-1}$ ограничен при больших $|\zeta|$, и резольвента $R(\zeta)$ убывает так же как $R_0(\zeta)$.

При $k = 1$ воспользуемся соотношением (3.19):

$$R' = R_0' - R V R_0' - R_0' V R + R V R_0' V R \tag{3.33}$$

Отсюда, а также из (2.25) с $k = 1$ и $s = l = 0$ и (3.32) с $k = 0$ и $s = l = 0$ следует (3.32) с $\sigma > 3/2$, $k = 1$ и $s = l = 0$. Для первого слагаемого в правой части (3.33) это очевидно.

Рассмотрим второе слагаемое. При $\sigma > 3/2$, $\beta > 3$ выберем $\sigma' \in (3/2, \beta - 3/2)$. Тогда для любого $\psi \in H^0_\sigma$, аналогично (3.22), получим при больших $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$

$$\|RVR_0'\psi\|_{H^0_{-\sigma}} \le C|\zeta|^{-1/2}\|VR_0'\psi\|_{H^0_{\sigma'}} \le C_1|\zeta|^{-1/2}\|R_0'\psi\|_{H^0_{\sigma'-\beta}} \le C_2|\zeta|^{-3/2}\|\psi\|_{H^0_\sigma} \qquad (3.34)$$

Остальные слагаемые в правой части (3.33) оцениваются аналогично. Следовательно, оценка (3.32) с $k = 1$ и $s = l = 0$ доказана.

При $k = 2$ воспользуемся соотношением (3.20):

$$R'' = R_0'' - RVR_0'' - R_0''VR + RVR_0''VR - 2R'VR_0' + 2R'VR_0'VR \qquad (3.35)$$

Для первого слагаемого в правой части (3.35) асимптотика следует из (2.25) с $k = 2$ и $s = l = 0$. Последние два слагаемых оцениваются аналогично (3.34), при этом дополнительно используется (3.32) с $k = 1$ и $s = l = 0$. Рассмотрим оставшиеся слагаемые. Мы предполагаем, что $\sigma > 5/2$, $\beta > 3$, $\psi \in H^0_\sigma$ и рассматриваем большие $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Тогда используя (2.25) с $k = 2$ и $s = l = 0$, а также (3.32) с $k = 0$ и $s = l = 0$ и
1) выбирая $\sigma' \in (5/2, \beta - 1/2)$, получим

$$\|RVR_0''\psi\|_{H^0_{-\sigma}} \le C|\zeta|^{-1/2}\|VR_0''\psi\|_{H^0_{-\sigma'+\beta}} \le C_1|\zeta|^{-1/2}\|R_0''\psi\|_{H^0_{-\sigma'}} \le C_2|\zeta|^{-2}\|\psi\|_{H^0_\sigma}$$

$$\|R_0''VR\psi\|_{H^0_{-\sigma}} \le C|\zeta|^{-3/2}\|VR\psi\|_{H^0_{\sigma'}} \le C_1|\zeta|^{-3/2}\|R\psi\|_{H^0_{\sigma'-\beta}} \le C_2|\zeta|^{-2}\|\psi\|_{H^0_\sigma}$$

2) выбирая $\sigma' \in (1/2, \beta - 5/2)$, получим

$$\begin{aligned}\|RVR_0''VR\psi\|_{H^0_{-\sigma}} &\le C|\zeta|^{-1/2}\|VR_0''VR\psi\|_{H^0_{\sigma'}} \le C_1|\zeta|^{-1/2}\|R_0''VR\psi\|_{H^0_{\sigma'-\beta}} \\ &\le C_2|\zeta|^{-2}\|VR\psi\|_{H^0_{-\sigma'+\beta}} \le C_3|\zeta|^{-2}\|R\psi\|_{H^0_{-\sigma'}} \le C_4|\zeta|^{-5/2}\|\psi\|_{H^0_\sigma}\end{aligned}$$

Асимптотика (3.32) для $s = l = 0$ доказана.

II. Асимптотика (3.32) для $s = 0, 1$ и $l = -1, 0, 1$, таких что $s + l \in \{0; 1\}$ получается аналогично при использовании
i) оценки (2.25) при $s = 0, 1$ и $l = -1, 0, 1$
ii) непрерывности оператора $V : H^s_{-\sigma} \to H^{s+l}_\sigma$ при $\sigma \in (3/2, \beta/2]$, которая вытекает из условия (1.6) так как $s, s + l \in \{0; 1\}$.
Теорема 3.8 доказана. □

3.3 Долговременная асимптотика

Пусть потенциал $V(x)$ удовлетворяет условию (1.6) и выполняется спектральное условие (3.3). Тогда из предложения (3.4) и теоремы (3.8) с $k = s = l = 0$, аналогично (2.52), вытекает интегральное представление для решения $\psi(t) \in C(\mathbb{R}, L^2)$ уравнения (3.1):

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{N} e^{-i\zeta_j t}P_j\psi(0) \; + \; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty e^{-i\zeta t}\Big[R(\zeta + i0) - R(\zeta - i0)\Big]\psi(0)\, d\zeta, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (3.36)$$

для начальных данных $\psi(0) \in L^2_\sigma$ с $\sigma > 5/2$.

Определение 3.9. *i) Обозначим через* $X_d := \sum_{j=1}^N P_j L^2$ *подпространство дискретного спектра оператора* $H = -\Delta + V(x)$.
ii) $X_c := X_d^\perp$ *- ортогональное к* X_d *подпространство непрерывного спектра оператора* H.

В этом параграфе будет доказана следующая долговременная асимптотика:

Теорема 3.10. *Пусть потенциал* $V(x)$ *удовлетворяет условию (*1.6*) и выполняется спектральное условие (*3.3*). Тогда для начальных данных* $\psi(0) \in X_c \cap L^2_\sigma$ *с* $\sigma > 5/2$

$$\|\psi(t)\|_{L^2_{-\sigma}} = \begin{cases} \mathcal{O}(|t|^{-3/2}), & n = 1,3 \\ \\ \mathcal{O}(|t|^{-1}\log^{-2}|t|), & n = 2 \end{cases} \qquad t \to \pm\infty \tag{3.37}$$

Доказательство Заметим, что $P_j\psi(0) = 0$ так как

$$(P_j\psi(0), P_j\psi(0)) = (P_j^2\psi(0), \psi(0)) = (P_j\psi(0), \psi(0)) = 0$$

ввиду того, что $P_j\psi(0) \in X_d$. Следовательно, (3.36) означает, что

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-i\omega t}[R(\zeta + i0) - R(\zeta - i0)]\psi(0)\ d\zeta, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.38}$$

Для доказательства (3.37) рассмотрим разбиение единицы:

$$1 = \phi_l(\zeta) + \phi_h(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R} \tag{3.39}$$

где

$$\phi_l \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \qquad \phi_l(\zeta) = \begin{cases} 1, & |\zeta| \le B/2 \\ 0, & |\zeta| \ge B \end{cases} \tag{3.40}$$

где B -константа из (2.34). Тогда из (3.38) следует, что

$$\begin{aligned} \psi(t) = \psi_l(t) + \psi_h(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \phi_l(\zeta)e^{-i\omega t}[R(\zeta + i0) - R(\zeta - i0)]\psi(0)\ d\zeta \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \phi_h(\zeta)e^{-i\omega t}[R(\zeta + i0) - R(\zeta - i0)]\psi(0)\ d\zeta \end{aligned} \tag{3.41}$$

Интегрируя по частям два раза и используя при этом оценку (3.32) для $k = 2$, получим

$$\|\psi_h(t)\|_{L^2_{-\sigma}} \le C\langle t\rangle^{-2}\|\psi(0)\|_{L^2_\sigma}$$

так как $\sigma > 5/2$. Осталось доказать убывание для “низкочастотной компоненты” $\psi_l(t)$:

$$\psi_l(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \phi_l(\zeta)e^{-i\omega t}[R(\zeta + i0) - R(\zeta - i0)]\psi(0)\ d\zeta \tag{3.42}$$

А именно, ниже мы покажем что

$$\|\psi_l(t)\|_{L^2_{-\sigma}} = \begin{cases} \mathcal{O}(|t|^{-3/2}), & n = 1,3 \\ \\ \mathcal{O}(|t|^{-1}\log^{-2}|t|), & n = 2 \end{cases} \qquad t \to \pm\infty \tag{3.43}$$

для начальных данных $\psi(0) \in L^2_\sigma$ при $\sigma > 5/2$. Для доказательства (3.43) мы будем использовать информацию о поведении резольвенты $R(\zeta)$ в концевой точке $\zeta = 0$ непрерывного спектра, полученную в предложении (3.4).

Оценки (3.12)-(3.13) показывают, что формально

$$R''(\zeta) \sim \begin{cases} \zeta^{-3/2}, & n = 1,3 \\ \zeta^{-2}\log^{-2}\zeta, & n = 2 \end{cases} \qquad \zeta \to 0 \tag{3.44}$$

поэтому $R''(\zeta)$ не суммируемая при маленьких ζ и мы не можем получить убывание $\sim |t|^{-2}$ для $\psi_l(t)$ при помощи интегрирования по частям, как мы получили для $\psi_h(t)$. Мы получим убывание (3.43) при помощи следующих двух лемм [см. [16], лемма 10.2]. Обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$.

Лемма 3.11. *Пусть $F \in C(a,b;\mathbf{B})$ удовлетворяет следующим условиям*

$$F(a) = F(b) = 0, \qquad \|F''(\zeta)\| \le C|\zeta - a|^{-3/2}, \quad \zeta \in (a,b) \tag{3.45}$$

Тогда

$$\|\int_a^b e^{-i\zeta t}F(\zeta)d\zeta\| = \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \to \infty \tag{3.46}$$

Доказательство. Из (3.45) следует, что

$$\|F'(\zeta)\| \le C|\zeta - a|^{-1/2}, \;\; \zeta \in (a,b) \tag{3.47}$$

Поэтому, интегрируя по частям, получим

$$\int_a^b e^{-i\zeta t}F(\zeta)d\zeta = \int_a^b \frac{e^{-i\zeta t}}{it}F'(\zeta)d\zeta \tag{3.48}$$

так как $F(a) = F(b) = 0$. Осталось проверить, что

$$J(t) := \int_a^b e^{-i\zeta t}F'(\zeta)d\zeta = \mathcal{O}(t^{-1/2}), \quad t \to \infty \tag{3.49}$$

в пространстве $\mathbf{B}$. Положив $F(\zeta) = 0$ для $\zeta < a$ и для $\zeta > b$, получим непрерывную функцию $F \in C(\mathbb{R},\mathbf{B})$, при этом $F' \in L^1(\mathbb{R},\mathbf{B})$. Заметим, что

$$J(t) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\zeta}[F'(\zeta + \frac{\pi}{t}) - F'(\zeta)]d\zeta \tag{3.50}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \|F'(\zeta + \frac{\pi}{t}) - F'(\zeta)\|\, d\zeta &= \int_{-\infty}^{a+\pi/t} \ldots + \int_{a+\pi/t}^{\infty} \ldots \\
&\le 2\int_a^{a+2\pi/t} \|F'(\omega)\|\, d\zeta + \int_{a+\pi/t}^{\infty} d\zeta \int_\zeta^{\zeta+\pi/t} \|F''(\nu)\|\, d\nu \\
&= \mathcal{O}(t^{-1/2}) + \frac{\pi}{t}\int_{a+\pi/t}^{\infty} \|F''(\nu)\|\, d\nu = \mathcal{O}(t^{-1/2})
\end{aligned}$$

в силу (3.47) и (3.45). Оценка (3.49) доказана. □

Лемма 3.12. *Пусть $F \in C(a,b;\mathbf{B})$ удовлетворяет следующим условиям*

$$1)\ F(a) = F(b) = 0,$$

$$2)\ \|F'(\zeta)\| \le C|\zeta - a|^{-1}\log^{-3}|\zeta - a|, \quad \zeta \in (a,b)$$

$$3)\ \|F''(\zeta)\| \le C|\zeta - a|^{-2}\log^{-2}|\zeta - a|, \quad \zeta \in (a,b)$$

Тогда

$$\|\int\limits_a^b e^{-i\zeta t}F(\zeta)d\zeta\| = \mathcal{O}(t^{-1}\log^{-2}t), \quad t \to \infty \tag{3.51}$$

Эта лемма доказывается аналогично предыдущей.
Из предложения 3.4 следует, что условия лемм 3.11 и 3.12 выполнены при $a = 0$ и $b = B$ для векторной функции

$$F(\zeta) := \psi_l(\zeta)[R(\zeta + i0) - R(\zeta - i0)]\psi(0) \tag{3.52}$$

со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B} = L^2_{-\sigma}$ с $\sigma > 5/2$. Поэтому из лемм 3.11 и 3.12 следует убывание (3.43). Теорема 3.10 доказана.

3.4 Асимптотическая полнота

Применим полученные результаты для доказательства асимптотической полноты при помощи стандартного метода Кука.

Теорема 3.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.10. *Тогда*

*i) Для любого решения уравнения (*3.1*) с начальными данными $\psi(0) \in L^2$ справедлива долговременная асимптотика*

$$\psi(t) = \sum_j e^{-i\zeta_j t}\psi_j + U(t)\phi_\pm + r_\pm(t) \tag{3.53}$$

где $\psi_j = P_j\psi(0)$ -собственные функции оператора H, соответствующие собственным значениям ζ_j, $\phi_\pm \in L^2$ - **асимптотические состояния рассеяния***, $U(t)$ -динамическая группа свободного уравнения Шредингера и*

$$\|r_\pm(t)\|_{L^2} \to 0, \qquad t \to \pm\infty \tag{3.54}$$

ii) Более того,

$$\|r_\pm(t)\|_{L^2} = \begin{cases} \mathcal{O}(|t|^{-1/2}), & n = 1,3 \\ \\ \mathcal{O}(\log^{-1}|t|), & n = 2 \end{cases} \tag{3.55}$$

если $\psi(0) \in L^2_\sigma$ с $\sigma > 5/2$.

Доказательство. Для $\psi(0) \in X_d$ асимптотика (3.53) очевидна. При этом $\phi_\pm = 0$ и $r_\pm(t) = 0$. Следовательно, достаточно доказать, что для $\psi(0) \in X_c$ справедлива асимптотика

$$\psi(t) = U(t)\phi_\pm + r_\pm(t) \tag{3.56}$$

и остаток $r_\pm(t)$ удовлетворяет (3.54). Более того, достаточно проверить (3.56) и (3.55) для $\psi(0) \in X_c \cap L^2_\sigma$, так как пространство L^2_σ плотно в X_c, а группа $U(t)$ унитарна в L^2.

Функция $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\dot{\psi}(t) = H_0\psi(t) + V\psi(t)$$

Применим представление Дюгамеля:

$$\psi(t) = U(t)\psi(0) + \int\limits_0^t U(t-\tau)V\psi(\tau)d\tau, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3.57}$$

Перепишем (3.57) следующим образом

$$\psi(t) = U(t)\Big[\psi(0) + \int\limits_0^{\pm\infty} U(-\tau)V\psi(\tau)d\tau\Big] - \int\limits_t^{\pm\infty} U(t-\tau)V\psi(\tau)d\tau = U(t)\phi_\pm + r_\pm(t) \tag{3.58}$$

Осталось проверить, что $\phi_\pm \in L^2$ и выполняется (3.55). Для определенности рассмотрим знак $''+''$. Из унитарности группы $U(t)$ в L^2, условия (1.6) и убывания (3.37) следует, что для $\sigma' \in (5/2, \beta)$ и $n = 1, 3$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \|U(-\tau)V\psi(\tau)\|_{L^2}d\tau &\le C_1\int\limits_0^\infty \|V\psi(\tau)\|_{L^2}d\tau \le C_2\int\limits_0^\infty \|\psi(\tau)\|_{L^2_{-\sigma'}}d\tau \\ &\le C_3\int\limits_0^\infty (1+\tau)^{-3/2}\|\psi(0)\|_{L^2_\sigma}d\tau < \infty\end{aligned}$$

так как $|V(x)| \le C'\langle x\rangle^{-\beta} \le C''\langle x\rangle^{-\sigma'}$.
В случае $n = 2$ точно так же получим

$$\int\limits_0^\infty \|U(-\tau)V\psi(\tau)\|_{L^2} \le C_3\int\limits_0^\infty (1+\tau)^{-1}\log^{-2}(1+\tau)\|\psi(0)\|_{L^2_\sigma}d\tau < \infty$$

Следовательно, $\phi_+ \in L^2$. Оценка (3.55) доказывается аналогично. □

4 Спектральные свойства уравнения Клейна-Гордона

4.1 Свободное уравнения Клейна-Гордона

Рассмотрим свободное уравнение Клейна-Гордона, соответствующее $V = 0$

$$\ddot{\psi}(x,t) = \Delta\psi(x,t) - m^2\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 1, 2, 3 \tag{4.1}$$

Запишем уравнение (4.1) в векторной форме

$$i\dot{\Psi}(t) = \mathcal{H}_0\Psi(t) \tag{4.2}$$

где

$$\Psi(t) = \left(\begin{array}{c} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{array} \right), \qquad \mathcal{H}_0 = \left(\begin{array}{cc} 0 & i \\ i(\Delta - m^2) & 0 \end{array} \right) \tag{4.3}$$

В данном параграфе мы выведем спектральные свойства динамической группы $\mathcal{U}(t)$ свободного уравнения Клейна-Гордона из соответствующих свойств динамической группы свободного уравнения Шредингера. Для $t > 0$ и $\Psi_0 = \Psi(0) \in \mathcal{F}_0$, (см. определение 1.1 пространства $\mathcal{F}_\sigma$) решение $\Psi(t)$ уравнения (4.2) может быть представлено при помощи спектрального представления Фурье-Лапласа. А именно, для любого $\varepsilon > 0$

$$\theta(t)\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega+i\varepsilon)t}\mathcal{R}_0(\omega + i\varepsilon)\Psi_0 \, d\omega, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

где через $\mathcal{R}_0(\omega) = (\mathcal{H}_0 - \omega)^{-1}$ при $\omega \in \mathbb{C}^+ := \{\omega \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ \omega > 0\}$ обозначена резольвента оператора $\mathcal{H}_0$. Данное представление следует из стационарного уравнения $\omega\tilde{\Psi}^+(\omega) = \mathcal{H}_0\tilde{\Psi}^+(\omega) + i\Psi_0$ для преобразования Фурье-Лапласа $\tilde{\Psi}^+(\omega) := \int_{\mathbb{R}} \theta(t)e^{i\omega t}\Psi(t)dt$, $\omega \in \mathbb{C}^+$. Решение $\Psi(t)$ является ограниченной непрерывной функцией переменной $t \in \mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{F}_0$ в силу сохранения энергии для уравнения (4.2). Следовательно, функция $\tilde{\Psi}^+(\omega) = -i\mathcal{R}(\omega)\Psi_0$ является аналитической функцией от $\omega \in \mathbb{C}^+$ со значениями в $\mathcal{F}_0$, ограниченной при $\omega \in \mathbb{R} + i\varepsilon$. Поэтому, интеграл (4.4) сходится в смысле распределений от $t \in \mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{F}_0$. Аналогично (4.4), получим

$$\theta(-t)\Psi(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega-i\varepsilon)t}\mathcal{R}_0(\omega - i\varepsilon)\Psi_0 \, d\omega, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

Резольвента $\mathcal{R}_0(\omega)$ может быть выражена через резольвенту $R_0(\zeta) = (-\Delta - \zeta)^{-1}$ свободного оператора Шредингера:

$$\mathcal{R}_0(\omega) = \left(\begin{array}{cc} \omega R_0(\omega^2 - m^2) & iR_0(\omega^2 - m^2) \\ -i(1 + \omega^2 R_0(\omega^2 - m^2)) & \omega R_0(\omega^2 - m^2) \end{array} \right) \tag{4.6}$$

Обозначим $\Gamma := (-\infty, -m) \cup (m, \infty)$. Из свойств резольвенты R_0, полученных в леммах 2.1-2.5, а также в теореме 2.7 и из формулы (4.6) следуют свойства резольвенты $\mathcal{R}_0$:

I. Резольвента $\mathcal{R}_0(\omega)$ является аналитической функцией от $\omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma}$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0)$;

II. Для всех $\omega \in \Gamma$ в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})$ при $\sigma > 1/2$ имеет место сходимость (принцип предельного поглощения)

$$\mathcal{R}_0(\omega \pm i\varepsilon) \to \mathcal{R}_0(\omega \pm i0), \quad \varepsilon \to 0+ \tag{4.7}$$

III. Для любого $\sigma > 5/2$ в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})$ справедливы асимптотики :

$$\mathcal{R}_0(\omega) = \begin{cases} \mathcal{A}_0^{\pm}(\omega \mp m)^{-1/2} + \mathcal{B}_0^{\pm} + \mathcal{O}((\omega \mp m)^{1/2}), & n = 1 \\ \mathcal{A}_0^{\pm}\log(\omega \mp m) + \mathcal{B}_0^{\pm} + \mathcal{O}((\omega \mp m)^{3/4}), & n = 2 \\ \mathcal{B}_0^{\pm} + \mathcal{O}((\omega \mp m)^{1/2}), & n = 3 \end{cases} \Bigg| \quad \omega \to \pm m, \ \ \omega \in \mathbb{C}\setminus\overline{\Gamma} \quad (4.8)$$

где операторы $\mathcal{A}_0^{\pm}, \mathcal{B}_0^{\pm}$ являются интегральными операторами с матричными интегральными ядрами $\mathcal{A}_0^{\pm}(x,y), \mathcal{B}_0^{\pm}(x,y)$, при этом $\mathcal{A}_0^{\pm} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})$ с $\sigma > n/2$, $\mathcal{B}_0^{\pm} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})$ с $\sigma > 3/2$ в одномерном и трехмерном случаях и $\sigma > 1$ в двумерном случае. Асимптотики (4.8) можно два раза дифференцировать по ω:

$$\mathcal{R}_0(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mathcal{A}_0^{\pm}(\omega \mp m)^{-3/2} + \mathcal{O}((\omega \mp m)^{-1/2}), & n = 1 \\ \mathcal{A}_0^{\pm}(\omega \mp m)^{-1} + \mathcal{O}((\omega \mp m)^{-1/4}), & n = 2 \\ \mathcal{O}((\omega \mp m)^{-1/2}), & n = 3 \end{cases} \Bigg| \quad \omega \to \pm m, \ \ \omega \in \mathbb{C}\setminus\overline{\Gamma}$$

$$\mathcal{R}_0(\omega) = \begin{cases} \frac{3}{4}\mathcal{A}_0^{\pm}(\omega \mp m)^{-5/2} + \mathcal{O}((\omega \mp m)^{-3/2}), & n = 1 \\ -\mathcal{A}_0^{\pm}(\omega \mp m)^{-2} + \mathcal{O}((\omega \mp m)^{-5/4}), & n = 2 \\ \mathcal{O}((\omega \mp m)^{-3/2}), & n = 3 \end{cases} \Bigg| \quad \omega \to \pm m, \ \ \omega \in \mathbb{C}\setminus\overline{\Gamma}$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})$ при $\sigma > 5/2$.

IV. Для $k = 0, 1, 2, ...$ и $\sigma > 1/2 + k$ справедлива асимптотика

$$\|\mathcal{R}_0^{(k)}(\omega)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma,\mathcal{F}_{-\sigma})} = \mathcal{O}(1), \quad |\omega| \to \infty, \quad \omega \in \mathbb{C}\setminus\Gamma \tag{4.9}$$

Следствие 4.1. *Для $t \in \mathbb{R}$ и $\Psi_0 \in \mathcal{F}_\sigma$ при $\sigma > 1$, для группы $\mathcal{U}(t)$ справедливо интегральное представление*

$$\mathcal{U}(t)\Psi_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-i\omega t}\Big[\mathcal{R}_0(\omega + i0) - \mathcal{R}_0(\omega - i0)\Big]\Psi_0 \ d\omega \tag{4.10}$$

где интеграл сходится в смысле распределений переменной $t \in \mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{F}_{-\sigma}$.

Доказательство. Суммируя представления (4.4) и (4.5), и устремляя $\varepsilon \to 0+$, получим (4.10) при помощи теоремы Коши и свойств I-VI. □

4.2 Возмущенное уравнение Клейна-Гордона

Рассмотрим уравнение (1.3) с оператором $\mathcal{H}$ определенным в(1.4). Резольвента $\mathcal{R}(\omega) = (\mathcal{H} - \omega)^{-1}$ оператора $\mathcal{H}$ выражается через резольвенту R оператора Шредингера аналогично (4.6):

$$\mathcal{R}(\omega) = \begin{pmatrix} \omega R(\omega^2 - m^2) & iR(\omega^2 - m^2) \\ -i(1 + \omega^2 R(\omega^2 - m^2)) & \omega R(\omega^2 - m^2) \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Поэтому из свойств резольвенты R, полученных в параграфе 3 вытекают свойства резольвенты $\mathcal{R}$:

Лемма 4.2. *Пусть потенциал V удовлетворяет условиям (1.6) и (3.3). Тогда*

i) Резольвента $\mathcal{R}(\omega)$ является мероморфной функцией от $\omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma}$ со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0)$;

ii) Полюса резольвенты $\mathcal{R}(\omega)$ образуют конечное множество

$$\Sigma = \{\omega_j^\pm = \pm\sqrt{m^2 + \zeta_j},\ j = 1, ..., N\}$$

состоящее из собственных значений оператора $\mathcal{H}$ с соответствующими собственными функциями $\begin{pmatrix} \psi_j^\kappa(x) \\ i\omega_j^\pm \psi_j^\kappa(x) \end{pmatrix}$, $\kappa = 1, ..., \kappa_j$;

iii) Справедлив принцип предельного поглощения:

$$\mathcal{R}(\omega \pm i\varepsilon) \to \mathcal{R}(\omega \pm i0), \quad \varepsilon \to 0+, \quad \omega \in \Gamma$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})$ при $\sigma > 1/2$;

iv)Для любого $\sigma > 5/2$ в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})$ справедливы асимптотики

$$\mathcal{R}(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}^\pm + \mathcal{O}\big((\omega \mp m)^{1/2}\big), \quad n = 1, 3 \\ \\ \mathcal{A}^\pm + \mathcal{B}^\pm \log^{-1}(\omega \mp m) + \mathcal{O}\big(\log^{-2}(\omega \mp m)\big), \quad n = 2 \end{array} \right| \quad \omega \to \pm m, \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma} \tag{4.12}$$

где $\mathcal{A}^\pm$, $\mathcal{B}^\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})$, $\sigma > 5/2$ -интегральные операторы с матричными интегральными ядрами $\mathcal{A}^\pm(x, y)$, $\mathcal{B}^\pm(x, y)$, соответственно.
Асимптотики (4.12) можно дифференцировать два раза в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})$ при $\sigma > 5/2$. А именно,

$$\mathcal{R}'(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}\big((\omega \mp m)^{-1/2}\big), \quad n = 1, 3 \\ \\ -\mathcal{D}_2^\pm(\omega \mp m)^{-1} \log^{-2}(\omega \mp m) + \mathcal{O}\big((\omega \mp m)^{-1} \log^{-3}(\omega \mp m)\big), \quad n = 2 \end{array} \right. \tag{4.13}$$

$$\mathcal{R}''(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}\big((\omega \mp m)^{-3/2}\big), \quad n = 1, 3 \\ \\ \mathcal{O}\big((\omega \mp m)^{-2} \log^{-2}(\omega \mp m)\big), \quad n = 2 \end{array} \right.$$

при $\omega \to \pm m$, $\omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma}$.

v) Для $k = 0, 1, 2$ и $\sigma > 1/2 + k$ справедлива асимптотика

$$\|\mathcal{R}^{(k)}(\omega)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})} = \mathcal{O}(1), \quad |\omega| \to \infty, \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \tag{4.14}$$

Далее, обозначим через $\mathcal{V}$ матрицу

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -iV & 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Тогда уравнение (1.3) может быть записано в виде

$$i\dot{\Psi}(t) = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{V})\Psi(t) \tag{4.16}$$

Для резольвенты $\mathcal{R}(\omega)$ справедливо следующее борновское разложение

$$\mathcal{R}(\omega) = \mathcal{R}_0(\omega) - \mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega) + \mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma \cup \Sigma] \tag{4.17}$$

получающееся при помощи метода последовательных приближений из равенства

$$\mathcal{R}(\omega) = \mathcal{R}_0(\omega) - \mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}(\omega)$$

Важную роль в разложении (4.17) играет произведение $\mathcal{W}(\omega) := \mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}$. Ниже мы получим асимптотику для $\mathcal{W}(\omega)$ при больших ω.

Лемма 4.3. *Пусть потенциал V удовлетворяет условию (1.6) с $\beta > 1/2 + k + \delta$, где $\delta > 0$ и $k = 0, 1, 2$. Тогда*

$$\|\mathcal{W}^{(k)}(\omega)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}_{-\delta},\mathcal{F}_\delta)} = \mathcal{O}(|\omega|^{-2}), \quad |\omega| \to \infty, \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \tag{4.18}$$

Доказательство. Данная асимптотика вытекает из алгебраической структуры матрицы

$$\mathcal{W}^{(k)}(\omega) = \mathcal{V}\mathcal{R}_0^{(k)}(\omega)\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -iV\partial_\omega^k R_0(\omega^2 - m^2)V & 0 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

так как из оценок (2.25)-(**??**) при $s = 1$ и $l = -1$ следует, что

$$\|VR_0^{(k)}(\zeta)Vf\|_{H^0_\delta} \le C\|R_0^{(k)}(\zeta)Vf\|_{H^0_{\delta-\beta}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-1-\frac{k}{2}})\|Vf\|_{H^1_{\beta-\delta}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-1-\frac{k}{2}})\|f\|_{H^1_{-\sigma}}$$

так как $1/2 + k < \beta - \delta$. $\square$

5 Долговременная асимптотика для уравнения Клейна-Гордона

5.1 Свободное уравнение

Полученные нами в параграфе 4 оценки (4.9) не позволяют получить долговременное убывание вида (1.8)-(1.9) для решений свободного уравнения Клейна-Гордона при помощи интегрирования по частям в (4.10). Поэтому, мы выведем это убывание при помощи явных формул для функции Грина.

Для определенности рассмотрим $t > 0$. В этом случае матричное ядро динамической группы $\mathcal{U}(t)$ может быть записано как $\mathcal{U}(x - y, t)$, где

$$\mathcal{U}(z, t) = \begin{pmatrix} \dot{u}(z,t) & u(z,t) \\ \ddot{u}(z,t) & \dot{u}(z,t) \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}^n \tag{5.1}$$

при этом для $t > 0$

$$u(z,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\theta(t - |z|)J_0(m\sqrt{t^2 - z^2}), \quad n = 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\theta(t - |z|)\dfrac{\cos m\sqrt{t^2 - |z|^2}}{\sqrt{t^2 - |z|^2}}, \quad n = 2 \\[2ex] \dfrac{\delta(t - |z|)}{4\pi t} - \dfrac{m}{4\pi}\dfrac{\theta(t - |z|)J_1(m\sqrt{t^2 - |z|^2})}{\sqrt{t^2 - |z|^2}}, \quad n = 3 \end{cases} \tag{5.2}$$

где J_0 и J_1 - функции Бесселя нулевого и первого порядка, а θ - функция Хевисайда. Из этого представления и хорошо известных асимптотик функций Бесселя видно, что динамическая группа $\mathcal{U}(t)$ свободного уравнения Клейна-Гордона убывает как $t^{-n/2}$, что при $n=1,2$ не соответствует (1.8)-(1.9). Разобьем $\mathcal{U}(t)$ на два слагаемых

$$\mathcal{U}(t)=\mathcal{U}_0(t)+\mathcal{U}_r(t)$$

где $\mathcal{U}_0(t)=0$ в трехмерном случае, а в одномерном и двумерном случаях $\mathcal{U}(t)$ есть оператор с матричным ядром

$$\mathcal{U}_0(t,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2m\pi t}}\begin{pmatrix}-m\sin(mt-\frac{\pi}{4}) & \cos(mt-\frac{\pi}{4})\\ \\ -m^2\cos(mt-\frac{\pi}{4}) & -m\sin(mt-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}, & n=1\\ \\ \dfrac{1}{2\pi t}\begin{pmatrix}-m\sin mt & \cos mt\\ \\ -m^2\cos mt & -m\sin mt\end{pmatrix}, & n=2\end{cases}\tag{5.3}$$

Покажем, что именно слагаемое $\mathcal{U}_0(t)$ в одномерном и двумерном случае ответственно за слабое убывание. А именно, докажем следующее предложение

Предложение 5.1. *Пусть $\sigma>5/2$ при $n=1,2$ и $\sigma>3/2$ при $n=3$. Тогда*

$$\mathcal{U}_r(t)=\mathcal{O}(t^{-3/2}),\quad t\to\infty\tag{5.4}$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma;\mathcal{F}_{-\sigma})$.

Доказательство. Мы воспользуемся методом, примененном при доказательстве леммы 18.2 из [13]. Для некоторого фиксированного $0<\varepsilon<1$ разобьем начальную функцию $\Psi_0\in\mathcal{F}_\sigma$ на два слагаемых:

$$\Psi_0=\Psi'_{0,t}+\Psi''_{0,t}$$

так что

$$\|\Psi'_{0,t}\|_{\mathcal{F}_\sigma}+\|\Psi''_{0,t}\|_{\mathcal{F}_\sigma}\le C\|\Psi_0\|_{\mathcal{F}_\sigma},\quad t\ge 1\tag{5.5}$$

и

$$\Psi'_{0,t}(x)=0\quad\text{для}\quad |x|>\frac{\varepsilon t}{2},\quad \Psi''_{0,t}(x)=0\quad\text{для}\quad |x|<\frac{\varepsilon t}{4}\tag{5.6}$$

Будем оценивать $\mathcal{U}_r(t)\Psi'_{0,t}$ и $\mathcal{U}_r(t)\Psi''_{0,t}$ отдельно.

Шаг i) Рассмотрим вначале $\mathcal{U}_r(t)\Psi''_{0,t}=\mathcal{U}(t)\Psi''_{0,t}-\mathcal{U}_0(t)\Psi''_{0,t}$. Напомним, что в трехмерном случае второе слагаемое отсутствует. Первое слагаемое $\mathcal{U}(t)\Psi''_{0,t}$ оценим при помощи закона сохранения энергии для уравнения Клейна-Гордона и свойств (5.6)-(5.5):

$$\|\mathcal{U}(t)\Psi''_{0,t}\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}}\le\|\mathcal{U}(t)\Psi''_{0,t}\|_{\mathcal{F}_0}\le C\|\Psi''_{0,t}\|_{\mathcal{F}_0}\le C_1(\varepsilon)t^{-\sigma}\|\Psi''_{0,t}\|_{\mathcal{F}_\sigma}\le C_2(\varepsilon)t^{-3/2}\|\Psi_0\|_{\mathcal{F}_\sigma},\quad t\ge 1\tag{5.7}$$

так как $\sigma>3/2$. Теперь оценим второе слагаемое $\mathcal{U}_0(t)\Psi''_{0,t}$. Из (5.3) следует, что $|\mathcal{U}_0(t)|\le Ct^{-n/2}$ при $t\ge 1$. Поэтому, для второй компоненты $\pi''_{0,t}$ векторной функции $\Psi''_{0,t}$, используя неравенство Коши, получим

$$|(\mathcal{U}_0^{i2}(t)\pi''_{0,t})(y)|=\Big|\mathcal{U}_0^{i2}(t)\int\pi''_{0,t}(x)dx\Big|\le\frac{C}{t^{n/2}}\Big(\int|\pi''_{0,t}(x)|^2(1+|x|^2)^\sigma dx\Big)^{\frac12}\Big(\int\limits_{|x|>\varepsilon t/4}\frac{dx}{(1+|x|^2)^\sigma}\Big)^{\frac12}$$

$$\le\frac{C_3(\varepsilon)}{t^{n/2}}t^{-\sigma+n/2}\|\pi''_{0,t}(x)\|_{H^0_\sigma}\le C_4(\varepsilon)t^{-3/2}\|\pi''_{0,t}(x)\|_{H^0_\sigma},\quad i=1,2$$

так как $\sigma > 3/2$. Следовательно,

$$\|\mathcal{U}_0^{i2}(t)\pi''_{0,t}\|_{H^1_{-\sigma}} \le C(\varepsilon)t^{-3/2}\|\pi''_{0,t}(x)\|_{H^0_\sigma}, \quad i = 1,2$$

Первая компонента векторной функции $\Psi''_{0,t}$ оценивается аналогично. Следовательно,

$$\|\mathcal{U}_0(t)\Psi''_{0,t}\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le C(\varepsilon)t^{-3/2}\|\Psi_0\|_{\mathcal{F}_\sigma}, \quad t \ge 1 \tag{5.8}$$

и в силу (5.7)-(5.8)

$$\|\mathcal{U}_r(t)\Psi''_{0,t}\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le (\varepsilon)t^{-3/2}\|\Psi_0\|_{\mathcal{F}_\sigma}, \quad t \ge 1 \tag{5.9}$$

Шаг ii) Далее рассмотрим $\mathcal{U}_r(t)\Psi'_{0,t} = \mathcal{U}(t)\Psi'_{0,t} - \mathcal{U}_0(t)\Psi'_{0,t}$. Разобьем оператор $\mathcal{U}_r(t)$ при $t \ge 1$ на два слагаемых:

$$\mathcal{U}_r(t) = (1-\zeta)\mathcal{U}_r(t) + \zeta\mathcal{U}_r(t)$$

где через ζ мы обозначили оператор умножения на функцию $\zeta(|x|/t)$, такую, что $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta(s) = 1$ for $|s| < \varepsilon/4$, $\zeta(s) = 0$ for $|s| > \varepsilon/2$. Очевидно, что для любого α

$$|\partial_x^\alpha \zeta(|x|/t)| \le C < \infty, \qquad t \ge 1$$

Более того, $1 - \zeta(|x|/t) = 0$ при $|x| < \varepsilon t/4$. Следовательно,

$$||(1-\zeta)\mathcal{U}(t)\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le C(\varepsilon)t^{-\sigma}||(1-\zeta)\mathcal{U}(t)\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_0} \le C_1(\varepsilon)t^{-\sigma}||\mathcal{U}(t)\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_0}$$

Используя закон сохранение энергии и (5.5), получим

$$||(1-\zeta)\mathcal{U}(t)\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le C(\varepsilon)t^{-\sigma}||\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_0} \le C_2(\varepsilon)t^{-\sigma}||\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_\sigma} \le C_3(\varepsilon)t^{-3/2}||\Psi_0||_{\mathcal{F}_\sigma}, \qquad t \ge 1 \tag{5.10}$$

так как $\sigma > 3/2$.

Далее, для второй компоненты $\pi'_{0,t}$ векторной функции $\Psi'_{0,t}$ при помощи неравенства Коши получим

$$|(\mathcal{U}_0^{i2}(t)\pi'_{0,t})(y)| \le \frac{C}{t^{n/2}}\|\pi'_{0,t}(x)\|_{H^0_\sigma}, \quad i = 1,2$$

Следовательно,

$$\|(1-\zeta)\mathcal{U}_0^{i2}(t)\pi'_{0,t}\|_{H^1_{-\sigma}} \le \frac{C}{t^{n/2}}\|\pi'_{0,t}(x)\|_{H^0_\sigma}\Big(\int\limits_{|y|>\varepsilon t/4} \frac{dy}{(1+|y|^2)^\sigma}\Big)^{\frac{1}{2}} \le C_1(\varepsilon)t^{-3/2}\|\pi'_{0,t}(x)\|_{H^0_\sigma}, \ i = 1,2$$

Первая компонента векторной функции $\Psi'_{0,t}$ оценивается аналогично. Поэтому,

$$||(1-\zeta)\mathcal{U}_0(t)\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le C(\varepsilon)t^{-3/2}||\Psi_0||_{\mathcal{F}_\sigma}, \qquad t \ge 1 \tag{5.11}$$

и из (5.10)-(5.11) вытекает, что

$$||(1-\zeta)\mathcal{U}_r(t)\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le C(\varepsilon)t^{-3/2}||\Psi_0||_{\mathcal{F}_\sigma}, \qquad t \ge 1 \tag{5.12}$$

Шаг iii) Наконец, рассмотрим $\zeta\mathcal{U}_r(t)\Psi'_{0,t}$. Обозначим через $\chi_{\varepsilon t/2}$ характеристическую функцию шара $|x| \le \varepsilon t/2$. Мы будем использовать то же самое обозначение для оператора умножения на эту характеристическую функцию. Из (5.6) следует, что

$$\zeta\mathcal{U}_r(t)\Psi'_{0,t} = \zeta\mathcal{U}_r(t)\chi_{\varepsilon t/2}\Psi'_{0,t} \tag{5.13}$$

Матричное ядро оператора $\zeta\mathcal{U}_r(t)\chi_{\varepsilon t/2}$ равно

$$\mathcal{U}'_r(x-y,t) = \zeta(|x|/t)\mathcal{U}_r(x-y,t)\chi_{\varepsilon t/2}(y)$$

Лемма 5.2. *Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$|\partial_z^\alpha \mathcal{U}_r(z,t)| \le C(\varepsilon)t^{-3/2}|z|^\varkappa \quad |z| \le \varepsilon t, \quad t \ge 1, \quad |\alpha| \le 1 \tag{5.14}$$

где $\varkappa = 0$ при $n = 3$, и $\varkappa = (5-n)/2$ при $n = 1,2$.

Мы докажем эту лемму в приложении A.
Так как $\zeta(|x|/t) = 0$ при $|x| > \varepsilon t/2$ и $\chi_{\varepsilon t/2}(y) = 0$ при $|y| > \varepsilon t/2$, то из (5.14) следует, что

$$|\partial_x^\alpha \mathcal{U}_r'(x-y,t)| \le Ct^{-3/2}|z|^\varkappa, \quad |\alpha| \le 1, \quad t \ge 1 \tag{5.15}$$

Норма оператора $\zeta\mathcal{U}_r(t)\chi_{\varepsilon t/2} : \mathcal{F}_\sigma \to \mathcal{F}_{-\sigma}$ эквивалентна норме оператора

$$\langle x\rangle^{-\sigma}\zeta\mathcal{U}_r(t)\chi_{\varepsilon t/2}(y)\langle y\rangle^{-\sigma} : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0$$

Норма последнего оператора не превосходит суммы по α, $|\alpha| \le 1$ норм операторов

$$\partial_x^\alpha[\langle x\rangle^{-\sigma}\zeta\mathcal{U}_r(t)\chi_{\varepsilon t/2}(y)\langle y\rangle^{-\sigma}] : L^2(\mathbb{R}^2) \oplus L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2) \oplus L^2(\mathbb{R}^2) \tag{5.16}$$

Из оценок (5.15) следует, что операторы (5.16) являются операторами Гильберта-Шмидта при $\sigma > 5/2$ для одномерного и двумерного случаев и $\sigma > 3/2$ для трехмерного случая, и нормы Гильберта-Шмидта этих операторов не превосходят $Ct^{-3/2}$. Далее, используя (5.5) и (5.13)получим

$$||\zeta\mathcal{U}_r(t)\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le Ct^{-3/2}||\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_\sigma} \le Ct^{-3/2}||\Psi_0||_{\mathcal{F}_\sigma}, \quad t \ge 1 \tag{5.17}$$

Наконец, из оценок (5.17), (5.12) следует, что

$$||\mathcal{U}_r(t)\Psi'_{0,t}||_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le Ct^{-3/2}||\Psi_0||_{\mathcal{F}_\sigma}, \quad t \ge 1 \tag{5.18}$$

Предложение 5.1 доказано. □

Следствие 5.3. *Пусть $n = 3$. Тогда*

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \to \infty \tag{5.19}$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma; \mathcal{F}_{-\sigma})$ при $\sigma > 3/2$.

5.1.1 Высокочастотная и низкочастотная компоненты

Далее мы покажем, что "плохоубывающие"слагаемые $\mathcal{U}_0(t)$ не оказывают влияние на убывание высокочастотной компоненты динамической группы $\mathcal{U}(t)$, так как $\mathcal{U}_0(t)$ (см.(5.3)) содержит только две частоты $\pm m$, являющиеся концевыми точками непрерывного спектра. В силу этих соображений, высокочастотная компонента группы $\mathcal{U}(t)$ должна убывать сильнее.

Чтобы сформулировать более точный результат, дадим определение *низкочастотной* и *высокочастотной* компоненты группы $\mathcal{U}(t)$:

$$\mathcal{U}_l(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-i\omega t} l(\omega)\Big[\mathcal{R}_0(\omega + i0) - \mathcal{R}_0(\omega - i0)\Big]\, d\omega \tag{5.20}$$

$$\mathcal{U}_h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-i\omega t} h(\omega)\Big[\mathcal{R}_0(\omega + i0) - \mathcal{R}_0(\omega - i0)\Big]\, d\omega \tag{5.21}$$

где $l(\omega) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ - четная функция, $\operatorname{supp} l \in [-m-2\varepsilon, m+2\varepsilon]$, $l(\omega) = 1$ для $|\omega| \le m+\varepsilon$ с некоторым $\varepsilon > 0$, и $h(\omega) = 1 - l(\omega)$.

Теорема 5.4. *Пусть $\sigma > 5/2$. Тогда*

$$\|\mathcal{U}_h(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma;\mathcal{F}_{-\sigma})} \le C(1+t)^{-3/2}, \quad t > 0. \tag{5.22}$$

Доказательство. I. Рассмотрим вначале маленькие значения t. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\|\mathcal{U}(t)\Psi(0)\|_{\mathcal{F}_0} = \|\Psi(0)\|_{\mathcal{F}_0} \tag{5.23}$$

Подынтегральная функция в (5.20) имеет конечный носитель и принадлежит пространству $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma;\mathcal{F}_{-\sigma})$ с $\sigma > 1$. Поэтому, при $\sigma > 1$

$$\|\mathcal{U}_l(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma;\mathcal{F}_{-\sigma})} \le C \tag{5.24}$$

Из (5.23) и (5.24) вытекает (5.22) для маленьких t, так как $\mathcal{U}_h(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}_l(t)$.

II. При больших большие значениях t мы будем использовать следующую лемму

Лемма 5.5. *Пусть $\sigma > 5/2$. Тогда*

$$\mathcal{U}_l(t) = \mathcal{U}_0(t) + \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \to \infty \tag{5.25}$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma;\mathcal{F}_{-\sigma})$.

Мы докажем эту лемму в приложении Б.

Выведем асимптотику (5.22) из предложения 5.1 и леммы 5.5. Используя (5.25), получим

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_l(t) + \mathcal{U}_h(t) = \mathcal{U}_0(t) + \mathcal{U}_h(t) + \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \to \infty \tag{5.26}$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma;\mathcal{F}_{-\sigma})$. С другой стороны, из (5.4) следует, что

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_0(t) + \mathcal{U}_r(t) = \mathcal{U}_0(t) + \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \to \infty \tag{5.27}$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma;\mathcal{F}_{-\sigma})$. Сравнивая асимптотики (5.26) и (5.27), получим асимптотику (5.22) для больших значений t. □

5.2 Возмущенное уравнение Клейна-Гордона

В этом разделе мы применим ранее установленные спектральные свойства возмущенной резольвенты, долговременную асимптотику для невозмущенной динамики и конечные борновские разложения для получения нашего основного результата:

Теорема 5.6. *Пусть потенциал V удовлетворяет условиям (1.6) и (3.3). Тогда для $\sigma > 5/2$*

$$\|e^{-it\mathcal{H}} - \sum_{\omega_J\in\Sigma} e^{-i\omega_J t}P_J\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma,\mathcal{F}_{-\sigma})} = \begin{cases} \mathcal{O}(|t|^{-3/2}, & n = 1,3 \\ \mathcal{O}(|t|^{-1}\log^{-2}|t|), & n = 2 \end{cases} \qquad t \to \pm\infty \tag{5.28}$$

где через P_J обозначены проекторы Рисса на соответствующие собственные подпространства.

Доказательство. Мы докажем теорему при условии (1.6) с $\beta > 5$ т.к. в этом случае доказательство одинаковое для всех размерностей $n = 1, 2, 3$. В трехмерном случае теорема верна при более слабом условии $\beta > 3$ (см. доказательство теоремы 3.7 в [22]).

Из леммы 4.2 iii)-v) аналогично (4.10), следует, что

$$\Psi(t) - \sum_{\omega_J \in \Sigma} e^{-i\omega_j t} P_J \Psi_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{-i\omega t} \Big[\mathcal{R}(\omega + i0) - \mathcal{R}(\omega - i0)\Big] \Psi_0 \, d\omega = \Psi_l(t) + \Psi_h(t) \quad (5.29)$$

где P_J -соответствующий проектор Рисса:

$$P_j \Psi_0 := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega - \omega_J| = \delta} \mathcal{R}(\omega) \Psi_0 d\omega$$

определенный для достаточно маленьких $\delta > 0$,

$$\Psi_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} l(\omega) e^{-i\omega t} \Big[\mathcal{R}(\omega + i0) - \mathcal{R}(\omega - i0)\Big] \Psi_0 \, d\omega$$

$$\Psi_h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} h(\omega)) e^{-i\omega t} \Big[\mathcal{R}(\omega + i0) - \mathcal{R}(\omega - i0)\Big] \Psi_0 \, d\omega$$

где $l(\omega)$ и $h(\omega)$ определены в параграфе 5.1.1. Рассмотрим $\Psi_l(t)$ и $\Psi_h(t)$ отдельно.

Асимптотика для $\Psi_l(t)$

Рассмотрим только интеграл по интервалу $(m, m + 2\varepsilon)$. Интеграл по интервалу $(-m - 2\varepsilon, -m)$ рассматривается аналогичным образом. Мы докажем долговременное убывание для $\Psi_l(t)$ при помощи лемм 3.11 и 3.12. Согласно асимптотикам (4.12)-(4.14), мы можем применить эти леммы для случая $F = l(\omega)\big(\mathcal{R}(\omega + i0) - \mathcal{R}(\omega - i0)\big)$, $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma})$ с $\sigma > 5/2$, $a = m$, $b = m + 2\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало и получить

$$\|\Psi_l(t)\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} = \begin{cases} \mathcal{O}(|t|^{-3/2}, & n = 1, 3 \\ \mathcal{O}(|t|^{-1} \log^{-2} |t|), & n = 2 \end{cases} \qquad t \to \pm\infty \quad (5.30)$$

Асимптотика для $\Psi_h(t)$

Подставим борновское разложение (4.17) в спектральное представление для $\Psi_h(t)$:

$$\begin{aligned} \Psi_h(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{-i\omega t} h(\omega) \Big[\mathcal{R}_0(\omega + i0) - \mathcal{R}_0(\omega - i0)\Big] \Psi_0 \, d\omega \qquad (5.31) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{-i\omega t} h(\omega) \Big[\mathcal{R}_0(\omega + i0) \mathcal{V} \mathcal{R}_0(\omega + i0) - \mathcal{R}_0(\omega - i0) \mathcal{V} \mathcal{R}_0(\omega - i0)\Big] \Psi_0 \, d\omega \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{-i\omega t} h(\omega) \Big[\mathcal{R}_0 \mathcal{V} \mathcal{R}_0 \mathcal{V} \mathcal{R}(\omega + i0) - \mathcal{R}_0 \mathcal{V} \mathcal{R}_0 \mathcal{V} \mathcal{R}(\omega - i0)\Big] \Psi_0 \, d\omega \\ &= \Psi_{h1}(t) + \Psi_{h2}(t) + \Psi_{h3}(t), \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое Ψ_{hk}, $k = 1, 2, 3$.

Шаг i) Первое слагаемое $\Psi_{h1}(t) = \mathcal{U}_h(t)\Psi_0$ в силу (5.21). Поэтому, из теоремы 5.4 следует, что при $\sigma > 5/2$ справедлива оценка

$$\|\Psi_{h1}(t)\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le \frac{C\|\Psi_0\|_{\mathcal{F}_\sigma}}{(1+|t|)^{3/2}}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.32}$$

Шаг ii) Рассмотрим второе слагаемое $\Psi_{h2}(t)$. Обозначим $h_1(\omega) = \sqrt{h(\omega)}$ (мы можем считать, что $h(\omega) \ge 0$ и $h_1 \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$). Положим

$$\Phi_{h1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-i\omega t} h_1(\omega)\Big[\mathcal{R}_0(\omega + i0) - \mathcal{R}_0(\omega - i0)\Big]\Psi_0 \, d\omega$$

Очевидно, что для Φ_{h1} неравенство (5.32) также верно. А именно,

$$\|\Phi_{h1}(t)\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le \frac{C\|\Psi_0\|_{\mathcal{F}_\sigma}}{(1+|t|)^{3/2}}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.33}$$

Второе слагаемое $\Psi_{h2}(t)$ может быть представлено в виде свертки:

Лемма 5.7. *Справедливо следующее представление*

$$\Psi_{h2}(t) = i\int\limits_0^t \mathcal{U}_{h_1}(t-\tau)\mathcal{V}\Phi_{h1}(\tau)\, d\tau, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5.34}$$

где интеграл сходится в пространстве $\mathcal{F}_{-\sigma}$ с $\sigma > 5/2$. Группа $\mathcal{U}_{h_1}$ определена в (5.21) с h_1 вместо h.

Доказательство. Запишем $\Psi_{h2}(t)$ в виде

$$\Psi_{h2}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} h_1^2(\omega)\Big[\mathcal{R}_0(\omega+i0)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega+i0) - \mathcal{R}_0(\omega-i0)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega-i0)\Big]\Psi_0 \, d\omega \tag{5.35}$$

Обозначим

$$\mathcal{U}_{h_1}^{\pm}(t) := \theta(\pm t)\mathcal{U}_{h_1}(t), \quad \Phi_{h1}^{\pm}(t) := \theta(\pm t)\Phi_{h1}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Так как $h_1(\omega)\mathcal{R}_0(\omega + i0)\Psi_0 = i\tilde{\Phi}_{h1}^+(\omega)$, то, интегрируя первый слагаемое в правой части (5.35), получим

$$\begin{aligned}
\Psi_{h2}^+(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} h_1(\omega)\mathcal{R}_0(\omega+i0)\mathcal{V}\tilde{\Phi}_{h1}^+(\omega)\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} h_1(\omega)\mathcal{R}_0(\omega+i0)\mathcal{V}\Big[\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau}\Phi_{h1}^+(\tau)d\tau\Big]d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}(i\partial_t + i)^2\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega+i)^2} h_1(\omega)\mathcal{R}_0(\omega+i0)\mathcal{V}\Big[\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau}\Phi_{h1}^+(\tau)d\tau\Big]d\omega. \qquad (5.36)
\end{aligned}$$

Последний двойной интеграл сходится в пространстве $\mathcal{F}_{-\sigma}$ с $\sigma > 5/2$ в силу (5.33), (4.7) и (4.9) при $k = 0$. Следовательно, по теореме Фубини мы можем поменять порядок интегрирования:

$$\Psi^+_{h2}(t) = i\int_{\mathbb{R}} \mathcal{U}^+_{h_1}(t-\tau)\mathcal{V}\Phi^+_{h1}(\tau)d\tau = \begin{cases} i\displaystyle\int_0^t \mathcal{U}_{h_1}(t-\tau)\mathcal{V}\Phi_{h1}(\tau)d\tau & , \quad t>0 \\ 0 & , \quad t<0 \end{cases} \tag{5.37}$$

так как в силу (4.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^+_{h_1}(t-\tau) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\omega(t-\tau)}h_1(\omega)\mathcal{R}_0(\omega+i0)\ d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i}(i\partial_t+i)^2\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{(\omega+i)^2}h_1(\omega)\mathcal{R}_0(\omega+i0)\ d\omega \end{aligned} \tag{5.38}$$

Аналогично, интегрируя второе слагаемое в правой части (5.35), получим

$$\Psi^-_{h2}(t) = i\int_{\mathbb{R}} \mathcal{U}^-_{h_1}(t-\tau)\mathcal{V}\Phi^-_{h1}(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & , \quad t>0 \\ i\displaystyle\int_0^t \mathcal{U}_{h_1}(t-\tau)\mathcal{V}\Phi_{h1}(\tau)d\tau & , \quad t<0 \end{cases} \tag{5.39}$$

Откуда вытекает (5.34), так как $\Psi_{h2}(t)$ является суммой (5.37) и (5.39). □

Далее, выберем произвольное $\sigma' \in (5/2, \beta-5/2)$. Тогда, применяя теорему 5.4 с h_1 вместо h к подынтегральному выражению в (5.34), получим

$$\|\mathcal{U}_{h_1}(t-\tau)\mathcal{V}\Phi_{h1}(\tau)\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le \frac{C\|\mathcal{V}\Phi_{h1}(\tau)\|_{\mathcal{F}'_\sigma}}{(1+|t-\tau|)^{3/2}} \le \frac{C\|\Phi_{h1}(\tau)\|_{\mathcal{F}_{\sigma'-\beta}}}{(1+|t-\tau|)^{3/2}} \le \frac{C\|\Psi_0\|_{\mathcal{F}_\sigma}}{(1+|t-\tau|)^{3/2}(1+|\tau|)^{3/2}}$$

Поэтому, из представления (5.34) следует, что

$$\|\Psi_{h2}(t)\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le \frac{C\|\Psi_0\|_{\mathcal{F}_\sigma}}{(1+|t|)^{3/2}}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad \sigma > 5/2. \tag{5.40}$$

Шаг iv) Наконец, рассмотрим последнее слагаемое:

$$\Psi_{h3}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-i\omega t}h(\omega)\mathcal{N}(\omega)\Psi_0\ d\omega,$$

где $\mathcal{N} := \mathcal{M}(\omega+i0) - \mathcal{M}(\omega-i0)$ для $\omega\in\Gamma$ и

$$\mathcal{M}(\omega) = \mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}(\omega) = \mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{W}(\omega)\mathcal{R}(\omega), \quad \omega\in\mathbb{C}\setminus[\overline{\Gamma}\cup\Sigma] \tag{5.41}$$

Получим асимптотику для функции $\mathcal{M}(\omega)$ и ее производных при больших ω:

Лемма 5.8. *Для $k = 0,1,2$ справедлива асимптотика*

$$\|\mathcal{M}^{(k)}(\omega)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma,\mathcal{F}_{-\sigma})} = \mathcal{O}(|\omega|^{-2}), \quad |\omega|\to\infty, \quad \omega\in\mathbb{C}\setminus\Gamma, \quad \sigma > 1/2+k \tag{5.42}$$

Доказательство. Асимптотика (5.42) следует из асимптотик (4.9), (4.14) и (4.18) для $\mathcal{R}_0^{(k)}(\omega)$, $\mathcal{R}^{(k)}(\omega)$ и $\mathcal{W}^{(k)}(\omega)$. Рассмотрим, например, случай $k = 2$. Дифференцируя (5.41), получим

$$\mathcal{M}'' = \mathcal{R}_0''\mathcal{W}\mathcal{R} + \mathcal{R}_0\mathcal{W}''\mathcal{R} + \mathcal{R}_0\mathcal{W}\mathcal{R}'' + 2\mathcal{R}_0'\mathcal{W}'\mathcal{R} + 2\mathcal{R}_0'\mathcal{W}\mathcal{R}' + 2\mathcal{R}_0\mathcal{W}'\mathcal{R}' \qquad (5.43)$$

Для фиксированного $\sigma > 5/2$, выберем $\sigma' \in (5/2, \beta - 1/2)$. Тогда для первого слагаемого в (5.43) при больших $\omega \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ получим в силу (4.14) и (4.18)

$$\|\mathcal{R}_0''(\omega)\mathcal{W}(\omega)\mathcal{R}(\omega)f\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \leq C\|\mathcal{W}(\omega)\mathcal{R}(\omega)f\|_{\mathcal{F}_{\sigma'}} \leq C_1|\omega|^{-2}\|\mathcal{R}(\omega)f\|_{\mathcal{F}_{-\sigma'}} \leq C_2|\omega|^{-2}\|f\|_{\mathcal{F}_\sigma}$$

Другие слагаемые оцениваются аналогично. При этом σ' выбирается следующим образом: $\sigma' \in (1/2, \beta - 5/2)$ для второго слагаемого, $\sigma' \in (5/2, \beta - 1/2)$ для третьего, $\sigma' \in (3/2, \beta - 3/2)$ для четвертого и пятого слагаемых, и $\sigma' \in (3/2, \beta - 1/2)$ для шестого слагаемого. □

Теперь мы докажем убывание для $\Psi_{h3}(t)$. Из леммы 5.8 следует, что

$$(h\mathcal{N})'' \in L^1((-\infty, -m - \varepsilon) \cup (m + \varepsilon, \infty); \mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{F}_{-\sigma}))$$

при $\sigma > 5/2$. Поэтому, интегрируя по частям дважды, получим

$$\|\Psi_{h3}(t)\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \leq \frac{C\|\Psi_0\|_{\mathcal{F}_\sigma}}{(1 + |t|)^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Это завершает доказательство теоремы 5.6. □

Следствие 5.9. *Из асимптотики (*5.28*) следует асимптотика (*1.8*) с проектором*

$$\mathcal{P}_c = 1 - \mathcal{P}_d, \quad \mathcal{P}_d = \sum_{\omega_J \in \Sigma} P_J \qquad (5.44)$$

5.3 Асимптотическая полнота

Применим полученные результаты для доказательства асимптотической полноты при помощи стандартного метода Кука. Отметим, что асимптотическая полнота доказана в работах [26, 32, 38] другими методами для более общих уравнений Клейна-Гордона с внешним магнитным полем. Наши результаты дают уточнение порядка убывания для остаточного члена.

Теорема 5.10. *Пусть выполняются условия (*1.6*) и (*3.3*). Тогда*
*i) Для решения уравнения (*1.3*) с начальными данными $\Psi(0) \in \mathcal{F}_0$ справедлива долговременная асимптотика*

$$\Psi(t) = \sum_{\omega_J \in \Sigma} e^{-i\omega_J t}\Psi_J + \mathcal{U}(t)\Phi_\pm + r_\pm(t) \qquad (5.45)$$

где Ψ_J -собственные функции оператора $\mathcal{H}$, $\Phi_\pm \in \mathcal{F}_0$ - асимптотические состояния рассеяния и

$$\|r_\pm(t)\|_{\mathcal{F}_0} \to 0, \qquad t \to \pm\infty \qquad (5.46)$$

ii) Более того,

$$\|r_\pm(t)\|_{\mathcal{F}_0} = \begin{cases} \mathcal{O}(|t|^{-1/2}), & n = 1, 3 \\ \mathcal{O}(\log^{-1}|t|), & n = 2 \end{cases} \qquad (5.47)$$

если $\Psi(0) \in \mathcal{F}_\sigma$ с $\sigma > 5/2$.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{X}_d := \mathcal{P}_d\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{X}_c := \mathcal{P}_c\mathcal{F}_0$. Для $\Psi(0) \in \mathcal{X}_d$ асимптотика (5.45) очевидна с $\Phi_\pm = 0$ и $r_\pm(t) = 0$. Для $\Psi(0) \in \mathcal{X}_c$ асимптотика (5.45) имеет вид

$$\Psi(t) = \mathcal{U}(t)\Phi_\pm + r_\pm(t) \tag{5.48}$$

Достаточно проверить (5.48) и (5.47) для $\Psi(0) \in \mathcal{X}_c \cap \mathcal{F}_\sigma$, так как пространство $\mathcal{F}_\sigma$ плотно в $\mathcal{X}_c$, а группа $\mathcal{U}(t)$ унитарна в $\mathcal{F}_0$ после подходящей модификации нормы. Из теоремы 5.6 следует, что

$$\|\Psi(t)\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} \le \left\{ \begin{array}{c} C(1+|t|)^{-3/2}\|\Psi(0)\|_{\mathcal{F}_\sigma}, \quad n = 1,3 \\ C(1+|t|)^{-1}\log^{-2}(1+|t|)\|\Psi(0)\|_{\mathcal{F}_\sigma}, \quad n = 2 \end{array} \right. \tag{5.49}$$

Запишем уравнение (4.16) в виде

$$i\dot\Psi(t) = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{V})\Psi(t)$$

Применим представление Дюгамеля:

$$\Psi(t) = \mathcal{U}(t)\Psi(0) + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-\tau)\mathcal{V}\Psi(\tau)d\tau, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5.50}$$

Запишем (5.50) как

$$\Psi(t) = \mathcal{U}(t)\Big[\Psi(0) + \int\limits_0^{\pm\infty} \mathcal{U}(-\tau)\mathcal{V}\Psi(\tau)d\tau\Big] - \int\limits_t^{\pm\infty} \mathcal{U}(t-\tau)\mathcal{V}\Psi(\tau)d\tau = \mathcal{U}(t)\Phi_\pm + r_\pm(t) \tag{5.51}$$

Осталось проверить, что $\Phi_\pm \in \mathcal{F}_0$ и выполняется (5.47). Для определенности рассмотрим знак $''+''$. Из “унитарности” группы $\mathcal{U}(t)$ в $\mathcal{F}_0$, условия (1.6) и оценок (5.49) следует, что для $\sigma' \in (5/2, \beta)$ и $n = 1,3$

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty \|\mathcal{U}(-\tau)\mathcal{V}\psi(\tau)\|_{\mathcal{F}_0}d\tau &\le C_1\int\limits_0^\infty \|\mathcal{V}\Psi(\tau)\|_{\mathcal{F}_0}d\tau \le C_2\int\limits_0^\infty \|\Psi(\tau)\|_{\mathcal{F}_{-\sigma'}}d\tau \\ &\le C_3\int\limits_0^\infty (1+\tau)^{-3/2}\|\Psi(0)\|_{\mathcal{F}_\sigma}d\tau < \infty \end{aligned} \tag{5.52}$$

так как $|V(x)| \le C'\langle x\rangle^{-\beta} \le C''\langle x\rangle^{-\sigma'}$. В двумерном случае аналогично получим

$$\int\limits_0^\infty \|\mathcal{U}(-\tau)\mathcal{V}\psi(\tau)\|_{\mathcal{F}_0}d\tau \le C\int\limits_0^\infty (1+\tau)^{-1}\log^{-2}(1+\tau)\|\Psi(0)\|_{\mathcal{F}_\sigma}d\tau < \infty$$

Следовательно, $\Phi_+ \in \mathcal{F}_0$. Оценка (5.47) доказывается аналогично. $\square$

6 Приложение А. Доказательство леммы 5.2

В случае $n = 3$ лемма 5.2 очевидна.
1) Докажем лемму в одномерном случае. Дифференцируя (5.2) при $n = 1$, для $|z| < t$ получим

$$\dot u(t,z) = -\frac{mt}{2\sqrt{t^2-z^2}} J_1(m\sqrt{t^2-z^2})$$

$$\ddot u(t,z) = \frac{m}{2}\frac{z^2}{\sqrt{(t^2-z^2)^3}} J_1(m\sqrt{t^2-z^2}) + \frac{m^2t^2}{2(t^2-z^2)} J_2(m\sqrt{t^2-z^2})$$

Для функций Бесселя справедливы асимптотики (см. [2]):

$$J_\nu(z) = \Big(\frac{2}{\pi z}\Big)^{1/2}\cos(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}) + \mathcal{O}(z^{-3/2}), \quad z\to\infty.$$

Поэтому, из (5.1) следует, что

$$\mathcal{U}(t,z) = \tilde{\mathcal{U}}_0(t,z) + \tilde{\mathcal{U}}_r(t,z)$$

где

$$\tilde{\mathcal{U}}_0(t,z) := \frac{\theta(t-|z|)}{\sqrt{2m\pi}}\left(\begin{array}{cc} -\dfrac{mt\sin(m\sqrt{t^2-z^2}-\frac{\pi}{4})}{\sqrt[4]{(t^2-z^2)^3}} & \dfrac{\cos(m\sqrt{t^2-z^2}-\frac{\pi}{4})}{\sqrt[4]{t^2-z^2}} \\ & \\ -\dfrac{m^2t^2\cos(m\sqrt{t^2-z^2}-\frac{\pi}{4})}{\sqrt[4]{(t^2-z^2)^5}} & -\dfrac{mt\sin(m\sqrt{t^2-z^2}-\frac{\pi}{4})}{\sqrt[4]{(t^2-z^2)^3}} \end{array}\right)$$

и для $\varepsilon\in(0,1)$

$$|\partial_z^k\tilde{\mathcal{U}}_r(t,z)| \le C(\varepsilon)t^{-3/2}, \quad |z|\le\varepsilon t, \quad k=0,1$$

Поэтому достаточно доказать оценки вида 5.14) для разности $Q(t,z) = \tilde{\mathcal{U}}_0(t,z) - \mathcal{U}_0(t,z)$. Рассмотрим компоненту $Q^{12}(t,z)$ этой разности. Применим формулу Лагранжа:

$$|Q^{12}(t,z)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\Big|\frac{\cos(m\sqrt{t^2-z^2}-\frac{\pi}{4})}{\sqrt[4]{t^2-z^2}} - \frac{\cos(mt-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{t}}\Big| \le C(\varepsilon)z^2t^{-3/2}, \quad |z|\le\varepsilon t \quad (6.53)$$

Дифференцируя $Q^{12}(t,z)$, для $|z|\le\varepsilon t$ получим

$$\partial_z Q^{12}(t,z) = \frac{z}{\sqrt{2\pi m}}\Big[\frac{1}{2\sqrt[4]{(t^2-z^2)^5}}\cos(m\sqrt{t^2-z^2}-\frac{\pi}{4}) + \frac{m}{\sqrt[4]{(t^2-z^2)^3}}\sin(m\sqrt{t^2-z^2}-\frac{\pi}{4})\Big]$$

Следовательно,

$$|\partial_z Q^{12}(t,z)| \le C(\varepsilon)|z|\,t^{-3/2}, \quad |z|\le\varepsilon t \quad (6.54)$$

Для других компонент матрицы $Q(t,z)$ также справедливы оценки вида (6.53) и (6.54). Отсюда вытекает утверждение леммы при $n = 1$ так как $\mathcal{U}_r(t) = \tilde{\mathcal{U}}_r(t) + Q(t,z)$.

2) Рассмотрим случай $n = 2$. При $|z| < t$ получим

$$\dot u(t,z) = -\frac{mt}{2\pi}\frac{\sin m\sqrt{t^2-|z|^2}}{t^2-|z|^2} - \frac{t}{2\pi}\frac{\cos m\sqrt{t^2-|z|^2}}{\sqrt{(t^2-|z|^2)^3}},$$

$$\ddot{u}(t,z)=-\frac{m}{2\pi}\frac{\sin m\sqrt{t^2-|z|^2}}{t^2-|z|^2}-\frac{m^2t^2}{2\pi}\frac{\cos m\sqrt{t^2-|z|^2}}{\sqrt{(t^2-|z|^2)^3}}+\frac{3mt^2}{2\pi}\frac{\sin m\sqrt{t^2-|z|^2}}{(t^2-|z|^2)^2}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos m\sqrt{t^2-|z|^2}}{\sqrt{(t^2-|z|^2)^3}}+\frac{3t^2}{2\pi}\frac{\cos m\sqrt{t^2-|z|^2}}{\sqrt{(t^2-|z|^2)^5}}$$

Через $\tilde{\mathcal{U}}_0(t,z)$ обозначим теперь матрицу

$$\tilde{\mathcal{U}}_0(t,z):=\frac{\theta(t-|z|)}{2\pi}\left(\begin{array}{cc} -\dfrac{mt\sin m\sqrt{t^2-|z|^2}}{t^2-|z|^2} & \dfrac{\cos m\sqrt{t^2-|z|^2}}{\sqrt{t^2-|z|^2}} \\ -\dfrac{m^2t^2\cos m\sqrt{t^2-|z|^2}}{\sqrt{(t^2-|z|^2)^3}} & -\dfrac{mt\sin m\sqrt{t^2-|z|^2}}{t^2-|z|^2} \end{array}\right),$$

Для $\varepsilon\in(0,1)$

$$\Big|\partial_z^\alpha\Big(\mathcal{U}_0(t,z)-\tilde{\mathcal{U}}_0(t,z)\Big)\Big|\le C(\varepsilon)t^{-2},\quad |z|\le\varepsilon t,\quad |\alpha|\le 1$$

Рассмотрим разность $Q(t,z)=\tilde{\mathcal{U}}_0(t,z)-\mathcal{U}_0(t)$. Применяя формулу Лагранжа, получим

$$|Q^{12}(t,z)|=\frac{1}{2\pi}\Big|\frac{\cos m\sqrt{t^2-|z|^2}}{\sqrt{t^2-|z|^2}}-\frac{\cos mt}{t}\Big|\le C(\varepsilon)|z|^2t^{-2}\le C(\varepsilon)|z|^{3/2}t^{-3/2},\quad |z|\le\varepsilon t$$

Далее, при $|z|<\varepsilon t$ и $j=1,2$

$$|\partial_{z_j}Q^{12}(t,z)|=\frac{|z_j|}{2\pi}\Big|\frac{1}{2\sqrt{(t^2-|z|^2)^3}}\cos m\sqrt{t^2-z^2}+\frac{m}{t^2-|z|^2}\sin m\sqrt{t^2-|z|^2}\Big|\le C(\varepsilon)|z|\,t^{-2}$$

Для других компонент матрицы $Q(t,z)$ справедливы такие же оценки. Лемма полностью доказана.

7 Приложение B. Доказательство леммы 5.5

Для любого оператора $A\in\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma;H^1_{-\sigma})$ обозначим

$$\mathrm{Re}A:=(A+A^*)/2,\quad \mathrm{Im}\,A:=(A-A^*)/2i$$

Шаг i) Вначале получим удобное представление для матричного ядра $\mathcal{U}_l(t,z)$. Из формулы (5.20) следует, что

$$\mathcal{U}_l(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma l(\omega)\left(\begin{array}{cc}\omega & i\\ -i\omega^2 & \omega\end{array}\right)e^{-i\omega t}\Big(P(\omega+i0)-P(\omega-i0)\Big)d\omega$$

где $P(\omega)=R_0(\omega^2-m^2)$. Из равенства

$$R_0(\zeta-i0)=R_0^*(\zeta+i0),\qquad \zeta\in\mathbb{R}, \tag{7.55}$$

вытекает, что $P(\omega-i0)=P^*(\omega+i0)$. Поэтому,

$$\mathcal{U}_l(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} l(\omega)\left(\begin{array}{cc}\omega & i\\ -i\omega^2 & \omega\end{array}\right)e^{-i\omega t}\,\mathrm{Im}\,P(\omega+i0)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{m}^{\infty} l(\omega)\Big[\left(\begin{array}{cc}\omega & i\\ -i\omega^2 & \omega\end{array}\right)e^{-i\omega t}\,\mathrm{Im}\,P(\omega+i0)+\left(\begin{array}{cc}-\omega & i\\ -i\omega^2 & -\omega\end{array}\right)e^{i\omega t}\,\mathrm{Im}\,P(-\omega+i0)\Big]d\omega$$

Применяя (7.55) еще раз, получим $P(-\omega+i0)=P^*(\omega+i0)$. Следовательно,

$$\mathcal{U}_l(t)=\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_{m}^{\infty} l(\omega)\left(\begin{array}{cc}\omega & i\\ -i\omega^2 & \omega\end{array}\right)e^{-i\omega t}\,\mathrm{Im}\,P(\omega+i0)d\omega=\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_{m}^{\infty} l(\omega)e^{-i\omega t}\mathcal{P}(\omega)d\omega \quad (7.56)$$

Шаг ii) Далее получим асимптотику при $\omega\to m+0$ для матричного оператора

$$\mathcal{P}(\omega)=\left(\begin{array}{cc}\omega & i\\ -i\omega^2 & \omega\end{array}\right)\mathrm{Im}\,P(\omega+i0)$$

Из асимптотик (2.13)-(2.19), (2.15)-(2.16) и (2.18)-(2.19) следует, что

$$\mathcal{P}(\omega)=\mathcal{P}_0(\omega)+\mathcal{P}_r(\omega),\quad \omega\to m+0 \quad (7.57)$$

где $\mathcal{P}_0(\omega)$ -интегральный оператор с ядром

$$\mathcal{P}_0(\omega,x,y)=\left(\begin{array}{cc}m & i\\ -im^2 & m\end{array}\right)P_0(\omega,x,y),\quad \text{где}\quad P_0(\omega,x,y)=\left\{\begin{array}{c}1/\sqrt{8m(\omega-m)},\ n=1\\ 1/4,\quad n=2\\ 0,\quad n=3\end{array}\right.$$

и для остатка $\mathcal{P}_r(\omega)$ справедлива асимптотика

$$\mathcal{P}_r(\omega)=\mathcal{O}((\omega-m)^{1/2}),\quad \mathcal{P}_r'(\omega)=\mathcal{O}((\omega-m)^{-1/2}),\quad \mathcal{P}_r''(\omega)=\mathcal{O}((\omega-m)^{-3/2}),\quad \omega\to m+0 \quad (7.58)$$

в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\sigma;\mathcal{F}_{-\sigma})$ с $\sigma>5/2$.

Шаг iii) Вклад остаточного члена $\mathcal{P}_r(\omega)$ в долговременную асимптотику правой части (7.56) составляет $\mathcal{O}(t^{-3/2})$ в силу асимптотик (7.58). Это следует из леммы 3.11, примененной к векторной функции $F(\omega)=l(\omega)\mathcal{P}_r(\omega)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}=L^2_{-\sigma}$ с $\sigma>5/2$, $a=m$ и $b=m+2\varepsilon$.

Так как для трехмерного случая $\mathcal{P}_0(\omega)\equiv 0$, то лемма 5.5 в трехмерном случае доказана.

Шаг iv) В одномерном и двумерном случаях доказательство леммы 5.5 будет закончено, если мы докажем, что для любого $N=2,3,...$

$$\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_{m}^{\infty} l(\omega)e^{-i\omega t}\mathcal{P}_0(\omega)d\omega=\mathcal{U}_0(t)+\mathcal{O}(t^{-N}),\quad t\to\infty \quad (7.59)$$

Рассмотрим случаи $n=1$ и $n=2$ отдельно.
1) В случае $n=1$

$$\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_m^\infty l(\omega)e^{-i\omega t}\mathcal{P}_0(\omega)d\omega=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\mathrm{Re}\int\limits_m^\infty\left(\begin{array}{cc} m & i\\ -im^2 & m\end{array}\right)e^{-i\omega t}\frac{l(\omega)}{\sqrt{\omega-m}}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\mathrm{Re}\Big[e^{-imt}\left(\begin{array}{cc} m & i\\ -im^2 & m\end{array}\right)\int\limits_0^\infty e^{-i\omega t}\frac{l_1(\omega)}{\sqrt{\omega}}d\omega\Big]$$

где $l_1(\omega)=l(\omega+m)$.

Так как $\int\limits_0^\infty e^{-i\omega t}d\omega/\sqrt{\omega}=\sqrt{\pi/it}$ (интеграл Френеля), то интегрируя по частям N раз, получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-i\omega t}l_1(\omega)d\omega/\sqrt{\omega}=\sqrt{\pi/it}+\mathcal{O}(t^{-N}),\quad t\to\infty,\quad \forall N=1,2,... \tag{7.60}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_m^\infty l(\omega)e^{-i\omega t}\mathcal{P}_0(\omega)d\omega &= \frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\mathrm{Re}\Big[e^{-imt}\left(\begin{array}{cc} m & i\\ -im^2 & m\end{array}\right)\sqrt{\pi/it}\Big]+\mathcal{O}(t^{-N})\\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\pi t}}\mathrm{Re}\Big[e^{-imt}e^{-\pi i/4}\left(\begin{array}{cc} m & i\\ -im^2 & m\end{array}\right)\Big]+\mathcal{O}(t^{-N}),\quad t\to\infty\end{aligned}$$

откуда следует (7.59) в одномерном случае.

2) В случае $n=2$

$$\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_m^\infty l(\omega)e^{-i\omega t}\mathcal{P}_0(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int\limits_m^\infty l(\omega)\left(\begin{array}{cc} \omega & i\\ -i\omega^2 & \omega\end{array}\right)e^{-i\omega t}d\omega$$

Интегрируя по частям N раз, получим

$$\int\limits_m^\infty e^{-i\omega t}l(\omega)d\omega=\frac{e^{-imt}}{it}+\frac{1}{it}\int\limits_0^\infty e^{-i\omega t}\zeta_1'(\omega)d\omega=\frac{e^{-imt}}{it}+\mathcal{O}(t^{-N}),\ t\to\infty$$

так как $l(m)=1$, $l^{(k)}(m)=0$, $k=1,2,....$ Следовательно,

$$\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_m^\infty l(\omega)e^{-i\omega t}\mathcal{P}_0(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\Big[e^{-imt}\left(\begin{array}{cc} m & i\\ -im^2 & m\end{array}\right)\frac{1}{it}\Big]+\mathcal{O}(t^{-N}),\quad t\to\infty,$$

откуда следует (7.59) в двумерном случае. Лемма 5.5 доказана.

Список литературы

[1] Вайнберг Б.Р., Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та (1982)

[2] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б., Специальные функции математической физики, Москва, Наука, 1984.

[3] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, IV, Москва, Мир, 1982.

[4] Шубин М., Псевдодифференциальные ореraторы и спектральная теория, Москва, Наука, 1988.

[5] Agmon S., Spectral properties of Schrödinger operator and scattering theory, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Ser. IV **2**, 151-218 (1975).

[6] P. D'Ancona, V. Georgiev, H. Kubo, Weighted decay estimates for the wave equation, *J. Differ. Equations* **177** (2001), no. 1, 146–208.

[7] P. Brenner, On the existence of global smooth solutions of certain semi-linear hyperbolic equations, *Math. Z.* **167** (1979), 99-135.

[8] P. Brenner, On scattering and everywhere defined scattering operators for nonlinear Klein-Gordon equations, *J. Differ. Equations* **56** (1985), 310-344.

[9] Buslaev V.S., Perelman G., On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **164**, 75-98 (1995).

[10] Buslaev V.S., Sulem C., On asymptotic stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations,*Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire* **20**, no.3, 419-475 (2003).

[11] Cuccagna S., Stabilization of solutions to nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **54**, No.9, 1110-1145 (2001).

[12] J.-M. Delort, Global existence and asymptotics for the quasilinear Klein-Gordon equation with small data in one space dimension. [French], *Ann. Sci. n»„c. Norm. Supn»„r. (4)* **34** (2001), no. 1, 1-61.

[13] Imaikin V., Komech A., Vainberg B., On scattering of solitons for the Klein-Gordon equation coupled to a particle, *Comm. Math. Phys.*, **268**, no.2, 321-367 (2006).

[14] Jensen A., Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave function. Results in $L^2(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 5$, *Duke Math. J.* **47**, 57-80 (1980).

[15] Jensen A., Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave function. Results in $L^2(\mathbb{R}^4)$, *J. Math. Anal. Appl* **101**, 491-513 (1984).

[16] Jensen A., Kato T., Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, *Duke Math. J.* **46**, 583-611 (1979).

[17] Jensen A., Nenciu G., A unified approach to resolvent expansions at thresholds, *Rev. Math. Phys.* **13**, No.6, 717-754 (2001).

[18] Klainerman S., Remark on the asymptotic behavior of the Klein-Gordon equation in $\mathbb{R}^{n+1}$,*Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), no.2, 137-144.

[19] Komech A., Kopylova E., Scattering of solitons for Schrödinger equation coupled to a particle, *Russian J. Math. Phys.* **13**, no. 2, 158-187 (2006).

[20] Komech A., Kopylova E., Weighted energy decay for 1D Klein-Gordon equation, accepted in *Comm. in Partial Differ. Equations*

[21] Komech A., Kopylova E., Weighted energy decay for 2D Klein-Gordon equation, submitted to *J. Func. Anal.*

[22] Komech A., Kopylova E., Weighted energy decay for 3D Klein-Gordon equation, accepted in *J. Differ. Equations* **248** (2010), no. 3, 501-520.

[23] Kopylova E., Komech A., On asymptotic stability of kink for relativistic Ginzburg-Landau equation *arXiv: 0910.5539*

[24] Kopylova E., Komech A., On asymptotic stability of moving kink for relativistic Ginzburg-Landau equation *arXiv: 0910.5538*

[25] H. Kubo, S. Lucente, Note on weighted Strichartz estimates for Klein-Gordon equations with potential, *Tsukuba J. Math.* **31** (2007), no. 1, 143-173.

[26] Lundberg L.-E., Spectral and scattering theory for the Klein-Gordon equation, *Comm. Math. Phys.* **31** (1973), no. 3, 243-257.

[27] B. Marshall, W. Strauss, S. Wainger, $L^p - L^q$ estimates for the Klein-Gordon equation, *J. Math. Pures Appl., IX. Sn»„r.* **59** (1980), 417-440.

[28] C.S. Morawetz, W.A. Strauss, Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **25** (1972), 1-31.

[29] Murata M., Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations, *J. Funct. Anal.* **49**, 10-56 (1982).

[30] Pego R.L., Weinstein M.I., On asymptotic stability of solitary waves, *Phys. Lett. A* **162**, 263-268 (1992).

[31] Pego R.L., Weinstein M.I., Asymptotic stability of solitary waves, *Comm. Math. Phys.* **164**, 305-349(1994).

[32] Schechter M., The Klein-Gordon equation and scattering theory, *Ann. Phys.* **101** (1976), 601-609.

[33] Soffer A., Weinstein M.I., Multichannel nonlinear scattering for nonintegrable equations, *Comm. Math. Phys.* **133**, 119-146 (1990).

[34] Soffer A., Weinstein M.I., Multichannel nonlinear scattering for nonintegrable equations II. The case of anisotropic potentials and data, *J. Differ. Equations* **98**, 376-390 (1992).

[35] Soffer A, Weinstein M.I., Resonances, radiation damping and instability in Hamiltonian nonlinear wave equations, *Invent. Math.* **136**, no.1, 9-74 (1999).

[36] Vainberg B.R. On short-wave asymptotic behaviour of solutions of steady-state problems and the asymptotic behaviour as $t \to \infty$ of solutions of time-dependent problems, *Russian Math.Surveys* **30**, no.2, 1-58 (1975)

[37] Vainberg B.R., Behaviour for large time of solutions of the Klein-Gordon equation, *Trans. Mosc. Math. Soc.* **30**, 139-158 (1976).

[38] Weder R.A., Scattering theory for the Klein-Gordon equation, *J. Funct. Anal.* **27** (1978), 100-117.

[39] Weder R.A., The L^p-$L^{p'}$ estimate for the Schrödinger equation on the half-line, *J. Math. Anal. Appl.* **281** (2003), no.1, 233-243.

[40] K. Yajima, The $W^{k,p}$-continuity of wave operators for Schrödinger operators. *J. Math. Soc. Japan* **47** (1995), no. 3, 551–581.