

# Geometric and Asymptotic Group Theory

Damian Osajda

damian.osajda@univie.ac.at

<http://www.mat.univie.ac.at/~dosaj/GGTWien/Course.html>

Dienstag, 11:00–12:00, Raum 2A310 UZA2

Blatt 4

## Quasi-isometries

- (1) Find a quasi-isometric embedding of a half-line  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$  into the Euclidean plane  $\mathbb{E}^2$ , which is not at a finite distance from a geodesic ray in  $\mathbb{E}^2$ . Can one find a similar embedding into a tree of valence at least 3, with the metric in which every edge has length 1?

---

Finde eine quasiisometrische Einbettung einer Halbgeraden  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$  in die euklidische Ebene  $\mathbb{E}^2$ , die zu keinem geodätischen Strahl in  $\mathbb{E}^2$  einen endlichen Abstand hat. Kann man eine ähnliche Einbettung in einen  $d$ -regulären Baum,  $d \geq 3$ , finden, wobei die Länge jeder Kante gleich 1 ist?

- (2) A *coarse embedding* (or a *uniform embedding*) is a map  $f: X \rightarrow X'$  between metric spaces  $(X, d)$  and  $(X', d')$  with the following property. There exist proper functions  $g, h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  such that  $g(d(y, z)) \leq d'(f(y), f(z)) \leq h(d(y, z))$ , for all  $y, z \in X$ . A coarse embedding is a *coarse equivalence* (or a *uniform equivalence*) if it is coarsely onto.

Find an example of a coarse embedding that is not a quasi-isometric embedding. Find an example of a coarse equivalence that is not a quasi-isometry.

---

Ein *grobe Einbettung* (oder *uniforme Einbettung*) ist eine Abbildung  $f: X \rightarrow X'$  zwischen metrische Räume  $(X, d)$  und  $(X', d')$  mit der folgenden Eigenschaft. Es gibt eigentliche Abbildungen  $g, h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , so dass  $g(d(y, z)) \leq d'(f(y), f(z)) \leq h(d(y, z))$  für alle  $y, z \in X$ . Eine grobe Einbettung ist eine *grobe Äquivalenz* (oder eine *uniforme Äquivalenz*), wenn sie quasisurjektiv ist.

Finde ein Beispiel einer groben Einbettung, die keine quasiisometrische Einbettung ist. Finde ein Beispiel einer groben Äquivalenz, die keine Quasiisometrie ist.

- (3) Show that the following spaces are not quasi-isometric one to another (with their natural metrics). The line  $\mathbb{R}$ , the Euclidean plane  $\mathbb{E}^2$  and the regular tree of valence 4.

Hint: Cf. Exercise 6 from List 2.

---

Zeige, dass die folgenden Räume nicht quasiisometrisch sind (bzgl. der natürlichen Metriken). Die Gerade  $\mathbb{R}$ , die euklidische Ebene  $\mathbb{E}^2$  und ein regulär Baum mit Eckengrad 4.

Hinweis: Siehe Aufgabe 6 auf Blatt 2.

- (4) Show that the regular tree of valence  $m$  is quasi-isometric to the regular tree of valence  $n$  (with their natural metrics), for every  $n, m > 2$ .

Hint: Cf. Exercise 7 from List 2.

---

Zeige, dass der reguläre Baum mit Eckengrad  $m$  quasiisometrisch zum regulären Baum mit Eckengrad  $n$  ist, für alle  $m, n > 2$ .

Hinweis: Siehe Aufgabe 7 auf Blatt 2.

- (5) Show that two length spaces are quasi-isometric iff they are coarsely equivalent.

---

Zeige, dass zwei intrinsische metrische Räume genau dann quasiisometrisch sind, wenn sie grob äquivalent sind.