

Diskrete Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Goulmara ARZHANTSEVA

SS 2018



universität
wien

Der Satz von Menger: s - t -trennende Kantenmenge

Definition: s - t -trennende Kantenmenge

Sei $\mathbf{D}(V, E)$ ein Digraph, und seien s, t zwei verschiedene Knoten in \mathbf{D} . Dann heißt eine Teilmenge $C \subseteq E$ von Kanten mit der Eigenschaft, daß **jeder** Weg von s nach t (mindestens) eine Kante aus C enthält, eine **s - t -trennende Kantenmenge**.

Satz von Menger

Satz von Menger

Sei \mathbf{D} ein Digraph und seien s, t zwei verschiedene Knoten in \mathbf{D} .

Dann ist die **maximale** Anzahl von **paarweise kantendisjunkten Wegen** (d.h., keine zwei Wege haben eine **Kante** gemeinsam) von s nach t gleich der **minimalen** Kardinalität einer **s - t -trennenden Kantenmenge**.

Satz von Menger: Beweis

Beweis: Wir machen aus dem Digraphen ein **Netzwerk**, indem wir s und t als Quelle und Senke auffassen und für die Kanten die ganzzahlige Kapazitätsfunktion $\mathbf{c} \equiv 1$ wählen.

Eine s - t -trennende Kantenmenge ist dann ein Schnitt in diesem Netzwerk, und die **Kapazität** eines solchen Schnittes ist gleich seiner Kardinalität. Sei m also die Kapazität eines minimalen Schnittes = die minimale Anzahl einer s - t -trennenden Kantenmenge.

Es gibt also einen **maximalen Fluß** f der Stärke m in diesem Netzwerk. Der Fluß f ist ganzzahlig (nach 'ganzzahliger Fluß'-Lemma), er nimmt also nur die Werte 0 oder 1 an¹.

¹Wenn wir f als charakteristische Funktion deuten, dann entspricht er einfach einer Teilmenge von Kanten (nämlich jenen mit $f(e) = 1$).

Satz von Menger: Beweis

Wenn es aber einen Fluß der Stärke m gibt, dann gibt es auch m kantendiskjunkte Wege von s nach t , die nur Kanten e mit $f(e) = 1$ benutzen: Dies zeigen wir mit **Induktion nach m** .

Für $m = 0$ ist die Behauptung klar.

Für den Schritt **$m - 1$ auf m** konstruieren wir mithilfe von f zunächst einen Weg von s nach t :

Satz von Menger: Beweis

Wenn es aber einen Fluß der Stärke m gibt, dann gibt es auch m kantendiskjunkte Wege von s nach t , die nur Kanten e mit $f(e) = 1$ benutzen: Dies zeigen wir mit **Induktion nach m** .

Für $m = 0$ ist die Behauptung klar.

Für den Schritt **$m - 1$ auf m** konstruieren wir mithilfe von f zunächst einen Weg von s nach t :

Dazu starten wir in s , verwenden nur Kanten e mit $f(e) = 1$, ohne jemals eine Kante zweimal zu benutzen, und gelangen so schließlich nach t . Damit haben wir zunächst eine Wanderung erhalten, in der Knoten wiederholt auftreten könnten: Zwischen je zwei wiederholten Knoten schneiden wir die dazwischenliegende geschlossene Wanderung heraus und erhalten so schließlich einen Weg p .

Satz von Menger: Beweis

Für alle Kanten von p reduzieren wir den Fluß um 1, damit reduziert sich die Stärke des verbleibenden Flusses auf $m - 1$. Nach Induktion finden wir nun $m - 1$ kantendisjunkte Wege, und der Weg p hat nach Konstruktion keine Kante mit diesen Wegen gemeinsam. ■

Matching, Edge–Cover, bipartiter Graph

Definition: Matching, Edge–Cover, bipartiter Graph

Sei $\mathbf{G}(V, E)$ ein Graph. Ein **Matching** in \mathbf{G} ist eine Familie von paarweise disjunkten Kanten (d.h., keine zwei Kanten im Matching haben einen Knoten gemeinsam).

Ein **Edge–Cover** (eine **Kantenüberdeckung**) in \mathbf{G} ist eine Menge von Knoten mit der Eigenschaft, daß **jede** Kante in \mathbf{G} einen Knoten aus dem Edge–Cover enthält.

Ein Graph $\mathbf{G}(V, E)$ heißt **bipartiter Graph**, wenn seine Knotenmenge in zwei disjunkte Teilmengen A und B zerfällt (eine sogenannte **Bipartition**: $V = A \dot{\cup} B$, also $V = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$), sodaß jede Kante einen Knoten aus A und einen Knoten aus B enthält.

Satz von König

Satz von König

Sei $\mathbf{G} (A \dot{\cup} B, E)$ ein bipartiter Graph. Die **maximale** Kardinalität eines **Matchings** in \mathbf{G} ist gleich der **minimalen** Kardinalität eines **Edge-Cover** in \mathbf{G} .

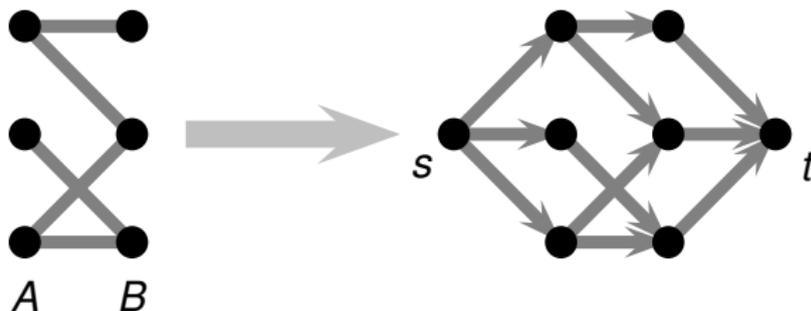
Satz von König: Beweis

Beweis: Wir konstruieren aus \mathbf{G} einen Digraphen \mathbf{D} : Die Knoten von \mathbf{D} seien $A \cup B \cup \{s, t\}$, und die **gerichteten** Kanten von \mathbf{D} seien

- alle Paare (s, a) für $a \in A$,
- alle Paare (a, b) mit $\{a, b\} \in E$, $a \in A$ und $b \in B$,
- alle Paare (b, t) für $b \in B$.

Jeder Weg in \mathbf{D} von s nach t ist von der Form (s, a, b, t) , wobei $a \in A$, $b \in B$ und $\{a, b\} \in E$. Daher entspricht eine Familie von kantendisjunkten Wegen (s, a_i, b_i, t) in \mathbf{D} eindeutig einem Matching in \mathbf{G} , das aus den Kanten $\{a_i, b_i\}$ besteht.

Satz von König: Beweis (aus Skriptum)



Satz von König: Beweis

Jedem Edge-Cover S in \mathbf{G} entspricht eine s - t -trennende Kantenmenge in \mathbf{D} , die aus den Kanten (s, a) für $a \in A \cap S$ und aus den Kanten (b, t) für $b \in B \cap S$ besteht, und umgekehrt entspricht jeder s - t -trennenden Kantenmenge, die nur Kanten enthält, die entweder mit s oder mit t inzident sind, ein Edge-Cover.

Es kann zwar klarerweise noch andere s - t -trennende Kantenmenge in \mathbf{D} geben, aber keine davon kann weniger Kanten enthalten als eine **minimale** s - t -trennende Kantenmenge von obigem Typ (denn wenn eine s - t -trennende Kantenmenge die Kante (a, b) enthält, können wir sie durch (s, a) ersetzen).

Die Behauptung folgt also aus dem Satz von Menger. ■

Repräsentantensystem

Definition: Repräsentantensystem

Seien A_1, \dots, A_n Mengen. Ein **Repräsentantensystem** von A_1, \dots, A_n ist ein n -Tupel (x_1, \dots, x_n) mit den Eigenschaften

- $x_i \in A_i$ für $i = 1, \dots, n$,
- $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.

Satz von Hall

Satz von Hall

Heiratssatz

Seien A_1, \dots, A_n endliche Mengen. Es existiert genau dann ein Repräsentantensystem von A_1, \dots, A_n , wenn für alle Indexmengen $J \subseteq [n]$ gilt:

$$\left| \bigcup_{j \in J} A_j \right| \geq |J|.$$

Satz von Hall: Beweis

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar — in der anschaulichen Interpretation: Jede Menge J von Frauen muß insgesamt zumindest $|J|$ Männer als heiratsfähig erachten, sonst kann es keine n -fache Heirat geben.

Wir konstruieren einen bipartiten Graphen \mathbf{G} , dessen Knotenmenge V in A und B zerfällt, wobei $B = [n]$ und $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$, und dessen Kanten Knoten $i \in A$ und $j \in B$ genau dann verbinden, wenn $i \in A_j$.

Ein Matching in \mathbf{G} ist eine Menge paarweise disjunkter Kanten $\{i, j\}$, d.h., jeder Knoten i liegt in A_j , und die Knoten i sind alle verschieden. Ein **Repräsentantensystem entspricht also einem Matching** der Größe n in \mathbf{G} .

Satz von Hall: Beweis

Die Menge B ist (natürlich) ein Edge-Cover mit $|B| = n$. Wir wollen zeigen: **Jedes** Edge-Cover S hat mindestens n Elemente.

Satz von Hall: Beweis

Die Menge B ist (natürlich) ein Edge-Cover mit $|B| = n$. Wir wollen zeigen: **Jedes** Edge-Cover S hat mindestens n Elemente.

Sei also S **irgendein** Edge-Cover; und sei $J := B \setminus S$. Jeder Knoten in $A(J) := \bigcup_{j \in J} A_j$ ist mit einem Knoten von J durch eine Kante verbunden, daher muß $A(J) \subseteq S$ gelten (sonst wäre S ja kein Edge-Cover). Daher gilt nach Voraussetzung:

$$|S| \geq |B| - |J| + \underbrace{|A(J)|}_{\geq |J|} \geq n.$$

Die Behauptung folgt also aus dem Satz von König. ■

Einbettung von Graphen

Definition: Einbettung von \mathbf{G} in M

Sei M eine **Mannigfaltigkeit**² und \mathbf{G} ein Graph. Eine Abbildung μ , die jedem Knoten v **injektiv** einen Punkt $\mu(v)$ in M zuordnet, und jeder Kante $e = \{v, w\}$ eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = \mu(v)$, $\gamma(1) = \mu(w)$, sodaß die zwei verschiedenen Kanten e_1, e_2 zugeordneten Kurven γ_1, γ_2 höchstens Anfangs- oder Endpunkte gemeinsam haben, heißt eine **Einbettung** von \mathbf{G} in M .

Eine **Kurve** ist eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung von $[0, 1] \rightarrow M$.

²Ein Begriff der Differentialgeometrie: Für unsere Zwecke brauchen wir nur die Ebene \mathbb{R}^2 , den Raum \mathbb{R}^3 sowie die Oberfläche einer Kugel im Raum (Sphäre) und die Oberfläche eines Fahrradschlauchs (Torus).

Einbettung in \mathbb{R}^3

Proposition: Einbettung in \mathbb{R}^3

Jeder Graph \mathbf{G} kann in \mathbb{R}^3 eingebettet werden.

Einbettung in \mathbb{R}^3

Proposition: Einbettung in \mathbb{R}^3

Jeder Graph \mathbf{G} kann in \mathbb{R}^3 eingebettet werden.

Beweis:

Wir betrachten eine beliebige Gerade g in \mathbb{R}^3 und stellen die Knoten von \mathbf{G} als verschiedene Punkte auf g dar. Für jede Kante wählen wir eine Ebene e , die durch g geht (die Ebenen sollen paarweise verschieden sein), und stellen die Kante durch einen Halbkreis in der Ebene dar. ■

Planare Graphen

Definition: planarer Graph

Ein Graph \mathbf{G} , der in die Ebene \mathbb{R}^2 eingebettet werden kann, heißt **planarer Graph**.

Planare Graphen

Definition: planarer Graph

Ein Graph \mathbf{G} , der in die Ebene \mathbb{R}^2 eingebettet werden kann, heißt **planarer Graph**.

Einbettung in die Ebene ist übrigens äquivalent mit Einbettung in die Sphäre (Kugeloberfläche)

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\},$$

Denn die **stereographische Projektion** liefert eine differenzierbare Bijektion zwischen der Sphäre ohne den “Nordpol” $(0, 0, 1)$ und dem \mathbb{R}^2 .

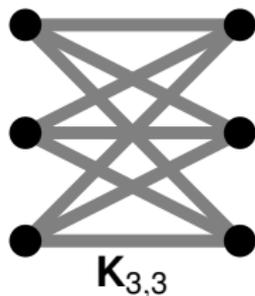
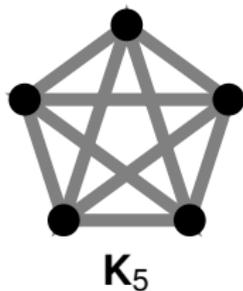
Vollständige bipartite Graph

Definition: Vollständige bipartite Graph

Sei $A \dot{\cup} B$ eine Bipartition von V mit $|A| = n$, $|B| = m$. Der **vollständige bipartite Graph** $\mathbf{K}_{n,m}$ ist der **einfache bipartite Graph** auf $V = A \dot{\cup} B$, der dadurch definiert ist, daß er **alle** Kanten besitzt, die möglich sind; es gilt also $E(\mathbf{K}_{n,m}) = \{\{a, b\} : a \in A, b \in B\}$.

Beispiel: Vollständigen Graphen (aus Skriptum)

Nach ein bißchen Herumprobieren hat man sich schnell überzeugt:
Der vollständige Graph K_5 und der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$
sind **nicht** planar (siehe dazu auch Korollar unten).



Unterteilung

Definition: Unterteilung

Wenn man in einem Graphen \mathbf{G} beliebig oft **Kanten** durch einen neuen Knoten **unterteilt** (d.h., aus der ursprünglichen Kante $\{v_1, v_2\}$ werden zwei neue $\{v_1, v_{\text{neu}}\}$, $\{v_{\text{neu}}, v_2\}$; alles andere bleibt unverändert), so nennt man das Ergebnis eine **Unterteilung** (englisch: **Subdivision**) von \mathbf{G} .

Klarerweise ist jede Unterteilung eines Graphen \mathbf{G} genau dann planar, wenn \mathbf{G} selbst planar ist.

Satz von Kuratowski

Satz von Kuratowski

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er **keine** Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ als Teilgraph hat.

Planare Graphen: Fläche

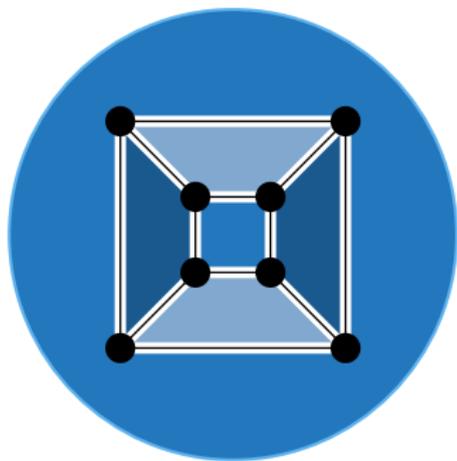
Definition: Fläche

Sei \mathbf{G} ein zusammenhängender planarer Graph mit einer Einbettung μ in die Ebene \mathbb{R}^2 :

Wenn diese Einbettung aus der Ebene entfernt wird (d.h., man betrachtet $\mathbb{R}^2 \setminus \mu(\mathbf{G})$), bleibt eine endliche Menge von zusammenhängenden “Stücken” über; eines davon ist unbeschränkt, alle anderen sind **topologisch äquivalent** zu einer Kreisscheibe: Diese “Stücke” werden **Flächen** genannt.

Beispiel: Flächen (aus Skriptum)

Die folgende Graphik zeigt die Einbettung eines Graphs mit 8 Knoten und 12 Kanten; die Einbettung hat 6 Flächen (die unbeschränkte Fläche ist “alles außerhalb des äußeren Quadrats”).



Eulerscher Polyedersatz

Eulerscher Polyedersatz

Sei $\mathbf{G}(V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph, und sei eine Einbettung von \mathbf{G} in die Ebene mit genau F Flächen gegeben. Dann gilt:

$$|V| - |E| + F = 2. \quad (1)$$

Eulerscher Polyedersatz: Beweis

Beweis: Wir zeigen die Behauptung mit **Induktion nach $n := |E|$** . Ein **zusammenhängender** Graph mit $n = 0$ Kanten hat 1 Knoten und 1 Fläche, die Aussage ist also für $n = 0$ richtig.

Eulerscher Polyedersatz: Beweis

Beweis: Wir zeigen die Behauptung mit **Induktion nach $n := |E|$** . Ein **zusammenhängender** Graph mit $n = 0$ Kanten hat 1 Knoten und 1 Fläche, die Aussage ist also für $n = 0$ richtig.

Beim Induktionsschritt $(n - 1) \rightarrow n$ unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gibt eine Kante e , sodaß der Graph $\mathbf{G} - \mathbf{e}$ noch immer zusammenhängend ist. Dann hat $\mathbf{G} - \mathbf{e}$ noch immer $|V|$ Knoten, aber um eine Kante weniger (also $n - 1$ Kanten) und um eine Fläche weniger (weil die beiden Flächen “links und rechts” von e zu einer Fläche verschmolzen sind) als \mathbf{G} .

Fall 2: Wenn es keine solche Kante gibt, ist \mathbf{G} ein Baum, hat also $|E| + 1$ Knoten und eine Fläche. ■

K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar

Korollar: K_5 und $K_{3,3}$

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

K_5 ist nicht planar

Beweis: K_5 hat 5 Knoten und 10 Kanten, eine Einbettung in die Ebene müßte nach (1) also 7 Flächen haben.

Jede Fläche wird aber von mindestens 3 Kanten begrenzt (denn wenn eine Fläche nur von einer bzw. nur von zwei Kanten begrenzt würde, hätten wir ja eine Schlinge bzw. eine mehrfache Kante), während jede Kante höchstens 2 Flächen begrenzt. Doppelte Abzählung³ liefert für die Anzahl F der Flächen daher

$$3F \leq 2|E| \implies F \leq \frac{10 \times 2}{3} = 6\frac{2}{3},$$

ein Widerspruch.

³ $\sum_F |\text{Kanten, die } F \text{ begrenzen}| = \sum_E |\text{Flächen, die } E \text{ begrenzt}|.$

$K_{3,3}$ ist nicht planar

$K_{3,3}$ hat 6 Knoten und 9 Kanten, also müßte eine Einbettung in die Ebene nach (1) 5 Flächen haben.

Hier wird aber jede Fläche von mindestens 4 Kanten begrenzt, denn in einem **bipartiten** Graphen gibt es keine geschlossene Wanderung ungerader Länge. Mit doppelter Abzählung wie zuvor erhalten wir also für die Anzahl F der Flächen

$$4F \leq 2|E| \implies F \leq \frac{9 \times 2}{4} = 4\frac{1}{2},$$

ein Widerspruch. ■

Überblick: Vorlesung

Einführung in die Grundbegriffe der Diskreten Mathematik

- 1 Einfache und abzählende Kombinatorik:
Stichproben, Permutationen, Partitionen
- 2 Erzeugende Funktionen, Lösen von Rekursionen
- 3 Das Prinzip der Inklusion und Exklusion, **Suchen und Sortieren**
- 4 Graphen und Netzwerke