Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulnara ARZHANTSEVA

SS 2018

Überblick: Vorlesung

Einführung in die Grundbegriffe der Diskreten Mathematik

1. Einfache und abzählende Kombinatorik: Stichproben, Permutationen, Partitionen
2. Erzeugende Funktionen, Lösen von Rekursionen
3. Das Prinzip der Inklusion und Exklusion, Suchen und Sortieren
4. Graphen und Netzwerke

Erinnerung: Average–Case Analyse

Für praktische Anwendungen ist es meist von größerer Bedeutung, die durchschnittliche Dauer eines Algorithmus zu bestimmen: Das Average–Case Analyse eines Algorithmus.

Gegeben ist ein q–Baum $\mathbf{W}$ mit n Blättern, die mit $1, 2, \ldots, n$ nummeriert sind. Jedem Blatt i ist eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(i)$ zugeordnet; mit $0 \leq \mathbf{P}(i) \leq 1$ und $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(i) = 1$. Sei $\ell(i)$ die Länge des Blattes i, dann interessiert uns die erwartete Länge der Blätter des Baumes $\mathbf{W}$, die wir mit $\overline{L}(\mathbf{W})$ bezeichnen:

$$\overline{L}(\mathbf{W}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(i)\,\ell(i)\,.$$

Wie klein kann $\overline{L}(\mathbf{W})$ werden, wenn $\mathbf{W}$ alle möglichen q–Bäume mit n Blättern durchläuft?

Erinnerung: Hauptsatz der Informationstheorie

Satz: Hauptsatz der Informationstheorie

Sei $n \geq 1$, $q \geq 2$, und sei $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ mit $p_i < 1$ für alle i eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Blättern von q–Bäumen $\mathbf{W}$ mit n Blättern. Dann gilt

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_q p_i \leq \min_{\mathbf{W}} \overline{L}(\mathbf{W}) < -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_q p_i + 1,$$

wobei $0 \log_q 0$ als 0 zu interpretieren ist.

Erinnerung: Hauptsatz der Informationstheorie: Optimale Beispiel

Der Hauptsatz der Informationstheorie gibt eine untere Schranke für die erwartete Laufzeit eines Suchalgorithmus.

Nun diskutieren wir den eleganten Huffman–Algorithmus, mit dem ein q–Baum konstruiert wird, der einem Suchalgorithmus mit der minimalen erwarteten Laufzeit entspricht.

Suchen: Optimale q-Baum

Sei $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n \geq 0$ sei.

Bezeichnen wir das Minimum über alle möglichen q–Bäume $\mathbf{W}$ mit n Blättern, die die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ haben, mit $\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, also

$$\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n) := \min_{\mathbf{W}} \overline{L}\,(\mathbf{W})\,.$$

Wir suchen einen q–Baum $\mathbf{W}_0$, der dieses Minimum erreicht, das heißt

$$\overline{L}(\mathbf{W}_0) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ell\,(i) = \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Wir sagen dann, daß $\mathbf{W}_0$ optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ist.

Suchen: Optimale q-Baum

(1) Wir können uns auf den Fall beschränken, daß $(q-1) \mid (n-1)$ gilt:

Denn wenn $n-1 = k(q-1) - a$ ist $1 \leq a < q-1$, dann hängt man a Blätter, denen die Wahrscheinlichkeit 0 zugeordnet ist, an innere Knoten des Baumes $\mathbf{W}_0$ an.

Das ist möglich, denn wenn $(q-1) \nmid (n-1)$ gilt, dann kann gemäß (Lemma: vollständiger q–Baum) der q–Baum nicht vollständig sein, und es gibt also ungesättigte innere Knoten, wo die Blätter angehängt werden können.

Der so entstehende erweiterte q–Baum $\mathbf{W}_1$ muß aber keineswegs schon vollständig sein.

Suchen: Optimale q-Baum

Es ist $\mathbf{W}_0$ genau dann optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, wenn $\mathbf{W}_1$ optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{a \text{ Nullen}})$ ist.

Suchen: Optimale q-Baum

Es ist $\mathbf{W}_0$ genau dann optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, wenn $\mathbf{W}_1$ optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{a \text{ Nullen}})$ ist.

Denn sei $\mathbf{W}_0$ optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Dann gilt einerseits:

$$\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \overline{L}(\mathbf{W}_0) = \overline{L}(\mathbf{W}_1) \geq \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0).$$

Nun sei $\mathbf{W}_2$ ein Baum, der optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0)$ sei. Sei $\mathbf{W}_3$ der Baum, der aus $\mathbf{W}_2$ durch Entfernen der a Blätter mit Wahrscheinlichkeit 0 entsteht. Dann gilt also andrerseits:

$$\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0) = \overline{L}(\mathbf{W}_2) = \overline{L}(\mathbf{W}_3) \geq \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Suchen: Optimale q-Baum

Es ist $\mathbf{W}_0$ genau dann optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, wenn $\mathbf{W}_1$ optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{a \text{ Nullen}})$ ist.

Denn sei $\mathbf{W}_0$ optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Dann gilt einerseits:

$$\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \overline{L}(\mathbf{W}_0) = \overline{L}(\mathbf{W}_1) \geq \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0).$$

Nun sei $\mathbf{W}_2$ ein Baum, der optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0)$ sei. Sei $\mathbf{W}_3$ der Baum, der aus $\mathbf{W}_2$ durch Entfernen der a Blätter mit Wahrscheinlichkeit 0 entsteht. Dann gilt also andrerseits:

$$\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0) = \overline{L}(\mathbf{W}_2) = \overline{L}(\mathbf{W}_3) \geq \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Die beiden Ungleichungen besagen zusammen

$$\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0), \tag{1}$$

d.h., $\mathbf{W}_1$ ist optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0)$.

Suchen: Optimale q-Baum

Falls nun umgekehrt $\mathbf{W}_1$ optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0)$ ist, dann gilt

$$\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0) = \overline{L}(\mathbf{W}_1) = \overline{L}(\mathbf{W}_0) \geq \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Wegen (1) folgt aber dann, daß $\mathbf{W}_0$ optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ist.

Suchen: Optimale q-Baum

(2) Sei $\ell(i)$ die Länge des Blattes, das Wahrscheinlichkeit p_i hat. Wenn $\mathbf{W}_0$ optimal ist, dann muß $\ell(1) \leq \ell(2) \leq \cdots \leq \ell(n)$ gelten.

Suchen: Optimale q-Baum

(2) Sei $\ell(i)$ die Länge des Blattes, das Wahrscheinlichkeit p_i hat. Wenn $\mathbf{W}_0$ optimal ist, dann muß $\ell(1) \leq \ell(2) \leq \cdots \leq \ell(n)$ gelten.
Denn wenn es Indices $i < j$ gibt mit $\ell(i) > \ell(j)$ und $p_i > p_j$, dann betrachten wir den q–Baum $\mathbf{W}_1$, der genauso wie $\mathbf{W}_0$ aussieht, wo aber die Wahrscheinlichkeiten p_i und p_j vertauscht wurden. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\overline{L}(\mathbf{W}_1) &= p_i\ell(j) + p_j\ell(i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} p_k\ell(k) \\
&= -p_i\ell(i) - p_j\ell(j) + p_i\ell(j) + p_j\ell(i) + \sum_{k=1}^{n} p_k\ell(k) \\
&= \overline{L}(\mathbf{W}_0) - \left(p_i - p_j\right)\left(\ell(i) - \ell(j)\right) \\
&< \overline{L}(\mathbf{W}_0),
\end{aligned}
$$

und somit wäre $\mathbf{W}_0$ nicht optimal, ein Widerspruch.

Suchen: Optimale q-Baum

(3) Wir können uns darauf beschränken, daß $\mathbf{W}_0$ vollständig ist.

Denn sei L die maximale Blattlänge in $\mathbf{W}_0$. Angenommen, es gibt in $\mathbf{W}_0$ einen inneren Knoten u mit $\ell(u) \leq L - 2$, von dem weniger als q Kanten "nach unten" verzweigen. Dann können wir irgendein Blatt mit Länge L samt der zugehörigen Kante nehmen und an u anhängen. Wir erhalten so einen Baum $\mathbf{W}_1$ mit $\overline{L}(\mathbf{W}_1) \leq \overline{L}(\mathbf{W}_0)$.

Suchen: Optimale q-Baum

(3) Wir können uns darauf beschränken, daß $\mathbf{W}_0$ vollständig ist.

Denn sei L die maximale Blattlänge in $\mathbf{W}_0$. Angenommen, es gibt in $\mathbf{W}_0$ einen inneren Knoten u mit $\ell(u) \leq L - 2$, von dem weniger als q Kanten "nach unten" verzweigen. Dann können wir irgendein Blatt mit Länge L samt der zugehörigen Kante nehmen und an u anhängen. Wir erhalten so einen Baum $\mathbf{W}_1$ mit $\overline{L}(\mathbf{W}_1) \leq \overline{L}(\mathbf{W}_0)$.

Also können wir voraussetzen, daß alle inneren Knoten in Niveaux $\leq L - 2$ gesättigt sind. Sei I die Menge der (sämtlich gesättigten) inneren Knoten u mit $\ell(u) \leq L - 2$, und sei J die Menge der inneren Knoten u mit $\ell(u) = L - 1$.

Suchen: Optimale q-Baum

Die Gesamtzahl der Knoten ist dann einerseits $|I| + |J| + n$.

Andrerseits können wir die Anzahl der Knoten auch so bestimmen: Alle Knoten in I haben je q unmittelbare "Nachfolger" (das sind die anderen Endknoten der q Kanten, die nach unten verzweigen), für die Knoten $j \in J$ bezeichne n_j die Anzahl der entsprechenden Nachfolger. Die Gesamtzahl der Knoten ist daher auch

$$1 + q\,|I| + \sum_{j \in J} n_j.$$

Der Term 1 zählt die Wurzel.

Suchen: Optimale q-Baum

Wenn wir die beiden Abzählformeln gleichsetzen erhalten wir

$$(n-1) - |I|\,(q-1) = \sum_{j \in J} (n_j - 1).$$

Aus $(q-1) \mid (n-1)$ folgt

$$(q-1) \,\Big|\, \sum_{j \in J} (n_j - 1). \tag{2}$$

Suchen: Optimale q-Baum

Wir verteilen nun die Blätter der Länge L so um, daß möglichst viele innere Knoten im Niveau $L - 1$ gesättigt sind.

Das heißt, wir nehmen Blätter der Länge L von ungesättigten inneren Knoten der Länge $L - 1$ weg und hängen sie an andere solche Knoten an (ohne allerdings neue Blätter zu erzeugen; d.h., jeder innere Knoten vom Niveau $L - 1$ muß mindestens ein Blatt behalten).

Suchen: Optimale q-Baum

Wir verteilen nun die Blätter der Länge L so um, daß möglichst viele innere Knoten im Niveau $L - 1$ gesättigt sind.

Das heißt, wir nehmen Blätter der Länge L von ungesättigten inneren Knoten der Länge $L - 1$ weg und hängen sie an andere solche Knoten an (ohne allerdings neue Blätter zu erzeugen; d.h., jeder innere Knoten vom Niveau $L - 1$ muß mindestens ein Blatt behalten).

Es ist klar, daß wir so folgende Situation erreichen können: Im Niveau $L - 1$ gibt es

- eine gewisse Anzahl von gesättigten inneren Knoten,
- möglicherweise einen inneren Knoten, an dem a Blätter hängen; $2 \leq a < q$,
- und an allen weiteren inneren Knoten hängt genau ein Blatt.

Aus der Teilbarkeitsrelation (2) folgt aber sofort, daß es keinen inneren Knoten im Nivau $L - 1$ geben kann, an dem $2 \leq a < q$ Blätter hängen.

Suchen: Optimale q-Baum

Nun entfernen wir für jeden inneren Knoten im Niveau $L - 1$, an dem nur ein Blatt hängt, eben dieses Blatt, und machen ihn dadurch selbst zu einem neuen Blatt, dem wir dieselbe Wahrscheinlichkeit geben wie dem gerade entfernten Blatt:

Entweder sinkt die durchschnittliche Blattlänge oder sie bleibt gleich (falls die zugehörigen Wahrscheinlichkeit gleich 0). Der neue, nunmehr vollständige q–Baum ist daher mindestens ebenso "gut" wie der ursprüngliche $\mathbf{W}_0$.

Suchen: Optimale q-Baum

Unsere Zwischenbilanz sieht also so aus: Bei der Suche nach einem optimalen q–Baum für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

- können wir uns auf vollständige q–Bäume beschränken;
- wenn wir die Wahrscheinlichkeiten absteigend anordnen,

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n \geq 0,$$

und das Blatt mit Wahrscheinlichkeit p_i mit b_i bezeichnen, dann gilt in einem optimalen Baum

$$\ell(b_1) \leq \ell(b_2) \leq \cdots \leq \ell(b_n).$$

Insbesondere müssen die “letzten” Blätter $b_{n-q+1}, \ldots, b_{n-1}, b_n$ allesamt die maximale Blattlänge L haben.

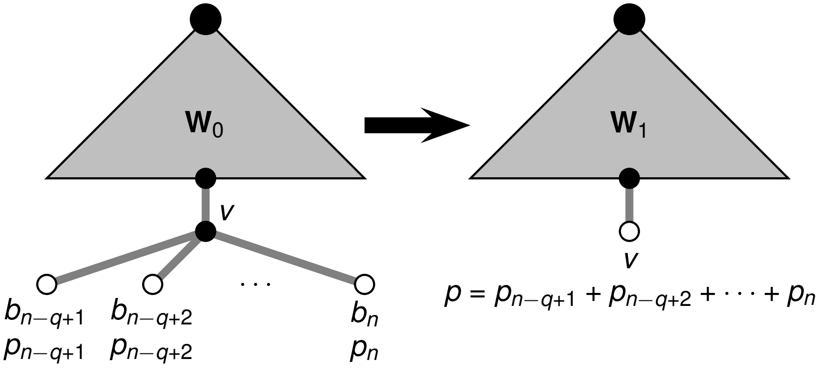
Suchen: Optimale q-Baum

Nach diesen Vorarbeiten können wir nun den Reduktionsschritt formulieren, der die Grundlage für den Huffman–Algorithmus ist:

Sei $\mathbf{W}_0$ ein vollständiger Baum, der optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ist, und sei v der Knoten, an dem die “letzten” Blätter $b_{n-q+1}, \ldots, b_{n-1}, b_n$ (mit maximaler Länge L) hängen.

Reductionsschritt (aus Skriptum)

Wir bilden nun den neuen Baum $\mathbf{W}_1$, der aus $\mathbf{W}_0$ durch Entfernen dieser q Blätter entsteht. Durch das Entfernen der q Blätter wird v zu einem neuen Blatt in $\mathbf{W}_1$; wir teilen diesem die Wahrscheinlichkeit $p = p_{n-q+1} + \cdots + p_{n-1} + p_n$ zu.



Suchen: Optimale q-Baum

Es gilt

$$\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_{n-q}, p) \leq \overline{L}(\mathbf{W}_1) = \overline{L}(\mathbf{W}_0) - pL + p(L-1) = \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n) - p. \qquad (3)$$

Suchen: Optimale q-Baum

Es gilt

$$\begin{aligned}\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_{n-q}, p) &\leq \overline{L}(\mathbf{W}_1) \\ &= \overline{L}(\mathbf{W}_0) - pL + p(L-1) \\ &= \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n) - p. \qquad (3)\end{aligned}$$

Sei umgekehrt $\mathbf{U}_1$ ein vollständiger q–Baum mit $n - q + 1$ Blättern, der optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_{n-q}, p)$ ist. Sei u das Blatt, dessen Wahrscheinlichkeit p ist. Wir hängen an dieses q neue Knoten an und geben ihnen die Wahrscheinlichkeiten $p_{n-q+1}, \ldots, p_{n-1}, p_n$. Dadurch entsteht der neue Baum $\mathbf{U}_0$. (Wir lesen also gewissermaßen die obige Graphik "von rechts nach links".)

Suchen: Optimale q-Baum

Wenn wir die Länge von u in $\mathbf{U}_1$ mit $\ell(u)$ bezeichnen, dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n) &\leq \overline{L}(\mathbf{U}_0) \\ &= \overline{L}(\mathbf{U}_1) - p\,\ell(u) + p(\ell(u) + 1) \\ &= \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_{n-q}, p) + p. \end{aligned} \tag{4}$$

Durch Kombination von (3) und (4) folgt

$$\overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \overline{L}(p_1, p_2, \ldots, p_{n-q}, p) + p,$$

außerdem gilt in den obigen Ungleichungen überall Gleichheit. Insbesondere ist $\mathbf{W}_0$ genau dann optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, wenn $\mathbf{W}_1$ optimal für $(p_1, p_2, \ldots, p_{n-q}, p)$ ist.

Algorithmus von Huffman

Gegeben ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$; o.B.d.A. können wir $p_1 \geq \cdots \geq p_n$ annehmen.

Algorithmus von Huffman

Gegeben ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$; o.B.d.A. können wir $p_1 \geq \cdots \geq p_n$ annehmen.

Wenn $n - 1$ nicht durch $q - 1$ teilbar ist, also $n - 1 = (q - 1)\,k + r$ für $1 \leq r < q$, dann ergänzen wir $q - r - 1$ Wahrscheinlichkeiten 0 und können also ab jetzt $(q - 1) \mid (n - 1)$ annehmen.

Algorithmus von Huffman

Gegeben ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$; o.B.d.A. können wir $p_1 \geq \cdots \geq p_n$ annehmen.

Wenn $n - 1$ nicht durch $q - 1$ teilbar ist, also $n - 1 = (q - 1)\,k + r$ für $1 \leq r < q$, dann ergänzen wir $q - r - 1$ Wahrscheinlichkeiten 0 und können also ab jetzt $(q - 1) \mid (n - 1)$ annehmen.

Nun fassen wir die q kleinsten Wahrscheinlichkeiten $p_{n-q+1}, \ldots, p_{n-1}, p_n$ zu $p = p_{n-q+1} + \cdots + p_{n-1} + p_n$ zusammen und erhalten so die neue Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p_1, p_2, \ldots, p_{n-q}, p)$, die wir absteigend ordnen.

Algorithmus von Huffman

Diesen Schritt wiederholen wir solange, bis “alles zusammengefaßt” ist (d.h., wir sind bei der trivialen Wahrscheinlichkeitsverteilung ($p_1 = 1$) angelangt).

Wenn wir die Schritte in umgekehrter Reihenfolge ansehen, ergibt sich ein q–Baum. Jene Blätter, die den möglicherweise am Anfang hinzugefügten Wahrscheinlichkeiten 0 entsprechen, werden zum Schluß wieder entfernt.

Der so erhaltene Baum ist ein optimaler Baum für $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Algorithmus von Huffman: Beispiel

Es sei $n = 8$, $q = 3$, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung sei

$$\left(\frac{22}{100}, \frac{22}{100}, \frac{17}{100}, \frac{16}{100}, \frac{15}{100}, \frac{3}{100}, \frac{3}{100}, \frac{2}{100}\right).$$

Wir werden der Einfachheit halber die Nenner meist nicht anschreiben.

Zunächst überprüfen wir, ob die Bedingung $(q - 1) \mid (n - 1)$ erfüllt ist: 2 teilt 7 nicht, daher ergänzen wir eine 0, sodaß die neue Verteilung $(22, 22, 17, 16, 15, 3, 3, 2, 0)$ ist.

Die $q = 3$ kleinsten Wahrscheinlichkeiten werden nun zusammengefasst. Ihre Summe ist $0 + 2 + 3 = 5$.

Algorithmus von Huffman: Beispiel

Die reduzierte Verteilung (wieder absteigend geordnet) ist also

$$(22, 22, 17, 16, 15, 5, 3).$$

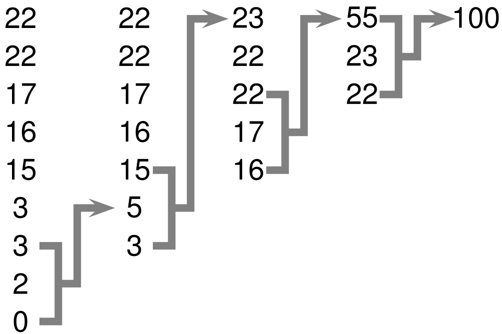
Wir fassen wieder die drei kleinsten Wahrscheinlichkeiten zusammen. Ihre Summe ist $3 + 5 + 15 = 23$.

Die reduzierte Verteilung ist dann $(23, 22, 22, 17, 16)$.

Die nächste Reduktion ergibt $(55, 23, 22)$.

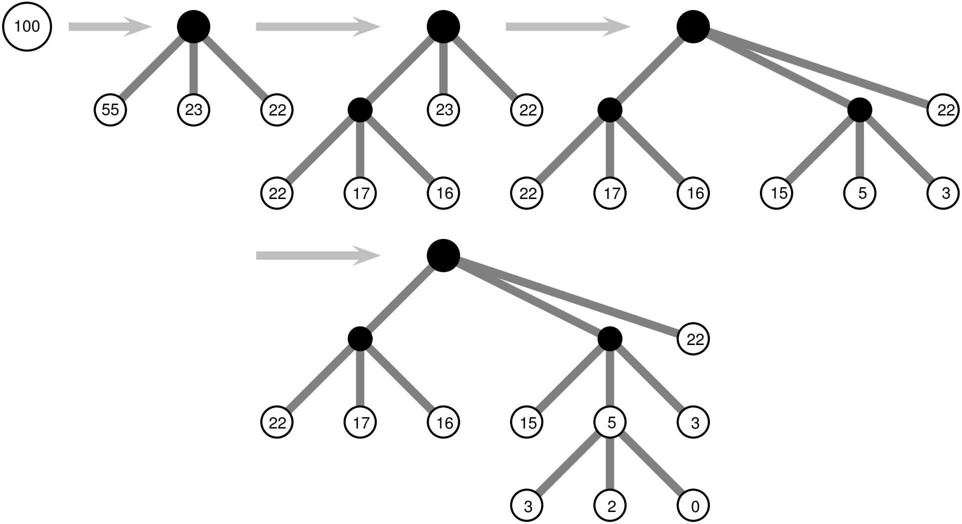
Nun bleibt nur noch eine Reduktion, die zu der trivialen Verteilung (100) führt.

Algorithmus von Huffman: Beispiel (aus Skriptum)



Liest man diese Graphik von rechts nach links, dann baut sich der folgende Baum auf:

Algorithmus von Huffman: Beispiel (aus Skriptum)



Algorithmus von Huffman: Beispiel

Die minimal mögliche erwartete Blattlänge ist daher im vorliegenden Fall

$$\overline{L} = \frac{1}{100}(1 \cdot 22 + 2 \cdot (22 + 17 + 16 + 15 + 3) + 3 \cdot (3 + 2)) = \frac{183}{100} = 1.83\,.$$

Die untere Schranke aus dem Hauptsatz der Informationstheorie ist dagegen

$$-\frac{22}{100}\log_3\frac{22}{100} - \frac{22}{100}\log_3\frac{22}{100} - \frac{17}{100}\log_3\frac{17}{100} - \frac{16}{100}\log_3\frac{16}{100}$$
$$-\frac{15}{100}\log_3\frac{15}{100} - \frac{3}{100}\log_3\frac{3}{100} - \frac{3}{100}\log_3\frac{3}{100} - \frac{2}{100}\log_3\frac{2}{100} \sim 1.67\ldots.$$

Man beachte weiters, daß die Länge des 3–Baumes, den wir eben ermittelt haben, gleich 3 ist — der 3–Baum ist also nicht optimal im Sinne der Worst Case Analyse denn $\lceil \log_3 8 \rceil = 2$.

Vorlesung:

Einführung in die Grundbegriffe der Diskreten Mathematik

1. Einfache und abzählende Kombinatorik: Stichproben, Permutationen, Partitionen
2. Erzeugende Funktionen, Lösen von Rekursionen
3. Das Prinzip der Inklusion und Exklusion, Suchen und Sortieren
4. Graphen und Netzwerke

Prüfung:

Schriftliche Prüfung – Dauer 90 Minuten:

- (1) 28.06.2018, 09.30-11.00

  (2) 28.09.2018, 09.30-11.00 (3) _.01.2019
- Eine genaue lesbare Präsentation der Antworten und Lösungen ist erforderlich!
- Begründen Sie Ihre Antworten ausreichend ausführlich!
- Skriptum / Taschenrechner / Handy / etc. werden nicht zugelassen.

Prüfung:

Schriftliche Prüfung – Dauer 90 Minuten:

- (1) 28.06.2018, 09.30-11.00

  (2) 28.09.2018, 09.30-11.00 (3) _.01.2019
- Eine genaue lesbare Präsentation der Antworten und Lösungen ist erforderlich!
- Begründen Sie Ihre Antworten ausreichend ausführlich!
- Skriptum / Taschenrechner / Handy / etc. werden nicht zugelassen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!