Gruppentheorie - Blatt 1

12.30-13.15, Seminarraum 9 Oskar-Morgenstern-Platz 1 2.Stock

http://www.mat.univie.ac.at/~gagt/GT2015/gruppentheorie2015.html

Martin Finn-Sell
martin.finn-sell@univie.ac.at

1. Welcher der folgenden Verknüpfungen gibt Wirkungen von Gruppen G auf Mengen X? Begründe die Antworten.

    a) $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$. Sei $g.x$ definiert als gx, das Produkt von reellen Zahlen, für $g \in G$ und $x \in X$.

    b) $G = GL_2(\mathbb{R})$, $X = M_2(\mathbb{R})$. Sei $g.x$ definiert als $(gx + xg)$, wo $g \in G$, $x \in X$ und gx, xg Matrixprodukt ist.

    c) $G = GL_2(\mathbb{R})$, $X = M_2(\mathbb{R})$. Sei $g.x$ definiert als gx, wo $g \in G$, $x \in X$ und gx Matrixprodukt ist.

    d) $G = PSL_2(\mathbb{Z})$, $X = \mathbb{C}$. Sei $g.z = \frac{az+b}{cz+d}$, für $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $z \in X$.

2. Sei G die Untergruppe aller Bijektion $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die durch die Translation $t(x) = x + 1$ und die Spiegelungen $s(x) = -x$ erzeugt wird. Beschreibe alle Elemente von G. die Gruppe G hat eine natürlich Aktion auf $\mathbb{R}$. Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren im folgenden Elemente: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

3. Sei eine endliche Gruppe G mit einer Wirkung auf einer Menge X. Zeige, das Lemma von Burnside:
$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

4. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times$ wirkt auf $\mathbb{R}^2$ durch die Vorschrift $t.(x, y) = (tx, t^{-1}y)$. Bestimme die Bahnen, Stabilisatoren und Fixpunkte dieser Wirkung.