

Geometric and Asymptotic Group Theory

Damian Osajda

damian.osajda@univie.ac.at

<http://www.mat.univie.ac.at/~dosaj/GGTWien/Course.html>

Dienstag, 11:00–12:00, Raum 2A310 UZA2

Blatt 4

Quasi-isometries

- (1) Find a quasi-isometric embedding of a half-line $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ into the Euclidean plane \mathbb{E}^2 , which is not at a finite distance from a geodesic ray in \mathbb{E}^2 . Can one find a similar embedding into a tree of valence at least 3, with the metric in which every edge has length 1?

Finde eine quasiisometrische Einbettung einer Halbgeraden $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ in die euklidische Ebene \mathbb{E}^2 , die zu keinem geodätischen Strahl in \mathbb{E}^2 einen endlichen Abstand hat. Kann man eine ähnliche Einbettung in einen d -regulären Baum, $d \geq 3$, finden, wobei die Länge jeder Kante gleich 1 ist?

- (2) A *coarse embedding* (or a *uniform embedding*) is a map $f: X \rightarrow X'$ between metric spaces (X, d) and (X', d') with the following property. There exist proper functions $g, h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that $g(d(y, z)) \leq d'(f(y), f(z)) \leq h(d(y, z))$, for all $y, z \in X$. A coarse embedding is a *coarse equivalence* (or a *uniform equivalence*) if it is coarsely onto.

Find an example of a coarse embedding that is not a quasi-isometric embedding. Find an example of a coarse equivalence that is not a quasi-isometry.

Ein *grobe Einbettung* (oder *uniforme Einbettung*) ist eine Abbildung $f: X \rightarrow X'$ zwischen metrische Räume (X, d) und (X', d') mit der folgenden Eigenschaft. Es gibt eigentliche Abbildungen $g, h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, so dass $g(d(y, z)) \leq d'(f(y), f(z)) \leq h(d(y, z))$ für alle $y, z \in X$. Eine grobe Einbettung ist eine *grobe Äquivalenz* (oder eine *uniforme Äquivalenz*), wenn sie quasisurjektiv ist.

Finde ein Beispiel einer groben Einbettung, die keine quasiisometrische Einbettung ist. Finde ein Beispiel einer groben Äquivalenz, die keine Quasiisometrie ist.

- (3) Show that the following spaces are not quasi-isometric one to another (with their natural metrics). The line \mathbb{R} , the Euclidean plane \mathbb{E}^2 and the regular tree of valence 4.

Hint: Cf. Exercise 6 from List 2.

Zeige, dass die folgenden Räume nicht quasiisometrisch sind (bzgl. der natürlichen Metriken). Die Gerade \mathbb{R} , die euklidische Ebene \mathbb{E}^2 und ein regulär Baum mit Eckengrad 4.

Hinweis: Siehe Aufgabe 6 auf Blatt 2.

- (4) Show that the regular tree of valence m is quasi-isometric to the regular tree of valence n (with their natural metrics), for every $n, m > 2$.

Hint: Cf. Exercise 7 from List 2.

Zeige, dass der reguläre Baum mit Eckengrad m quasiisometrisch zum regulären Baum mit Eckengrad n ist, für alle $m, n > 2$.

Hinweis: Siehe Aufgabe 7 auf Blatt 2.

- (5) Show that two length spaces are quasi-isometric iff they are coarsely equivalent.

Zeige, dass zwei intrinsische metrische Räume genau dann quasiisometrisch sind, wenn sie grob äquivalent sind.