Geometric and Asymptotic Group Theory

Damian Osajda
damian.osajda@univie.ac.at
http://www.mat.univie.ac.at/∼dosaj/GGTWien/Course.html
Dienstag, 11:00–12:00, Raum 2A310 UZA2

Blatt 9
Around Tits alternative

(1) Prove the following Ping-pong Lemma.

Let G be a group acting on a set X. Suppose there exist disjoint nonempty subsets $A^+, A^-, B^+, B^- \subset X$, and two elements a, b of G with the following properties:

a) $A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \subsetneq X$;
b) $a(X - A^-) \subseteq A^+$, $a^{-1}(X - A^+) \subseteq A^-$;
b) $b(X - B^-) \subseteq B^+$, $b^{-1}(X - B^+) \subseteq B^-$.

Then $\langle a, b\rangle \leq G$ is a free subgroup generated by a and b.

Beweise das folgende Ping-pong Lemma.

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Angenommen es gibt nicht leere disjunkte Teilmengen $A^+, A^-, B^+, B^- \subset X$, und zwei Gruppenelemente a, b von G mit den folgenden Eigenschaften:

a) $A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \subsetneq X$;
b) $a(X - A^-) \subseteq A^+$, $a^{-1}(X - A^+) \subseteq A^-$;
b) $b(X - B^-) \subseteq B^+$, $b^{-1}(X - B^+) \subseteq B^-$.

Dann ist die von a und b erzeugte Untergruppe $\langle a, b\rangle$ von G frei.

(2) Show that every Möbius transformation is a composition of translations ($z \mapsto z + a$), dilations and rotations ($z \mapsto az$), and inversions ($z \mapsto \frac{1}{z}$).

Zeige, dass jede Möbiustransformation eine Komposition von Translationen ($z \mapsto z + a$), Drehstreckungen ($z \mapsto az$) und Inversionen ($z \mapsto \frac{1}{z}$) ist.

(3) Show that for every two triples of distinct points $(z_1, z_2, z_3) \in \hat{\mathbb{C}}^3$, and $(w_1, w_2, w_3) \in \hat{\mathbb{C}}^3$, there exists a Möbius transformation f, such that $f(z_i) = w_i$.

Zeige, dass für je zwei Tripel von verschiedenen Punkten $(z_1, z_2, z_3) \in \hat{\mathbb{C}}^3$, und $(w_1, w_2, w_3) \in \hat{\mathbb{C}}^3$, eine Möbiustransformation f mit $f(z_i) = w_i$ existiert.

(4) Show that Möbius transformations preserve orientation.

Zeige, dass Möbiustransformationen orientierungserhaltend sind.

(5) Show that every isometry of a tree is either elliptic or hyperbolic.

Zeige, dass jede Isometrie eines Baumes elliptisch oder hyperbolisch ist.

(6) Prove the remaining case of the proof of the "Ping-pong lemma for $PSL_2(\mathbb{R})$", i.e. when there exist two parabolic isometries with distinct fix-points.

Beweise den verbleibenden Fall des Beweises vom "Ping-pong Lemma für $PSL_2(\mathbb{R})$", d.h. wann gibt es zwei parabolische Isometrien mit verschiedenen Fixpunkten.

(7) Show that if $g, f \in PSL_2(\mathbb{R})$ are both hyperbolic with only one common fix-point α, then $[g, f]$ is parabolic with fix-point α.

Zeige: sind $g, f \in PSL_2(\mathbb{R})$ beide hyperbolisch mit nur einem eigenem Fixpunkt α, dann ist $[g, f]$ parabolisch mit Fixpunkt α.

(8) Show that if a group $G \leq PSL_2(\mathbb{R})$ fixes a two-point set then it has an index-two subgroup fixing a point.

Zeige: fixiert eine Gruppe $G \leq PSL_2(\mathbb{R})$ eine zweipunktige Menge, dann gibt es eine Untergruppe von G vom Index 2, die einen Punkt fixiert.

(9) Show that $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ is solvable.

Zeige, dass $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ auflösbar ist.