Gruppentheorie - Blatt 6

12.30-13.15, Seminarraum 9 Oskar-Morgenstern-Platz 1 2.Stock

`http://www.mat.univie.ac.at/~gagt/GT2015/gruppentheorie2015.html`

Martin Finn-Sell
martin.finn-sell@univie.ac.at

Satz. *(Hall) Sei G eine auflösbare Gruppe mit* $|G| = ab$*, wo* $\mathrm{ggt}(a,b) = 1$*. Dann besitzt* G *eine Untergruppe der Ordnung* a *und je zwei solche Untergruppen sind konjugiert in* G*.*

1. (Frattini Argument) Sei F eine endliche Gruppe, H eine normale Untergruppe von F und P eine Sylow-p-Untergruppe von H. Zeige, dass $F = N_F(P)H$.

2. Sei H eine minimale normale Untergruppe von G. Zeige, dass:

   a) $H^{(1)} = \{1\}$ oder $H^{(1)} = H$;
   b) $H^{(1)} = \{1\}$, sodass H abelsch ist;
   c) $H = \mathbb{Z}_p^k$.

3. Sei H eine normale Untergruppe von G mit $|H| = a'b'$, wo $a' \mid a$, $b' \mid b$ und $b' < b$. Sei G/H besitzt eine Untergruppe der Ordnung a/a'. Zeige, dass es eine Untergruppe von G der Ordnung a gibt.

4. $H \triangleleft G$ mit $b \nmid |H|$. Dann besitzt G eine Untergruppe der Ordnung a.

5. Sei $|G| = ap^m$, mit $p \nmid a$. Sei $H \triangleleft G$ eine p-Sylow-Untergruppe, die einzelne minimale normale Untergruppe ist.

   a) Sei K/H eine minimale normale Untergruppe von G/H. Zeige, dass $|K| = p^m q^n$, für ein Primzahl $q \neq p$;
   b) Sei Q eine q-Sylow-Untergruppe von K. Zeige, dass $K = HQ$.
   c) Zeige, dass $G = KN_GQ$;
   d) Zeige, dass $|N_G(Q)| = a|H \cap N_K(Q)|$;
   e) Zeige, dass $H \cap N_K(Q) < Z(K)$;
   f) Zeige, dass $Z(K) = \{1\}$;
   g) Zeige, dass $|N_G(Q)| = a$.

6. Zeige, dass G besitzt eine Untergruppe der Ordnung a.