

Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulmara ARZHANTSEVA

SS 2018



universität
wien

Beispiel aus der Zahlentheorie

Wir wollen in der Menge $[60] = \{1, 2, \dots, 59, 60\}$ jene Zahlen bestimmen, die relativ prim zu 60 sind.

Dazu betrachten wir die **Primfaktoren** von 60 (das sind die Zahlen 2, 3 und 5) und bilden die Mengen der entsprechenden Vielfachen zwischen 1 und 60, also

$$\mathbf{M}_2 = \{2, 4, 6, \dots, 58, 60\},$$

$$\mathbf{M}_3 = \{3, 6, 9, \dots, 57, 60\},$$

$$\mathbf{M}_5 = \{5, 10, 15, \dots, 55, 60\}.$$

Die Menge S der gesuchten Zahlen ergibt sich dann als

$$S = [60] \setminus (\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_5) = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59\}.$$

Beispiel aus der Zahlentheorie

Wenn wir nur an der **Kardinalität** $|S| = 16$ von S interessiert sind, könnten wir wie folgt beginnen:

$$|S| = |[60] \setminus (\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_5)| \stackrel{?}{=} 60 - |\mathbf{M}_2| - |\mathbf{M}_3| - |\mathbf{M}_5|.$$

Das Fragezeichen über dem zweiten Gleichheitszeichen deutet an, daß das so nicht stimmt: Denn für jeden Teiler d von 60 gilt

$$|\mathbf{M}_d| = 60/d,$$

und

$$60 - 60/2 - 60/3 - 60/5 = -2.$$

Der Fehler rührt daher, daß ja z.B. die Zahl 6 in \mathbf{M}_2 **und** \mathbf{M}_3 enthalten ist: **Alle** Zahlen in $\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_6$ (und ebenso alle Zahlen in $\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_5 = \mathbf{M}_{10}$ und in $\mathbf{M}_3 \cap \mathbf{M}_5 = \mathbf{M}_{15}$) sind also **zweimal** weggezählt worden.

Beispiel aus der Zahlentheorie

Wir müßten obiges daher wie folgt korrigieren:

$$\begin{aligned} |S| &\stackrel{?}{=} 60 - |M_2| - |M_3| - |M_5| + |M_6| + |M_{10}| + |M_{15}| \\ &= 60 - 60/2 - 60/3 - 60/5 + 60/6 + 60/10 + 60/15 = 18. \end{aligned}$$

Das ist noch immer falsch: Denn die Zahlen 30 und 60 sind ja ursprünglich **dreimal** weggezählt worden, nun aber **dreimal** wieder dazugezählt worden! Richtig lautet die Rechnung also:

$$\begin{aligned} |S| &= 60 - |M_2| - |M_3| - |M_5| + |M_6| + |M_{10}| + |M_{15}| - |M_{30}| \\ &= 60 - 60/2 - 60/3 - 60/5 + 60/6 + 60/10 + 60/15 - 60/30 \\ &= 16. \end{aligned}$$

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\text{surj}(k, n)|$

$|\text{surj}(k, n)|$ = die Anzahl **aller** Funktionen $|\text{abb}(k, n)| = n^k$ **minus** die Anzahl der **“nicht-surjektiven”** Funktionen.

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\text{surj}(k, n)|$

$|\text{surj}(k, n)|$ = die Anzahl **aller** Funktionen $|\text{abb}(k, n)| = n^k$ **minus** die Anzahl der **“nicht-surjektiven”** Funktionen.

Eine “nicht-surjektive” Funktion nimmt (mindestens) ein Element $i \in [n]$ **nicht** als Wert an, und jede solche Funktion können wir als Element in $\text{abb}([k], [n] \setminus \{i\})$ deuten.

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\text{surj}(k, n)|$

$|\text{surj}(k, n)|$ = die Anzahl **aller** Funktionen $|\text{abb}(k, n)| = n^k$ **minus** die Anzahl der **“nicht-surjektiven”** Funktionen.

Eine “nicht-surjektive” Funktion nimmt (mindestens) ein Element $i \in [n]$ **nicht** als Wert an, und jede solche Funktion können wir als Element in $\text{abb}([k], [n] \setminus \{i\})$ deuten.

Für die Anzahl solcher Funktionen gilt natürlich (unabhängig von i)

$$|\text{abb}([k], [n] \setminus \{i\})| = |\text{abb}(k, n - 1)| = (n - 1)^k.$$

Dann gilt (?):

$$|\text{surj}(k, n)| = n^k - \sum_{i=1}^n |\text{abb}([k], [n] \setminus \{i\})| = n^k - n \cdot (n - 1)^k.$$

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\text{surj}(k, n)|$

Aber wir haben Funktionen, die **zwei** verschiedene Elemente $\{i, j\} \subseteq [n]$ **nicht** als Wert annehmen, **doppelt** weggezählt. Dann gilt (?):

$$|\text{surj}(k, n)| = n^k - \sum_{i=1}^n |\text{abb}([k], [n] \setminus \{i\})| + \sum_{\{i,j\} \in [n]} |\text{abb}([k], [n] \setminus \{i, j\})|,$$

wobei

$$\sum_{\{i,j\} \in [n]} |\text{abb}([k], [n] \setminus \{i, j\})| = \binom{n}{2} \cdot (n-2)^k.$$

Aber wir haben Funktionen, die **drei** verschiedene Elemente $\{i, j, l\}$ **nicht** als Wert annehmen, **dreimal** dazuzählen (je einmal für $\{i, j\}$, $\{i, l\}$ und $\{j, l\}$) — diese wurden aber schon im ersten Schritt dreimal weggezählt (je einmal für i, j und l);

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\text{surj}(k, n)|$

Dann gilt (?):

$$|\text{surj}(k, n)| = n^k - \sum_{i=1}^n |\text{abb}([k], [n] \setminus \{i\})| + \sum_{\{i,j\} \in [n]} |\text{abb}([k], [n] \setminus \{i,j\})| - \sum_{\{i,j,l\} \in [n]} |\text{abb}([k], [n] \setminus \{i,j,l\})|,$$

wobei

$$\sum_{\{i,j\} \in [n]} |\text{abb}([k], [n] \setminus \{i,j,l\})| = \binom{n}{3} \cdot (n-3)^k.$$

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\text{surj}(k, n)|$

sie sind also “netto” in

$$n^k - n \cdot (n-1)^k + \binom{n}{2} \cdot (n-2)^k$$

wieder vorhanden und müßten im dritten Schritt nach derselben Logik neuerlich weggezählt werden:

$$\binom{n}{0} n^k - \binom{n}{1} \cdot (n-1)^k + \binom{n}{2} \cdot (n-2)^k - \binom{n}{3} \cdot (n-3)^k, \text{ etc.}$$

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\text{surj}(k, n)|$

Vermutung: Die Anzahl der surjektiven Funktionen von $[k]$ nach $[n]$ ist für $k \geq n$

$$|\text{surj}(k, n)| = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k. \quad (1)$$

(Für $k < n$ ist die Anzahl natürlich 0.)

Wir wissen schon, daß

$$|\text{surj}(k, n)| = n! \cdot S_{k,n}.$$

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\text{surj}(k, n)|$

Vermutung: Die Anzahl der surjektiven Funktionen von $[k]$ nach $[n]$ ist für $k \geq n$

$$|\text{surj}(k, n)| = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k. \quad (1)$$

(Für $k < n$ ist die Anzahl natürlich 0.)

Wir wissen schon, daß

$$|\text{surj}(k, n)| = n! \cdot S_{k,n}.$$

Wenn wir k und n vertauschen, so folgt daraus eine Formel für die Stirling-Zahlen zweiter Art:

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n. \quad (2)$$

Die Vermutung ist ein Sonderfall eines allgemeinen Prinzips.

Prinzip der Inklusion–Exklusion

Satz: Inklusion–Exklusion

Sei S eine Menge, sei T_1, \dots, T_m eine Familie von Teilmengen (nicht notwendig disjunkt!) von S . Dann gilt:

$$\left| S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m T_i \right) \right| = |S| + \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{\substack{A \subseteq [m] \\ |A|=k}} \left| \bigcap_{i \in A} T_i \right|. \quad (3)$$

Prinzip der Inklusion–Exklusion

Satz: Inklusion–Exklusion

Sei S eine Menge, sei T_1, \dots, T_m eine Familie von Teilmengen (nicht notwendig disjunkt!) von S . Dann gilt:

$$\left| S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m T_i \right) \right| = |S| + \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{\substack{A \subseteq [m] \\ |A|=k}} \left| \bigcap_{i \in A} T_i \right|. \quad (3)$$

Oder (die **rechte** Seite):

$$\begin{aligned} & |S| \\ & - |T_1| - |T_2| - \dots - |T_m| \quad \leftarrow k=1 \\ & + |T_1 \cap T_2| + |T_1 \cap T_3| + \dots + |T_1 \cap T_m| + |T_2 \cap T_3| + \dots \quad \leftarrow k=2 \\ & - |T_1 \cap T_2 \cap T_3| - |T_1 \cap T_2 \cap T_4| - \dots \quad \leftarrow k=3 \\ & + |T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4| + |T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_5| + \dots \quad \leftarrow k=4 \end{aligned}$$

Prinzip der Inklusion–Exklusion

Satz: Inklusion–Exklusion

Sei S eine Menge, sei T_1, \dots, T_m eine Familie von Teilmengen (nicht notwendig disjunkt!) von S . Dann gilt:

$$\left| S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m T_i \right) \right| = |S| + \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{\substack{A \subseteq [m] \\ |A|=k}} \left| \bigcap_{i \in A} T_i \right|. \quad (4)$$

Oder unter Verwendung der Summennotation:

$$|S| - \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 \leq m} |T_{i_1}|}_{k=1} + \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |T_{i_1} \cap T_{i_2}|}_{k=2} - \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} |T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap T_{i_3}|}_{k=3} + \dots$$

Oder in Worten: Von der Kardinalität von S werden die Kardinalitäten der k -fachen Durchschnitte der Mengen T_i alternierend subtrahiert/addiert.

Prinzip der Inklusion–Exklusion

Beweis: Überlegen wir uns, wie oft ein Element $x \in S$ in der rechten Seite von (4) gezählt wird.

Es ist klar, daß jedes Element im Komplement $S \setminus (\bigcup_{i=1}^m T_i)$ genau **einmal** (nämlich durch den ersten Summanden $|S|$) gezählt wird.

Sei nun ein x **genau** in den $k \geq 1$ Teilmengen $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k}$ enthalten (also in **keinem anderen** T_j). Dann wird x durch den ersten Term ($|S|$) einmal dazugezählt, dann k -mal abgezogen (je einmal für $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k}$), dann $\binom{k}{2}$ -mal dazugezählt (je einmal für $T_{i_1} \cap T_{i_2}, T_{i_1} \cap T_{i_3}, \dots, T_{i_{m-1}} \cap T_{i_m}$), und so weiter. Insgesamt wird x also genau

$$1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0$$

mal gezählt. ■

Die Anzahl der surjektiven Funktionen $|\text{surj}(k, n)|$

Vermutung: Die Anzahl der surjektiven Funktionen von $[k]$ nach $[n]$ ist für $k \geq n$

$$|\text{surj}(k, n)| = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k.$$

Beweis: Die Richtigkeit von (1) ergibt sich also aus dem Prinzip der Inklusion–Exklusion und der Beobachtung, daß die Durchschnitte von l verschiedenen Mengen $T_{i_j} = \text{abb}([k], [n] \setminus \{i_j\})$ immer Kardinalität $(n-l)^k$ haben; **unabhängig** von den konkreten Indizes i_1, \dots, i_l . ■