Geometric and Asymptotic Group Theory

Damian Osajda
damian.osajda@univie.ac.at
http://www.mat.univie.ac.at/∼dosaj/GGTWien/Course.html
Dienstag, 11:00–12:00, Raum 2A310 UZA2

Blatt 10
Group actions

(1) Show that every group acts by isometries on its Cayley graph.

Zeige, dass jede Gruppe durch Isometrien auf seinem Cayleygraph wirkt.

(2) Let a finite group G act by isometries on the Euklidean line $\mathbb{E}^1$. Show that G fixes a point in $\mathbb{E}^1$. What about finite groups acting on a tree or on $\mathbb{E}^2$?

Gegeben sei eine endliche Gruppe G, die durch Isometrien auf einer Euklidischen Geraden $\mathbb{E}^1$ wirkt. Zeige, dass G einen Punkt fixiert. Wie ist das für endliche Gruppen, die auf einem Baum oder auf $\mathbb{E}^2$ wirken?

(3) Prove the following version (for $G = \mathbb{Z}$) of Proposition III from the lecture. Show that there exist an isometric affine action of $\mathbb{Z}$ on a Hilbert space $\mathcal{H}$ with no fixed points, and a $\mathbb{Z}$-invariant harmonic map $f\colon \mathcal{G}(G,S) \to \mathcal{H}$.

(An *affine action* of G on $\mathcal{H}$ is a homomorphism $\varphi\colon G \to \mathrm{Aff}(\mathcal{H})$, i.e. $\varphi(g)(v) = \pi(g)v + b(g)$, where $\pi(g)$ is a linear map.)

Beweise die folgende Version (für $G = \mathbb{Z}$) von Proposition III aus dem Vorlesung.
Zeige, dass es eine isometrische affine Wirkung von $\mathbb{Z}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ohne Fixpunkte gibt, und dass es eine $\mathbb{Z}$-invariante harmonische Abbildung $f\colon \mathcal{G}(G,S) \to \mathcal{H}$ gibt.

(Eine *affine Wirkung* von G auf $\mathcal{H}$ ist ein Homomorphismus $\varphi\colon G \to \mathrm{Aff}(\mathcal{H})$, d.h. $\varphi(g)(v) = \pi(g)v + b(g)$, wobei $\pi(g)$ eine lineare Abbildung ist.)