Geometric and Asymptotic Group Theory

Damian Osajda
damian.osajda@univie.ac.at
http://www.mat.univie.ac.at/∼dosaj/GGTWien/Course.html
Dienstag, 11:00–12:00, Raum 2A310 UZA2

Blatt 8
Semidirect product

Let a group H act by automorphisms on a group K. The *semidirect product of K and H*, denoted $K \rtimes H$, is the set of elements of $K \times H$, with the following group operation:

$$(k, h) \cdot (k', h') = (kh(k'), hh').$$

Sei H eine Gruppe, die durch Automorphismen auf einer Gruppe K wirkt. Das *semidirekte Produkt von K und H*, bezeichnet mit $K \rtimes H$, ist eine Menge von Elementen von $K \times H$ mit der Verknüpfung:

$$(k, h) \cdot (k', h') = (kh(k'), hh').$$

(1) Show that a group G is a semidirect product of K and H iff there exists a short exact sequence of groups $1 \to K \to G \xrightarrow{f} H \to 1$, which splits—i.e. such that there is a homomorphism $H \xrightarrow{g} G$, with $f \circ g = \mathrm{id}_H$.

Zeige, dass eine Gruppe G ein semidirektes Produkt von K und H ist genau dann, wenn es eine kurze exakte Sequenz von Gruppen $1 \to K \to G \xrightarrow{f} H \to 1$ gibt, sowie einen Homomorphismus $H \xrightarrow{g} G$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_H$.

(2) Let $K \lhd G$ and $H \leq G$. Show that $G = K \rtimes H$ if $G = KH$ and $G \cap H = \{1\}$.

Sei $K \lhd G$ und $H \leq G$. Zeige, dass $G = K \rtimes H$, wenn $G = KH$ und $G \cap H = \{1\}$ gilt.

(3) Show that the symmetric group S_n $(n \geq 2)$ is a semidirect product of two of its non-trivial subgroups.

Zeige, dass die symmetrische Gruppe S_n $(n \geq 2)$ ein semidirektes Produkt von zwei nicht trivialen Untergruppen ist.